

3. *Theorie der Pigmente von größter Leuchtkraft; von Erwin Schrödinger.*

§ 1. Problemstellung.

Die Farbe des Lichtes, das von einem Pigmentaufstrich zurückgeworfen wird, erreicht bekanntlich niemals jenen Grad von *Sättigung*, den reine Spektrallichter besitzen, sondern erscheint neben dem reinen Licht gleichen Farbtons stets mehr oder weniger weißlich. Sie läßt sich aus ihm und einer gewissen Menge weißen Lichtes ermischen. Die Unmöglichkeit, Farben von spektraler Sättigung durch Pigmente zu verwirklichen, ist nicht eine technische, sondern bis zu einem gewissen Grade eine prinzipielle. Sie ist dadurch bedingt, daß die Mischung zweier Spektrallichter, die im Spektrum nicht zu weit voneinander entfernt liegen, einem bestimmten zwischen ihnen gelegenen Licht zwar im Farbton gleicht, aber im allgemeinen weißlicher ist als es. Um die volle Sättigung eines Spektrallichtes zu erreichen, müßte also das Pigment wirklich nur einen infinitesimalen Wellenlängenbereich remittieren, alle anderen vollständig verschlucken. Dann würde es uns aber natürlich — wie schon Helmholtz bemerkt hat — außerordentlich dunkel, im Grenzfall schwarz erscheinen.

Pigmente von spektraler Sättigung lassen sich im allgemeinen (auf die notwendige Einschränkung kommen wir sogleich zurück) nur in verschwindender Lichtstärke herstellen. —

Anschaulicher wird der Grund für die Weißlichkeit aller Pigmentfarben durch Betrachtung der Newton-Königschen Farbentafel. Er liegt in der Konvexität der Spektralkurve RGV (vgl. Fig. 1). Die Farbe des Pigments wird dargestellt durch den Schwerpunkt einer gewissen linearen Massenverteilung entlang der Spektralkurve, welche Massenverteilung durch die Remissionsfunktion (Remissionskoeffizient als Funktion der Wellenlänge) und durch die Beleuchtung bestimmt ist. Dieser Schwerpunkt P wird im allgemeinen ins Innere des

reellen Farbensegments (begrenzt von der Spektralkurve und der „Purpurgeraden“ RV) fallen, demnach aus einem gewissen Spektrallicht S und weißem Licht W oder eventuell aus W und einem bestimmten Purpurgemisch) ermischbar sein.

Eine Ausnahme erleidet dieser Sachverhalt nur dann, wenn die Remission ganz auf das kurzwellige oder ganz auf das langwellige Ende des Spektrums beschränkt ist, derart, daß die Massenverteilung entweder nur von V bis J (λ ca. $475 \mu\mu$) oder nur von R bis O (λ ca. $630 \mu\mu$) reicht. Diese Endstücke der Spektralkurve, deren angegebene Grenzen übrigens naturgemäß unscharf sind, sind

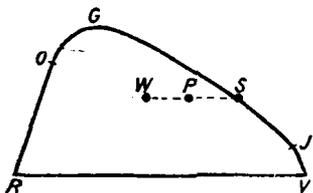


Fig. 1.

nach König streng geradlinig. Die Schwerpunkte solcher Pigmente würden also auf die Spektralkurve fallen, sie würden den betreffenden Spektrallichtern an Sättigung nicht nachstehen.

Rot-orange und indigo-violette Pigmente lassen sich in endlicher (wenn auch sicher nicht sehr erheblicher) Lichtstärke und vollkommen spektraler Sättigung herstellen.

Zu erinnern ist noch, daß die Punkte R und V je einem endlichen Wellenlängenbereich, nämlich den beiden *monochromatischen* Endstücken des Spektrums (bis $\lambda = 655$ bzw. $\lambda = 430$) entsprechen, daher je eine *endliche* Punktmasse aufnehmen (nicht bloß eine Liniendichte), wenn in dem betreffenden Endstück Remission stattfindet.

Man kann nun für irgendeinen Punkt der Rot-orange oder der Indigo-violett-Strecke, und ganz ebenso für einen Punkt der Purpurgeraden die Frage aufwerfen, in welcher maximalen Lichtstärke er sich durch ein Pigment verwirklichen läßt. Man kann weiterhin — auf die äußerste, mit reinen Lichtern erreichbare Sättigung zugunsten der Lichtstärke verzichtend — dieselbe Frage stellen für Punkte, welche der Berandung des Segments mindestens *nahe* liegen. Und so wird man dazu geführt, schließlich für einen beliebigen Punkt der reellen Farbfläche zu fragen:

In welcher maximalen Lichtstärke läßt sich dieser Punkt durch ein Pigment verwirklichen und wie müssen die Pigmente, d. h. ihre Remissionsfunktionen beschaffen sein, welche das leisten?

Die Beantwortung dieser Frage ist Gegenstand der vorliegenden Notiz.

Denkt man sich in der Farbebene irgend drei nicht auf einer Geraden liegende Bezugspunkte gewählt, mögen es nun die Königschen Grundempfindungspunkte sein oder Punkte, die drei reellen Eichlichtern entsprechen, oder sonst irgend drei Punkte im Innern oder außerhalb des reellen Farbensgments, und denkt man sich die Einheitsquanta für diese Punkte irgendwie festgesetzt, so pflegt man bekanntlich jede Farbe durch ein Zahlentripel zu definieren, nämlich durch die Quanta der drei gewählten Grundfarben, aus denen sie im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne¹⁾, zu mischen ist. Als Verhältniszahlen betrachtet, bilden die drei Eichwerte die projektiven baryzentrischen Dreieckskoordinaten²⁾ des die Farbe darstellenden Punktes bezogen auf das Grunddreieck als Koordinatendreieck. Die Summe der Eichwerte ist die Masse des darstellenden Punktes und wird als Quantum oder Quantität der Farbe bezeichnet. Sie ist zwischen Farben von verschiedener Lage des darstellenden Punktes (Farben verschiedener „Reizart“, wie von Kries treffend sagt) keineswegs ein Maß ihres Helligkeitsverhältnisses, außer — vielleicht — bei ganz bestimmter Wahl der Einheitsquanta der gewählten Grundfarben; eine noch unentschiedene Frage, die hier aber gar nicht angeschnitten zu werden braucht.

Für Farben gleicher Reizart (die in denselben Punkt fallen, durch bloße Änderung der objektiven Intensität gleich gemacht werden können) ist die Quantität der objektiven Intensität proportional, demnach sicherlich — ceteris paribus — ein monotones Maß der Helligkeit. Ergänzen wir also unsere räumlich zweidimensionale Darstellung des Farbengebietes zu einer dreidimensionalen dadurch, daß wir in jedem reellen

1) Im uneigentlichen Sinne mischbar nenne ich eine Farbe, die außerhalb des gewählten Grunddreiecks liegt, für die daher ein oder zwei Eichwerte negativ ausfallen. Die konkrete Bedeutung hiervon ist bekannt.

2) Als „baryzentrisch“ bezeichne ich ein Dreieckskoordinatensystem, dessen „Einheitspunkt“ in den Schwerpunkt des Koordinatendreiecks fällt. Diese Tatsache ist nicht zu verwechseln mit der willkürlichen, aber bequemem und daher meistens durchgeführten Verlegung des *Weißpunktes* in den Schwerpunkt.

Farbpunkt sein Quantum senkrecht zur Farbentafel als Ordinate errichten, so werden die Pigmentfarben größter Quantität oder größter Lichtstärke oder von — *ceteris paribus* — größter Helligkeit, nach denen wir gefragt haben, eine *Fläche* über dem reellen Farbensegment bilden, die in der Mitte irgendwie verläuft und entlang dem *gekrümmten* Teil der Berandung zum Ordinatenwert Null, entlang den drei *geradlinigen* Randstücken zu kleinen, in stetigem Kurvenzug aneinanderschließenden Ordinatenwerten herabsinkt. Diese Fläche, zusammen mit den drei von den Randordinaten gebildeten vertikalen Wänden und der gewöhnlichen, Fig. 1 dargestellten, reellen Farbenfläche als Basis *begrenzt das Gebiet der durch Pigmente darstellbaren Farben* in unserer dreidimensionalen Darstellung, die wir übrigens nur für den Augenblick zur Veranschaulichung gewählt haben und auf die weiter kein Gewicht gelegt wird (sie ist unpraktisch, weil dem Fehlen objektiven Lichtes nicht ein Punkt, sondern die ganze Basisfläche entspricht).

Alles bisher Gesagte gilt für jede beliebige *Beleuchtung* der Pigmente, nur muß dieselbe von vornherein ihrer genauen *physikalischen* Zusammensetzung und Intensität nach bestimmt gewählt und bei allen Überlegungen festgehalten werden. Mit der Beleuchtung ändert sich natürlich die Lage der Fläche, die in unserer Darstellung das Gebiet der Pigmente nach oben hin begrenzt. Nicht nur wachsen alle ihre Ordinaten proportional der *Intensität* der Beleuchtung, sondern mit der *Zusammensetzung* der letzteren variiert auch die *Gestalt* der Fläche. Z. B. werden für bläuliche Beleuchtung blaue Töne relativ leichter in beträchtlicher Sättigung und Lichtstärke hergestellt werden können als für weiße oder rötliche Beleuchtung, welche letztere dagegen die Herstellung gesättigter, lichtstarker roter Pigmentfarben erleichtern wird usw. Das Resultat, zu dem wir gelangen werden hinsichtlich der Pigmente von — bei gegebener Reizart — größter Leuchtkraft, der *optimalen* Pigmente, wie ich sie kurz nennen will, das Resultat, sage ich, wird gleichwohl in gewissem Sinn von der Beleuchtung ganz unabhängig sein. Es wird sich nämlich herausstellen, daß es *dieselben* Pigmente sind, die für eine ganz beliebige Beleuchtung stets optimalen Charakter tragen; oder mindestens, daß sich eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit von Pigmenten, d. h.

von Remissionsfunktionen, angeben läßt, welche unabhängig vom Beleuchtungslicht, ja selbst unabhängig von der genauen Gestalt der Spektralkurve der Fig. 1 definiert sind, und bei jeder beliebigen Beleuchtung gerade die Mannigfaltigkeit der für diese Beleuchtung optimalen Pigmentfarben darstellen.

§ 2. **Aufsuchung einer, die Grenzfläche realisierenden Pigmentmannigfaltigkeit.**

Um die Vorstellungen zu fixieren, wählen wir folgende spezielle Koordinatenstellung für Pigmente. Als Bezugspunkte wählen wir die Königschen Grundempfindungspunkte. Das Beleuchtungslicht sei beliebig bestimmt, nur soll es, vorderhand, alle sichtbaren Wellenlängen überhaupt enthalten; wir mögen uns immerhin Sonnenlicht darunter denken. In den Schwerpunkt des Dreiecks verlegen wir die Farbe der ideal weißen und aller neutral grauen Pigmente in diesem Licht, d. h. aller Pigmente mit *konstanter* Remissionsfunktion; und zwar soll das ideal weiße Pigment mit der Remission 1 die Koordinaten 1, 1, 1 erhalten. Sind dann

$$x_1(\lambda) \quad x_2(\lambda) \quad x_3(\lambda)$$

die Königschen Grundempfindungskurven für das Interferenzspektrum des Beleuchtungslichtes und zwar in solchem Maßstab, daß

$$(1) \quad \int x_1(\lambda) d\lambda = \int x_2(\lambda) d\lambda = \int x_3(\lambda) d\lambda = 1,$$

so sind die Koordinaten eines Pigments mit der Remissionsfunktion $r(\lambda)$

$$(2) \quad p_1 = \int x_1(\lambda) r(\lambda) d\lambda, \quad p_2 = \int x_2(\lambda) r(\lambda) d\lambda, \quad p_3 = \int x_3(\lambda) r(\lambda) d\lambda,$$

seine Quantität ist

$$(3) \quad q = p_1 + p_2 + p_3 = \int (x_1 + x_2 + x_3) r d\lambda.$$

Für r lassen wir natürlich nur Werte zwischen 0 und 1 einschließlich der Grenzen zu. Den gleichen Spielraum haben dann die p , während q zwischen 0 und 3 liegt. Von der *Intensität* des Beleuchtungslichtes ist die Koordinatendarstellung unabhängig, da zufolge der Festsetzung über die Koordinaten des weißen Pigments die „Einheitsquanta der Grundempfindungen“ automatisch mitvariieren.

Die möglichen Gestalten der Remissionsfunktion optimaler Pigmente schränken wir nun zunächst durch folgenden, für unsere kleine Untersuchung fundamentalen Satz ein:

Wenn ein Pigment in der Umgebung dreier Stellen des Spektrums, die im Farbdreieck nicht auf einer Geraden liegen, eine von 0 und von 1 verschiedene, also zwischen 0 und 1 liegende Remission hat, so läßt sich die Remission an diesen drei Stellen so abändern, daß ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht.

Denn aus jenen drei reinen Lichtern läßt sich dann ein positives Quantum der Farbe, die das Pigment besitzt, jedenfalls im uneigentlichen Sinn ermischen, d. h. eventuell mit 1 oder 2 negativen Mischungskoeffizienten. Liegt nun die Remission an den drei Stellen zwischen 0 und 1, so kann ich, sie um kleine Beträge abändern (vermehrten oder vermindern), derart, daß die hinzutretenden Farbquanta im richtigen Verhältnis stehen und ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht. — In Zeichen: seien

$$\lambda = a, \quad \lambda = b, \quad \lambda = c$$

die drei Stellen im Spektrum. Dann liegt in der Voraussetzung, daß

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x_1(a) & x_2(a) & x_3(a) \\ x_1(b) & x_2(b) & x_3(b) \\ x_1(c) & x_2(c) & x_3(c) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} x_1(a)\delta_a + x_1(b)\delta_b + x_1(c)\delta_c = p_1\delta \\ x_2(a)\delta_a + x_2(b)\delta_b + x_2(c)\delta_c = p_2\delta \\ x_3(a)\delta_a + x_3(b)\delta_b + x_3(c)\delta_c = p_3\delta \end{cases}$$

haben dann, für ein vorgegebenes kleines $\delta > 0$, Lösungen in δ_a , δ_b , δ_c . Ändert man nun auf den kleinen Strecken ($\varepsilon > 0$)

$$(6) \quad a \leq \lambda \leq a + \varepsilon, \quad b \leq \lambda \leq b + \varepsilon, \quad c \leq \lambda \leq c + \varepsilon,$$

die Remission $r(\lambda)$ ab auf beziehungsweise

$$(7) \quad r(a) + \delta_a, \quad r(b) + \delta_b, \quad r(c) + \delta_c$$

so ändern sich die Pigmentkoordinaten nach (2) um die mit ε multiplizierten linken Seiten von (5), die Reizart also, wegen

(5) nicht, das Quantum nach (3) um die positive Größe

$$\varepsilon \delta (p_1 + p_2 + p_3) = \varepsilon \delta q,$$

was zu beweisen war.

Es folgt, daß die Remission eines optimalen Pigments auf keinem *endlichen* Stück des gekrümmten Teils der Spektralkurve und ebensowenig auf *endlichen* Stücken *beider* geradlinigen Endteile von Null und von Eins verschieden sein kann, sondern sicherlich auf dem gekrümmten und einem der geradlinigen Stücke nur einen dieser beiden Grenzwerte besitzt.

Der Kürze wegen will ich ein Pigment *zweiwertig* nennen in einem Wellenlängengebiet, wo seine Remission durchwegs Null oder Eins ist, und als *zweiwertige* Pigmente schlechthin solche bezeichnen, deren Remission im ganzen Spektrum nur einen dieser beiden Werte annimmt.

Für eine der beiden geradlinigen („dichromatischen“) Spektralstrecken versagt der obige Beweis wegen des Verschwindens der Determinante (4). Ferner ist zu bedenken, daß die Endpunkte *R* und *V* der Spektralkurve je einem *endlichen* („monochromatischen“) Wellenlängenbereich entsprechen. Unser Beweis schließt also auch *den* Fall nicht aus, daß in *beiden* monochromatischen Bereichen gleichzeitig — dann aber auch sonst nirgends — Abweichungen von der *Zweiwertigkeit* auftreten. Solche Abweichungen erscheinen also noch möglich entweder

- a) in *einem* dichromatischen einschließlich des angrenzenden monochromatischen Bereiches oder
- b) in *beiden* monochromatischen Bereichen gleichzeitig.

Trotzdem dürfen wir unsere Betrachtungen *auf zweiwertige Pigmente beschränken*, wenn wir nur *darauf* Wert legen, jede optimale Pigmentfarbe wenigstens in *einem* ihrer Vertreter kennen zu lernen und uns nichts daran liegt, *physiologische Duplikate* auszuschneiden. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß die *Zweiwertigkeit* in den Fällen a) und b) durch sukzessive Abänderung der Remissionsfunktion *ohne Änderung im Aussehen des Pigments* herbeigeführt werden kann.

Liegen nämlich die 3 Punkte *a*, *b*, *c* in der Farbentafel auf einer Geraden, so verschwindet die Determinante (4) und die Gleichungen (5) haben nichtverschwindende Lösungen

in $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ für $\delta = 0$. Die entsprechende Abänderung (7) ändert das Aussehen des Pigments *nicht* und kann solange in demselben Sinne fortgesetzt (oder auch von Haus aus endlich und *so* groß gewählt) werden, bis eine der drei Zahlen $r(a)$, $r(b)$, $r(c)$ auf Null oder Eins gebracht ist. Das Verfahren läßt sich fortsetzen, solange $r(\lambda)$ noch an drei Stellen gegen die Zweiwertigkeit verstößt, d. h. das Pigment kann durch ein zweiwertiges ersetzt werden ohne Änderung seines Aussehens. Was zu beweisen war.

Wir beschränken unsere Betrachtung also jetzt auf zweiwertige Pigmente und haben unter ihnen die optimalen herauszusehen. Die Remission eines zweiwertigen Pigments ist eine unstetige Funktion von λ , sie springt an einer oder mehreren Stellen von Null auf Eins oder von Eins auf Null. Eine solche Stelle nenne ich eine *Sprungstelle* ($1 \rightarrow 0$) oder ($0 \rightarrow 1$), die Pfeile natürlich im Sinne wachsender Wellenlänge verstanden. Man überlegt nun leicht, daß die *Zahl der Sprungstellen überhaupt* für optimale Pigmente *nicht größer als zwei sein kann* — wobei allerdings wieder Duplikate ausgeschieden werden. Zunächst gilt folgender, dem ersten in vieler Beziehung analoge Satz:

Besitzt ein Pigment drei auf der Farbtafel nicht in einer Geraden liegende Sprungstellen, so läßt sich seine Remission durch Verschiebung der Sprungstellen so abändern, daß ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht. Es kann also nicht optimal sein.

Der Beweis verläuft völlig analog wie früher und braucht darum wohl nicht in extenso durchgeführt zu werden. Er beruht darauf, daß die Farbe des Pigments aus den drei Sprungfarben mindestens in uneigentlichem Sinne mischbar ist, so daß eine nach Sinn und Größe geeignete Verschiebung der Sprungstellen die gewünschte Verstärkung der Leuchtkraft ohne Änderung der Reizart herbeiführt.

Drei und mehr *kollineare* Sprungstellen erscheinen wieder möglich. Aber solange ihrer noch mindestens drei vorhanden sind, lassen sie sich ohne Änderung im Aussehen des Pigments verschieben, bis sie zusammenschließen, so daß schließlich höchstens noch zwei vorhanden sind. Besser noch als durch eine der früheren analoge Rechnung läßt sich dies auf folgende Art direkt einsehen, z. B. für das langwellige Stück *RO*.

Vorgelegt sei ein im übrigen Spektrum zweiwertiges Pigment, dessen Remission aber auf der Spektralstrecke RO (einschließlich der Grenzen) ganz beliebig beschaffen sein mag. (Vergleiche die etwas eigenartige, aber wohl leicht verständliche Fig. 2, in welcher der Remissionskoeffizient auf den Normalen der Spektralkurve nach außen aufgetragen ist.) Die Aufgabe ist, daß vorgelegte Pigment durch ein auch auf RO zweiwertiges mit möglichst wenig Sprungstellen auf dieser Strecke zu ersetzen, das ihm physiologisch gleich ist.

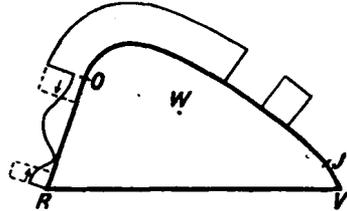


Fig. 2.

Damit letzteres der Fall sei, muß — nach dem Grassmannschen Satze, daß gleichaussehende Lichter gemischt gleichaussehende Lichter ergeben — die von der Remission auf RO allein erzeugte „Teilfarbe“ für das abgeänderte Pigment dieselbe sein, wie für das vorgegebene. Der Punkt, der dieser Teilfarbe entspricht, liegt jedenfalls irgendwo auf RO . Um zum Schluß möglichst wenig Sprungstellen zu haben, „erzeugen“ wir die Teilfarbe auf verschiedene Weise, je nachdem das vorgelegte Pigment auf dem bei O violettwärts anschließenden Stück vollständig remittiert oder vollständig absorbiert.

In beiden Fällen gehen wir aus von vollständiger Absorption auf RO . Dann schieben wir im *ersten* Fall (dem die Zeichnung entspricht) eine Sprungstelle ($0 \rightarrow 1$) vom roten Ende des Spektrums violettwärts und gleichzeitig die Sprungstelle ($1 \rightarrow 0$) von O rotwärts vor, in solchem relativen Tempo, daß die im Gebiet RO auf diese Weise entstehende Remission immer die *Reizart* der Teilfarbe trifft, was offenbar möglich ist und sich solange fortsetzen läßt, bis auch das *Quantum* der Teilfarbe erreicht ist. Die Fortsetzung des Prozesses könnte nur dadurch vereitelt werden, daß eine der Sprungstellen den Ort der Teilfarbe überschreitet. Das kann aber nicht eintreten, bevor das *Quantum* der Teilfarbe erreicht ist, denn dann würden „unverwendet“ zwischen den Sprungstellen nur Spektrallichter übrig bleiben, die entweder durchweg röter oder durchweg gelber wären als die Teilfarbe, aus denen sich also über-

haupt kein Quantum der Teilfarbe mehr ermischen läßt; letztere wäre also aus dem zur Verfügung stehenden Licht überhaupt nicht in hinreichender Quantität ermischbar, was den Annahmen widerspricht. —

Im zweiten Fall, wo von O violettwärts ein *Absorptionsgebiet* anschließt, erzeugen wir die Teilfarbe in wachsender Stärke durch ein einziges Remissionsgebiet, das den Punkt der Teilfarbe in seinem Innern enthält. Wir schieben, wieder von identisch verschwindendem r in RO ausgehend, eine Sprungstelle ($1 \rightarrow 0$) von der Teilfarbe rotwärts und gleichzeitig eine Sprungstelle ($0 \rightarrow 1$) von der Teilfarbe violettwärts vor, in solchem relativen Tempo, daß die Reizart der Teilfarbe getroffen wird. Aus ähnlichem Grunde wie früher muß auf diese Weise auch ihr Quantum erreicht werden, bevor oder schlimmstenfalls in eben dem Augenblick, wo die Fortsetzung des Prozesses dadurch vereitelt wird, daß die erste Sprungstelle das rote Ende des Spektrums oder die zweite den Punkt O erreicht. —

Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

Wird man auf dem geschilderten Wege nur zu *einer* Sprungstelle geführt, was ausnahmsweise vorkommen kann, so ist noch eine zweite irgendwie im Spektrum möglich; resultieren aber zwei, so müssen es die einzigen sein, wenn das Pigment ein optimales sein soll.

Nur das eine kann passieren, daß die zwei Sprungstellen, auf die man geführt wird, beide in der monochromatischen Endstrecke liegen. Sie fallen dann in denselben Punkt R der Farbentafel und es ist noch eine dritte Sprungstelle irgendwo im Spektrum möglich. Aber man erkennt sofort, daß das isolierte monochromatische Remissions- oder Absorptionsgebiet, um das es sich diesfalls handelt, ganz an das Ende des Spektrums geschoben werden kann, so daß nur mehr *eine* monochromatische Sprungstelle vorliegt. —

Überschauen wir das Gesagte, *so behalten wir also schließlich*, nach Ausscheidung vieler Duplikate, *für die optimalen Pigmente nur die zweidimensionale Mannigfaltigkeit der zweiwertigen Pigmente mit ein oder zwei Sprungstellen übrig*. Unter ihnen muß jede optimale Pigmentfarbe mindestens einen Vertreter haben. Wir haben nun nur noch einige kleinere Gruppen,

die sicher nicht optimal sind, auszuschneiden. Von dem Rest wird sich zeigen lassen, daß darunter keine zwei Pigmente gleicher Reizart mehr vorkommen. Damit wird bewiesen sein, daß diese Pigmente auch wirklich alle optimal sind, und daß sie genau die eingangs erwähnte Grenzmannigfaltigkeit und zwar in je *einem* Exemplar, ohne Duplikate, darstellen.

Zunächst ordnen wir die ein- und zweisprüngen zweiwertigen Pigmente in folgende Gruppen, die durch die beigefügte Fig. 3 wohl ohne weiteres verständlich sind. Die abgegrenzte Strecke ist das sichtbare Spektrum, als Ordinate ist die Remission aufgetragen.

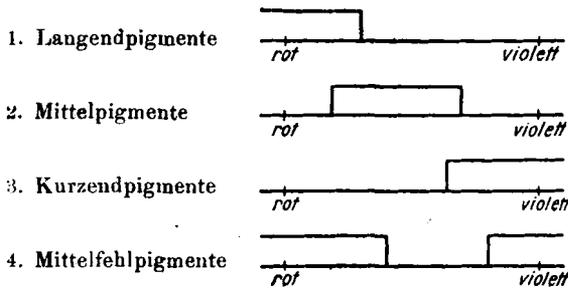


Fig. 3.

Als sicher nichtoptimal scheiden nun noch aus:

a) von den Langendpigmenten jene, deren Remission nicht bis an die kurzwellige Grenze des monochromatischen Rot reicht;

b) von den Mittelpigmenten jene, deren Sprungstellen beide entweder *zwischen* dem roten Spektralende und *O*, oder *beide zwischen J* und dem kurzwelligen Ende liegen. Für solche ist offenbar eine Vermehrung der Lichtstärke durch Ausdehnung des Remissionsgebietes möglich;

c) von den Kurzendpigmenten jene, deren Remission nicht bis an die langwellige Grenze des monochromatischen Violett reicht;

d) von den Mittelfehlpigmenten jene, welche *eine* Sprungstelle im *Inneren* des monochromatischen Rot, die *andere* im *Inneren* des monochromatischen Violett haben; denn das betreffende Purpur läßt sich durch Ausdehnung der beiden Remissionsgebiete verstärken, solange bis eine der beiden Sprung-

stellen die Grenze des monochromatischen Bereiches erreicht. (Die mit *zwei gleichfarbigen* monochromatischen Sprungstellen wurden schon früher als Duplikate ausgeschieden und durch Endpigmente ersetzt.)

Es ist nun noch der Nachweis zu führen, daß die nach den Ausscheidungen a) bis d) übrig behaltenen Pigmente alle untereinander von verschiedener Reizart sind.

Bei dieser Überlegung nehmen wir vorweg jene drei Untergruppen, deren darstellende Punkte auf eines der drei geradlinigen Berandungsstücke fallen. Sie treten nur je unter sich in Konkurrenz. Für sie ist die Richtigkeit der Behauptung ohne weiteres klar und wurde eben durch die Ausscheidungen a) bis d) herbeigeführt.

Für die übrigen muß der Nachweis — wenig elegant — partienweise geführt werden, d. h. es muß zunächst jede der vier Gruppen unter sich und dann mit jeder anderen verglichen und alle möglichen Lagenkombinationen der Sprungstellen in Betracht gezogen werden. Immerhin dürfen wir uns dabei gestatten, von den Endpigmenten abzusehen, da sie ja schließlich als Ausartungen sowohl der Mittelpigmente als der Mittelfehlpigmente mit berücksichtigt sind. Wir vergleichen also zunächst:

A. Mittelpigmente unter sich.

Bei ganz getrennter Lage der Remissionsgebiete ist Konizidenz der Schwerpunkte offenbar unmöglich. Ebenso bei umschließender Lage. Denn da (nach obiger Vorwegnahme der spektral gesättigten Pigmente) die Remissionsgebiete auch gekrümmte Teile der Spektralkurve enthalten müssen, fällt der Schwerpunkt der nichtgemeinsamen Außenteile des umfangreicheren Remissionsgebietes außerhalb des zu dem kleineren Remissionsgebiete gehörigen Segments und muß den Schwerpunkt des letzteren verlagern. Ebenso wenn die Remissionsgebiete nur übergreifen. Der gemeinsame Mittelteil, mit je einem nichtgemeinsamen Außenteil kombiniert, kann nicht beide male auf denselben Punkt führen.

B. Mittelfehlpigmente unter sich.

Hier ist stets von einem Pigment auszugehen, daß beide Absorptionsgebiete zusammen besitzt, und zu überdenken, daß

durch die entsprechenden Ergänzungen der Schwerpunkt dieses „Differenzpigments“ in verschiedener Weise verlagert wird.

C. Mittelpigmente mit Mittelfehlpigmenten.

α) Das Remissionsgebiet des ersten und das Absorptionsgebiet des zweiten Pigments liegen ganz getrennt. Das Mittelfehlpigment entsteht dann aus dem Mittelpigment durch Hinzufügung von Remissionen, die seinen Schwerpunkt unmöglich ungeändert lassen können.

β) Das Remissionsgebiet liegt innerhalb des Absorptionsgebietes. Dieser Fall bedarf keines Wortes.

γ) Das Absorptionsgebiet liegt innerhalb des Remissionsgebietes (s. Fig. 4). Das ganze Farbengebiet zerfällt dann in

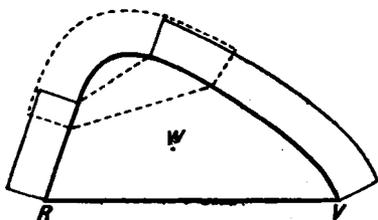


Fig. 4.

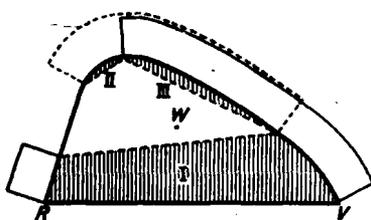


Fig. 5.

drei Streifen, deren Schwerpunkte (d. h. die der sie begrenzenden Teile der Spektralkurven, wenn die Pigmente von gleicher Reizart sein sollten, so auf einer Geraden liegen müßten, daß der Schwerpunkt des mittleren Streifens *nicht* in der Mitte liegt; was offenbar unmöglich ist.

δ) Absorptionsgebiet und Remissionsgebiet übergreifen (siehe Fig. 5). Es müßte im Innern der schraffierten Gebiete I, II, III je ein Punkt namhaft gemacht werden können, derart, daß die drei Punkte auf einer Geraden liegen, und zwar der Punkt III *nicht* in der Mitte zwischen I und II. Denn es müßte ja die Hinzufügung des Bogens II zu III den Schwerpunkt von III in denselben Punkt bringen wie die Hinzufügung des Bogenpaares I. Das ist offenbar unmöglich. — — —

Die zweidimensionale Pigmentmannigfaltigkeit, auf die wir geführt wurden, stellt also die optimalen Pigmentfarben vollständig und in je *einem* Exemplare dar. Und zwar, wie vorausgreifend bemerkt war, für ein ganz beliebiges Beleuchtungs-

licht, das nur alle Wellenlängen überhaupt enthält. Denn weder enthält die Definition unserer Pigmente irgendeine Beziehung auf das Beleuchtungslicht, noch haben wir im Verlauf unserer Untersuchung irgendeine andere Eigenschaft desselben benützt, als stillschweigend die, daß keine homogene Lichtart darin gänzlich fehlen sollte.

Daß unsere Pigmente ihren optimalen Charakter nicht verlieren, auch wenn das Beleuchtungslicht spektrale Lücken aufweist, erkennt man übrigens sofort durch Grenzübergang von einer nur wenig verschiedenen Beleuchtung, in der die Lücken mit kleinen Ordinatenwerten ausgefüllt sind, die man nach irgendeinem Gesetz gegen Null abnehmen läßt. Dabei ändert zwar ein Pigment im allgemeinen seinen Ort in der Farbentafel, aber nicht seine physische Beschaffenheit, bleibt also optimal auch im Grenzfall. Die eindeutige Zuordnung zwischen der Pigmentmannigfaltigkeit und den Optimalfarben bleibt aber natürlich nicht erhalten, weil große Gruppen von Pigmenten farbengleich werden, nämlich alle jene, deren Sprungstelle in eine spektrale Lücke des Beleuchtungslichtes fällt; wie ja überhaupt in diesem Fall der Verlauf der Remission innerhalb einer solchen Lücke völlig ohne Einfluß auf das Aussehen des Pigments ist.

Für eine kurze, von den eingeführten Kunstaussdrücken freie Zusammenfassung des nunmehr festgestellten Hauptergebnisses unserer Untersuchung verweise ich an das Ende dieser Note (Zusammenfassung S. 621 u. 622).

§ 3. Über die Beantwortung der Fragen nach der größten erreichbaren Lichtstärke, nach der höchsten erreichbaren Sättigung und nach den notwendigen Bedingungen für lichtstärkste Pigmente.

Es ist klar, wie man rechnerisch vorzugehen hätte, um nun den ersten Teil der auf S. 604 gestellten Frage in irgendeinem speziellen Fall zu beantworten: *in welcher maximalen Lichtstärke läßt sich ein bestimmter Punkt der Farbentafel durch ein Pigment verwirklichen?*

Diese Frage hat natürlich nur bei vorgegebenem Beleuchtungslicht einen Sinn. Man wird sich dann als Vorarbeit aus den auf das Interferenzspektrum dieses Lichtes umgerechneten

Grundempfindungskurven eine Tafel der drei Integrale berechnen

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} x_1(\lambda) d\lambda, \quad \int_{\lambda_0}^{\lambda} x_2(\lambda) d\lambda, \quad \int_{\lambda_0}^{\lambda} x_3(\lambda) d\lambda,$$

wo λ_0 die kurzwellige Grenze des sichtbaren Spektrums ist, während die obere Integralgrenze von λ_0 bis an das langwellige Ende variiert. Aus dieser Tafel lassen sich die Koordinaten der optimalen Farben mit leichter Mühe ablesen, bei häufigerem Gebrauch wird man sie in einer Tafel mit zwei Eingängen vereinigen. Durch vernünftiges Probieren — ich sehe keinen einfacheren Weg — am besten vielleicht graphisch, indem man immer *ein* Integral als Funktion des anderen aufträgt und auf den entstehenden Kurven Sehnen von richtiger Neigung aufsucht — auf solche Art also wird man *jene* Sprungstellen (Integrationsgrenzen) ermitteln, für welche die drei Koordinaten des Pigments das durch den Punkt in der Tafel vorgegebene Verhältnis aufweisen. Diese drei Koordinaten geben dann an, welche Bruchteile der durch ein ideal weißes Pigment bei dieser Beleuchtung erregten Rot-, Grün-, Blauempfindung durch ein Pigment, das bei dieser Beleuchtung die vorgegebene Reizart realisiert, maximal erregt werden können.

Natürlich läßt sich ganz dieselbe Überlegung und Rechnung auch unter Benutzung irgendwelcher anderer, etwa auf drei reelle Eichlichter bezogener Eichkurven an Stelle der Grundempfindungskurven durchführen; wobei dann die optimalen Koordinaten eine noch konkretere, von jeder Hypothese über das Zustandekommen der Farbempfindung auch äußerlich freie Bedeutung bekommen.

Die geschilderten rechnerischen Vorarbeiten hier wirklich zu leisten, würde ich *deshalb* für fast verlorene Mühe halten, weil es so sehr unsicher ist, ob der erste, der die vorstehenden Resultate etwa praktisch zu verwerten wünscht, dies gerade für Tageslicht und für die Königschen Eichkurven in ihrer heute vorliegenden Form wird tun wollen. —

Eine der eben behandelten verwandte, dem Praktiker vielleicht näherliegende Frage möchte ich hier nur kurz streifen, nämlich diese: in welcher maximalen *Sättigung* läßt sich ein

bestimmter *Farbton* durch ein Pigment herstellen, wenn eine bestimmte *Helligkeit* nicht unterschritten werden soll?

Ohne Zweifel ist das nachgefragte Pigment in unserer Grenzmännigfaltigkeit zu suchen und zwar auf einem Halbstrahl durch den Weißpunkt¹⁾ möglichst weit außen, so weit, daß die gewünschte Helligkeit eben noch nicht unterschritten wird. Man müßte sich also in derselben Art wie früher die „Quantitätsfläche“, jetzt eine „Helligkeitsfläche“ über dem Farbensegment errichten, deren Ordinaten in jedem Punkt die *Helligkeit* der optimalen Farbe darstellen. Diese muß sich, wenn ihre Begriffsbestimmung nur überhaupt eindeutig sein soll, aus den gefundenen drei Koordinaten, die ja die Pigmentfarbe eindeutig definieren, eindeutig berechnen lassen. Aber die Ansichten, wie das zu geschehen hat, gehen heute noch weit auseinander. Einige halten die Helligkeit für eine lineare Funktion der Koordinaten mit konstanten Koeffizienten, den „spezifischen Helligkeiten“ der Grundempfindungen; andere, darunter Helmholtz in seinen Abhandlungen über die Übertragung des Fechnerschen Gesetzes auf das Farbensystem, glauben, daß nicht einfache additive Verknüpfung vorliegt.

Die Frage nach der richtigen Fassung des Begriffes der heterochromen Helligkeit ist eine ungemein wichtige und von sehr viel größerer Tragweite als die vorliegende Untersuchung; ich werde demnächst in anderem Zusammenhang viel ausführlicher darauf eingehen. Für uns hier spielt sie aber offenbar nur eine Nebenrolle. Würde man die optimalen Lichtgemische des herzustellenden Farbtons in zunehmender Sättigung nach den gegebenen Vorschriften wirklich herstellen, so würde sich aus ihnen dasjenige sogleich herausfinden lassen, das der Forderung eben noch genügt, wofern diese überhaupt vernünftig gestellt und nicht eine bloße Verbalforderung ist.

Was nun den zweiten Teil der auf S. 604 gestellten Frage betrifft: wie müssen die optimalen Pigmente, d. h. ihre Remissionsfunktionen, beschaffen sein? — so wird sie durch unsere zwei-

1) Man beachte, daß in der Farbentafel, die wir für unsere Pigmente angelegt haben, nicht Sonnenweiß, sondern die Farbe der ideal remittierenden Fläche, also die Farbe des Beleuchtungslichtes im Schwerpunkt liegt. Hier ist natürlich mit „Weißpunkt“ nicht dieser Schwerpunkt, sondern der Ort des Sonnenweiß gemeint.

dimensionale Pigmentmannigfaltigkeit natürlich durchaus nicht erschöpfend beantwortet. Alle ausgeschiedenen Duplikate sind ja gleichfalls optimal. Ein optimales Pigment braucht also durchaus nicht zweiwertig zu sein, es kann mehr als zwei Sprünge besitzen usw.

Die Unbestimmtheiten, die auftreten, haben alle ihren Grund in der Existenz dichromatischer und monochromatischer Bezirke im Spektrum; in diesen Bezirken ist die Remissionsfunktion unter Umständen in weitestem Maße willkürlich. Was da gestattet ist und was nicht, läßt sich aber an Hand unserer früheren Überlegungen in jedem Falle leicht übersehen und ich halte eine lückenlose Aufzählung aller möglichen Fälle für uninteressant und überflüssig. Die Frage ist immer die, ob sich der Remissionsfunktion durch geeignete Abänderung eine der ausgezeichneten Formen geben läßt oder nicht.

So wird beispielsweise ein Pigment, das vom kurzwelligen Ende bis zum Punkt *O* (Grenze des Orange), vollständig remittiert, optimal sein, wie immer auch seine Remission im langwelligen Teil verlaufen mag. Denn es läßt sich in ein Mittelfehlpigment verwandeln.

Dagegen sind bei Pigmenten, deren Remission auf das langwellige Ende bis zum Punkt *O* beschränkt ist, Abweichungen von der Zweiwertigkeit im dichromatischen Teil unzulässig, im monochromatischen nur dann zulässig, wenn der dichromatische vollständig remittiert. Sonst würde das Pigment bei der Verwandlung auf ein verbotenes Mittelpigment führen (s. oben S. 613 b).

Ganz entsprechendes gilt natürlich für die analogen Fälle am kurzwelligen Ende.

§ 4. Vergleich mit der Erfahrung.

Wilhelm Ostwald hat aus seinen umfangreichen Experimentaluntersuchungen über Pigmente rein empirisch die Folgerung gezogen, daß zur Erzielung größter *Farbenreinheit* bei einem Pigment möglichst nur die Remissionen Null und Eins, mit tunlichst schroffem Übergang, vorkommen sollen, ferner nur entweder *ein* geschlossenes Remissionsgebiet oder *ein* geschlossenes Absorptionsgebiet.¹⁾

1) W. Ostwald, Königl. Sächs. Ges. d. Wiss., Abh. d. Math.-Phys. Kl. 34. Nr. 3. S. 471 ff. 1917; Phys. Zeitschr. 17. S. 328 ff. 1916.

Soweit trifft Ostwalds empirische Feststellung mit der von uns für optimale Pigmente theoretisch aufgestellten Bedingungen der Hauptsache nach völlig zusammen.

Ostwald fordert weiter zur Erzielung größter Reinheit, daß die Absorption bzw. die Remission genau ein „Farbenhalb“ umfassen, d. h. genau von einer Spektralfarbe bis zu ihrer Komplementärfarbe reichen soll. Um für diese Forderung wenigstens ein qualitatives Verständnis zu gewinnen, erinnern wir daran, daß Ostwald unter *Reinheit* den *Bruchteil reiner Farbe* verstanden wissen will, der in dem Gesamteindruck, den das Gemisch hervorruft, enthalten sein soll und aus ihm begrifflich sich soll abtrennen lassen; zu diesem Bruchteil reiner Farbe treten dann noch gewisse Bruchteile *Weiß* und *Schwarz* als Verunreinigungen oder Trübungen.

Nun läßt sich nach Ostwald der Schwarzgehalt einer Farbe z. B. dadurch erhöhen, daß man sie auf dem Farbenkreisel mit einem ideal schwarzen, d. h. nicht remittierenden Pigment oder am sichersten mit einem schwarzen Loch mischt. Daraus läßt sich mit Rücksicht auf das Talbotsche Gesetz schließen, daß — wie immer man über die Natur des Schwarz als Empfindung urteilen mag — jedenfalls *das objektive Korrelat* dessen, was Ostwald den Schwarzgehalt nennt, *eine relativ geringe Lichtstärke* ist.

Nun ist klar, daß jene optimalen Pigmente, deren Remission auf einen allzu *kleinen* Teil des Spektrums beschränkt ist, sehr lichtschwach sein, d. h. nach Ostwald einen hohen Schwarzgehalt und aus diesem Grunde geringe Reinheit zeigen werden. — Andererseits werden Pigmente, deren Remission einen allzu *großen* Teil des Spektrums umfaßt, zwar sehr lichtstark sein, daher wenig Schwarz, dafür aber sehr viel Weiß enthalten — letzteres nach den bekannten allgemeinen Gesetzen der Lichtmischung. — Daß überhaupt die Ostwaldschen Pigmente größter Reinheit nur unter unseren optimalen zu suchen sind, folgt natürlich aus der Überlegung, daß ein Pigment geringerer Lichtstärke und gleicher Reizart gleichen Weißgehalt, aber höheren Schwarzgehalt besitzt, also geringere Reinheit.

Die Beschränkung des Remissionsgebietes auf das Gebiet zwischen zwei Komplementärfarben ist offenbar ein praktisch bewährtes Kompromiß zwischen der Scylla der weißlichen und

der Charybdis der schwärzlichen Trübung; oder in der, Helmholtz folgenden, mehr auf die objektive Beschaffenheit des Strahlungsgemisches gerichteten Ausdrucksform: ein Mittel zur Erzielung möglichst hoher Farbensättigung ohne allzu große Lichtverluste durch Absorption.

Wegen dieses Kompromißcharakters wäre zu erwarten, daß die Qualität der, den besten von Ostwald hergestellten Pigmentfarben noch anhaftenden Trübung, die eines mittleren Grau ist, aus nicht gar zu sehr verschiedenen Anteilen Weiß und Schwarz gemischt. Für einen Teil derselben trifft das nach Ostwalds Reinheitsbestimmungen (a. a. O. S. 560) recht angenähert zu. Für viele, namentlich für die blauen und grünen, ist allerdings der Schwarzanteil erheblich größer als der Weißanteil.

Ich kann übrigens nicht unterlassen, zu bemerken, daß ich die ganze Ostwaldsche Terminologie hier nur benutzt habe, um die von ihm gefundenen *Tatsachen* mit meinen theoretischen Ergebnissen einigermaßen vergleichen zu können; nicht als ob ich schon überzeugt wäre, daß den Begriffsbildungen, wie „Reinheit“, „Schwarzgehalt“, „Grau“ dieselbe quantitative Bestimmtheit zukommt, wie etwa denen der Helmholtz-Königschen physiologischen Farbenmetrik. Bei aller Hochachtung vor Ostwalds wertvollen und mühsam erarbeiteten Erfolgen halte ich doch z. B. seine Absolutbestimmungen von „Reinheit“ und „Grau“ aus dem Werte der Remission an nur *zwei*, wenn auch ausgezeichneten Stellen des Spektrums (Maximum und Minimum), für nichts mehr als bestenfalls eine gute Faustregel, keineswegs geeignet zur exakten Definition dieser Begriffe.

Zusammenfassung.

1. Die größte Lichtstärke bei vorgegebener Reizart haben die Pigmente von folgender Beschaffenheit:

a) Sie besitzen an keiner Stelle des Spektrums einen anderen Remissionskoeffizienten als nur Null oder Eins.

b) Ihre Remission zeigt nur höchstens zwei Unstetigkeitsstellen („Sprünge“ von 0 auf 1 oder von 1 auf 0) und ist nicht durchweg Null.

c) Beschränkt sich die Remission auf einen der beiden dichromatischen Spektralbezirke, einschließlich des angrenzenden monochromatischen, so reicht sie mindestens bis an das eine Ende dieses Gebietes.

d) Beschränkt sich die Remission auf die monochromatischen Bezirke, so umfaßt sie mindestens einen von beiden ganz.

e) Beschränkt sich die *Absorption* auf *einen* monochromatischen Bezirk, so beginnt sie am Spektralende.

2. Die beschriebenen Pigmente besitzen die angegebene Eigenschaft für jede beliebige Beleuchtung; d. h. bei einer ganz beliebigen Beleuchtung wird keines von ihnen an Lichtstärke übertroffen von irgendeinem Pigment, das mit ihm *bei eben dieser Beleuchtung* Licht von gleicher Reizart remittiert.

3. Weist das Beleuchtungslicht keine spektralen Lücken auf, so sind die Pigmente alle untereinander physiologisch verschieden und überdecken das reelle Farbensegment einschließlich der Berandung genau einfach.

4. Außer den unter 1. genannten Pigmenten gibt es noch andere lichtstärkste Vertreter ihrer Reizart. Diese Eigenschaft kommt beispielsweise *allen* jenen Pigmenten zu, deren *Absorption* auf *ein* mono- und dichromatisches Ende des Spektrums beschränkt ist, sie mag dort im übrigen ganz beliebig verlaufen. Überhaupt beziehen sich die erlaubten Abweichungen von den unter 1. aufgeführten Eigenschaften durchweg auf die mono- und dichromatischen Bezirke. Natürlich wird jedes solche abweichend beschaffene Pigment *einem* Pigment der erstgenannten Mannigfaltigkeit völlig gleichen — *welchem*, hängt allerdings im allgemeinen von der Beleuchtung ab.

5. Diese theoretischen Ergebnisse treffen mit einigen empirischen Feststellungen Wilhelm Ostwalds zusammen.

Wien, im Dezember 1919, II. physik. Inst. d. Universität.

(Eingegangen 22. Dezember 1919.)