2. *Zum Versuch von F. Harreß;*
von M. v. Laue.

In der vorhergehenden Veröffentlichung berichtet Hr. Knopf über einen Versuch des verstorbenen Franz Harreß aus den Jahren 1909—1911, bei welchem mittels einer Interferenzerscheinung die Fortpflanzung des Lichts in einem sich drehenden Glaskörper beobachtet wird. Nahe verwandt ist ihm der von Sagnac[1]) 1913 veröffentlichte; der wesentliche Unterschied liegt darin, daß bei diesem der leere Raum Träger der Lichtfortpflanzung ist (genauer: Luft von Atmosphärendruck; doch unterscheidet sie sich optisch zu wenig vom leeren Raum, als daß es auf den Unterschied ankäme) und sich nur alle Spiegel und sonstige, den Lichtweg im Interferometer bestimmende Apparate mit drehen. Daß bei Sagnac auch noch die Lichtquelle und der Beobachtungsapparat für die Interferenzstreifen an der Drehung teilnehmen, während sie bei Harreß feststehen, bedingt keinen wesentlichen Unterschied. Die zur Interferenz kommenden Strahlen durchlaufen bei beiden Versuchen zwischen ihrer Trennung und Wiedervereinigung nur in Drehung befindliche Teile der Anordnung. Vor- und nachher erleiden beide Strahlen die gleichen Schicksale — das gilt sowohl bei Harreß wie bei Sagnac — und für die Interferenzerscheinung sind gemeinsame Schicksale bedeutungslos.

Beide Versuche beweisen zunächst, daß die optischen Vorgänge in einem sich gegen die Erde drehenden Bezugssystem anders verlaufen als in einem mit der Erde fest verbundenen; letzteres dürfen wir hier mit hinreichender Annäherung als ein berechtigtes System im Sinne der beschränkten Relativitätstheorie betrachten. Für mechanische Vorgänge liefert

1) G. Sagnac, Compt. rend. 157. S. 708 u. 1410. 1913; Journ. d. Phys. (5) 4. S. 177. 1914.

bekanntlich jeder Versuch über die Zentrifugalkraft den entsprechenden Beweis (Sagnacs Deutung seines Versuchs als eines Nachweises für das Dasein eines „Äthers“ ist durchaus nicht zwingend). Daß dieser Unterschied zwischen den genannten Bezugssystemen nach der Auffassung der allgemeinen Relativitätstheorie kein ursprünglicher ist, sondern die Folge ihrer verschiedenen Bewegung gegen das Fixsternsystem, brauchen wir hier nicht in Betracht zu ziehen.

Schon 1911 habe ich die relativistische Theorie für den später von Sagnac ausgeführten Versuch gegeben[1]) und möchte hier den Harreßschen Versuch in die Theorie mit einbeziehen. Insofern es sich bei ihm um die Lichtausbreitung in bewegten Körpern handelt, liegt letzterer in nächster Nachbarschaft des alten Fizeauschen und des neuen Zeemanschen[2]) Interferenzversuchs. Wir möchten im folgenden den Zusammenhang dieser Versuche besonders hervorheben.

In die Rechnung, welche Harreß selbst seinem Versuche beigab, hatte sich ein Versehen eingeschlichen, welches die Versuchsergebnisse zunächst unverständlich machte. Harzer[3]) hat dies bemerkt und eine Berechnung veröffentlicht, deren Ergebnis im wesentlichen richtig ist und zusammen mit einer Notiz von Einstein[4]) die Harreßschen Messungen mit genügender Genauigkeit zu deuten vermag. Aber volle Befriedigung vermögen wir auch bei dieser Form der Theorie nicht zu empfinden. Zunächst — das ist zwar bei der bisherigen Genauigkeit des Harreßschen Versuches ohne praktische, wohl aber von grundsätzlicher Bedeutung — übersieht Harzer, daß auch die in Luft liegenden Teile des im Rotationsapparat zurückgelegten Lichtweges zum Phasenunterschied bei der Interferenz etwas beitragen. Sodann zieht Harzer mit vollem Recht in Betracht, daß im sich drehenden Körper sich der Lichtstrahl krümmen muß. Aber der Ansatz, aus welchem

1) M. Laue, Münch. Sitz.-Ber. 1911. S. 404. Vgl. auch H. Witte, Verh. d. D. Phys. Ges. **16.** S. 142 u. 754. 1914.

2) P. Zeeman, Versl. Akademie Amsterdam **28.** S. 1451. 1919; P. Zeeman u. A. Snethlage, ebenda **28.** S. 1462. 1919.

3) P. Harzer, Astron. Nachr. **198.** S. 378. 1914 u. **199.** S. 10. 1914.

4) A. Einstein, Astron. Nachr. **199.** S. 9 u. 47. 1914.

er seine Gestalt ermittelt[1]), ist unseres Erachtens nicht selbstverständlich, wenngleich er sich wohl aus der Relativitätstheorie beweisen läßt. Ebenso ist Harzer im Recht, wenn er das Spiegelungs- und Brechungsgesetz im Hinblick auf die Bewegung des Körpers verändert; ob sich aber die Art, wie er es tut, aus der Relativitätstheorie zu rechtfertigen ist, haben wir nicht zu entscheiden vermocht. Und schließlich — und das ist fast die Hauptsache — kann man sehr einfach zeigen, daß die Krümmung des Lichtstrahls und die Veränderungen bei der Spiegelung und Brechung, gleichgültig, wie man sie berechnet, für diesen Phasenunterschied nichts ausmachen, solange man sich, was selbstverständlich durchaus berechtigt ist, auf Glieder erster Ordnung in dem Verhältnis der Körper- zur Lichtgeschwindigkeit beschränkt. Das aber macht die Theorie sehr viel übersichtlicher.

Der Vollständigkeit wegen, und weil Einsteins Bemerkung den meisten Fachgenossen nicht ganz leicht zur Hand ist, geben wir in §§ 2 und 3 deren Inhalt wieder.

§ 1. Im Unterschiede gegen den Fizeauschen und den Zeemanschen Versuch pflanzt sich bei Harreß das Licht nicht in der Bewegungsrichtung des Körpers oder entgegengesetzt fort, sondern unter einem beliebigen Winkel. Ist dieser Winkel, bezogen auf das Ruhsystem des Körpers ϑ^0, hat die Geschwindigkeit des Körpers gegen das der Betrachtung zugrunde gelegte berechtigte Bezugssystem — hier also gegen die Erde — den Betrag q, und bedeuten, wie üblich, c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum und n^0 den Brechungsindex des Körpers, bezogen auf das Ruhsystem, so hat die Phasengeschwindigkeit des Lichts gegen das genannte Bezugssystem nach der Relativitätstheorie den Betrag[2])

$$V = c \frac{c + q\, n^0 \cos \vartheta^0}{\sqrt{(q + c\, n^0 \cos \vartheta^0)^2 + n^{0\,2}(c^2 - q^2) \sin^2 \vartheta^0}} .$$

Wir vernachlässigen im folgenden stets alle Glieder zweiter und höherer Ordnung in q/c, und können dann schreiben

1) Wir meinen Harzers Gleichungen
$$\frac{dx}{dt} = -\omega k y, \qquad \frac{dy}{dt} = v + \omega k x$$
auf S. 379 a. a. O.

2) Vgl. M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, Gl. (257).

(1) $$V = \frac{c}{n^0} + q \cos \vartheta \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

wobei wir den Winkel ϑ auf das System beziehen, gegen welches sich der Körper mit der Geschwindigkeit q bewegt. Gleichung (1) beweist, daß zu dem Wert c/n^0, der im Falle der Ruhe gälte, die Komponente der Körpergeschwindigkeit nach der Strahlrichtung[1]) multipliziert mit dem Mitführungskoeffizienten $(1 - 1/n^2)$ hinzutritt.

Die Transformationsformel für die Schwingungszahl vom Ruhesystem auf das gegen die Erde feste lautet streng

$$\nu = \nu^0 \frac{c + q\, n^0 \cos \vartheta^0}{\sqrt{c^2 - q^2}},$$

also bis auf Glieder zweiter und höherer Ordnung

(1a) $$\nu = \nu^0 \left(1 + \frac{q\, n}{c} \cos \vartheta\right).$$

§ 2. Beim Fizeauschen Interferenzversuch durchläuft das Licht eine *feststehende* Röhre von der Länge l, in welcher Wasser mit der Geschwindigkeit q in der Strahlrichtung oder ihr entgegen strömt. Die Zeit, welche der im Sinne der Strömung laufende Strahl zur Durchlaufung der Röhre braucht, ist nach (1)

(2) $$t_+ = l : \left[\frac{c}{n^0} + q\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{l\, n^0}{c}\left[1 - \frac{q\, n}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Nun ist aber die relative Schwingungszahl ν^0 des Lichtes gegen das Wasser eine andere, als die gegen das an der Erde feste Bezugssystem, ν. Da der Übertritt des Lichts in und aus dem Wasser an *feststehenden* Flächen vor sich geht[2]), bleibt nämlich auch während der Fortpflanzung im Wasser

1) Genauer genommen handelt es sich um die Richtung der Wellennormale. Da der Richtungsunterschied zwischen beiden aber selbst von der ersten Ordnung klein ist, spielt das hier keine Rolle. Harreß begründet in seiner Dissertation Gl. (1) aus dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeit, das jedoch bekanntlich nicht für die Phasengeschwindigkeit der Lichtwellen gilt.

2) Natürlich beginnt die Wasserströmung nicht unmittelbar hinter den Platten, durch welche das Licht ein- und austritt, sondern das Licht gelangt erst allmählich in das Gebiet der vollen Geschwindigkeit q. Da aber die Strömung stationär ist, der Ort jeder Geschwindigkeitsänderung längs des Strahlenganges also feststeht, so bleibt die im Text angestellte Überlegung dennoch richtig.

die Schwingungszahl gegen das genannte Bezugssystem erhalten. Infolgedessen wird nach (1a)

$$\nu^0 = \nu\left(1 - \frac{q\,n}{c}\right),$$

und der in (2) einzusetzende Brechungsindex n^0 ist aus dem Brechungsindex n des ruhenden Wassers für die Schwingungszahl ν zu berechnen nach der Formel

$$n^0 = n\left(1 - \frac{q\,\nu}{c}\,\frac{d\,n}{d\,\nu}\right).$$

Setzen wir diesen Wert in (2) ein, so finden wir mit H. A. Lorentz[1]):

$$(3)\qquad t_+ = \frac{l\,n}{c}\left[1 - \frac{q\,n}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\,\frac{d\,n}{d\,\nu}\right)\right].$$

Für den zwischen den Durchlaufszeiten beider Strahlen bestehenden Unterschied folgt daraus:

$$(4)\qquad t_+ - t_- = \tau = -\frac{2\,l\,q\,n^2}{c^2}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\,\frac{d\,n}{d\,\nu}\right).$$

Dies ist die Formel, welche Fizeau, Michelson und Morley und schließlich mit einer Genauigkeit von einigen Tausendsteln Zeeman bestätigt haben.[2])

§ 3. Beim Zeemanschen Versuch ist die feststehende Röhre mit dem strömenden Wasser ersetzt durch einen Körper, welcher sich als Ganzes mit der Geschwindigkeit q in der Richtung des einen Strahls und dem anderen entgegen bewegt. Um zu berechnen, wie die Durchlaufszeit für den ersteren Strahl durch die Geschwindigkeit q beeinflußt wird, führen wir zweckmäßig den Begriff der Relativgeschwindigkeit des Lichts gegen den Körper ein, diese bezogen auf das an der Erde feste Bezugssystem. Sie beträgt nach (1), da $\cos\vartheta = 1$ zu setzen ist:

$$(5)\qquad V - q = \frac{c}{n^0} - \frac{q}{n^2}\,.$$

Denn für zwei Geschwindigkeiten, welche sich auf das gleiche System beziehen, gilt auch nach der Relativitätstheorie die

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895, S. 101 ff.

2) A. A. Michelson u. E. W. Morley, American Journ. of science 31. S. 377. 1886; P. Zeeman, Verslagen Akadem. Amsterdam 23. S. 245. 1914; 24. S. 18. 1915.

gewöhnliche Vektoraddition; beim Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeiten ist es gerade wesentlich, daß die zu addierenden Geschwindigkeiten sich auf verschiedene Systeme beziehen. Die Zeit, in der dieser Strahl die Strecke l im Körper durchläuft, ist demnach

$$T_+ = \frac{l}{V - q} .$$

Nun ist aber noch zu bedenken, daß das Licht, wenn es wie beim Zeemanschen Versuch, durch zwei zur Strecke l senkrechte Endflächen ein- und austritt, infolge der Bewegung eine kürzere Strecke in Luft zurücklegt, als wenn der Körper ruht. Denn während der Zeit T_+ verschiebt sich der Körper um die Strecke $T_+ \cdot q$. Bezeichnen wir also mit L den Abstand der beiden dem bewegten Körper nächsten *feststehenden* Teile der Versuchsanordnung, so braucht der genannte Strahl, um von dem einen dieser Teile zum anderen zu kommen, die Zeit

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} t_+ &= T_+ + \frac{1}{c}\Big(L - (l + T_+ q)\Big) \\ &= \frac{1}{c}(L - l) + \frac{l}{c}\left(n^0 + \frac{q}{c}(1 - n)\right) \end{aligned} \right.$$

Auch hier ist die Schwingungszahl in dem mit dem Körper verbundenen Bezugssystem eine andere als in dem erdfesten. Und zwar bleibt diesmal beim Ein- und Austritt des Lichts die Schwingungszahl zu ersterem erhalten, weil die Flächen, an denen dies geschieht, die Bewegung des Körpers teilen. In (1a) ist diesmal $n = 1$ zu setzen, wenn wir für das im leeren Raum fortschreitende Licht ν^0 aus ν berechnen wollen; also:

$$\nu^0 = \nu\left(1 - \frac{q}{c}\right), \qquad n^0 = n - \frac{\nu q}{c} \frac{d n}{d \nu} .$$

Setzt man dies in (6) ein, so folgt:

$$t_+ = \frac{1}{c}\Big(L - l(1 - n_0)\Big) + \frac{l q}{c^2}\left(1 - n - \nu \frac{d n}{d \nu}\right) .$$

Der Zeitunterschied für beide Strahlen ist danach:

$$(7) \qquad \tau = t_+ - t_- = \frac{2 l q}{c^2}\left(1 - n - \nu \frac{d n}{d \nu}\right) .$$

Dies ist die von Einstein, Zeeman und H. A. Lorentz[1]) aufgestellte und von Zeeman auch im wesentlichen betätigte Formel.

Wir kommen nun dem Harreßschen Versuch schon ganz nahe, wenn wir den Zeemanschen Versuch gemäß Fig. 1 abgeändert denken. Bei ihr tritt das Licht nicht durch zwei zur Geschwindigkeit senkrechte Flächen ein und aus, sondern dies geschieht an zwei zur Geschwindigkeit parallelen. Der von A kommende Strahl wird nach seinem Eintritt bei B an einer der Endflächen des Körpers nach C und dort an der anderen Endfläche nach D gespiegelt. Schreiben wir hier dem Körper wieder die Länge $l\,(= BC)$ zu und die Breite b, so braucht der im Sinne der Bewegung laufende Strahl in ihm die Zeit

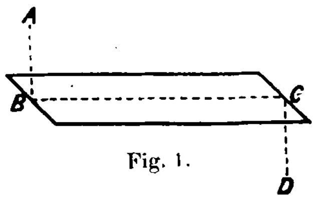

Fig. 1.

$$t_+ = \frac{l}{V-q} + \frac{b n^0}{c} = \frac{l n^0}{c}\left(1 + \frac{q}{n c}\right) + \frac{b n^0}{c}\,. \tag{8}$$

Die Strecke, welche er in Luft zurückzulegen hat, wird durch die Bewegung nicht verändert. Ferner bleibt die Schwingungszahl ν^0, die sich auf das mitbewegte System bezieht, bei den Spiegelungs- und Brechungsvorgängen an den *mitbewegten* End- und Grenzflächen des Körpers erhalten. Da ferner vor dem Ein- und nach dem Austritt die Strahlrichtung zur Geschwindigkeit q senkrecht ist[2]), stimmen nach (1a) ν und ν^0 hier überein. Somit ist überhaupt $\nu^0 = \nu$, $n^0 = n$ zu setzen und wir finden nach (8)

$$\tau = t_+ - t_- = \frac{2 l q}{c^2}\,. \tag{8a}$$

Im Gegensatz zu den Gleichungen (4) und (7) ist hier der Brechungsindex ganz herausgefallen. Auch hat τ und damit die Streifenverschiebung das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wie beim Fizeauschen Versuch. Dort beschleunigt

1) Vgl. die angeführte Arbeit von Zeeman und Snethlage.

2) Das gilt nur für das Ruhesystem streng; in dem erdfesten System weicht die Strahlrichtung wegen der Aberration um einen kleinen Winkel erster Ordnung davon ab. Doch braucht das in (1a) wegen unserer Beschränkung auf Größen erster Ordnung nicht berücksichtigt zu werden.

nämlich die Mitführung den mit der Bewegung der Materie laufenden Strahl, so daß er die feststehende Strecke l in kürzerer Zeit zurücklegt als im Ruhefall. Hier hingegen laufen alle Teile des Apparates vor dem genannten Strahl fort, und dadurch wird jene Verkürzung aufgehoben und sogar ins Gegenteil verkehrt.

Den tiefsten Grund für die Unabhängigkeit des Zeitunterschieds vom Brechungsindex zeigt aber die Lorentz-Transformation. Ein Glasstab ruhe im Bezugssystem K', seine Endflächen mögen die Gleichungen $x' = 0$ und $x' = 1$ haben. Zur Zeit $t' = -n^0 l : c$ entsenden wir von jeder dieser Flächen eine bestimmte Phase einer sinusförmigen Lichtwelle nach der gegenüberliegenden Fläche. Beide Phasen erreichen ihr Ziel zur Zeit $t' = 0$. Nun beziehen wir diesen Vorgang auf ein System K, gegen welches K' die Geschwindigkeit q in der positiven x'-Richtung hat. Die Transformationsgleichung für die Zeit lautet:

$$t = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left(t' + \frac{q x'}{c^2} \right) .$$

Nur der zweite Summand im Zähler bedingt hier die Zeitdifferenz τ. Für den in der positiven x'-Richtung laufenden Strahl sind nämlich Abgangs- und Ankunftszeit der betrachteten Phase, bezogen auf K

$$-\frac{n^0 l}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \text{und} \quad \frac{q l}{c\sqrt{c^2 - q^2}} .$$

Die Durchlaufungszeit ist die Differenz davon, also in Gliedern erster Ordnung

$$t_+ = \left(n^0 + \frac{q}{c} \right) \frac{l}{c} .$$

Die Zeit, welche das Licht in Fig. 1 für die zu BC senkrechten Wege braucht, wird durch die Transformation nicht in Gliedern erster Ordnung verändert. Stimmen also in beiden Strahlen die relativen Schwingungszahlen überein, so schließen wir aus dem letzten Ausdruck:

$$\tau = t_+ - t_- = \frac{2 l q}{c^2} .$$

§ 4. Der Harreßsche Versuch unterscheidet sich von dem in Fig. 1 beschriebenen nur dadurch, daß die rein translatorische Geschwindigkeit der Glaskörper durch eine Drehung ersetzt ist. Technische Gründe haben zu dieser Änderung geführt. Für die Theorie bedeutet sie eine gewisse Erschwerung, weil mit der Drehung Beschleunigungen verbunden sind. Man weiß aber wohl noch nicht sicher, wie diese auf die optischen Vorgänge in der Materie wirken. Die allgemeine Relativitätstheorie wäre freilich zu Aussagen darüber imstande und wir wollen zunächst zeigen, daß sie keine bemerkbaren Beschleunigungseinflüsse erwarten läßt. Die vorkommenden Zentrifugalkräfte sind nämlich der Größenordnung nach höchstens 10 bis 100 mal so groß wie die Erdanziehung auf denselben Körper. Da nun die Schwerebeschleunigung selbst an weit mächtigeren Himmelskörpern, als es die Erde ist, keinen für die hier zu erreichende Genauigkeit bemerkbaren Einfluß auf die optischen Vorgänge ausübt, so ist auch beim Harreßschen Versuch kein solcher zu erwarten.[1])

Nun braucht man ja freilich Aussagen der allgemeinen Relativitätstheorie noch nicht für unbedingt richtig zu halten. Dann aber fehlt uns jeder Anhalt über die Wirkung der Beschleunigungen und man muß mangels eines Besseren zunächst so rechnen, als gäbe es keine. (Dies tut auch Harzer a. a. O.) Übrigens kämen solche Wirkungen, sofern sie die Bahn des Lichtstrahls beeinflussen, für den zu berechnenden Phasenunterschied nicht in Frage. Nur wenn sie den absoluten Wert der Lichtgeschwindigkeit beträfen, könnten sie, wie sogleich zu beweisen ist, etwas ausmachen.

Wir beginnen nun mit dem angekündigten Beweis, daß alle durch die Drehung hervorgerufenen Änderungen des Strahlenganges relativ zum Apparat für die Interferenzerscheinung in den Gliedern erster Ordnung nichts ausmachen. Wir denken uns den Apparat zunächst in Ruhe und betrachten einen Strahl, welcher vom Punkte P der Trennungsplatte im Sinne der späteren Drehung umlaufend zum Punkte Q dieser Platte gelangt. Sein Weg besteht aus einer Reihe gerader Strecken; die Länge irgendeiner davon bezeichnen wir mit l. $\sum \frac{l}{V} = \sum \frac{l n}{c}$ ist die Zeit, welche er zur Zurücklegung des

1) Diese Bemerkung verdanke ich einem Gespräche mit Hrn. W. Wien.

geschilderten Weges braucht. Auch bei einer Drehung des Apparates gibt es einen Strahl, welcher im Sinne der Drehung umlaufend von dem mitbewegten Punkte P zu dem ebenfalls mitbewegten Punkte Q gelangt. Die Drehung bewirkt einmal eine Veränderung der Relativgeschwindigkeiten V, mit welchen die Strecken l durchlaufen werden (wir rechnen hier vorbehaltlich des Beweises so, als ob auf jeder Strecke l V konstant bliebe), sodann aber infolge der Verlagerung des relativen Strahlenganges Änderungen der Strecken l selbst. Die Gesamtänderung der Durchlaufungszeit beträgt:

$$\sum \delta\left(\frac{1}{V}\right) \cdot l + \sum \frac{n\,\delta\,l}{c}\,.$$

Hierin ist nun das zweite Glied nach dem Fermatschen Satze vom ausgezeichneten Lichtweg klein von der zweiten Ordnung; denn die Veränderungen $\delta\,l$ sind höchstens von der Ordnung q/c. Und damit ist der Beweis geliefert; er gilt unabhängig davon, wie man die Veränderungen $\delta\,l$ berechnet.

Nun liegt zwar der weitere Einwand nahe: Die betrachteten Strahlen haben in P und Q verschiedene Richtungen. Für einen auf Unendlich eingestellten Beobachtungsapparat, in dessen Brennebene die Interferenzen erscheinen, sind sie also nicht gleichwertig.[1]) Damit überschreitet man aber den Geltungsbereich der geometrischen Optik. Die in Rede stehenden Richtungsunterschiede sind von der ersten Ordnung in q/c. Für den Rand des Harreßschen Apparates ist q stets kleiner als $2 \cdot 10^3$ cm/sec^{-1}, ein Wert, der etwa 1000 Umdrehungen in der Minute entspräche. Infolgedessen ist der Winkel zwischen beiden Strahlen von der Größenordnung 10^{-7}. Die ausgenutzte Öffnung des Beobachtungsapparates war sicherlich in einem Quadrat von 3,6 cm Seitenlänge enthalten. Denn nach S. 22 der Harreßschen Arbeit sind die Austrittsflächen der Prismen für das Licht solche Quadrate. Der Beobachtungsapparat kann also nur Winkel auflösen, welche von der Größenordnung 10^{-5} oder größer sind. Die hier in Frage kommenden liegen aber, wie gezeigt, wesentlich unter dieser Grenze.

1) Harreß erklärt die Interferenzerscheinung für Planparallelitätsringe. Es muß dahingestellt bleiben, ob er nicht tätsächlich eine andere Interferenzerscheinung eingestellt hatte.

Wir schließen daraus, daß Verlagerungen des relativen Lichtweges für die Berechnung von τ nicht zu berücksichtigen sind.[1])

§ 5. Nach diesen Vorbereitungen stellen wir zunächst fest: 1. Nach Gleichung (1a) kommt es für die absolute Phasengeschwindigkeit V des Lichts gegen das an der Erde feste Bezugssystem nicht auf die zur Strahlrichtung senkrechte Komponente der Körpergeschwindigkeit an, sondern nur auf die dazu parallele. 2. Hat eine Gerade l den kleinsten Abstand r von der Drehungsachse und bildet ihre Richtung mit dieser den

---

1) Für § 4 liefert uns Hr. Harzer eine erfreuliche Bestätigung in dem folgenden Absatz seiner Arbeit:

„Nimmt man mit Hrn. Harreß an, daß die Strahlen im rotierenden Mittel die geradlinige Gestalt behielten, die sie im ruhenden Mittel haben, und schreibt man dementsprechend die durch die Rotation bewirkte Veränderung nur der durch die Mitführung entstehenden Veränderung der relativen Geschwindigkeit auf den unveränderten Wegen zu, so entsteht die Formel

$$\delta\varphi = \lambda(1 - k)\,\omega\,\frac{\Sigma p\, q}{\lambda\, v},$$

die sich inhaltlich von der Formel, die Hr. Harreß auf S. 59 gibt, nur durch die Vertauschung von k mit $1 - k$ unterscheidet. . . .

Es war in Hinblick auf den idealen Fall, den der Apparat nach Möglichkeit zu realisieren strebt, eine gewisse Ähnlichkeit dieser Zahlen mit den für den wirklichen Fall geltenden von vornherein zu erwarten; daß sich aber die Annahme über die unveränderliche Gestalt der Strahlen, die für die einzelnen Wege zwischen zwei optisch wirkenden Flächen ganz unzutreffend ist, für die Gesamtheit der Wege mit dem alle Stellen der Rechnung umfassenden hohen Grade der Annäherung als zulässig erweist, ist sehr überraschend. Eine auf einer analytischen Untersuchung beruhende Erklärung dieser nahen Übereinstimmung habe ich nicht gefunden; ich muß sie deshalb in der unbestimmten Bedeutung des Wortes als zufällig bezeichnen."

Soweit Hr. Harzer. Wir haben nur noch die Vermutung hinzuzufügen, daß er auch in seiner Formel, nicht nur bei der Zahlenrechnung, den Einfluß der Krümmung hätte verschwinden sehen, wenn er auch die schon erwähnten Luftstrecken mitberücksichtigt hätte. Die von ihm genannte Gleichung ist, abgesehen von diesem Unterschied, mit unserer Formel (11) gleichlautend. Denn es bedeuten p und q die Strecken l und r, es ist $v = c/n$ und $k = l - n^{-2}$; die von uns berechnete Zeitdifferenz τ ist aber gleich $\delta\varphi\,\frac{\lambda}{v}$. Schließlich ist bei Hrn. Harzer stets $\sin\Theta = 1$.

Winkel Θ, so ist in jedem ihrer Punkte die Komponente der Körpergeschwindigkeit nach ihrer Richtung gleich $\omega r \sin \Theta$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Beweis: Wir wählen die Drehungsachse als z-Achse, den kürzesten Abstand r als y-Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes. Die Gerade l hat dann die Gleichungen $y = r$, $x : z = \operatorname{tg} \Theta$. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ aber hat in irgendeinem Punkte der Geraden die Komponenten $\mathfrak{q}_x = \omega r$, $\mathfrak{q}_z = 0$. Daraus schließen wir auf den Winkel zwischen l und $\mathfrak{q} : \cos(l\,\mathfrak{q}) = \frac{\mathfrak{q}_x}{q} \sin \Theta$, also $q \cos(l\,\mathfrak{q}) = \omega r \sin \Theta$. Die Phasengeschwindigkeit des Lichts gegen das erdfeste Bezugssystem ist infolgedessen nach (1):

$$V = \frac{c}{n^0} + \omega r \sin \Theta \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) . \tag{9}$$

Von größter Wichtigkeit ist nun die Frage nach der Schwingungszahl ν^0 des Lichts gegen den Glaskörper, da von ihm, wie schon in den oben besprochenen Fällen, der Brechungsindex n^0 abhängt. Wir fragen zuerst: Ändert sich die relative Schwingungszahl, während das Licht von einer Spiegelungsstelle zur anderen fortschreitet? Die Antwort lautet: Nein. Denn bei diesem Vorgang bleibt die Schwingungszahl ν zum erdfesten Bezugssystem jedenfalls erhalten; bestände zwischen zwei raumfesten Punkten ein Unterschied der Schwingungszahlen, so bedeutete das ja eine dauernd wachsende Phasenverschiebung der Schwingungen in ihnen, welche nicht möglich ist. Da aber auf der ganzen geradlinigen Strahlenbahn die Komponente $q \cos \vartheta$ denselben Wert hat, so bleibt nach (1a) auch ν^0 erhalten. Freilich ist der Strahl nicht genau geradlinig; jedenfalls sind aber die vorkommenden Richtungsänderungen klein von der ersten Ordnung in q/c, kommen also in dem zweiten Gliede von (1a), das selbst zu q/c proportional ist, nicht in Betracht. Die Spiegelungen und Brechungen geschehen alle an mitbewegten Flächen, lassen somit auch die relative Schwingungszahl ν^0 ungeändert. Schließlich hat das Licht unmittelbar vor seinem Eintritt und nach seinem Austritt aus den beweglichen Teilen der Versuchsanordnung eine Richtung senkrecht zu der dort herrschenden Geschwindigkeit, so daß hier die relative und die absolute Schwingungszahl ν^0 und ν übereinstimmen. *Somit ist überall im Interferometer* $\nu^0 = \nu$

und $n^0 = n$, wobei unter n der ohne Rücksicht auf die Bewegung zu berechnende Brechungsindex der Glaskörper zu verstehen ist.

§ 6. Die Berechnung des Zeitunterschieds τ können wir nun leicht durchführen. Dividieren wir jede Teilstrecke l des relativen Strahlengangs durch die zugehörige Relativgeschwindigkeit, welche für den mit der Drehung umlaufenden Strahl nach (9) den Betrag

$$V - q\cos(q\,l) = V - \omega\,r\sin\Theta = \frac{c}{n} - \frac{\omega\,r}{n^2}\sin\Theta$$

hat, so finden wir für die Zeit, welche dieser Strahl von der Trennung bis zur Wiedervereinigung mit dem anderen braucht:

$$(10) \qquad t_+ = \sum \frac{l\,n}{c} + \frac{\omega}{c^2}\sum r\,l\sin\Theta.$$

Für den Zeitunterschied folgt daraus:

$$(11) \qquad \tau = t_+ - t_- = \frac{2\,\omega}{c^2}\sum r\,l\sin\Theta.$$

Darauf, daß die über alle Teile des Strahls, auch die in Luft liegenden, zu erstreckende Summe auch negative Glieder enthält, macht Hr. Knopf auf S. 440 aufmerksam.

Dieser Zeitunterschied hat eine doppelte Ursache. Einmal nämlich die Mitführung des Lichts durch bewegte Körper, sodann aber die Tatsache, daß jeder Teil des Apparates bei der Drehung vor dem einen Strahl fortläuft, dem anderen aber entgegenkommt. Beide Ursachen zusammen ergeben nach (11) eine vom Brechungsindex unabhängige, somit für alle Körper übereinstimmende Zeitdifferenz. Selbst wenn man, wie Sagnac, den leeren Raum zum Träger der Lichtausbreitung wählt, so daß jede Mitführung fortfällt, bringt die zweite, rein geometrische Ursache noch die gleiche Streifenverschiebung hervor. Harreß hatte in seiner Dissertation nur die erste Ursache in Rechnung gesetzt.

Läßt man den Wert des Mitführungskoeffizienten zunächst unbestimmt (Bezeichnung: x) und setzt man dementsprechend nach (9):

$$V = \frac{c}{n} + x\cdot\omega\,r\sin\Theta,$$

so findet man statt (11) die entsprechende Formel in der Schreibweise von Hrn. Knopf:

$$\tau = \frac{2\omega}{c^2}\sum[n^2(1-x)\sin\Theta\, r\, l].$$

$l \sin\Theta$ ist die Projektion eines Teils des Strahls, wie er im Ruhefall verläuft, auf eine zur Drehungsachse senkrechte Ebene. $\frac{1}{2} l r \sin\Theta$ ist somit die Dreiecksfläche, welche durch diese Projektion und die geraden Verbindungen ihrer Endpunkte mit dem Durchstoßpunkt der Achse durch die Ebene begrenzt ist. Der Mittelstrahl kehrt zu seinem Ausgangspunkt zurück; für ihn ist $\frac{1}{2}\sum r\, l \sin\Theta = F$ die von seiner Projektion umschlossene Fläche. Somit läßt sich Gleichung (11) an die früher beim Sagnacschen Versuch gewählte Form schreiben:

$$\tau = \frac{4\omega F}{c^2}.$$

§ 7. Zum Schluß müssen wir noch untersuchen, wie die Breite des zur Interferenz benutzten Strahlenbündels die Erscheinung beeinflußt. Es liegt hier nämlich der ganz ungewöhnliche Fall vor, daß in den beiden Scharen paralleler Strahlen, welche das Fernrohr in einem Punkt vereinigt, der Zeitunterschied τ zwischen je zwei sich entsprechenden schon erheblich veränderlich ist. Darauf hat schon Harreß hingewiesen; er sowohl wie Hr. Knopf geben für die Zeitdifferenz, berechnet für einen zum Mittelstrahl der Fig. 1 bei Harreß parallelen Strahl, dessen Abstand vom Mittelstrahl aber die zur Drehachse senkrechte Komponente δ hat, eine Formel

$$\tau = \tau_0 - f(\delta). \tag{12}$$

τ_0 bedeutet hier den Wert von τ für den Mittelstrahl, f ist eine positive Funktion zweiten Grades, deren Wert in der vorhergehenden Arbeit geometrisch ermittelt ist. Nach Harreß beträgt das zweite Glied für den durchaus möglichen Wert von einem cm für δ 3 Proz. von τ_0.

Unter diesen Umständen genügt es nicht, für die Lichtschwingung im Vereinigungspunkt aller dieser Strahlen den Ansatz

$$e^{i\nu\left(t+\frac{\tau_0}{2}\right)} + e^{i\nu\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)}$$

zu machen, sondern man muß dafür setzen:

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\delta_{\max}} \left[e^{i\nu\left(t+\frac{\tau}{2}\right)} + e^{i\nu\left(t-\frac{\tau}{2}\right)} \right] d\delta \\
&\qquad = 2\, e^{i\nu t} \left[\cos\frac{\nu\, \tau_0}{2} \int\limits_0^{\delta_{\max}} \cos\left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right) d\delta \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sin\frac{\nu\, \tau_0}{2} \int\limits_0^{\delta_{\max}} \sin\left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right) d\delta \right] .
\end{aligned}
\right.
$$

Solange

$$
(14)\qquad \left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right)^2 \ll 1
$$

ist, kann man unter den Integralzeichen den Cosinus mit Eins, den Sinus mit seinem Argument vertauschen und findet dann als Ausdruck für die Schwingung:

$$
2\,\delta_{\max}\, e^{i\nu t} \left[\cos\frac{\nu\, \tau_0}{2} + \frac{\nu}{2} \bar{f} \cdot \sin\frac{\nu\, \tau_0}{2} \right] = 2\, \delta_{\max}\, e^{i\nu t} \cos\frac{\nu}{2}(\tau_0 - \bar{f}).
$$

$\bar{f}$ ist dabei der Mittelwert von f, gebildet über alle vorkommenden δ. Es ist dann also ganz so, als wäre die Zeitdifferenz τ innerhalb der betrachteten Strahlengesamtheit unveränderlich, hätte aber den über diese Gesamtheit gebildeten Mittelwert.

Ist Bedingung (14) nicht mehr erfüllt, so treten in (13) Fresnelsche Integrale auf, da $f(\delta)$ eine quadratische Funktion ist. Dann ist die Streifenverschiebung nicht mehr proportional zu ω, sondern hängt in weniger einfacher Weise davon ab. Man darf hierin keinen Widerspruch dagegen sehen, daß wir sonst immer nur zu ω proportionale Summanden berücksichtigt haben. Für die Berechnung der Zeitunterschiede τ sind nach wie vor quadratische und höhere Glieder vernachlässigt. Aber die obige Rechnung zeigt eben, daß man bei hinreichender Breite des Strahlenbündels trotzdem eine zu ω nicht mehr proportionale Streifenverschiebung beobachtet.

§ 8. Was kann uns nun der Harreßsche Versuch, wenn er erst bis zu der ganzen erreichbaren Vollendung durchgeführt ist, lehren? Harreß selbst und Hr. Knopf berechnen aus ihm den Mitführungskoeffizienten des Glases und prüfen, wie weit der gemessene Wert mit der Fresnelschen Formel dafür übereinstimmt. Wir haben hier die Theorie so geformt, daß der Versuch als ein Ersatz für den in Fig. 1 dargestellten erscheint und letzterem eigentlich als Zweck die Bestätigung der Umrechnungsformel für die Zeit in der Lorentz-Transformation zugeschrieben. Doch besteht natürlich zwischen diesen Auffassungen kein Widerspruch. Die Optik der ohne Beschleunigung bewegten Körper ist eine so einheitliche und in sich verflochtene Theorie, daß man sie nur als Ganzes bestätigen oder widerlegen kann. Jede Bestätigung irgendeiner ihrer Aussagen kommt immer dem Ganzen zugute.

Voraussetzung der Theorie ist bisher, daß die mit der Drehung verbundenen Beschleunigungen die Lichtgeschwindigkeit in keiner wahrnehmbaren Weise beeinflussen. Die allgemeine Relativitätstheorie stützt diese Annahme. Ob sie zutrifft, kann nur die sehr wünschenswerte Wiederholung des Versuchs zeigen.

Berlin, Dezember 1919.

(Eingegangen 21. Januar 1920.)