2. *Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik?*[1]) *von P. Ehrenfest.*

„Warum hat unser Raum gerade drei Dimensionen?[1]) oder anders gefragt: „Welche *singulären*[2]) Vorkommnisse unterscheiden die Physik des R_3 vor der in den übrigen R_n?“ — So gestellt, sind die Fragen vielleicht sinnlos, jedenfalls fordern sie zur Kritik heraus. Denn „ist“ der Raum?, „ist“ er dreidimensional? Und vollends die Frage nach dem „warum“. Auch: was muß man unter „der“ Physik des R_4 oder R_7 verstehen?

Ich werde nicht versuchen, diesen Fragen eine minder anstößige Form zu geben. Glückt es, nur erst mehr und mehr singuläre Eigenschaften des R_3 aufzufinden, dann wird schließlich von selber deutlich werden, welche „vernünftige“ Frage sich zu der gefundenen Antwort konstruieren läßt.

§ 1. Schwerkraft und Planetenbewegung.

Was die Bewegung eines Planeten um einen Zentralkörper betrifft, so kann man feststellen, daß ein charakteristischer Unterschied zwischen R_3 und R_2 einerseits und allen höheren R_n anderseits besteht, was die Stabilität der Kreisbahn be-

1) Auszug aus der gleichnamigen Abhandlung in Versl. d. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam **26.** S. 105. 1917 (Sitzung v. 26. V. 1917) = Proceedings **20.** S. 200. — Die interessante Bemerkung, die H. Weyl kürzlich über die Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Welt gemacht hat (Gravitation u. Elektrizität. Sitzungsber. preuß. Ak. **26.** S. 474 oben. 1918; Neue Erweiterung der Relativtheorie. Ann. d. Phys. **59.** S. 133 Mitte. 1919), veranlaßt mich, hier noch einmal meine Bemerkungen zusammenzustellen, obwohl ich mir dessen bewußt bin, daß sie sehr elementar sind und einzeln genommen den meisten gut bekannt sein dürften. Aber ich hoffe eben, daß vielleicht andere dann einen Anlaß finden werden, reicheres und besseres Material zu dieser faszinierenden Frage vorzulegen.

2) Vgl. hierzu „Schlußbemerkung 1“.

trifft. Während im R_3 die Bewegung bei einer Störung im Endlichen bleibt, wenn die Energie nicht zu groß ist und dies im R_2 sogar für jeden beliebigen endlichen Betrag der Energie der Fall ist, sind *im R_4, R_5, R_6 usw. die Kreisbahnen zwar natürlich auch noch möglich, aber bei jeder noch so kleinen Störung läuft der Planet längs einer Spirale in den Zentralkörper oder ins Unendlichferne.*

Das Anziehungsgesetz im R_n setzen wir $\varkappa \frac{M m}{r^{n-1}}$; dazu gehört für $n > 2$ eine potentielle Energie:

$$V(r) = -\varkappa \frac{M m}{(n-2) r^{n-2}} \tag{1}$$

Dies entspricht natürlich der Annahme:

a) daß die Kraft nach dem Zentrum gerichtet und nur Funktion von r ist;

b) daß auch im R_n für die Schwerkraft das Theorem von Gauss über die Kraftlinienströmung gelten soll.

Man erhält so die Bewegungsgleichungen:

$$m \frac{d^2 x_h}{d t^2} = -\varkappa \frac{M m}{r^{n-1}} \frac{x_h}{r} = -\frac{\partial V}{\partial x_h} \qquad (h = 1, \ldots n).$$

Die Bahn ist eben. Einführung von Polarkoordinaten r, φ gibt für Energie und Flächensatz:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = E, \qquad m r^2 \dot{\varphi} = \Theta.$$

Elimination von $\dot{\varphi}$ gibt:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V}{m} - \frac{\Theta^2}{m^2 r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{A r^2 + B r^{4-n} - C^2}, \tag{2}$$

wo A, B, C Konstanten sind, von denen die erste und letzte von den Beginndaten der Bewegung abhängt, insofern sie die Totalenergie E und die Konstante des Flächensatzes Θ enthalten. Damit r bei der Bewegung zwischen zwei positiven Werten hin und her pendle, ist nötig, daß $\dot{r}$ reell ist und abwechselnd positive und negative Werte annimmt, also muß die Größe unter der Wurzel positiv sein zwischen zwei Werten von r, für die sie Null ist. Die Diskussion der Fälle, worin das vorkommt, läßt sich leicht geometrisch geben, indem man die Kurven $y = A r^2$ und $y = B r^{4-n}$ zeichnet, hieraus die Summenkurve skizziert und nachsieht, wie sie von $y = c^2$

geschnitten wird.[1]) Entsprechend läßt sich auch der Fall $n = 2$ behandeln, wo (1) ersetzt werden muß durch:

$$V = \varkappa M m \lg r, \tag{1'}$$

also (2) durch

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\alpha r^2 - \beta r^2 \lg r - \gamma^2}, \tag{2'}$$

wo

$$\alpha = \frac{2E}{m}, \quad \beta = 2\varkappa M, \quad \gamma^2 = \frac{\Theta^2}{m^2}.$$

Das Resultat der Diskussion ist:

n	Kreisbahnen	Bewegungen zwischen zwei positiven Werten von r	Bewegung nach Unendlich
4, 5 ...	instabil	unmöglich!	möglich
3	stabil	möglich [geschlossene Bahn]	möglich
2	stabil	möglich [ungeschlossene Bahn]	möglich!

Bemerkungen:

1. Es sei bei dieser Gelegenheit an das Theorem von J. Bertrand (1873) erinnert[2]): Die Bahnen eines materiellen Punktes, beschrieben unter Einfluß einer Zentralkraft, die nur Funktion des Abstandes ist, sind nur dann geschlossen, wenn die Kraft entweder proportional mit dem Abstand oder umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes ist.

2. Bemerkenswert ist, daß die Planetenbewegungen die den elliptischen entsprechen, auch im *nichteuklidischen* R_3 geschlossen sind, falls man nur die Gleichungen der Mechanik und das Anziehungsgesetz zugleich diesem Raum anpaßt.[3])

3. Man wird sich natürlich auch fragen, was aus dem Bohrschen *Atommodell* wird im R_n für $n \neq 3$. Modifiziert man das Gesetz der elektrischen Anziehung so wie das der

---

1) Vgl. die Figuren in Koninkl. Akad. van Wetensch. Amsterdam a. a. O. „Aanhangsel I".

2) J. Bertrand, C. R. 77. S. 846. 1873.

3) H. Liebmann, Nichteukl. Geometrie (Samml. Schubert. 2. Aufl. 1912. S. 207).

Schwere und behält: a) die Quantisierung des Flächenmoments, b) den Ansatz $\nu = \frac{E' - E}{h}$ bei, so sieht man alsbald, wie scharf *das Bohrsche Modell gerade auf den R_3 paßt*: Für $n = 4$ erhält man eine ganz arge Degeneration.[1]) Für $n = 2$ erhält man Spektralserien mit Häufungsstelle im Unendlichen, weil ja im R_2 unendlich viel Energie nötig ist, um das Elektron ins Unendliche zu werfen. Für $n > 4$ sind vor allem natürlich höchstens die Kreisbahnen zu brauchen. Im Gegensatz zum R_3 liegen hier die Bahnen wachsender Quantenzahl stets dichter und dichter beim Kern, und damit im Zusammenhang haben auch hier wieder die Spektralserien ihre Häufungsstellen im Unendlichen.[2])

§ 2. Dualität zwischen elektrischem und magnetischem Feld im R_3.

Im R_n wird das elektrische Feld durch n-Komponenten bestimmt, das magnetische Feld durch $\frac{n(n-1)}{2}$ Kennzahlen. Nur für $n = 3$ fallen diese beiden Anzahlen zusammen und besteht also die weitgehende Dualität zwischen den beiden Feldern.

In der Tat seien $x_2 \ldots . x_n$ und $x_0 = i\,c\,t$ die $n + 1$ Koordinaten der Raum-Zeit-Welt und $\varphi_0, \varphi_1 \ldots . \varphi_n$ die Komponenten des retardierten Potentials (entsprechend dem Viererpotential in der zum R_3 gehörigen Relativitätstheorie), so entsprechen die $\frac{n(n-1)}{2}$-Komponenten der Rotation:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} \qquad (h, k = 1, \ldots n)$$

dem *magnetischen* Feld und die n-Komponenten:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_h} \qquad (h = 1, \ldots n)$$

dem elektrischen Feld.

Analoges ist bekanntlich zu sagen betreffs Translations-Rotationsgeschwindigkeit, Kraft-Drehmoment.

§ 3. Die Wellenausbreitung im R_n.

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^n{}_h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h^2} = 0$$

---

1) a. a. O., „Aanhangsel II".

2) a. a. O., Ebenda.

haben im ξ für $n = 3$ folgende Eigenschaft: Hat man im Moment $t = 0$ überall $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ außer in einem kleinen Gebiet γ, dann ist in jedem späteren Moment t (wenn nur nicht zu klein genommen wird) noch überall $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ außer in einer dünnen Schale zwischen zwei Oberflächen (vgl. Figur), die — falls γ klein genug ist, angenähert zwei konzentrische Kugeln sind um γ.

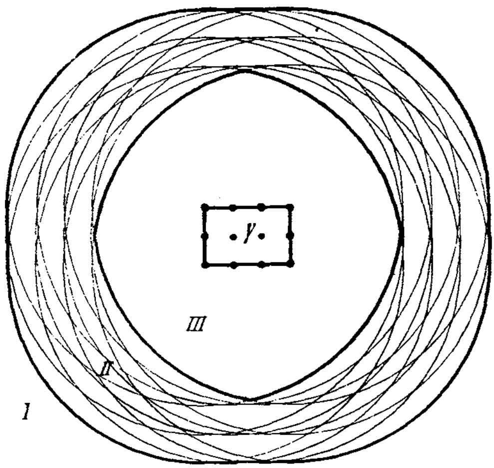

Fig. 1.

Im R_2 ist es bekanntlich[1]) anders: Bei der Wellenausbreitung auf einer Membran hat man außer einer Störung in dem Ring, der II entspricht, auch noch eine (schwächere) Störung im ganzen inneren Gebiet III.

Alle R_{2n+1} verhalten sich in dieser Beziehung wie der R_3, alle R_{2n} analog wie der R_2 (in dieser letzteren kann man also nicht das Prinzip von Huygens anwenden).[2 u. 3]) Aber unter

1) Vgl. z. B. Rayleigh, Theory of sound Ch. XIV, § 275.

2) Vgl. Duhem, Hydrodynamique T. I. Paris, Hermann Volterra, Acta Math. 1894; Hadamard, Bull. soc. franç. de phys. 1906 (dort andere Literatur, auch die älteren Arbeiten von Hadamard); Acta math. **31.** S. 333. 1908; Leç. sur la propag. des Oudes (Paris Hermann 1903) Chap VII § 3.

3) Diese Tatsache steht rechnerisch in Beziehung zu der folgenden Tatsache: Die Formel für das Volumen einer Kugel im R_p enthält für

den R_{2n+1} zeichnet sich R_3 durch eine Eigenartigkeit aus, die evident wird, wenn man das retardierte Potential berechnet [1]), d. h. das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^n{}_h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h^2} = \varrho\,.$$

Für R_3 erhält man:

$$\varphi = \frac{1}{c_3}\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} d\,\omega\,\frac{[\varrho]}{r}\,.$$

Für R_5:

$$\varphi = \frac{1}{3\,c_5}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} d\,\omega\left\{\frac{[\varrho]}{r^3} + \frac{\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right]}{r^2}\right\}.$$

Für R_7:

$$\varphi = \frac{1}{5\,c_7}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\!\int d\,\omega\left\{\frac{[\varrho]}{r^5} + \frac{1}{c}\,\frac{\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right]}{r^4} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\left[\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}\right]}{r^3}\right\}.$$

Hierin sind:

$$c_3 = 4\pi\,,\quad c_5 = \frac{8}{3}\pi^2\,,\quad c_7 = \frac{11}{15}\pi^3$$

die Oberflächen der Einheitskugel im R_3, R_5, R_7 und die Symbole

$$[\varrho]\,,\quad \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right],\quad \left[\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}\right]$$

bedeuten, daß man die Werte zur Zeit $t - \frac{v}{c}$ (die „retardierten" Werte) nehmen muß. Man sieht: *im Gegensatz zu R_3 werden im R_5 und R_7 usw. die retardierten Potentiale nicht nur durch ϱ, sondern auch noch durch dessen Differentialquotienten nach der Zeit bestimmt.* Dabei ist noch zu bemerken, daß für große Werte von r, also bei der eigentlichen Aus-

---

$p = 2n$ und $p = 2n + 1$ die Zahl π in *derselben* Potenz n. Die analytische Beziehung zwischen beiden Tatsachen tritt in Evidenz, wenn man die Wellengleichung z. B. mit Hilfe von Fourierintegralen integriert. Man stößt dann schließlich auf ein Integral über die $(p - 1)$te Potenz von einem Quadratwurzelausdruck. Der Integrand wird also rational, wenn $p = 2n + 1$, irrational, wenn $p = 2n$. Das gleiche findet statt bei Berechnung des Kugelvolumens.

1) Vgl. a. a. O., Aanhangsel IV, eine einfache Ableitung der Lösungen für die R_{2n+1}.

strahlung, es jeweils gerade auf den höchsten Differentialquotient von ϱ ankommt, weil er durch die kleinste Potenz von r dividiert ist. Ein „Elektron" mit scharf begrenzter Ladung würde also im R_5, R_7 ... durch seine Bewegung Felder mit hohen Singularitäten ausstrahlen!

Schlußbemerkungen: 1. Wir haben hier nur solche Beziehungen betrachtet, bei denen der R_3 eine *singuläre* Stellung gegenüber den anderen R_n einnimmt. Darüber hinaus ist es natürlich oft sehr instruktiv, sich deutlich zu machen, wie an so vielen Punkten der Physik die Dreizahl der Dimensionen eingreift, ohne daß bei Übergang auf den R_n der R_3 gerade singuläres Verhalten zeigt: z. B. sind die *4* im Strahlungsgesetz von Stefan Boltzmann und die *3* im Verschiebungsgesetz von W. Wien: $\varrho = \nu^3 f(\nu/T)$ im R_n durch $(n+1)$ und n zu ersetzen. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen einatomiger Gase $c_p/c_v = 1^2/_3$ durch $1 + 2/n$ usw.

2. Man wird so veranlaßt, bei jeder in der Physik auftretenden, von den Maßeinheiten unabhängigen universellen Konstanten *versuchsweise* nach einem Zusammenhang mit der Dreidimensionalität des Raumes zu fragen (oder der Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Welt). Man denke z. B. an die Rolle der Zahl 8 (und 10?) im periodischen System der chemischen Elemente [vgl. Borns „kubisches Atommodell"[1]]; den Exponenten 2 in der Formel von Balmer.

3. Aber es greift noch eine andere ganze Zahl in jeden Winkel der Physik ein: *der Exponent „zwei" des Theorems von Pythagoras.* Oder anders ausgedrückt: die homogen *quadratische* Maßbestimmung

$$d s^2 = \sum_h \sum_k g_{hk}\, d x_h\, d x_k$$

hat eine überherrschende Bedeutung gegenüber allen anderen homogenen Formen. — Läßt sich an diesem *zwei* nichts mehr fragen und begreifen?

Leiden, August 1919.

1) Verh. d. Deutsch. phys. Ges. **20**. S. 230. 1918.

(Eingegangen 31. August 1919.)