1919. № 10.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 59.

1. *Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie;*

von H. Weyl.

Kap. I. Geometrische Grundlage.

Einleitung. Um den physikalischen Zustand der Welt an einer Weltstelle durch Zahlen charakterisieren zu können, muß 1. die Umgebung dieser Stelle auf *Koordinaten* bezogen sein und müssen 2. gewisse *Maßeinheiten* festgelegt werden. Die bisherige Einsteinsche Relativitätstheorie bezieht sich nur auf den ersten Punkt, die Willkürlichkeit des Koordinatensystems; doch gilt es, eine ebenso prinzipielle Stellungnahme zu dem zweiten Punkt, der Willkürlichkeit der Maßeinheiten, zu gewinnen. Davon soll im folgenden die Rede sein.

Die Welt ist ein vierdimensionales Kontinuum und läßt sich deshalb auf vier Koordinaten $x_0\,x_1\,x_2\,x_3$ beziehen. Der Übergang zu einem anderen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ wird durch stetige Transformationsformeln

$$x_i = f_i(\bar{x}_0\,\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

vermittelt. An sich ist unter den verschiedenen möglichen Koordinatensystemen keines ausgezeichnet. Die Relativkoordinaten $d x_i$ eines zu dem Punkte $P = (x_i)$ unendlich benachbarten $P' = (x_i + d x_i)$ sind die Komponenten der infinitesimalen Verschiebung $\overrightarrow{PP'}$ (eines „Linienelementes" in P). Sie transformieren sich beim Übergang (1) zu einem anderen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ linear:

$$d x_i = \sum_k \alpha_k^i\, d\bar{x}_k\,; \tag{2}$$

α_k^i sind die Werte der Ableitungen $\partial f_i / \partial \bar{x}_k$ im Punkte P. In der gleichen Weise transformieren sich die Komponenten ξ^i irgendeines *Vektors* in P. Mit einem die Umgebung von P bedeckenden Koordinatensystem ist ein „Achsenkreuz" in P verknüpft, bestehend aus den „Einheitsvektoren" $\mathfrak{e}_i$ mit den Komponenten $\delta_i^0,\ \delta_i^1,\ \delta_i^2,\ \delta_i^3$:

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0\,(i \neq k) \\ 1\,(i = k) \end{cases}.$$

Eben auf dieses Achsenkreuz muß man sich stützen, um nichtskalare Größen durch Zahlen charakterisieren zu können. Zwischen den Einheitsvektoren e_i, $\bar{e}_i$ zweier Koordinatensysteme in P bestehen die zu (2) „kontragredienten" linearen Transformationsformeln

$$\bar{e}_i = \sum_k \alpha_i^k e_k.$$

In der speziellen Relativitätstheorie sind die α_k^i Konstante (unabhängig vom Ort), weil die Übergangsfunktionen f_i in (1) dort stets linear sind; nicht so in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Um die Abhängigkeit der Maßzahl von der Maßeinheit klarzulegen, halten wir uns an das geometrische Beispiel der *Strecke*. Riemann[1]) nahm an, daß sich unendlich kleine Strecken sowohl an derselben wie auch an irgend zwei verschiedenen Stellen messend miteinander vergleichen lassen, und die auf dieser Annahme beruhende Riemannsche Geometrie liegt, in ihrer Anwendung auf das vierdimensionale Kontinuum der Welt, der Einsteinschen Gravitationstheorie zugrunde. Legt man eine bestimmte Strecke (und natürlich allerorten die gleiche) als Maßeinheit fest, so kommt jeder Strecke eine sie völlig charakterisierende Maßzahl l zu. Bei abgeänderter Wahl der Maßeinheit aber erhält man eine andere Maßzahl $\bar{l}$, die aus l durch die lineare Transformation

$$\bar{l} = a\, l$$

hervorgeht; in ihr ist a, das Verhältnis der Maßeinheiten, eine universelle Konstante (unabhängig von Ort und Strecke). Wie man sieht, entspricht dieser Standpunkt gegenüber der Frage der Maßeinheit genau demjenigen, welchen die spezielle Relativitätstheorie hinsichtlich des Achsenkreuzes einnimmt. Die allgemeine Relativitätstheorie wird statt dessen nur postulieren, daß a von der Strecke unabhängig ist, nicht aber vom Orte; sie muß die ohnehin in einer reinen „Nahegeometrie" unzulässige Annahme der Möglichkeit des „Fernvergleichs" fallen lassen: nur Strecken, die sich an der gleichen Stelle befinden, lassen sich aneinander messen. An jeder einzelnen Weltstelle muß die Streckeneichung vorgenommen werden, diese Auf-

1) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Mathematische Werke (2. Aufl., Leipzig 1892), Nr. XIII, p. 272.

gabe kann nicht einem zentralen Eichamt übertragen werden. An Stelle des Riemannschen Fernvergleichs aber hat ein Prinzip zu treten, das die kongruente Verpflanzung der Strecken von einem Punkte P nach den zu P *unendlich benachbarten Punkten* gestattet. Damit erst hat sich, wie ich glaube, der historische Prozeß der Loslösung von der Euklidischen Starre, die Überwindung der Ferngeometrie vollendet. Eine reine Infinitesimalgeometrie kommt zustande, welche in dem gleichen Sinne die Grundlage einer reinen Nahewirkungsphysik ist, wie die Riemannsche Geometrie Grundlage ist für die in den Rahmen von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie sich einfügende Physik. Ich stelle hier kurz die Hauptbegriffe und -tatsachen der Infinitesimalgeometrie zusammen; eine ausführlichere Darstellung wird die in Vorbereitung befindliche 3. Auflage meines Buches „Raum, Zeit, Materie" (Springer) enthalten.[1])

Geometrie. Eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist *affin zusammenhängend*, wenn von jedem Vektor in einem Punkte P feststeht, in welchen Vektor in P' er durch Parallelverschiebung übergeht; P' bedeutet dabei einen beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkt. Es ist zu fordern, daß zum Punkte P ein Koordinatensystem existiert (ich nenne es geodätisch in P) derart, daß in ihm die Komponenten eines jeden Vektors in P bei infinitesimaler Parallelverschiebung ungeändert bleiben. Benutzt man ein beliebiges Koordinatensystem x_i und ist darin $P = (x_i^0)$, $P' = (x_i^0 + dx_i)$, hat ferner ein willkürlicher Vektor in P die Komponenten ξ^i, der aus ihm durch Parallelverschiebung nach P' hervorgehende Vektor die Komponenten $\xi^i + d\,\xi^i$, so gilt eine Gleichung[2])

$$d\,\xi^i = -\,d\,\gamma^i_r\,\xi^r. \tag{3}$$

Die vom Vektor ξ nicht abhängigen infinitesimalen Größen $d\gamma^i_r$ sind lineare Differentialformen

$$d\,\gamma^i_r = \Gamma^i_{rs}\,d\,x_s,$$

deren Zahlkoeffizienten Γ, die „Komponenten des affinen Zusammenhangs", der Symmetriebedingung $\Gamma^i_{sr} = \Gamma^i_{rs}$ genügen.

1) Man vgl. auch die Arbeiten des Verf. in den Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1918, p. 465ff., und der Mathem. Zeitschr. 2. p. 384ff. 1918.

2) Nach doppelt auftretenden Indizes ist stets zu summieren.

(3) bringt zum Ausdruck, daß die Parallelverschiebung von P nach P' die Gesamtheit der Vektoren in P affin (oder linear) auf die Gesamtheit der Vektoren in P' abbildet. Ist das Koordinatensystem geodätisch in P, so verschwinden dort alle Γ. Es gibt zwischen den verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit keine Unterschiede hinsichtlich der Natur ihres affinen Zusammenhangs mit der Umgebung.

Eine *metrische* Mannigfaltigkeit trägt in jedem Punkte P eine *Maßbestimmung*; d. h. jeder Vektor $\mathfrak{x}$ in P bestimmt eine *Strecke*, und es gibt eine von dem willkürlichen Vektor $\mathfrak{x}$ abhängige quadratische Form $\mathfrak{x}^2$ (vom Trägheitsindex 3) derart, daß zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in P dann und nur dann dieselbe Strecke bestimmen, wenn $\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{y}^2$ ist. Dadurch ist die Form nur bis auf einen willkürlichen positiven Proportionalitätsfaktor festgelegt. Wählen wir diesen in bestimmter Weise, so ist die Mannigfaltigkeit in P *geeicht*, $\mathfrak{x}^2 = l$ nennen wir dann die Maßzahl der durch $\mathfrak{x}$ bestimmten Strecke. Ändert man die Eichung ab, so bekommt dieselbe Strecke eine andere Maßzahl $\bar{l}$, die aus l durch eine lineare Transformation $\bar{l} = \alpha l$ hervorgeht (α eine positive Konstante). Relativ zu einem Koordinatensystem drücke sich $\mathfrak{x}^2$ für den willkürlichen Vektor $\mathfrak{x}$ mit den Komponenten ξ^i durch die Formel aus:

$$\mathfrak{x}^2 = \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \xi^k \qquad (g_{ki} = g_{ik}).$$

Eine metrische Mannigfaltigkeit trägt aber nicht nur in jedem Punkte eine Maßbestimmung, sondern sie ist außerdem *metrisch zusammenhängend*. Dieser Begriff ist völlig dem des affinen Zusammenhangs analog; wie dieser die Vektoren betrifft, so jener die Strecken. Jede Strecke in P geht also durch kongruente Verpflanzung nach dem beliebigen unendlich benachbarten Punkte P' in eine bestimmte Strecke in P' über. Wieder ist zu fordern, daß die Eichung sich so einrichten läßt (sie heißt dann: geodätisch in P), daß bei kongruenter Verpflanzung einer jeden Strecke in P ihre Maßzahl ungeändert bleibt. Ist die Mannigfaltigkeit irgendwie geeicht und l die Maßzahl einer Strecke in P, $l + d\,l$ die Maßzahl der aus ihr durch kongruente Verpflanzung nach P' entstehenden Strecke, so wird infolgedessen

$$d\,l = -\,l\,d\varphi \tag{4}$$

sein, wo $d\varphi$ von der Strecke nicht abhängt; diese Gleichung bringt zum Ausdruck, daß jene Verpflanzung eine ähnliche Abbildung der Strecken in P auf die Strecken in P' bewirkt. Zweitens lehrt die an die Spitze gestellte Forderung, daß $d\varphi$ linear von der Verrückung $\overrightarrow{PP'}$ (mit den Komponenten dx_i) abhängt:

$$d\varphi = \sum_i \varphi_i \, dx_i .$$

Es gibt zwischen den verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit keine Unterschiede hinsichtlich der Natur der in jedem von ihnen herrschenden Maßbestimmung und seines metrischen Zusammenhangs mit der Umgebung. *Die lineare und die quadratische Fundamentalform*

$$d\varphi = \varphi_i \, dx_i \quad \textit{und} \quad ds^2 = g_{ik} \, dx_i \, dx_k$$

beschreiben die Metrik der Mannigfaltigkeit relativ zu einem Bezugssystem (= Koordinatensystem + Eichung); *sie bleiben bei Koordinatentransformation invariant, bei Abänderung der Eichung nimmt die zweite einen Faktor* a *an, der eine positive stetige Ortsfunktion ist* (das „Eichverhältnis"), *die erste vermindert sich um das totale Differential* $d \lg a$.

Eine metrische Mannigfaltigkeit ist ohne weiteres auch affin zusammenhängend — auf Grund der Forderung, daß bei Parallelverschiebung eines Vektors die durch den Vektor bestimmte Strecke sich kongruent bleibe: das ist die *Grundtatsache der Infinitesimalgeometrie.* Erklären wir den Prozeß des Herabziehens eines Index i an einem System von Zahlen a^i (einerlei, ob außer i noch weitere Indizes auftreten oder nicht) ein für allemal durch die Gleichungen

$$a_i = g_{ij} \, a^j$$

(und den umgekehrten Prozeß durch die dazu inversen), so kann der affine Zusammenhang einer metrischen Mannigfaltigkeit aus den Formeln entnommen werden:

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik} \varphi_r \qquad (\Gamma_{i,rs} = g_{ij} \Gamma^j_{\ rs}),$$

$$\Gamma_{r,ik} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \right) + \tfrac{1}{2} (g_{ir} \varphi_k + g_{kr} \varphi_i - g_{ik} \varphi_r).$$

Noch an einen geometrischen Begriff sei erinnert: Zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in P heißen zueinander *orthogonal,* wenn für sie die zur quadratischen Form $\mathfrak{x}^2$ gehörige symmetrische Bilinearform $(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y})$ verschwindet; dieses Wechselverhältnis ist von dem Eichfaktor unabhängig.

Tensorkalkül. Ein (zweifach kovarianter, einfach kontravarianter) *Tensor* (3. Stufe) im Punkte P ist eine vom Koordinatensystem, auf das man die Umgebung von P bezieht, abhängige Linearform dreier Reihen von Variablen ξ, η, ζ:

$$\sum_{i,k,l=0}^{3} a^l_{ik} \xi^i \eta^k \zeta_l ,$$

vorausgesetzt, daß jene Abhängigkeit von folgender Art ist: die Ausdrücke der Linearform in zwei Koordinatensystemen gehen ineinander über, wenn man die ersten beiden Variablenreihen kogredient, die letzte kontragredient zu den Differentialen [Formel (2)] transformiert. Der Begriff des Tensors ist frei von jeder Beziehung auf die Metrik oder den affinen Zusammenhang der Mannigfaltigkeit. Die Skalare ordnen sich dem System der Tensoren als Tensoren 0. Stufe ein. Tensoren 1. Stufe heißen Vektoren; unter Vektor ohne näheren Zusatz wird wie bisher ein kontravarianter Vektor verstanden. Die schiefsymmetrischen kovarianten Tensoren spielen eine besondere Rolle und sollen zur Abkürzung lineare Tensoren genannt werden. Die Grundoperationen der *Tensoralgebra,* durch welche nur Tensoren in einem und demselben Punkte P miteinander verknüpft werden, sind: Addition, Multiplikation und Verjüngung; sie setzen die Mannigfaltigkeit weder als metrisch noch als affin zusammenhängend voraus. Das gleiche gilt noch für die Analysis der *linearen* Tensoren, welche lehrt, wie durch Differentiation allgemein aus einem linearen Tensor νter Stufe ein solcher der $(\nu + 1)$ten Stufe erzeugt wird:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i \quad \left| \; \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = u_{ik} \; \right| \; \ldots$$

In den Differentiationsprozeß der allgemeinen *Tensoranalysis* (die sich nicht auf die linearen Tensoren beschränkt) gehen aber die Komponenten des affinen Zusammenhangs ein; vollständig entfaltet sich die Tensoranalysis also erst im affin zusammenhängenden Raum (dagegen wird keine Metrik vorausgesetzt). Wir erwähnen als Beispiel

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_k} - \Gamma^i_{kr}\, u^r ;$$

aus dem Vektorfeld u^i entsteht so ein gemischtes Tensorfeld 2. Stufe.

Ist $\int \mathfrak{W}\, dx$ eine Integralinvariante — ich schreibe kurz dx für das Integrationselement $dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ —, so ist $\mathfrak{W}$ eine vom Koordinatensystem abhängige Funktion, welche sich bei Übergang von einem zum andern Koordinatensystem mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante $|\alpha_i^k|$ multipliziert. Eine solche Größe bezeichne ich als skalare Dichte. Analog ist der Begriff der *Tensordichte* (im Punkte P): das ist eine vom Koordinatensystem abhängige Linearform mehrerer Variablenreihen, wenn diese Linearform, wie sie im Koordinatensystem x_i lautet, sich in ihren Ausdruck im Koordinatensystem $\bar{x}_i$ verwandelt durch Multiplikation mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante und Transformation der Variablen nach dem gleichen Schema wie oben. Der Begriff ist frei von jeder Beziehung auf Metrik oder affinen Zusammenhang. Die schiefsymmetrischen kontravarianten Tensordichten spielen eine besondere Rolle und sollen lineare Tensordichten heißen. *Tensoren = Intensitätsgrößen, Tensordichten = Quantitätsgrößen*; während der Gegensatz dieser beiden Größenarten in der Riemannschen Geometrie verwischt ist, sind wir hier imstande, durch eine scharfes mathematisches Merkmal intensive und quantitative Größen voneinander zu unterscheiden. Die Grundoperationen der *Algebra der Tensordichten* sind: Addition, Multiplikation eines Tensors mit einer Tensordichte, Verjüngung; sie setzen weder Metrik noch affinen Zusammenhang voraus. Das gleiche gilt noch für die Analysis der *linearen* Tensordichten, welche durch Prozesse von divergenzartigem Charakter aus einer linearen Tensordichte νter Stufe eine solche der $(\nu - 1)$ten Stufe erzeugen lehrt:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}^i}{\partial x_i} = \mathfrak{v} \quad \Bigg| \quad \frac{\partial \mathfrak{v}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{v}^i \quad \Bigg| \quad \ldots$$

In den Divergenz- und Differentiationsprozeß der allgemeinen *Analysis der Tensordichten* gehen aber die Komponenten des affinen Zusammenhangs ein. Beispiel:

$$\frac{\partial \mathfrak{w}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma^\beta_{i\alpha} \mathfrak{w}^\alpha_\beta\,;$$

so entsteht aus einer gemischten Tensordichte 2. Stufe $\mathfrak{w}_i^k$ eine Vektordichte.

Es liegt im Begriff des Tensors und der Tensordichte. daß die darstellende Linearform nur vom Koordinatensystem, nicht auch von der Eichung abhängt. Im erweiterten und übertragenen Sinne wollen wir aber diesen Namen auch dann anwenden, wenn die Linearform vom Koordinatensystem in der oben geschilderten Weise, außerdem aber auch noch von der Eichung abhängt, und zwar so, daß sie beim Umeichen sich mit einer Potenz α^e des Eichverhältnisses multipliziert (Tensor bzw. Tensordichte vom Gewichte e). Doch sehen wir diese Erweiterung nur als einen Hilfsbegriff an, den wir um seiner rechnerischen Bequemlichkeit willen einführen. In dem erweiterten Reich (von welchem natürlich nur in einer metrischen Mannigfaltigkeit die Rede sein kann) existieren nämlich noch folgende beiden Operationen: 1. Durch Herabziehen eines Index verwandeln sich die Komponenten eines Tensors vom Gewichte e in die eines Tensors vom Gewichte $e+1$; der Charakter jenes Index geht dabei von kontravariant zu kovariant über. Das Umgekehrte gilt beim Heraufziehen eines Index. 2. Durch Multiplikation eines Tensors vom Gewichte e mit $\sqrt{g}$ ($-g$ ist die Determinante der g_{ik}, $\sqrt{g}$ die positive Quadratwurzel aus dieser positiven Zahl g) entsteht eine Tensordichte vom Gewichte $e+2$. Die letzte Operation soll ein für allemal dadurch angedeutet werden, daß man den zur Bezeichnung eines Tensors benutzten lateinischen Buchstaben in den entsprechenden deutschen verwandelt.

Krümmung. Pflanzt eine Strecke sich längs einer geschlossenen Kurve kongruent fort, so wird sie bei ihrer Rückkehr zum Ausgangspunkt im allgemeinen nicht mit der Ausgangsstrecke übereinstimmen. Um ein Maß für diese „Nichtintegrabilität" der Streckenübertragung zu finden, nimmt man (genau wie es durch den Stokesschen Satz für das Linienintegral geschieht) eine differentielle Zerlegung vor: man spannt in die geschlossene Kurve eine Fläche ein, die man sich durch eine Parameterdarstellung gegeben denkt, und zerlegt sie durch die Koordinatenlinien in unendlich kleine Parallelogramme. Man hat dann die Änderung ∇l zu bestimmen, welche die Maßzahl einer Strecke erfährt, wenn die Strecke, sich selbst kongruent bleibend, ein solches Flächenelement umfährt, das von den beiden Elementen dx_i und δx_i der Koordinatenlinien aufgespannt wird und somit selber die Komponenten

$$\Delta x_{ik} = d x_i \, \delta x_k - d x_k \, \delta x_i$$

besitzt. Man findet

$$\nabla l = - l \nabla \varphi,$$

und dabei hängt der Faktor $\nabla \varphi$ linear von dem Flächenelement ab; es ist nämlich

$$\nabla \varphi = f_{ik} dx_i \delta x_k = \tfrac{1}{2} f_{ik} \Delta x_{ik}, \qquad f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

Den durch die Metrik eindeutig bestimmten linearen Tensor 2. Stufe f_{ik} werden wir dementsprechend als „*Streckenkrümmung*" der metrischen Mannigfaltigkeit bezeichnen dürfen. Sein Verschwinden ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Längenübertragung integrabel ist und in der Mannigfaltigkeit daher die Riemannsche Geometrie gilt.

In genau der gleichen Beziehung steht die *Vektorkrümmung* zur Parallelverschiebung der Vektoren wie die eben konstruierte Streckenkrümmung zur kongruenten Streckenverpflanzung. Die Definition der Vektorkrümmung, die wir auch schlechthin als Krümmung bezeichnen, setzt nur affinen Zusammenhang der Mannigfaltigkeit voraus. Ein beliebiger Vektor $\mathfrak{x}$ wird beim Umfahren unseres unendlich kleinen Flächenelementes eine Änderung $\nabla \mathfrak{x}$ erleiden, die aus $\mathfrak{x}$ durch eine lineare Abbildung oder „Matrix" $\nabla \mathsf{F}$ hervorgeht:

$$\nabla \mathfrak{x} = \nabla \mathsf{F}(\mathfrak{x}), \quad \text{in Komponenten: } \nabla \xi^\alpha = \nabla F^\alpha_\beta \cdot \xi^\beta.$$

Auch hier hängt $\nabla \mathsf{F}$ linear vom Flächenelement ab:

$$\nabla \mathsf{F} = \mathsf{F}_{ik} dx_i \delta x_k = \tfrac{1}{2} \mathsf{F}_{ik} \Delta x_{ik} \qquad (\mathsf{F}_{ki} = - \mathsf{F}_{ik}).$$

Die Krümmung wird deshalb am besten als ein „linearer Matrixtensor 2. Stufe" bezeichnet. Gehen wir aber auf die Koeffizienten $F^\alpha_{\beta i k}$ dieser Matrizen F_{ik} ein, so erscheint die Krümmung als ein Tensor 4. Stufe; es ist

$$F^\alpha_{\beta i k} = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta k}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta i}}{\partial x_k} \right) + \left(\Gamma^\alpha_{r i} \Gamma^r_{\beta k} - \Gamma^\alpha_{r k} \Gamma^r_{\beta i} \right). \tag{5}$$

Die Vektorkrümmung muß die Streckenkrümmung als einen Bestandteil enthalten, da ja die Parallelverschiebung eines Vektors die kongruente Verpflanzung der durch ihn bestimmten Strecke automatisch mitbesorgt. In der Tat, zerlegen wir $\nabla \mathfrak{x}$ in eine zu $\mathfrak{x}$ orthogonale Komponente $^*\nabla \mathfrak{x}$ und eine zu $\mathfrak{x}$ parallele, so kommt

$$\nabla \mathfrak{x} = {}^*\nabla \mathfrak{x} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{x} \nabla \varphi.$$

Hand in Hand damit geht eine entsprechende Zerspaltung der Krümmung

$$F^\alpha_{\beta i k} = {}^*F^\alpha_{\beta i k} - \tfrac{1}{2}\delta^\alpha_\beta f_{ik}, \tag{6}$$

deren erster Bestandteil konsequenterweise „Richtungskrümmung" heißen muß. Die Zahlen ${}^*F_{\alpha\beta ik}$ sind nicht nur in bezug auf die Indizes i und k, sondern auch in bezug auf α und β schiefsymmetrisch.

Für spätere Rechnungen gebrauchen wir noch den durch Verjüngung entstehenden Tensor $F^\alpha_{i\alpha k} = F_{ik}$ und den daraus durch abermalige Verjüngung entstehenden Skalar vom Gewichte -1: $F^i_i = F$. Die aus ihnen durch Nullsetzen der φ_i hervorgehenden Riemannschen Krümmungsgrößen mögen mit $-R_{ik}$, bzw. $-R$ bezeichnet werden. Es ist dann

$$-F = R + \frac{3}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i} + \tfrac{3}{2}(\varphi_i\varphi^i). \tag{7}$$

Aus dem linearen Tensor f_{ik} entspringt (in der *vierdimensionalen* Welt) die lineare Tensordichte $\mathfrak{f}^{ik}$ (vom Gewichte 0) und aus beiden die skalare Dichte

$$\mathfrak{l} = \tfrac{1}{4} f_{ik}\,\mathfrak{f}^{ik}.$$

$\int \mathfrak{l}\, dx$ ist die einfachste Integralinvariante, welche sich aus der Metrik bilden läßt, und nur in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit existiert eine Integralinvariante von so einfachem Bau. Das in der Riemannschen Geometrie als Volumen auftretende Integral $\int \sqrt{g}\, dx$ ist hier natürlich ohne jede Bedeutung.

Der statische Fall. Das metrische Feld in der vierdimensionalen Welt ist ein statisches, wenn sich Koordinatensystem und Eichung so wählen lassen, daß die lineare Fundamentalform $= \varphi\, dx_0$ wird, die quadratische $= c^2\, dx_0{}^2 - d\sigma^2$. Dabei sind φ und $c\,(>0)$ Funktionen von $x_1\, x_2\, x_3$ allein und $d\sigma^2$ ist eine positiv-definite quadratische Form in den Variablen $x_1\, x_2\, x_3$. x_0 ist die *Zeit*, $x_1\, x_2\, x_3$ sind die *Raumkoordinaten*. Diese besondere Gestalt der Fundamentalformen wird durch Koordinatentransformation und Umeichen nur dann nicht zerstört, wenn die Zeitkoordinate x_0 für sich eine lineare Transformation erleidet, die Raumkoordinaten gleichfalls nur unter sich transformiert werden und das Eichverhältnis eine Konstante ist. Im statischen Fall bekommen wir also einen dreidimensionalen *Riemannschen Raum* mit der metrischen Fundamentalform $d\sigma^2$ und dazu zwei Skalarfelder c und φ in diesem Raum. Als willkürliche Maßeinheiten sind zu wählen die Längen- und die Zeiteinheit (cm, sec). $d\sigma^2$ ist von der Dimension cm^2, die Lichtgeschwindigkeit c von der Dimension cm $\cdot$ sec^{-1}, und φ hat die Dimension sec^{-1}. Es ist namentlich zu beachten, daß der dreidimensionale Raum sich nicht als ein beliebiger metrischer herausstellt (in welchem die Streckenübertragung nicht integrabel ausfiele), sondern als ein Riemannscher Raum.

Kap. II. **Feldgesetze und Erhaltungssätze.**

Übergang zur Physik. Die spezielle Relativitätstheorie lehrte, daß der in der vierdimensionalen Welt herrschenden Weltgeometrie nicht eine „Galileische", sondern eine „Euklidische" Metrik zugrunde liegt. Es entsprang aber daraus eine Disharmonie, daß die *Nahewirkungsgesetze* der modernen Physik die Euklidische *Ferngeometrie* zum Fundament hatten. Hierin kann man einen spekulativen Grund dafür erblicken, die Euklidische Weltgeometrie durch die Riemannsche und schließlich durch die eben besprochene reine Nahegeometrie zu ersetzen. Einstein blieb bei der Riemannschen Geometrie stehen; für seine „allgemeine Relativitätstheorie" sind aber neben dem Übergang von der Euklidischen Fern- zur Riemannschen Nahegeometrie zwei weitere Gedanken charakteristisch: 1. die Metrik ist nicht a priori gegeben, sondern von der Verteilung der Materie abhängig; in diesem Zusammenhange ist die *Relativität der Bewegung* dasjenige Argument, aus welchem die Theorie ihre Überzeugungskraft schöpft. 2. Die aus der Erfahrung bekannten und bis dahin unverstandenen Eigenschaften der Gravitation (Gleichheit von schwerer und träger Masse) werden begreiflich, wenn man die Gravitationserscheinungen auf die Abweichung der Metrik von der Euklidischen zurückführt, nicht aber auf gewisse, „in" der metrischen Welt wirksame Kräfte. — Die so zustande kommende Gravitationstheorie steht, obwohl ihre Struktur auf den ersten Blick ganz und gar von der Newtonschen abweicht, wie sich bei Verfolgung ihrer Konsequenzen unter bestimmten vereinfachenden Annahmen herausstellte, im Einklang mit allen astronomischen Erfahrungen.

Die neue hier vorgenommene Erweiterung betrifft zunächst gleichfalls nur die weltgeometrische Grundlage der Physik und stellt als solche den konsequenten Ausbau des Relativitätsgedankens dar. Aber mit eben derselben Macht wie die Relativität der Bewegung zur Einsteinschen Theorie, zwingt uns die Überzeugung von der *Relativität der Größe* zu diesem darüber hinaus gehenden Schritt. Und bekamen wir damals die Gravitation, so bekommen wir jetzt den *Elektromagnetismus* geschenkt. Denn wie sich die Potentiale des Gravitationsfeldes nach Einstein zu einer quadratischen Differentialform zusammenfügen, so, wissen wir, bilden die Potentiale des elektromagnetischen Feldes die Koeffizienten einer invarianten linearen Differentialform. Es liegt deshalb nahe, die in der reinen Nahegeometrie neben der quadratischen auftretende lineare Fundamentalform mit jener Potentialform des elektromagnetischen Feldes zu identifizieren. Dann würden nicht nur die Gravitationskräfte, sondern auch die elektromagnetischen aus der Weltmetrik entspringen; und da uns andere wahrhaft ursprüngliche Kraftwirkungen außer diesen beiden überhaupt nicht bekannt sind, würde durch die so hervorgehende Theorie der Traum des Descartes von einer rein geometrischen Physik in merkwürdiger, von ihm selbst freilich gar nicht vorauszusehender Weise in Erfüllung gehen, indem sich zeigte: die Physik ragt mit ihrem Begriffsgehalt überhaupt nicht über die Geometrie hinaus, *in der Materie und den Naturkräften äußert sich lediglich das metrische Feld.* Gravitation und Elektrizität wären damit aus einer einheitlichen Quelle erklärt. Für diesen Gedanken spricht der gesamte Erfahrungsschatz, der in der Maxwellschen Theorie niedergelegt ist. Denn hier (in der Infinitesimalgeometrie) wie dort (in der Maxwellschen Theorie) ist die lineare Form $\varphi_i \, dx_i$ nur bestimmt bis auf ein additiv hinzutretendes totales Differential, erst das aus ihr sich ableitende „Feld" (= Streckenkrümmung)

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i},$$

welches den Gleichungen genügt:

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} = 0,$$

ist frei von jeder Willkür; und die elektromagnetische Wirkungsgröße, welche die Maxwellsche Theorie beherrscht,

$$\int \mathfrak{l}\, dx = \tfrac{1}{4} \int f_{ik}\, \mathfrak{f}^{ik}\, dx\,,$$

ergibt sich auch hier als eine Invariante, und zwar als die einfachste Integralinvariante, die überhaupt existiert. Nicht nur für die Maxwellsche Theorie eröffnet sich so ein tieferes Verständnis, sogar der bis jetzt immer als „zufällig" hingenommene Umstand, daß die Welt vierdimensional ist, wird begreiflich. Die angeführten Gründe scheinen mir denen, die Einstein auf seine allgemeine Relativitätstheorie hinführten, an Stärke etwa gleichwertig zu sein, mag auch bei uns der spekulative Charakter noch krasser hervortreten.

Stutzig machen könnte zunächst dies[1]): daß nach der reinen Nahegeometrie die Streckenübertragung nicht integrabel sein soll, wenn ein elektromagnetisches Feld vorhanden ist. Steht das nicht zu dem Verhalten der starren Körper und Uhren in eklatantem Widerspruch? Das Funktionieren dieser Meßinstrumente ist aber ein physikalischer Vorgang, dessen Verlauf durch die Naturgesetze bestimmt ist, und hat als solcher nichts zu tun mit dem ideellen Prozeß der „kongruenten Verpflanzung von Weltstrecken", dessen wir uns zum mathematischen Aufbau der Weltgeometrie bedienen. Schon in der speziellen Relativitätstheorie ist der Zusammenhang zwischen dem metrischen Felde und dem Verhalten der Maßstäbe und Uhren ganz undurchsichtig, sobald man sich nicht auf quasistationäre Bewegung beschränkt. Spielen somit diese Instrumente auch eine praktisch unentbehrliche Rolle als Indikatoren des metrischen Feldes (theoretisch wären zu diesem Zweck einfachere Vorgänge, z. B. die Lichtausbreitung, vorzuziehen), so ist es doch offenbar verkehrt, durch die ihnen direkt entnommenen Angaben das metrische Feld zu *definieren*. Wir werden auf die Frage nach Aufstellung der Naturgesetze zurückkommen müssen.

Die Durchführung der Theorie muß zeigen, ob sie sich bewährt. — Die Maxwell-Lorentzsche Theorie war gekennzeichnet durch den Dualismus von Materie und elektromagnetischem Feld; dieser wurde (auf dem Boden der speziellen Relativitätstheorie) aufgehoben durch die Miesche Theorie.[2])

---

1) Als Einwand gegen die hier vertretene Theorie formuliert von Einstein; vgl. den Anhang zu der oben zitierten Akademienote des Verf.

2) Ann. d. Phys. **37**, **39**, **40**. 1912/13.

An seine Stelle aber trat bei Berücksichtigung der Gravitation der Gegensatz von elektromagnetischem Feld („Materie im weiteren Sinne“, wie Einstein sagt) und Gravitationsfeld; er zeigt sich am deutlichsten in der Zweiteilung der Hamiltonschen Funktion, welche der Einsteinschen Theorie zugrunde liegt.[1]) Auch dieser Zwiespalt wird durch unsere Theorie überwunden. Der Integrand der Wirkungsgröße $\int \mathfrak{W}\, dx$ muß eine aus der Metrik entspringende skalare Dichte $\mathfrak{W}$ sein, und die Naturgesetze sind zusammengefaßt in dem Hamiltonschen Prinzip: Für jede infinitesimale Änderung δ der Weltmetrik, die außerhalb eines endlichen Bereichs verschwindet, ist die Änderung

$$\delta \int \mathfrak{W}\, dx = \int \delta \mathfrak{W}\, dx$$

der gesamten Wirkungsgröße $= 0$ (die Integrale erstrecken sich über die ganze Welt oder, was auf dasselbe hinauskommt, über einen endlichen Bereich, außerhalb dessen die Variation δ verschwindet). Die Wirkungsgröße ist in unserer Theorie notwendig eine reine Zahl; anders kann es ja auch nicht sein, wenn ein Wirkungsquantum existieren soll. Von $\mathfrak{W}$ werden wir annehmen, daß es ein Ausdruck 2. Ordnung ist, d. h. aufgebaut ist einerseits aus den g_{ik} und deren Ableitungen 1. und 2. Ordnung, andererseits aus den φ_i und deren Ableitungen 1. Ordnung. Das einfachste Beispiel ist die Maxwellsche Wirkungsdichte $\mathfrak{l}$. Wir wollen aber in diesem Kapitel keinen speziellen Ansatz für $\mathfrak{W}$ zugrunde legen, sondern untersuchen, was sich allein aus dem Umstande erschließen läßt, daß $\int \mathfrak{W}\, dx$ ein koordinaten- und eichinvariantes Integral ist. Wir bedienen uns dabei einer von F. Klein angegebenen Methode.[2])

Folgerungen aus der Invarianz der Wirkungsgröße. a) *Eichinvarianz.* Erteilen wir den die Metrik relativ zu einem Bezugssystem beschreibenden Größen φ_i, g_{ik} beliebige unendlich kleine Zuwächse $\delta \varphi_i$, δg_{ik} und bedeutet $\mathfrak{X}$ ein endliches Weltgebiet, so ist es der Effekt der partiellen Integration, daß das Integral der zugehörigen Änderung $\delta \mathfrak{W}$ von $\mathfrak{W}$ über das Gebiet $\mathfrak{X}$ in zwei Teile zerlegt wird: ein Divergenzintegral und ein

1) Vgl. Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916. p. 1111.

2) Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Sitzung vom 19. Juli 1918.

Integral, dessen Integrand nur noch eine lineare Kombination von $\delta\varphi_i$ und δg_{ik} ist:

$$(8)\qquad \int_{\mathfrak{x}} \delta \mathfrak{W}\, dx = \int_{\mathfrak{x}} \frac{\partial(\delta \mathfrak{v}^k)}{\partial x_k}\, dx + \int_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{w}^i\, \delta\varphi_i + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}^{ik}\, \delta g_{ik})\, dx\,. \qquad \{\mathfrak{W}^{ki} = \mathfrak{W}^{ik}\}$$

Dabei sind $\mathfrak{w}^i$, $\delta\mathfrak{v}^i$ die Komponenten je einer kontravarianten Vektordichte, $\mathfrak{W}_k^i$ aber die einer gemischten Tensordichte 2. Stufe (im eigentlichen Sinne). Die Komponenten $\delta\mathfrak{v}^i$ sind lineare Kombinationen von

$$\delta\varphi_i, \quad \delta g_{ik} \quad \text{und} \quad \delta g_{ik,r} \qquad \left\{g_{ik,r} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right\}.$$

Wir drücken jetzt zunächst aus, daß $\int_{\mathfrak{x}} \mathfrak{W}\, dx$ sich nicht ändert, wenn die Eichung der Welt infinitesimal abgeändert wird. Ist $\alpha = 1 + \pi$ das Eichverhältnis zwischen ursprünglicher und abgeänderter Eichung, so ist π ein den Vorgang charakterisierendes infinitesimales Skalarfeld, das willkürlich vorgegeben werden kann. Bei diesem Prozeß erfahren die Fundamentalgrößen die Zuwächse

$$(9)\qquad \delta g_{ik} = \pi\cdot g_{ik}\,, \quad \delta\varphi_i = -\frac{\partial \pi}{\partial x_i}\,.$$

Substituieren wir diese Werte in $\delta\mathfrak{v}^k$, so mögen die Ausdrücke

$$(10)\qquad \mathfrak{s}^k(\pi) = \pi\cdot\mathfrak{s}^k + \frac{\partial\pi}{\partial x_\alpha}\cdot\mathfrak{h}^{k\alpha}$$

hervorgehen. Die Variation (8) des Wirkungsintegrals muß für (9) verschwinden: so formulieren wir die Tatsache der Eichinvarianz.

$$\int_{\mathfrak{x}} \frac{\partial\,\mathfrak{s}^k(\pi)}{\partial x_k}\, dx + \int_{\mathfrak{x}} \left(-\mathfrak{w}^i \frac{\partial\pi}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_i^i\,\pi\right) dx = 0\,.$$

Formt man den ersten Term des zweiten Integrals noch durch partielle Integration um, so kann man statt dessen schreiben:

$$(11)\qquad \int_{\mathfrak{x}} \frac{\partial(\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi\,\mathfrak{w}^k)}{\partial x_k}\, dx + \int_{\mathfrak{x}} \pi\left(\frac{\partial\mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_i^i\right) dx = 0\,.$$

Daraus ergibt sich zunächst die Identität

$$(12)\qquad \frac{\partial\mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_i^i = 0$$

in der aus der Variationsrechnung bekannten Weise: wäre diese Ortsfunktion an einer Stelle (x_i) von 0 verschieden, etwa positiv, so könnte man eine so kleine Umgebung $\mathfrak{X}$ dieser Stelle abgrenzen, daß die Funktion in ganz $\mathfrak{X}$ positiv bliebe; wählt man in (11) für $\mathfrak{X}$ dieses Gebiet, für π aber eine außerhalb $\mathfrak{X}$ verschwindende Funktion, welche innerhalb $\mathfrak{X}$ durchweg $\geqq 0$ ist, so verschwindet das erste Integral, das zweite aber fällt positiv aus — im Widerspruch mit der Gleichung (11). Nachdem dies erkannt ist, liefert (11) weiter die Gleichung

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} \frac{\partial\left(\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi\,\mathfrak{w}^k\right)}{\partial x_k}\, dx = 0\,.$$

Sie gilt bei gegebenem Skalarfeld π für jedes endliche Gebiet $\mathfrak{X}$, und infolgedessen muß

$$\frac{\partial\left(\mathfrak{s}^k(\pi) - \pi\,\mathfrak{w}^k\right)}{\partial x_k} = 0 \tag{13}$$

sein. Setzen wir (10) ein und beachten, daß an einer Stelle die Werte von

$$\pi, \quad \frac{\partial \pi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i\, \partial x_k}$$

beliebig vorgegeben werden können, so zerspaltet sich diese eine Formel in die folgenden Identitäten:

$$1.\ \frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathfrak{w}^k}{\partial x_k}, \quad 2.\ \mathfrak{s}^i + \frac{\partial \mathfrak{h}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha} = \mathfrak{w}^i, \quad 3.\ \mathfrak{h}^{\alpha\beta} + \mathfrak{h}^{\beta\alpha} = 0\,.$$

Da $\partial \pi / \partial x_i$ die Komponenten eines aus dem Skalarfeld π entspringenden kovarianten Vektorfeldes sind, ergibt sich aus dem Umstande, daß $\mathfrak{s}^i(\pi)$ eine Vektordichte ist: $\mathfrak{s}^i$ ist eine Vektordichte, $\mathfrak{h}^{ik}$ eine Tensordichte, und zwar nach 3. eine lineare Tensordichte 2. Stufe. 1. ist in Anbetracht der Schiefsymmetrie von $\mathfrak{h}$ eine Folge von 2., da

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{h}^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} = 0 \quad \text{ist.}$$

b) *Koordinateninvarianz.* Wir nehmen mit dem Weltkontinuum eine infinitesimale Deformation vor, bei welcher der einzelne Punkt (x_i) eine Verrückung mit den Komponenten $\xi^i(x)$ erfährt; die Metrik werde von der Deformation ungeändert mitgenommen. δ bezeichne die durch die Deformation bewirkte Änderung irgendeiner Größe, wenn man an derselben Raum-Zeit-Stelle bleibt, δ' ihre Änderung, wenn man die Verschiebung der Raum-Zeit-Stelle mitmacht. Es ist

$$(14) \quad \begin{cases} -\delta \varphi_i = \left(\varphi_r \dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_r} \xi^r\right) & + \dfrac{\partial \pi}{\partial x_i}, \\ -\delta g_{ik} = \left(g_{ir} \dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{kr} \dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \xi^r\right) & - \pi g_{ik}. \end{cases}$$

Dabei bedeutet π ein infinitesimales Skalarfeld, über das unsere Festsetzungen nichts bestimmen. Die Invarianz der Wirkungsgröße gegenüber Koordinatentransformation und Abänderung der Eichung kommt in der auf diese (fünf willkürliche Funktionen ξ^i und π enthaltenden) Variation sich beziehenden Formel zum Ausdruck:

$$(15) \qquad \delta' \int_{\mathfrak{X}} \mathfrak{W}\, dx = \int_{\mathfrak{X}} \left\{ \frac{\partial (\mathfrak{W}\, \xi^k)}{\partial x_k} + \delta \mathfrak{W} \right\} dx = 0\,.$$

Will man nur die Koordinateninvarianz zum Ausdruck bringen, so hat man $\pi = 0$ zu wählen; aber die so hervorgehenden Variationsformeln (14) haben keinen invarianten Charakter. In der Tat bedeutet diese Festsetzung: es sollen durch die Deformation die beiden Fundamentalformen so variiert werden, daß die Maßzahl l eines von der Deformation mitgenommenen Linienelements ungeändert bleibt: $\delta' l = 0$. Nun drückt aber nicht diese Gleichung den Prozeß der kongruenten Verpflanzung einer Strecke aus, sondern

$$\delta' l = -l\,(\varphi_i\, \delta' x_i) = -l\,(\varphi_i\, \xi^i)\,.$$

Wir müssen demnach in (14) nicht $\pi = 0$, sondern $\pi = -(\varphi_i\, \xi^i)$ wählen, damit invariante Formeln zustande kommen, nämlich:

$$(16) \quad \begin{cases} -\delta \varphi_i = f_{ir} \xi^r, \\ -\delta g_{ik} = \left(g_{ir} \dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_k} + g_{kr} \dfrac{\partial \xi^r}{\partial x_i}\right) + \left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik} \varphi_r\right) \xi^r. \end{cases}$$

Die durch sie dargestellte Änderung der beiden Fundamentalformen ist eine solche, daß *die Metrik von der Deformation ungeändert mitgenommen und jedes Linienelement kongruent verpflanzt erscheint.* Auch analytisch erkennt man leicht den invarianten Charakter der Gleichungen (16); an der zweiten tritt er zutage, wenn man den gemischten Tensor

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} - \Gamma^i_{kr}\, \xi^r = \xi^i_k$$

einführt; sie lautet dann

$$-\delta g_{ik} = \xi_{ik} + \xi_{ki}\,.$$

Nachdem die Eichinvarianz bereits unter a) ausgenutzt ist, genügt es, in (14) für π irgendeine besondere Wahl zu treffen; vom Standpunkt der Invarianz ist die zu (16) führende $\pi = -(\varphi_i\, \xi^i)$ die einzig mögliche.

Für die Variation (16) sei

$$\mathfrak{W}\, \xi^k + \delta\, \mathfrak{v}^k = \mathfrak{S}^k(\xi)\,.$$

$\mathfrak{S}^k(\xi)$ ist eine linear-differentiell von dem willkürlichen Vektorfeld ξ^i abhängige Vektordichte; ich schreibe explizite

$$\mathfrak{S}^k(\xi) = \mathfrak{S}_i^k \xi^i + \bar{\mathfrak{H}}_i^{k\alpha} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_\alpha} + \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{H}_i^{k\alpha\beta}\, \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}$$

(der letzte Koeffizient ist natürlich symmetrisch in den Indizes $\alpha\,\beta$). Führen wir in (15) die Ausdrücke (8), (16) ein, so entsteht ein Integral, dessen Integrand lautet:

$$\frac{\partial\, \mathfrak{S}^k(\xi)}{\partial x_k} - \mathfrak{W}_i^k\, \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} - \xi^i \left\{ f_{ki}\, \mathfrak{w}^k + \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\, \varphi_i \right) \mathfrak{W}^{\alpha\beta} \right\}.$$

Wegen

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\, \varphi_i = \Gamma_{\alpha,\beta i} + \Gamma_{\beta,\alpha i}$$

und der Symmetrie von $\mathfrak{W}^{\alpha\beta}$ ist

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + g_{\alpha\beta}\, \varphi_i \right) \mathfrak{W}^{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha,\beta i}\, \mathfrak{W}^{\alpha\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta i}\, \mathfrak{W}^\beta_\alpha\,.$$

Üben wir auf das zweite Glied unseres Integranden noch eine partielle Integration aus, so erhalten wir daher

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} \frac{\partial\, (\mathfrak{S}^k(\xi) - \mathfrak{W}_i^k \xi^i)}{\partial x_k}\, dx + \int\limits_{\mathfrak{X}} \left(\frac{\partial\, \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma^\alpha_{\beta i}\, \mathfrak{W}^\beta_\alpha + f_{ik}\, \mathfrak{w}^k \right) \xi^i\, dx = 0\,.$$

Daraus entspringen nach der oben angewendeten Schlußweise die Identitäten

$$\left(\frac{\partial\, \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma^\alpha_{\beta i}\, \mathfrak{W}^\beta_\alpha \right) + f_{ik}\, \mathfrak{w}^k = 0 \tag{17}$$

und

$$\frac{\partial\, (\mathfrak{S}^k(\xi) - \mathfrak{W}_i^k \xi^i)}{\partial x_k} = 0\,. \tag{18}$$

Die letzte zerspaltet sich in die folgenden vier:

I. $\dfrac{\partial\, \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = \dfrac{\partial\, \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k}$, II. $\mathfrak{S}_i^k + \dfrac{\partial\, \bar{\mathfrak{H}}_i^{\alpha k}}{\partial x_\alpha} = \mathfrak{W}_i^k$,

III. $(\bar{\mathfrak{H}}_i^{\alpha\beta} + \bar{\mathfrak{H}}_i^{\beta\alpha}) + \dfrac{\partial\, \mathfrak{H}_i^{\gamma\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0$, IV. $\mathfrak{H}_i^{\alpha\beta\gamma} + \mathfrak{H}_i^{\beta\gamma\alpha} + \mathfrak{H}_i^{\gamma\alpha\beta} = 0$.

Ersetzt man in III. nach IV.

$$\mathfrak{H}_i^{\gamma\alpha\beta} \text{ durch } -\mathfrak{H}_i^{\alpha\beta\gamma} - \mathfrak{H}_i^{\beta\alpha\gamma},$$

so geht daraus hervor, daß

$$\bar{\mathfrak{H}}_i^{\alpha\beta} - \frac{\partial \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} = \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta}$$

schiefsymmetrisch ist in den Indizes $\alpha\beta$. Führen wir $\mathfrak{H}_i^{\alpha\beta}$ statt $\bar{\mathfrak{H}}_i^{\alpha\beta}$ ein, so enthalten III. und IV. also lediglich Symmetrieaussagen, II. aber geht über in

$$\text{(II*)} \qquad \mathfrak{S}_i^k + \frac{\partial \mathfrak{H}_i^{\alpha k}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta k}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \mathfrak{W}_i^k.$$

Daraus folgt I., weil wegen der Symmetriebedingungen

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^3 \mathfrak{H}_i^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} = 0 \quad \text{ist.}$$

Der Invarianzcharakter der Koeffizienten $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{S}^k(\xi)$, insbesondere derjenige der Größen $\mathfrak{S}_i^k$, läßt sich am einfachsten und vollständigsten durch die Angabe beschreiben, daß $\mathfrak{S}^k(\xi)$ eine Vektordichte ist (ξ^i aber ein Vektor). Daraus geht hervor, daß $\mathfrak{S}_i^k$ *nicht* die Komponenten einer gemischten Tensordichte sind; wir sprechen in diesem Fall von einer Pseudotensordichte.

Beispiel. Für $\mathfrak{W} = \mathfrak{l}$ ist, wie man sofort sieht,

$$\delta\, \mathfrak{v}^k = \mathfrak{f}^{ik}\, \delta\varphi_i,$$

infolgedessen:

$$\mathfrak{s}^i = 0,\ \mathfrak{h}^{ik} = \mathfrak{f}^{ik};\quad \mathfrak{S}_i^k = \delta_i^k \mathfrak{l} - f_{i\alpha}\mathfrak{f}^{k\alpha}, \text{ die Größen } \mathfrak{H} = 0.$$

Unsere Identitäten liefern also

$$\mathfrak{w}^i = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha i}}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = 0,\quad \mathfrak{W}_i^i = 0;$$

$$\mathfrak{W}_i^k = \mathfrak{S}_i^k,\quad \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\mathfrak{S}^{\alpha\beta}\right) + f_{i\alpha}\frac{\partial \mathfrak{f}^{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} = 0.$$

Die in der letzten Zeile stehenden beiden Formeln werden in der Maxwellschen Theorie durch Rechnung bestätigt; die Komponenten $\mathfrak{S}_i^k$ bilden dort die Tensordichte der Energie des elektromagnetischen Feldes, und die letzte Gleichung sagt aus, daß aus dieser Tensordichte durch Divergenzbildung die ponderomotorischen Kräfte entspringen.

Feldgesetze und Erhaltungssätze. Nimmt man in (8) für δ eine beliebige Variation, die außerhalb eines endlichen Gebiets verschwindet, und für $\mathfrak{X}$ die ganze Welt oder ein solches Gebiet, außerhalb dessen $\delta = 0$ ist, so kommt

$$\int \delta \mathfrak{W} \, dx = \int (\mathfrak{w}^i \, \delta \varphi_i + \tfrac{1}{2} \mathfrak{W}^{ik} \, \delta g_{ik}) \, dx .$$

Daraus geht hervor, daß in dem Hamiltonschen Prinzip $\int \delta \mathfrak{W} \, dx = 0$ die folgenden invarianten Gesetze enthalten sind:

$$\mathfrak{w}^i = 0, \qquad \mathfrak{W}_i^k = 0.$$

Die ersten sind *die elektromagnetischen*, die zweiten *die Gravitationsgesetze.* Zwischen den linken Seiten dieser Gleichungen bestehen 5 Identitäten, die oben unter (12) und (17) aufgeführt sind. Es sind also im System der Feldgleichungen 5 überschüssige enthalten, entsprechend dem von 5 willkürlichen Funktionen abhängigen Übergang von einem Bezugssystem zu einem beliebigen andern. $\mathfrak{s}^i$ *ist die Vektordichte des elektrischen Viererstroms,* $\mathfrak{S}_i^k$ *die Pseudotensordichte der Energie,* $\mathfrak{h}^{ik}$ *die elektromagnetische Felddichte.* Im Falle der Maxwellschen Theorie, die ja nur im Äther gilt, ist, wie es sein muß, $\mathfrak{s}^i = 0$, $\mathfrak{h}^{ik} = \mathfrak{f}^{ik}$ und sind $\mathfrak{S}_i^k$ die klassischen Ausdrücke. *Es gelten* nach 1. und I. *allgemein die Erhaltungssätze*

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Und zwar folgen die Erhaltungssätze auf doppelte Weise aus den Feldgesetzen; es ist nämlich nicht nur

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}, \quad \text{sondern auch} \equiv -\tfrac{1}{2} \mathfrak{W}_i^i;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} \text{ nicht nur} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k}, \quad \text{sondern auch} \equiv \Gamma^\alpha_{i\beta} \mathfrak{W}^\beta_\alpha - f_{ik} \mathfrak{w}^k.$$

Die enge Beziehung, welche zwischen den Erhaltungssätzen von Energieimpuls und der Koordinateninvarianz besteht, ist in der Einsteinschen Theorie schon von verschiedenen Autoren verfolgt worden.[1] Zu diesen vier Erhaltungssätzen tritt aber als fünfter der Erhaltungssatz der Elektrizität, und ihm muß konsequenterweise eine Invarianzeigenschaft entsprechen, die eine fünfte willkürliche Funktion mit sich bringt;

---

1) So von H. A. Lorentz, Hilbert, Einstein, Klein und dem Verfasser.

als solche erkennt unsere Theorie die Eichinvarianz. Übrigens führten die älteren Untersuchungen über den Energieimpulssatz nie zu einem völlig durchsichtigen Resultat. Denn macht man in der Einsteinschen Theorie keine spezielle Annahme über die Wirkungsgröße, so liefert freilich die Koordinateninvarianz vier Erhaltungssätze, die sich aber keineswegs als die Erhaltungssätze von Energie und Impuls ansprechen lassen, da sie sich in den klassischen Fällen nicht auf diese reduzieren. Das hatte mich schon seit langem beunruhigt. Hier aber erhalten wir die volle Aufklärung: man muß die Koordinaten- mit der Eichinvarianz in solcher Weise verknüpfen, wie es unsere Theorie von selbst mit sich bringt — Formel (16) —, um auf die richtigen Erhaltungssätze geführt zu werden. Dieser ganze Zusammenhang ist offenbar ein sehr starkes Argument für die Richtigkeit unserer These, daß die Naturgesetze nicht nur koordinaten-, sondern auch eichinvariant sind.

Es kommt noch dies hinzu. Die elektromagnetischen Gleichungen lauten nach der 2. der Gleichungen in welche (13) zerfiel, folgendermaßen:

$$\frac{\partial \mathfrak{h}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i \quad \left(\text{und } \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} = 0\right).$$

Ohne noch die Wirkungsgröße zu spezialisieren, können wir aus der Eichinvarianz allein die ganze Struktur der Maxwellschen Theorie ablesen. Von der besonderen Gestalt der Hamiltonschen Funktion $\mathfrak{W}$ beeinflußt werden nur die Gesetze, durch welche sich Strom $\mathfrak{s}^i$ und Felddichte $\mathfrak{h}^{ik}$ aus den Fundamentalgrößen φ_i, g_{ik} bestimmen.

Die Feldgesetze und die zu ihnen gehörigen Erhaltungssätze lassen sich nach (13) und (18) am übersichtlichsten zusammenfassen in die beiden einfachen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i(\pi)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{S}^i(\xi)}{\partial x_i} = 0$$

(Hilbert-Kleinsche Form der Feldgesetze).

Kap. III. Durchführung eines speziellen Wirkungsprinzips.

Der Ansatz für $\mathfrak{W}$. Der weiteren Diskussion lege ich dasjenige Wirkungsprinzip zugrunde, das sich analytisch am leichtesten in seinen Konsequenzen überblicken läßt:

$$\mathfrak{W} = -\tfrac{1}{4} F^2 \sqrt{g} + \beta\,\mathfrak{l}.$$

Die Bedeutung von $\mathfrak{l}$ und F ist aus Früherem zu entnehmen, die Konstante β ist eine reine Zahl. Es gilt

$$\delta \mathfrak{W} = -\tfrac{1}{2} F \delta (F \sqrt{g}) + \tfrac{1}{4} F^2 \delta \sqrt{g} + \beta \delta \mathfrak{l}.$$

Es vereinfacht die Durchrechnung sehr, wenn wir die Eichung der Welt durch die Forderung, daß $-F$ gleich einer (vorzugebenden positiven) Konstanten α ist, eindeutig festlegen; dies ist möglich, weil F eine Invariante vom Gewichte -1 ist. Dadurch erreichen wir, daß die Feldgesetze Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden. Für $\delta \mathfrak{W}$ kommt, unter Fortlassung der Divergenz

$$\delta \frac{\partial \sqrt{g} \varphi^i)}{\partial x_i},$$

die ja bei der Integration über die Welt verschwindet:

$$\delta \left(\beta \mathfrak{l} + \frac{\alpha^2 \sqrt{g}}{4} - \frac{3 \alpha \sqrt{g}}{4} (\varphi_i \varphi^i) - \frac{\alpha \sqrt{g}}{2} R \right).$$

Dividieren wir noch durch α, setzen $\beta / \alpha = \lambda$ und führen das Weltintegral von $\delta (\frac{1}{2} R \sqrt{g})$ durch eine partielle Integration über in das Integral von $\delta \mathfrak{G}$, wobei $\mathfrak{G}$ nur von den g_{ik} und deren ersten Ableitungen abhängt[1]), so kommt das Wirkungsprinzip:

$$\delta \int \left\{ \lambda \mathfrak{l} - \mathfrak{G} + \frac{\alpha - 3 (\varphi_i \varphi^i)}{4} \sqrt{g} \right\} dx = 0. \tag{19}$$

Der Aufbau des Integranden ist klar: $\lambda \mathfrak{l}$ und $-\mathfrak{G}$ sind die klassischen Terme der Maxwellschen Elektrizitäts- und der Einsteinschen Gravitationstheorie. Hinzu tritt das „kosmologische Glied“ $(\alpha / 4) \sqrt{g}$, das sich hier ganz zwangsweise ergibt[2]), und der einfachste Term, der überhaupt nach der Mieschen Theorie zur Maxwellschen Wirkungsdichte hinzukommen kann und die Existenz der Materie ermöglichen soll: $(\varphi_i \varphi^i) \sqrt{g}$. Dabei ist zu beachten, daß nach unserer Theorie dieser Ansatz die eine unter einer ganz geringen Anzahl von Möglichkeiten ist (vgl. darüber den Schluß der Arbeit) und jedenfalls die einzige, welche zu Differentialgleichungen von nicht höherer

1) $\mathfrak{G}$ ist die in Einsteins auf p. 114 zitierter Arbeit mit $\frac{1}{2} \mathfrak{G}^*$ bezeichnete Größe.

2) Von Einstein eingeführt in: Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1917. p. 142.

als der zweiten Ordnung führt. Insbesondere steht es hier durchaus nicht in unserm Belieben, über das Vorzeichen des Terms $(\varphi_i \varphi^i)$ etwa anders zu verfügen, als es in (19) geschieht. Nach dem Gesagten ist bereits klar, daß das Prinzip (19) mit den der Nachprüfung durch die Erfahrung zugänglichen Gesetzen des elektromagnetischen und des Gravitationsfeldes außerhalb der Materie im Einklang ist.

Variation der φ_i liefert die Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = -\frac{3}{2\lambda}\sqrt{g}\,\varphi^i. \tag{20}$$

Die elektromagnetische Felddichte ist hier also $= \mathfrak{f}^{ik}$, und der Ausdruck rechter Hand die Stromdichte $\mathfrak{s}^i$. Daraus folgt die Divergenzgleichung

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i} = 0. \tag{21}$$

Variation der g_{ik} liefert die Gravitationsgleichungen

$$-R_{ik} + \varrho\, g_{ik} = \tfrac{3}{2}\varphi_i \varphi_k + \lambda S^*_{ik}, \tag{22}$$

wo S^*_{ik} die Maxwellschen Energie-Impulskomponenten sind und

$$\varrho = \tfrac{1}{2} R + \frac{-\alpha + 3(\varphi_i \varphi^i)}{4}.$$

Verjüngen wir, so folgt

$$R - \alpha + \tfrac{3}{2}(\varphi_i \varphi^i) = 0 \quad \text{und darauf} \quad \varrho = \frac{\alpha}{4}.$$

Die erste Beziehung liefert wegen $-F = \alpha$ von neuem (21), den Erhaltungssatz der Elektrizität, der, wie sich so bestätigt, doppelte Folge der Feldgesetze ist. Die rechte Seite von (22) ist, ganz im Einklang mit der Mieschen Theorie,

$$= \lambda(S^*_{ik} - \varphi_i s_k);$$

im Äther überwiegt das erste Glied, das zweite kommt allein im Innern des materiellen Teilchens (Atomkern oder Elektron) zur Geltung.

Unserer Theorie liegt eine bestimmte Elektrizitätseinheit zugrunde. Nenne ich

$$\frac{e\sqrt{\varkappa}}{c_0}$$

($\varkappa$ die Einsteinsche Gravitationskonstante, c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Äther) den Gravitationsradius der Ladung e, so kann man diese Einheit, wie aus (22) folgt, so charakterisieren: es ist diejenige Ladung, deren Gravitationsradius $= \sqrt{\frac{1}{2}\lambda}$ ist. Diese Länge ist sicher enorm groß, da sonst die Gleichung (20) der Erfahrung widerspricht; wenn die Zahl $\beta = 1$ ist, hat sie die Größenordnung des Weltradius. Unsere Elektrizitätseinheit und ebenso die Wirkungseinheit ist demnach jedenfalls von kosmischer Größe. *Das „kosmologische“ Moment, das Einstein erst nachträglich seiner Theorie einfügte, haftet der unseren von ihren ersten Grundlagen her an.*

Noch zwei Bemerkungen über den statischen Fall! Die statische Welt ist von Hause aus geeicht (vgl. Kap. I); es fragt sich, ob bei dieser ihrer natürlichen Eichung $F = \text{const.}$ gilt. Die Antwort lautet bejahend. Denn eichen wir die Welt um auf die Forderung $F = \text{const.}$, so nimmt die metrische Fundamentalform den Faktor F an, und $d\varphi = \varphi\, dx_0$ ist zu ersetzen durch

$$\varphi\, dx_0 - \frac{dF}{F} \,.$$

Die Gleichung (21) liefert dann

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{F}^3}{\partial x_3} = 0 \qquad \left(F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}\right),$$

und daraus folgt $F = \text{const.}$ — Die zweite Bemerkung ist diese: Im statischen Fall lautet die (00)te der Gravitationsgleichungen (22):

$$c\left(\Delta c + \frac{\alpha}{4} c\right) = \tfrac{3}{2}\varphi^2 + \lambda S^*_{00} \,.$$

Darin ist Δ der zum Raum mit der metrischen Fundamentalform $d\sigma^2$ gehörige Poissonsche Differentialoperator. Die rechte Seite ist hier positiv; unser Wirkungsprinzip führt also in der Tat zu einer positiven Masse und anziehenden, nicht abstoßenden Kräften zwischen diesen.

Mechanik. Die auf der Substanzvorstellung beruhenden Ansätze, durch die man bisher den Übergang vom Energie-Impulsprinzip zu den mechanischen Gleichungen zu bewerkstelligen pflegte, welche die Bewegung eines Materieteilchens regeln, erweisen sich in unserer Theorie als unmöglich, da sie den zu fordernden Invarianzeigenschaften widersprechen. Übrigens führen sie, wie ich hier beiläufig bemerke, schon in der Einsteinschen Theorie aus eben demselben Grunde, um dessentwillen wir sie hier ganz verwerfen müssen, zu einem falschen Wert der Masse. Der einzig haltbare Weg, der unter Voraussetzung der Existenz materieller Teilchen zu einer wirklichen Herleitung der mechanischen Gleichungen führen kann, wurde von Mie in dem 3. Teil seiner bahnbrechenden „Grundlagen einer Materie" eingeschlagen[1]) und neuerdings von Einstein zum Beweis der integralen Erhaltungssätze für ein isoliertes System beschritten.[2]) Man denke sich um das materielle Teilchen ein Volumen Ω abgegrenzt, dessen Dimensionen groß sind gegenüber dem eigentlichen Konzentrationskern des Teilchens, klein gegenüber denjenigen Abmessungen, in denen das äußere Feld sich merklich ändert. Bei der Bewegung beschreibt Ω in der Welt einen Kanal, in dessen Innern der Stromfaden des Materieteilchens hinfließt. Das Koordinatensystem, bestehend aus der „Zeitkoordinate" $x_0 = t$ und den „Raumkoordinaten" $x_1\, x_2\, x_3$, sei so beschaffen, daß die „Räume" $x_0 =$ const. den Kanal durchschneiden (der Durchschnitt ist das eben erwähnte Volumen Ω). Die Pseudotensordichte der Gesamtenergie werde mit $\mathfrak{S}_i^k$ bezeichnet. Die im Raume $x_0 =$ const. über das Gebiet Ω zu erstreckenden Integrale J_i von $\mathfrak{S}_i^0$ sind die *Energie* ($i = 0$) und der *Impuls* ($i = 1, 2, 3$) des Teilchens. Integriert man in der gleichen Weise jede der vier Erhaltungsgleichungen

$$(23) \qquad \frac{\partial\, \mathfrak{S}_i^k}{\partial\, x_k} = 0\,,$$

die oben allgemein bewiesen worden, so liefert das erste Glied ($k = 0$) die zeitliche Ableitung $d\,J_i/dt$; das Integral über die drei andern Glieder ergibt aber nach dem Gaußschen Satz einen „Kraftfluß" durch die Oberfläche von Ω, ausgedrückt durch ein über diese Oberfläche zu erstreckendes Integral: die Komponenten der von außen auf das Teilchen einwirkenden „*Feldkraft*". Diese aus der Trennung von Zeit und Raum hervorgehende Scheidung liefert die für die Mechanik charakteristische Gegenüberstellung von „*Trägheitskraft*" $d\,J_i/dt$ und Feldkraft.

Der Integrand des Wirkungsprinzips (19), dessen Konsequenzen wir jetzt verfolgen, heiße $\mathfrak{W}$. Da $\int \mathfrak{W}\, dx$ keine Invariante ist, kann die in Kap. II zum Beweis der Erhaltungssätze angewendete Überlegung nicht ohne weiteres beibehalten

1) Ann. d. Phys. **40.** p. 1. 1913.

2) Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1918.

werden. Aber es ist auch jetzt $\delta' \int \mathfrak{W}\, dx = 0$ für eine Variation δ, die nach (14) durch eine unendlich kleine *Verschiebung* im eigentlichen Sinne hervorgerufen wird: $\pi = 0$, ξ^i konstant. Damit dies zutrifft, muß man überhaupt keinerlei Voraussetzungen über $\mathfrak{W}$ machen. Ist

$$\delta \mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{ik}\, \delta g_{ik} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta, i}\, \delta g_{\alpha\beta, i}$$

gesetzt, so folgt daraus auf Grund der Gültigkeit des Hamiltonschen Prinzips die Formel

$$(24) \quad \frac{\partial (\overline{\mathfrak{S}}_i^k \xi^i)}{\partial x_k} = 0 \quad \text{mit} \quad \overline{\mathfrak{S}}_i^k = \mathfrak{W}\, \delta_i^k + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \mathfrak{G}^{\alpha\beta, k} + \lambda \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \mathfrak{f}^{k\alpha}.$$

Dies sind aber nicht die Erhaltungssätze für Energie und Impuls. Vielmehr müssen wir, um diese zu bekommen, die Maxwellschen Gleichungen zunächst in der Form anschreiben:

$$\frac{\partial \left(\pi\, \mathfrak{s}^k + \frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha} \mathfrak{f}^{k\alpha} \right)}{\partial x_k} = 0,$$

hierin $\pi = -(\varphi_i\, \xi^i)$ zu setzen und die so hervorgehende Gleichung mit λ multipliziert zu (24) addieren. Dann kommen die Gleichungen (23) zustande, und zwar wird

$$\mathfrak{S}_i^k = \mathfrak{W}\, \delta_i^k + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \mathfrak{G}^{\alpha\beta, k} - \lambda f_{i\alpha} \mathfrak{f}^{k\alpha} - \lambda \varphi_i \mathfrak{s}^k.$$

Diese Energiedichte setzt sich aus drei Teilen zusammen:

1. dem nur im Innern des materiellen Teilchens merklichen Glied

$$\lambda \left\{ \tfrac{1}{2} (\mathfrak{s}^r \varphi_r)\, \delta_i^k - \varphi_i\, \mathfrak{s}^k \right\},$$

2. dem zum Maxwellschen Feld gehörigen

$$\lambda \left\{ \mathfrak{l}\, \delta_i^k - f_{i\alpha} \mathfrak{f}^{k\alpha} \right\},$$

3. der Gravitationsenergie

$$\left(\frac{\alpha \sqrt{g}}{4} - \mathfrak{G} \right) \delta_i^k + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \mathfrak{G}^{\alpha\beta, k}.$$

Wir denken uns den außerhalb des Kanals herrschenden Wertverlauf der g_{ik} glatt über den Kanal ausgedehnt, indem wir die feine tiefe Furche, welche die Bahn des Materieteilchens in das metrische Antlitz der Welt reißt, „ausglätten", „überbrücken", und behandeln jenen Stromfaden als eine Linie in diesem ausgeglätteten metrischen Felde. Es sei ds das zugehörige Eigenzeitdifferential. Wir können zu einer Stelle des

Stromfadens ein solches Koordinatensystem einführen, daß dort

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

wird, die Richtung des Stromfadens durch

$$dx_0 : dx_1 : dx_2 : dx_3 = 1 : 0 : 0 : 0$$

gegeben ist und die Ableitungen $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$ verschwinden. Für den an dieser Stelle geführten Querschnitt $x_0 = \text{const.}$ des Stromfadens wird dann auch (approximativ)

$$J_1 = J_2 = J_3 = 0$$

sein wie im statischen Fall, vorausgesetzt, daß die innere Struktur des Teilchens die gleiche ist, wie wenn es in diesem Koordinatensystem dauernd ruhte; eine bei quasistationärer Beschleunigung zulässige Annahme. Ebenso wird dann von den über den Querschnitt des Stromfadens erstreckten Integralen

$$\int \mathfrak{s}^i \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

dort nur das 0te nicht den Wert 0 haben, sondern gleich der Ladung e des Teilchens sein (die nach dem Erhaltungssatz eine von der Zeit unabhängige Invariante ist). Unter solchen Umständen fällt in dem betrachteten Moment von den über die Oberfläche der Kapsel Ω zu erstreckenden Integralen, den „Kraftflüssen", der von 3. herrührende Anteil fort; wesentlich dafür ist, daß die Ausdrücke 3. nicht nur linear, sondern quadratisch von den Differentialquotienten $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$ abhängen. Der von 1. herrührende Anteil ist zu vernachlässigen, da außerhalb des Teilchens $\mathfrak{s}^i = 0$ ist. Es bleibt nur 2., und dieser Teil liefert die ponderomotorische Kraft des elektromagnetischen Feldes nach der Maxwellschen Theorie: $e f_{0i}$ (f_{ik} ist hier das äußere Feld; die Behauptung ist wenigstens dann richtig, wenn dieses Feld relativ zum Teilchen zeitlich nicht zu stark variiert). Wir bekommen die Gleichungen

$$\frac{dJ_i}{dt} = e f_{0i}.$$

Kehren wir zu einem beliebigen Koordinatensystem zurück, so treten an Stelle der erhaltenen Formeln die folgenden:

$$J_i = m u_i, \quad \text{wo} \quad u^i = \frac{dx_i}{ds}$$

ist und ein Proportionalitätsfaktor, die „*Masse*" m, auftritt;

$$\frac{d(m u_i)}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} m u^\alpha u^\beta = e \cdot f_{ki} u^k . \tag{25}$$

Die g_{ik} wie die f_{ik} beziehen sich hier auf die ausgeglättete Metrik. Die Ladung e ist konstant. Multipliziert man die letzte Gleichung mit u_i und summiert über i, so findet man

$$\frac{dm}{ds} = 0 ,$$

also ist die Masse gleichfalls konstant. Von der Wahl der Konstanten a hängt sie in solcher Weise ab, daß $m = \overline{m}\sqrt{a}$ ist ($\overline{m}$ unabhängig von a).

Der Anschluß an die gewöhnlichen Formeln ist erreicht; wesentlich für ihre Gültigkeit ist, daß die Eichung durch $F =$ const. normiert wird. Eine Uhr mißt bei quasistationärer Beschleunigung das Integral $\int ds$ der dieser Normierung entsprechenden Eigenzeit. Diese Ergebnisse sind aber gebunden an das hier zugrunde gelegte Wirkungsprinzip.

Das Problem der Materie. Daß sich aus den Erhaltungssätzen konstante Ladung und Masse für ein Materieteilchen ergeben, erklärt noch nicht, daß alle Elektronen die gleiche Ladung und Masse besitzen und beständig beibehalten; denn die Teilchen sind doch niemals so vollständig gegeneinander isoliert, als daß nicht im Laufe langer Zeiträume beträchtliche Abweichungen sollten entstehen können. Dies muß vielmehr daran liegen, daß die Weltgesetze nur eine diskrete Anzahl statischer Lösungen gestatten, die ein stabiles Korpuskel darstellen. Damit kommen wir zu dem eigentlichen Problem der Materie; läßt es sich auf Grund des hier vorausgesetzten Wirkungsprinzips lösen? Es scheint, als sei diese Frage zu verneinen, da Mie gezeigt hat, daß die Hinzufügung eines Gliedes zu der Maxwellschen Wirkungsdichte, das lediglich eine Funktion von $q = \sqrt{\varphi_i \varphi^i}$ ist, gewiß dann die Materie nicht ermöglicht, wenn diese Funktion nicht für $q = 0$ mindestens in 5. Ordnung verschwindet.[1] Diese Erkenntnis entspringt aber bei ihm daraus, daß Regularität der statischen kugelsymmetrischen Lösung im Unendlichen zu fordern ist. Hier werden diese Lösungen jedoch zweifellos nicht zu einem unendlichen, sondern einem geschlossenen Raum führen, so daß ganz andere Regularitätsforderungen zu stellen sind. —

1) Ann. d. Phys. 39. p. 14. 1912.

Noch einen zweiten Punkt muß ich berühren, ehe ich zu expliziten Rechnungen übergehe. Es ist eine Tatsache, daß am Elektron reine Zahlen auftreten, deren Größenordnung gänzlich von 1 verschieden ist; so das Verhältnis des Elektronenradius zum Gravitationsradius seiner Masse, welches von der Größenordnung 10^{40} ist; das Verhältnis des Elektronen- zum Weltradius mag von ähnlicher Größenordnung sein. Das scheint dazu zu zwingen, in das Hamiltonsche Prinzip von vorn herein eine reine Zahl von enorm großem Werte aufzunehmen, wie das durch unseren Ansatz geschehen ist: die Konstante β. Andererseits hat doch dies Zugeständnis, daß dem Weltbau gewisse reine Zahlen von zufälligem numerischen Wert zugrunde liegen sollen, etwas Abstruses. Ein Ausweg aus dem Dilemma ist wohl nur dadurch möglich, daß man annimmt, das Weltgesetz schreibe keinen bestimmten Wert dieser Zahl β vor, sondern verlange nur, daß sie eine Konstante ist; mit andern Worten, es müßte lauten: Jede außerhalb eines endlichen Weltgebiets verschwindende virtuelle Variation der Metrik, für welche $\delta \int \mathfrak{l}\, dx$ verschwindet, macht auch die Variation von

$$\int \tfrac{1}{4} F^2 \sqrt{g}\, dx$$

zu Null. Dadurch würde das Problem der Materie zu einem „Eigenwert“-Problem: nur zu gewissen diskreten Werten von β gehören reguläre Lösungen. Ihnen entsprechen mögliche Korpuskeln, die aber doch alle neben- oder ineinander, sich gegenseitig feine Modifikationen der inneren Struktur aufzwingend, in derselben Welt existieren. Merkwürdige Konsequenzen für die Organisation des Weltalls scheinen da aufzudämmern und die Möglichkeit einer Erklärung seiner Ruhe im großen, Unruhe im kleinen.

Im statischen kugelsymmetrischen Fall haben wir die zwei nur von der Entfernung $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ abhängigen Skalarfelder c und φ und das Linienelement des Raumes $d\sigma^2$, dem wir unter Benutzung einer geeigneten Entfernungsskala die Gestalt verleihen können

$$(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + p\,(x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3)^2,$$

wo auch p eine nur von r abhängige Funktion ist. Ich setze

$$w = h^2 = 1 + p r^2, \quad \Delta = \sqrt{g} = h c; \quad \frac{\varphi}{\Delta} = u, \quad \frac{r \varphi'}{\Delta} = v$$

(der Akzent bedeutet Ableitung nach r). Durch die vorgenommenen Normierungen ist das räumliche Koordinatensystem bis auf eine Drehung festgelegt, die Funktionen c und φ bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor, u, v, w vollständig. Das (ohne weiteres hinzuschreibende) Wirkungsprinzip liefert die Differentialgleichungen

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta\Delta' = \frac{3}{4} w^2 \varphi^2 r\,, \\ &\left(\frac{p\,r^3}{1+p\,r^2}\right)' = \frac{\alpha r^2}{4} + \frac{3}{4}\frac{\varphi^2 w\, r^2}{\Delta^3} - \frac{\lambda}{2}\frac{\varphi'^2 r^2}{\Delta^2}\,, \\ &\left(\frac{r^2\varphi'}{\Delta}\right)' + \frac{3}{2\lambda}\frac{\varphi\, w\, r^2}{\Delta} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Das Problem ist 4. Ordnung und von solcher Art, daß der Mathematiker hoffnungslos vor ihm die Segel streicht. Immerhin kann ich die Ordnung um 1 reduzieren, indem ich die vorhin mit u, v, w bezeichneten Funktionen einführe. Als Variable benutze ich statt r das Quadrat $r^2 = \varrho$ und finde

$$(D_v)\qquad 2\varrho\frac{dv}{d\varrho} + v + \frac{3uw\varrho}{2\lambda} = 0\,,$$

$$(D_w)\qquad 2\varrho\frac{dw}{d\varrho} + w(w-1) - \frac{w^2}{4}(\alpha\varrho + 3u^2 w\varrho - 2\lambda v^2) = 0\,.$$

Außerdem ist $r(u\Delta)' = v\Delta$; setze ich hierin den aus (26) sich ergebenden Ausdruck für Δ'/Δ ein, so kommt

$$(D_u)\qquad 2\varrho\frac{du}{d\varrho} + \frac{3}{4}\varrho u^3 w^2 - v = 0\,.$$

Diese Differentialgleichungen (D) bestimmen u, v, w; durch eine Quadratur erhält man hernach Δ aus

$$(27)\qquad \frac{d\lg\Delta}{d\varrho} = \frac{3}{8}(uw)^2\,.$$

Schreibt man die Anfangswerte: u beliebig, $v = 0$, $w = 1$ vor, so erhält man durch Potenzreihenansatz Lösungen, die den Gleichungen formal Genüge tun; in der Theorie der Differentialgleichungen wird gezeigt, daß sie konvergieren.[1]) Wir erhalten demnach ∞^1 im „Pol" $\varrho = 0$ reguläre Lösungen.

Eine Lösung, die den Feldverlauf in einem existenzfähigen Materieteilchen darstellt, wird zu einem geschlossenen Raum

1) Picard, Traité d'Analyse 3. p. 21.

führen. Der Äquator dieses Raumes werde bei $\varrho = \varrho_0$ erreicht. Für die Umgebung des Äquators hat man die durch

$$\varrho = \varrho_0 (1 - z^2)$$

eingeführte Größe z als Uniformisierende zu benutzen. Dann muß w für $z = 0$ in 2. Ordnung unendlich werden, c und φ werden regulär bleiben und c für $z = 0$ gewiß nicht verschwinden. Δ wird unendlich der 1. Ordnung, u und v bekommen also bei $z = 0$ Nullstellen 1. Ordnung. Setze ich

$$\frac{u}{z} = \bar{u}, \quad \frac{v}{z} = \bar{v}, \quad w \cdot z^2 = \bar{w},$$

so werden $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ reguläre und übrigens gerade Funktionen von z sein. Ich bemerke, daß nach (27) $\lg \Delta$ eine monoton wachsende Funktion von ϱ ist; das Vorzeichen in dieser Gleichung ist glücklicherweise so gerichtet, daß es ein Wachstum von Δ über alle Grenzen als möglich erscheinen läßt. Benutze ich $z^2 = t$ als unabhängige Variable, so entstehen die Differentialgleichungen

$$(\bar{D}) \quad \begin{cases} 2t\dfrac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} - \dfrac{3}{4}\varrho_0(1-t)\bar{u}^3\bar{w}^2 - \dfrac{t\bar{v}}{1-t} = 0, \\ 2t\dfrac{d\bar{v}}{dt} + \dfrac{1-2t}{1-t}\bar{v} - \dfrac{3\varrho_0}{2\lambda}\bar{u}\bar{w} = 0, \\ 2t\dfrac{d\bar{w}}{dt} - \dfrac{\bar{w}(\bar{w}-3t+2)}{1+t} + \dfrac{\bar{w}^2}{4}\left(\alpha\varrho_0 + 3\varrho_0\bar{u}^2\bar{w} - \dfrac{2\lambda t\bar{v}^2}{1-t}\right) = 0 \end{cases}$$

und

$$(28) \qquad \frac{d\lg\Delta}{dt} = -\frac{3\varrho_0}{8t}(\bar{u}\bar{w})^2.$$

Durch Vergleichung der konstanten Glieder der Potenzentwicklung ergeben sich daraus für $t = 0$ folgende Anfangswerte

$$\bar{u} = \frac{\alpha\varrho_0 - 4}{2\sqrt{3\varrho_0}}, \quad \bar{v} = \frac{\sqrt{3\varrho_0}}{\lambda}, \quad \bar{w} = \frac{4}{\alpha\varrho_0 - 4}.$$

Zu ihnen gehört, wie aus dem oben angeführten Existenzsatz hervorgeht, eine einzige reguläre Lösung des Systems $(\bar{D})$ samt einem Δ, das unendlich wird wie $1/\sqrt{t}$ (denn die Potenzentwicklung der rechten Seite von (28) beginnt mit dem Gliede $-1/2t$). Jedem Werte von ϱ_0 entspricht demnach eine am Äquator reguläre Lösung des Problems, und indem man ϱ_0 variiert, erhält man eine Schar von ∞^1 solchen Feldern.

Von ihnen können nur diejenigen in Betracht kommen, die zu Werten

$$\varrho_0 > \frac{4}{\alpha} \left(r_0 > \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \right)$$

gehören, da w positiv sein muß; also zu Radien kosmischer Größe! In der *dreidimensionalen* Mannigfaltigkeit aller Lösungen des Gleichungssystems (D) haben wir demnach die *eindimensionale* der am Pol und die *eindimensionale* der am Äquator regulären Felder. Diese beiden Mannigfaltigkeiten werden sich im allgemeinen so wenig „schneiden" wie zwei Gerade im Raum; wohl aber ist zu erwarten, daß es einzelne besondere Werte von λ geben wird, die *Eigenwerte*, für welche ein solcher Schnitt eintritt, d. h. eine Lösung, eine „Eigenfunktion" existiert, die sowohl am Pol wie am Äquator regulär bleibt. Zu einem wirklichen Existenznachweis der Eigenwerte sind die gegenwärtigen Mittel der Analysis kaum ausreichend.

Das mutmaßliche Weltgesetz. In der durch die Einsteinisch aufgefaßte Gravitation erweiterten Mieschen Theorie, wie sie Hilbert dargestellt hat[1]), wird an die Hamiltonsche Funktion W $(= \mathfrak{W}/\sqrt{g})$ nur die Forderung gestellt, daß sie eine Invariante gegenüber Koordinatentransformation ist. Diese Forderung läßt für sie noch einen weiten Spielraum übrig. Durch unser Postulat, daß W außerdem eine Invariante vom Gewichte -2 sein muß gegenüber Abänderung der Eichung, wird der Spielraum stark eingeengt, doch immer noch nicht in solchem Maße, daß dadurch W eindeutig bestimmt wäre. Nehmen wir an, daß W rational aus den Krümmungskomponenten gebildet ist, so bieten sich, soviel ich sehe, nur die folgenden 5 Möglichkeiten dar:

1. die Maxwellsche $l = \frac{1}{4} f_{ik} f^{ik}$;

2. nach dem gleichen Muster kann man aus der Vektorkrümmung bilden: $\frac{1}{4} \mathsf{F}_{ik} \mathsf{F}^{ik}$. Dabei ist die Multiplikation als Zusammensetzung der Matrizen zu deuten. Der Ausdruck ist selber eine Matrix, aber seine Spur L ist ein Skalar vom Gewichte -2:

$$L = \frac{1}{4} F^{\alpha}_{\beta ik} F^{\beta ik}_{\alpha} .$$

Ist $^*L$ die analog aus der Richtungskrümmung gebildete Invariante, so gilt $L = {}^*L + l$.

---

1) D. Hilbert, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1915. p. 395.

3. Man vertausche in dem Ausdruck von L im zweiten Faktor $F_{a}^{\beta i k}$ die Indizes β und i miteinander.

4. Aus dem verjüngten Tensor $F_{i a k}^{a} = F_{ik}$ entspringt der Skalar $F_{ik} F^{ik}$.

5. Die oben benutzte Invariante F^2.

Die aufgestellte Behauptung meint, daß sich jede Invariante der angegebenen Art aus diesen 5 Größen linear mit numerischen Koeffizienten zusammensetzen läßt.

Das in den vorigen Absätzen durchgeführte Wirkungsprinzip besitzt diese Konstitution: seine Hamiltonsche Funktion war eine lineare Kombination von 1. und 5. Ich glaube, es darf behauptet werden, daß dieses Wirkungsprinzip alles leistet, was die Einsteinsche Theorie bisher geleistet hat, in den tiefer greifenden Fragen der Kosmologie und der Konstitution der Materie aber eine entschiedene Überlegenheit zeigt. Dennoch glaube ich nicht, daß in ihm die in der Wirklichkeit exakt zutreffenden Naturgesetze beschlossen sind. Im Hinblick auf die eigentliche Größennatur der Krümmung erscheinen mir nämlich die Invarianten 3.—5. als künstliche Bildungen neben den beiden natürlichen, den „Hauptinvarianten" 1. und 2. Täuscht mich dieses ästhetische Vertrauen nicht (dem die Vierdimensionalität der Welt recht gibt), so würde also das Weltgesetz so lauten: *Jede außerhalb eines endlichen Gebiets verschwindende virtuelle Änderung der Metrik, für welche* $\delta \int \mathfrak{l}\, dx = 0$, *erfüllt auch die Gleichung* $\delta \int \mathfrak{L}\, dx = 0$. Die Konsequenzen dieses Wirkungsprinzips gedenke ich in einer Fortsetzung dieser Arbeit zu verfolgen.

Die Fruchtbarkeit des neuen Gesichtspunktes der Eichinvarianz hätte sich vor allem am Problem der Materie zu zeigen. Die entscheidenden Folgerungen in dieser Hinsicht verschanzen sich aber noch hinter einem Wall mathematischer Schwierigkeiten, den ich bislang nicht zu durchbrechen vermag.

(Eingegangen 7. Januar 1919.)