1918. № 14.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 56.

1. *Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie;*

von Friedrich Kottler.

In dem Bestreben nach einer physikalischen Ableitung der Einsteinschen Gravitationstheorie habe ich in einer kurzen Arbeit[1]) 1916 die sogenannte Äquivalenzhypothese zur Grundlage zu machen gesucht. Diese Untersuchungen mußten infolge längerer Felddienstleistung unterbrochen werden. Nach meiner Rückkehr aus dem Felde habe ich sie wieder aufgenommen und gefunden, daß der dort eingeschlagene Weg zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt, daß also die Äquivalenzhypothese, wie sie aus der Minkowskischen Kinematik gefolgert werden muß, nicht ohne weiteres zu Recht besteht.[2])

Ich habe daher im folgenden einen anderen Weg eingeschlagen. Ich erhalte die Einsteinsche Theorie auf Grund einer Abänderung des Newtonschen Trägheitsgesetzes. Es sind hierbei zweierlei Beschränkungen gemacht: Erstens der Begriff der berechtigten Bezugssysteme. Dies bedeutet eine gewisse Aufrechterhaltung des Minkowskischen Postulats der konstanten Lichtgeschwindigkeit, derart, daß die Determinante der Koeffizienten des ds^2 in kartesischen Koordinaten

$$g = -c^2$$

invariant bleibt. Nur solche Systeme liefern Übereinstimmung mit der Newtonschen Näherungstheorie in den Newtonschen Koordinaten.

Zweitens die Beschränkung auf stationären Charakter aller Gravitationsfelder.

1) F. Kottler, Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation. Ann. d. Phys. 50. p. 955. 1916. — A. Einstein, Über Friedrich Kottlers Abhandlung usw., l. c. 51. p. 639. 1916.

2) Vgl. unten § 38.

Im ganzen hoffe ich, durch diese Arbeit einen Beitrag zu der Erkenntnis des Wertes der neuen Einsteinschen Theorie zu liefern, durch welche meiner Ansicht nach das Problem der Gravitation, das drei Jahrhunderte offen gelassen hatten, endlich gelöst ist.

Inhalt.

I. Das Trägheitsgesetz.

1. Das Newtonsche Trägheitsgesetz.

Das Trägheitsgesetz der Newton-Galileischen Mechanik ist bekanntlich das erste Newtonsche Axiom: corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare. Stammt dieses Trägheitsgesetz aus der Erfahrung? „Hat man," so fragt Poincaré[1]), „jemals mit Körpern experimentiert, die der Einwirkung aller Kräfte entzogen waren? Man zitiert gewöhnlich das Beispiel einer Kugel, die sehr lange auf einem Marmortische rollt; aber warum sagen wir, daß sie keiner Kraft unterworfen ist? Ist sie etwa zu weit von allen übrigen Körpern entfernt, um von ihnen keine merkliche Einwirkung erfahren zu können? Aber sie ist doch um nichts weiter von der Erde entfernt, als wenn man sie frei in der Luft losließe; und jedermann weiß, daß sie in diesem Falle dem Einflusse der Schwere unterliegen würde, der von der Anziehungskraft der Erde herrührt."

Wir sind also mit der Erfahrung keineswegs im Widerspruche, wenn wir das erste Newtonsche Axiom aufheben. Im Gegenteil, wenn wir an dessen Stelle die Aussage setzen: „Ein sich selbst überlassener Körper fällt", sind wir mit der alltäglichen Erfahrung in bestem Einklange. Wie ist dieses Trägheitsgesetz zu verstehen? Offenbar so, daß von der Gravitation nicht abstrahiert werden darf. Eine Mechanik, welche wie die Newtonsche die Gravitation der Materie nicht als wesentlich und anerschaffen ansieht[2]), ist unzulässig. Unsere Aufgabe ist es also, das Trägheitsgesetz so zu modifizieren, daß aus ihm die ständige Gegenwart der Gravitation in allen physikalischen Erscheinungen folgt.

2. Die übrigen Newtonschen Axiome.

Vorerst ein Wort über die übrigen Newtonschen Axiome in diesem Zusammenhange. Sie sind sämtlich von der neuen Mechanik bereits aufgegeben. Das, wodurch sich diese neue Mechanik von der Newtonschen unterscheidet, ist bekanntlich die Berücksichtigung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit aller Störungen, als welche die Lichtgeschwindig-

1) H. Poincaré, La science et l'hypothèse, chap. VI, p. 113.
2) Newton an Bentley.

keit angenommen wird. Von diesem Gesichtspunkte fiel als erstes der Newtonschen Prinzipien das von der Gleichheit der Aktion und Reaktion. Auch das zweite Newtonsche Axiom, daß Kraft und Beschleunigung proportional seien, mußte aufgegeben werden, als die Abhängigkeit des Proportionalitätsfaktors, der Masse, von der Richtung erkannt wurde, welche zur Folge hat, daß Kraft und Beschleunigung im allgemeinen nicht gleichgerichtet sind. Schließlich mußte sogar der Newtonsche Grundbegriff der absoluten Zeit geopfert werden, indem auch hier bei der Definition der Gleichzeitigkeit an verschiedenen Orten die endliche Signalgeschwindigkeit ihre Rolle spielt.

Die Unterschiede der neuen Mechanik gegen die Newtonsche Mechanik sind hier allerdings nur sogenannte Effekte zweiter Ordnung, welche wegfallen, wenn man die Relativgeschwindigkeit des Systems gegen die Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt. Im Falle relativer Ruhe stimmen die Newtonsche und die neue Mechanik sogar exakt überein.

Die in 1. angekündigte Modifizierung des Trägheitsgesetzes geht nun ebenfalls auf die endliche Lichtgeschwindigkeit zurück, wie wir später sehen werden. Wir werden dann gleichzeitig sehen, daß die Gravitation jedoch in gewissem Sinne ein Effekt erster Ordnung ist.

3. Die Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit als Fundamentalannahme.

Die Fundamentalannahme, die wir zur Erreichung des angekündigten Zieles machen, ist diese:

Im leeren Raume ist in der Nähe von Materie die Lichtgeschwindigkeit veränderlich.

Man kann hiervon zweierlei Interpretationen geben. Erstens eine rein phänomenologische: Die Zeitmessung hängt von der Gegenwart der Materie ab und wird durch sie beeinflußt. Wir wollen gleich hinzufügen, daß auch die Raummaße, wie das Spätere lehren wird, beeinflußt werden müssen.

Zweitens eine anschaulichere fiktive: Wir denken uns statt des leeren Raumes das Medium, den Äther, als Umgebung der Materie. Dann können wir sagen: *Durch die Ein-*

bettung der Materie entstehen im Äther gewisse Dichteänderungen, als deren Folge die variable Lichtgeschwindigkeit auftritt. Die Folge dieser Dichteänderungen sind gewisse (fiktive) Spannungen, die der Äther auf die Materie ausübt. Bei einer isolierten Masse heben sich diese Spannungen gegenseitig auf. Ist noch eine Masse anwesend, so sind die Spannungen auf der dieser Masse näheren Seite stärker gestört; infolgedessen kommt ein Übergewicht der Spannungen der anderen Seite zustande, oder die beiden Massen ziehen sich an.

Man erinnert sich hier einer gewissen Analogie mit der Le Sageschen Gravitationstheorie. Nur sind es hier nicht Ätherstöße, sondern Ätherspannungen.

4. Die Relativität des Trägheitsgesetzes.

Wir werden später sehen, daß die Anziehung als Folgerung aus der Abnahme der Lichtgeschwindigkeit bei Annäherung an die Massen ohne die Ätherhypothese gezogen werden kann (§ 10).

Vorerst aber stellen wir fest: Unser Ziel, die Gravitation unlösbar mit der Materie zu verknüpfen, ist vorbehaltlich der mathematischen Formulierung, durch unsere Fundamentalannahme erreicht. In einer Veränderung von Zeit (und Raum) gipfelt die eingeführte Modifikation des Trägheitsgesetzes.

Aber dieses Trägheitsgesetz ist von der Gegenwart einer oder mehrerer Massen in der Umgebung abhängig. Das neue Trägheitsgesetz ist relativ, das alte war absolut. Das scheint eine Komplikation zu sein. Sie wird aufgewogen durch die Vorteile der neuen Auffassung. Dies erkennen wir aus den folgenden Betrachtungen.

5. Die Uniformität der Gravitation.

Die Gravitation war für Newton ablösbar von der Materie. Sie bildete bei ihm ein separates Kapitel der Physik, wie es die Elektrizität, die Kohäsion, die Kapillarität usw. sind. Im Vergleich mit den genannten Naturkräften zeigt aber die Gravitation ein abweichendes Verhalten; sie ist unabhängig von der chemischen und strukturellen Beschaffenheit der Materie. Alle Körper erfahren die gleiche Fallbeschleunigung, wie schon Galilei wußte. Es gibt keine Dispersion der Gravitation, wie die astronomischen Verfinsterungen gezeigt haben. Diesem Komplex von Eigenschaften bezeichnen wir kurz als die Uniformität der Gravitation.

Von dem eröffneten Gesichtspunkte aus ist dies aber nichts Verwunderliches. Raum und Zeit, auf deren Eigenschaften die Gravitation zurückgeht, sind ja selber uniform. So setzen wir sie bei unserer Betrachtung der Außenwelt voraus. Die gemeinsame Fallbeschleunigung aller Körper ist dann ebensowenig verwunderlich als das gleichartige Verhalten aller Körper im Newtonschen Trägheitsgesetze.

6. Die Energetik der Gravitation.

Aber noch einer anderen Schwierigkeit begegnete die Newtonsche Mechanik bei ihrer Behandlung der Gravitation. Durch deren Gleichstellung mit den elektrischen, chemischen, molekularen usw. Kräften liegt die Frage nahe: Kann die Gravitationsenergie in andere Energieformen übergeführt werden? Man hat nun vergeblich nach einer Umwandlung der Gravitation in Wärme gesucht. Es gibt ja wohl einige Physiker, die z. B. das Glühen der Meteore jenseits der Atmosphäre hierauf zurückführen wollten. Kein Experiment hat diese Anschauung bisher bestätigt.

Im Hinblick hierauf hat die alte Mechanik ihre Bezeichnung „konservative Kräfte" erfunden. Konservative Kräfte sind reine Bewegungskräfte (Helmholtz). Keine andere Kraft außer der Gravitation ist aber rein konservativ. Wie kommt es zu dieser Sonderstellung der Gravitation, wenn sie wirklich nur ein Seitenstück zur Elektrizität usw. wäre?

Von unserem Gesichtspunkte ist hier weiter nichts Verwunderliches, so wenig wie es verwunderlich ist, daß der isolierte Körper des Newtonschen Trägheitsgesetzes konservativ war. Wir werden infolgedessen auch nicht mehr von Gravitationskräften reden. Damit soll zum Ausdrucke kommen, daß die zugrundeliegenden Gravitationsspannungen fingiert sind, ähnlich, wie es die Trägheits- und Zusatzkräfte des d'Alembertschen Prinzipes waren. Mathematisch findet dies seinen Ausdruck darin, daß die Gravitationsspannungen, wie wir sehen werden, automatisch aus dem Impulsenergiesatz, dem Analogon zu Newtons Bewegungsgleichungen, ausfallen (§ 24).[1])

II. Die Voraussetzungen.

Nachdem solchermaßen die Vorteile der neuen Auffassung genügend belegt zu sein scheinen, gehen wir an die Formulierung der mathematischen Aufgabe.

Gesucht ist also diejenige Abänderung des Trägheitsgesetzes, aus Eigenschaften von Raum und Zeit folgend, daß sich aus ihr die Gravitationserscheinungen ergeben. Da die Newtonsche Theorie diese bis auf wenige Ausnahmen gut darstellt, muß sie oder die auf ihr fußende Minkowskische Mechanik sich als erste Näherung der neuen Theorie ergeben.

7. Das Trägheitsgesetz bei Minkowski.

Welches ist nun das Trägheitsgesetz bei Minkowski? Denn auf dieses, nicht auf das Newtonsche, haben wir ja offenbar aufzubauen.

Man weiß, daß für die Minkowskische Mechanik eine Art Union von Raum und Zeit stattfindet, die ihren Ausdruck in der vierdimensionalen Symbolik Minkowskis findet. Hierbei spielt die quadratische Differentialform

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 \tag{1}$$

eine Hauptrolle, vergleichbar einem Bogengesetze der Differentialgeometrie. Genauer gesagt, entspricht dieses Bogengesetz einer euklidischen Geometrie. Ein euklidischer Raum (wie allgemein jeder Raum konstanter Krümmung) ist allseitig symmetrisch.

Welche Bedeutung hat physikalisch dieses ds^2? Minkowski deutet ds als die Eigenzeit eines bewegten Beobachters. Denn man weiß, daß die Zeit bei Minkowski nicht mehr absolut ist, sondern vom Bewegungszustande des Be-

1) In diesem Sinne habe ich 1916 gesagt, daß die Gravitation kinematischen (im Gegensatz zu: dynamischen) Charakter hat. Eine Auffassung, als würde ich damit gemeint haben, daß sie kinematisch vorgetäuscht werde, wie es nur bei den gewissen Spezialfällen der Theorie (vgl. Kap. VI) tatsächlich der Fall ist, kann nur auf ein Mißverständnis meiner Ausführungen zurückgehen.

obachters abhängt. Der Unterschied ist bekanntlich der, daß Beschleunigung sozusagen den Gang einer Uhr verzögert. Das heißt: Unter allen möglichen Bewegungen, die einen Beobachter von einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage überführen, erkennt man die unbeschleunigte an der mitbewegten Uhr; sie weist ein Maximum der Zeitdifferenz auf. Dies ist das Trägheitsgesetz von Minkowski. Mathematisch gesprochen heißt dies: Das Integral

$$\int_1^2 d s$$

wird für die aus dem Trägheitsgesetze folgende Bewegung ein Extrem.

Man überzeugt sich leicht, daß die Extremalen dieses Integrals, die Geodäten des Minkowskischen S_4, euklidische Gerade sind. Aus der bekannten Kinematik von Minkowski folgt, daß dann die zugehörigen Bahnen ebenfalls Gerade des gewöhnlichen Raumes sind und daß sie mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen werden; das heißt aber, das Minkowskische Trägheitsgesetz ist identisch mit dem Newtonschen.

8. Das generalisierte Bogengesetz.

Zufolge unserer Fundamentalannahme ist die Lichtgeschwindigkeit in der Nähe von ponderabler Materie variabel. Dies geht zurück auf eine Veränderung des Zeitmaßes. Diesem Standpunkte Rechnung tragend, ist der allgemeinst mögliche Ansatz zu machen:

$$(2) \qquad - d s^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik} (x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4) \, d x_i \, d x_k ,$$

wo die g_{ik} Funktionen von $x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4$ und $x_1 \, x_2 \, x_3$ irgendwelche drei raumartige Koordinaten, x_4 eine reelle zeitartige Koordinate ist. Hierbei sind allerdings die Raummaße auch verändert; ferner ist durch die $g_{14} \, g_{24} \, g_{34}$ eine Anisotropie der Lichtgeschwindigkeit (Abhängigkeit von der Richtung) eingeführt. Daß auch diese Effekte von der Gegenwart der Materie herrühren, ist noch zu rechtfertigen, wenn es gleich aus der Ätherhypothese evident ist, daß die Dichteänderung des Äthers ihrerseits auf gewisse Längenausdehnungen in der Materie zurückwirkt, daß ferner unter Umständen eine anisotrope Struktur des Äthers denkbar ist.

9. Berechtigte Bezugssysteme. Die Leithypothese.

Folgendermaßen kommen wir zur Erkenntnis, daß wir die Raummaße ebenfalls einer Änderung unterwerfen müssen. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit war ein grundlegendes Postulat der Minkowskischen Mechanik. Man kann nun dieses Postulat in einem gewissen Sinne aufrecht erhalten. Nämlich $-c^2$ ist bei Minkowski nicht bloß der Koeffizient von dt^2 in der Form ds^2, sondern auch der Wert von

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{vmatrix}$$

der Determinante sämtlicher Koeffizienten des ds^2. Benutzen wir also kartesische Koordinaten, so kann man dem Umstande, daß die Newton-Minkowskische Mechanik mit konstanter Lichtgeschwindigkeit ihr Auslangen zu einer Beschreibung der Naturerscheinungen findet, Rechnung tragen, indem man für (2) vorschreibt:

$$g = -c^2 . \tag{3}$$

Hat man andere als kartesische Koordinaten, so ist diese Bedingung der Invarianz der Determinante sinngemäß zu ändern.[1]) Es wird sich tatsächlich zeigen, daß wir mit Hilfe von (3) die bestmöglichste Annäherung an die Erfahrung durch die Newtonsche Theorie erzielen, wobei $x_1\, x_2\, x_3$ als gewöhnliche kartesische Koordinaten, s oder eine zu s proportionale Größe als Zeit verwendet werden, die Lichtgeschwindigkeit konstant gleich c genommen wird.

Die exakte Darstellung ist freilich (2), wobei die Konstanz von c nur in der Beziehnng (3) oder in einer analogen auftritt. Nur solche Bezugssysteme wollen wir als berechtigt gelten lassen.[2])

---

1) Sie ist nicht identisch mit der von Einstein hie und da verwendeten Beschränkung $\sqrt{-g} = c$!

2) Diese Auszeichnung gilt nur, solange wir auf dem Boden Newtonscher Raumzeitanschauung stehen. Im allgemeineren Fall sind alle Bezugssysteme gleichberechtigt.

Man erkennt nun sofort, daß mit einer Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit auch eine der Raummaße Hand in Hand gehen muß. Nimmt beispielsweise die Lichtgeschwindigkeit längs einer Koordinate ab, so muß wegen der Invarianz von g der Koeffizient der betreffenden Koordinate in ds^2 zunehmen, d. h. es erfolgt eine Streckung in der Richtung des Sch erefeldes.

10. Die Anziehung infolge der Schwere.

Auf (2) und der Hypothese (3) errichten wir nun mit Hilfe des Minkowskischen Trägheitsgesetzes unseren Aufbau der neuen Theorie. Die Lichtgeschwindigkeit nimmt bei Annäherung an die Materie ab. Gesetzt also, ein Beobachter würde eine Eigenzeituhr, die das $\int_1^2 ds$ abzulesen gestattet, im Schwerefelde beobachten. Zum Beispiel ein Spiegelpaar von festem Abstande, zwischen dem ein Lichtstrahl hin und her zirkuliert. Der zurückgelegte Lichtweg ist dann $\int ds$.

Angenommen, der Beobachter mißt an zwei Stellen des Schwerefeldes mit Hilfe der Lokalzeit z. B. einer schwingenden Saite, die Dauer eines Hin- und Herganges seiner Lichtuhr. Er findet dann an der Stelle des Schwerefeldes mit kleinerem Sch erepotential (kleinerer Lichtgeschwindigkeit) den größeren Wert der Zeitangabe seiner Lokaluhr für den Gang der Lichtuhr. Nach dem letzteren richtet sich aber die Trägheit. Es entspricht dem eingepflanzten „Beharrungsvermögen" der Materie, diejenigen Orte aufzusuchen, wo das $\int ds$ die größtmöglichsten Werte erreicht. Dies ist ja antropomorph ausgedrückt, die mathematische Aussage des Minkowskischen Trägheitsprinzips. Wir sehen also ohne Zuhilfenahme des Äthers, allerdings auch mit einer metaphysischen Beimengung, die Anziehung der Materie gegen die Stelle des Minimums der Lichtgeschwindigkeit. Der exakte Standpunkt ist natürlich der rein mathematische (die bekannte bloße Beschreibung der Ereignisse durch die Differentialgleichungen), von dem freilich die Vorstellungskraft keinen Gewinn hat.

III. Das Feld des ruhenden Massenpunktes.

Die Grundlage der Newtonschen Theorie sind die Keplerschen Gesetze. Mit Berücksichtigung der Unterschiede zwischen Minkowskischer und Newtonscher Mechanik, also bei Vernachlässigung der Effekte zweiter Ordnung, müssen sie sich aus der neuen Theorie ergeben, wenn wir ein im Sinne von § 11 berechtigtes Bezugssystem benutzen. Das Keplersche Problem ist dabei das Zweikörperproblem mit Vernachlässigung der angezogenen Masse gegenüber der Masse des Zentralkörpers, der als Massenpunkt behandelt wird, kurz das Schwerefeld des ruhenden Massenpunktes.

11. Das zugrundegelegte Bogengesetz und seine Extremalen.

Das Feld des ruhenden Massenpunktes ist statisch, frei von t. Es ist radialsymmetrisch und isotrop; wir haben bloß eine Streckung in der Richtung der Radienvektoren. Wir setzen daher an:

$$(4) \qquad -ds^2 = g_1(r)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,d\varphi^2 - g_4(r)\,dt^2 .$$

Dabei sind $r\,\vartheta\,\varphi$ gewöhnliche Polarkoordinaten, deren Ursprung in den Massenpunkt verlegt wird; g_1 und g_4 sind Funktionen von der Entfernung r allein. Die Bedingung (3), daß wir ein zur Newtonschen näherungsweisen Darstellung berechtigtes Bezugssystem vor uns haben, verlangt in sinngemäßer Anwendung auf Polarkoordinaten:

$$g = -r^4 \sin^2\vartheta\, c^2 .$$

Die Invarianz von g bedingt also

$$g_1\, g_4 = c^2 .$$

Wir schreiben also

$$(4a) \qquad -ds^2 = \frac{c^2}{g_4}\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,d\varphi^2 - g_4\,dt^2$$

mit der unbekannten Funktion $g_4(r)$. Da die Lichtgeschwindigkeit in der Richtung der Radienvektoren variiert, setzen wir

$$(4b) \qquad g_4 = c^2 - k\,m\,f(r) ,$$

wo k die Newtonsche Gravitationskonstante,

$$6{,}7 \,.\, 10^{-8}\ \mathrm{gr}^{-1}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{sec}^{-2} ,$$

m eine Massenkonstante, die Newtonsche schwere Masse des Massenpunktes ist. Denn für $k = 0$ oder $m = 0$ hätten wir keine Gravitation und g_4 müßte gleich c^2 sein. Erfahrungsgemäß kann die Änderung der Lichtgeschwindigkeit im Schwerefelde keine große sein, sonst wäre ja die Newtonsche Theorie mit konstanter Lichtgeschwindigkeit keine Näherung erster Ordnung. Es ist daher in

$$g_4 = c^2\left(1 - \frac{k\,m}{c^2} f(r)\right)$$

der Ausdruck $\frac{k\,m}{c^2} f(r)$ von zweiter Ordnung.

Wir haben somit endgültig

$$(4\,\mathrm{c})\quad \left\{\begin{aligned} -ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{k\,m}{c^2} f(r)}\, dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \\ - c^2\left(1 - \frac{k\,m}{c^2} f(r)\right) dt^2 \end{aligned}\right.$$

und hiervon sind die Extremalen zu bilden, um das Trägheitsgesetz für das Schwerefeld des ruhenden Massenpunktes zu erhalten.

Für ein allgemeines

$$-ds^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

sind bekanntlich die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen der Extremalen

$$\frac{d}{du}\left(\sum_{k=1}^{4} g_{ik} \frac{d x_k}{d u}\right) - \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{4} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x_i} \frac{d x_l}{d u} \frac{d x_m}{d u} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

wobei u ein Parameter, so daß die Nebenbedingung erfüllt ist;

$$\left(\frac{d s}{d u}\right)^2 = \text{const} = D^2.$$

Man hat die Fälle zu unterscheiden.

1. $D^2 = 0$; dann hat man es mit Lichtstrahlen zu tun.

2. $D^2 > 0$; dann hat man es mit den Weltlinien kräftefreier Punkte zu tun. Man nimmt dann passend $D^2 = c^2$, so daß u eine (Minkowskische) Eigenzeit wird.

Wir beschränken uns auf den Fall 2 und nehmen $ds = c\,du$. Man findet dann

$$\begin{aligned} -c^2 du^2 = \frac{1}{1 - \frac{k\,m}{c^2} f(r)}\, dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \\ - c^2\left(1 - \frac{k\,m}{c^2} f(r)\right) dt^2 \end{aligned}$$

mit den Differentialgleichungen

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-\frac{km}{c^2}f(r)}\frac{dr}{du}\right)-r\left(\frac{d\vartheta}{du}\right)^2-r\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2-\tfrac{1}{2}kmf'(r)\left(\frac{dt}{du}\right)^2=0,$$

$$\frac{d}{du}\left(r^2\frac{d\vartheta}{du}\right)-r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2=0,$$

$$\frac{d}{du}\left(r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{du}\right)=0,$$

$$\frac{d}{du}\left((c^2-kmf(r))\frac{dt}{du}\right)=0$$

und den Integralen

$$r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{du}=\mathrm{const}=B,$$

$$(c^2-kmf(r))\frac{dt}{du}=\mathrm{const}=c^2-A.$$

Man zeigt leicht, daß die Bewegung in einer Ebene durch den Ursprung vor sich geht, als welche wir die (invariable) Ebene

$$\vartheta=\pi/2$$

nehmen. Man hat dann die Integrale

$$-c^2du^2=\frac{1}{1-\frac{km}{c^2}f(r)}dr^2+r^2d\varphi^2-c^2\left(1-\frac{km}{c^2}f(r)\right)dt^2,$$

$$r^2\frac{d\varphi}{du}=B,$$

$$(c^2-kmf(r))\frac{dt}{du}=c^2-A.$$

Das letzte ist bekanntlich nach Minkowski der Energiesatz, den ja die vierte Bewegungsgleichung Minkowskis liefert. Also muß A/c^2 von zweiter Ordnung sein. Ebenso ist B/c^2 von zweiter Ordnung.

Durch Einsetzen und Einführung der unabhängigen Variablen φ an Stelle von u, erhält man schließlich die einzige Relation

$$\text{(5a)}\quad B^2\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\right)^2+B^2\cdot\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{km}{c^2}f(r)\right)-kmf(r)+2A-\frac{A^2}{c^2}=0.$$

12. Die Newtonsche erste Näherung. Keplers Gesetze.

$$r,\ \vartheta,\ \varphi \text{ mit } \frac{s}{c} = u$$

als Zeit bilden nach Voraussetzung (§ 9) ein berechtigtes Bezugssystem, liefern also die Newtonsche Darstellung exakt bis auf die Minkowskischen Effekte zweiter Ordnung. Bei deren Vernachlässigung stößt man also auf Keplers Gesetze. Diese liefern B als Konstante des Flächensatzes, A als (negative) Gesamtenergie und die Keplersche Form des intermediären, zu (5a) analogen Integrals

$$(5\,\mathrm{b})\qquad B^2\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + B^2 \cdot \frac{1}{r^2} \qquad - k\,m \cdot \frac{2}{r} + 2\,A \qquad = 0\,.$$

Bei Vergleich mit (5a) findet man bis auf die Effekte zweiter Ordnung Übereinstimmung, wenn

$$f(r) = \frac{2}{r}\,.$$

Da unser Bezugssystem berechtigt war, ist dies die exakte Form von $(f\,r)$. Mithin haben wir gefunden

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} - d s^2 = &\frac{1}{1 - \frac{2\,k\,m}{c^2}\,\frac{1}{r}}\, d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,d\,\varphi^2 \\ &- c^2\left(1 - \frac{2\,k\,m}{c^2}\cdot\frac{1}{r}\right) d\,t^2 \end{aligned}\right.$$

als Ausdruck des Schwerefeldes eines ruhenden Massenpunktes, der in Größen erster Ordnung die Keplerschen Gesetze exakt liefert.[1])

13. Die Effekte zweiter Ordnung. Perihelbewegung.

Gehen wir jetzt zu den Effekten zweiter Ordnung, die den charakteristischen Unterschied von Minkowskis und Newtons Mechanik ausmachen und auf die Berücksichtigung der endlichen Übertragungsgeschwindigkeit der Störungen zurückgehen. Man hat zufolge (5a) mit

$$f(r) = \frac{2}{r}$$

1) Zuerst angegeben von K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Berl. Ber. p. 189. 1916.

$$\varphi = \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2km}{c^2}\left(\frac{1}{r}\right)^3 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2km}{B^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{2A}{B^2}\left(1 + \frac{A}{2c^2}\right)}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{F\left(\frac{1}{r}\right)}}$$

mithin ein elliptisches Integral.

$F(1/r) = 0$ ist eine Gleichung dritten Grades für $1/r$. Wir haben

$$F\left(\frac{1}{r}\right) \equiv \frac{2km}{c^2}\left(\frac{1}{r} - w_1\right)\left(\frac{1}{r} - w_2\right)\left(\frac{1}{r} - w_3\right).$$

Sei bezeichnet
$$\frac{B^2}{km} = a(1 - \varepsilon^2),$$
$$A\left(1 + \frac{A}{2c^2}\right) = \frac{km}{2a},$$
so haben wir

$$F\left(\frac{1}{r}\right) \equiv \frac{2km}{c^2}\left(\frac{1}{r}\right)^3 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2}{a(1-\varepsilon^2)}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 0.$$

Bei Vernachlässigung der Effekte zweiter Ordnung hätten wir $\lim a = a_0$, $\lim \varepsilon = \varepsilon_0$, wo a_0 die halbe große Achse, ε_0 die numerische Exzentrizität Keplers ist

$$\lim F\left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_0(1+\varepsilon_0)}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0(1+\varepsilon_0)}\right).$$

Wir haben infolgedessen zwei Wurzeln, etwa w_1 bzw. w_2, in der Nähe von
$$\frac{1}{a(1+\varepsilon)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a(1-\varepsilon)},$$
die dritte, w_3, in der Nähe von $2km/c^2$. Jede dieser Wurzeln liefert einen Extremwert von $1/r$, mithin einen Scheitel der Planetenbahn. Für eine durchaus im Endlichen gelegene Bahn kommt der Wert w_3 nicht in Betracht, da wegen der Kleinheit von km/c^2 (vgl. § 14) r ungeheure Werte bekäme. Wir beschränken uns also auf w_1 bzw. w_2, wobei w_2 offenbar das Perihel, w_1 das Aphel liefert, da

$$w_1 < w_2.$$

Mithin ist der Winkelabstand Perihel—Aphel

$$\varphi_{12} = \int_{w_1}^{w_2} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2km}{c^2}\left(\frac{1}{r} - w_1\right)\left(\frac{1}{r} - w_2\right)\left(\frac{1}{r} - w_3\right)}}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - w_1\right)\left(w_2 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{2km}{c^2}\left[\frac{1}{r} + w_1 + w_2\right]\right)}},$$

denn

$$\frac{2km}{c^2}(w_1 + w_2 + w_3) = 1\,.$$

Man führe ein

$$\frac{1}{r} = \frac{w_2 - w_1}{2}\cos\psi + \frac{w_2 + w_1}{2}$$

und erhält

$$\varphi_{12} = \int\limits_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{2km}{c^2}\left(\frac{w_2 - w_1}{2}\cos\psi + \frac{3w_2 + 3w_1}{2}\right)}}\,.$$

Bei Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung liefert dies

$$\varphi_{12} = \int\limits_0^\pi d\psi\left(1 + \frac{km}{c^2}\left[\frac{w_2 - w_1}{2}\cos\psi + \frac{3w_2 + 3w_1}{2}\right] + \ldots\right)$$
$$= \pi\left(1 + \frac{3km}{2c^2}(w_1 + w_2) + \ldots\right)$$

Es ist aber bis auf Größen zweiter Ordnung

$$w_1 + w_2 \sim w_1^0 + w_2^0 = \frac{1}{a_0(1+\varepsilon)} + \frac{1}{a_0(1-\varepsilon_0)} = \frac{2}{a_0(1-\varepsilon_0^2)}\,,$$

mithin in Größen zweiter Ordnung genau

$$\varphi_{12} = \pi + \pi\cdot\frac{12\pi^2 a_0^2}{c^2 T_0^2(1-\psi_0^2)}\,,$$

wo T_0, die Umlaufszeit des Planeten gemäß dem dritten Keplerschen Gesetze

$$\frac{4\pi a_0^3}{T_0^2} = km$$

eingesetzt wurde. Dies liefert das Fortschreiten des Perihels um

$$\frac{24\pi^2 a_0^2}{c^2 T_0^2(1-\varepsilon_0^2)}$$

pro Umlauf, die sogenannte Perihelbewegung, wie sie besonders am Merkur vermöge der großen Exzentrizität seiner Bahn und seiner großen Schnelligkeit tatsächlich beobachtet wurde.[1])

So ergibt sich aus der neuen Mechanik eine der auffallendsten Diskrepanzen der Newtonschen Mechanik, gegen die Erfahrung einfach als Effekt zweiter Ordnung, auf der-

---

1) A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Berl. Ber. p. 831. 1916.

selben Basis, auf der die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit seinerzeit von Lorentz eingeführt und an der Erfahrung bestätigt wurde.

14. Zahlenwerte.

Zur Illustration folgen einige Zahlenwerte:

Zentralkörper	Planet (Trabant)	km/c^2 in km	mittlere Entfernung in km
Sonne	Merkur	1,4	$5{,}7 \cdot 10^7$
„	Enckescher Komet	1,4	$4{,}97 \cdot 10^7$ [1])
Erde	Mond	$4{,}34 \cdot 10^{-3}$	$3{,}84 \cdot 10^5$
Mars	Marsmond Phobos	$4{,}48 \cdot 10^{-9}$	$9{,}34 \cdot 10^3$

Man ersieht hieraus die allgemeine Kleinheit von km/c^2 gegen die vorkommenden Entfernungen, also die praktische Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Bemerkenswert ist, daß der Enckesche Komet ebenfalls Perihelanomalien zeigt, wie dies zu erwarten steht, da die numerischen Verhältnisse ungefähr wie beim Merkur liegen. Die Astronomen deuten hier die Beobachtungen gewöhnlich anders, im Sinne einer Verfrühung des Perihels (Encke, Olbers). Vermutlich liegt auch hier eine Perihelbewegung vor.

Noch ein Wort über die vergeblichen Erklärungsversuche der Perihelbewegung aus der Theorie der retardierten Potentiale (Elementargesetze von Weber, Riemann, Lorentz, Gerber usw.): Da die Gravitation nichts mit Wellenausbreitung zu tun hat, liegen diese Versuche in falscher Richtung, ebenso wie wenn man die Lorentzsche Massenveränderlichkeit auf retardierte Potentiale zurückführen wollte. Der Effekt ist wesentlich stationärer Natur.

IV. Das allgemeine statische Feld.

Der erste Punkt unseres Programmes ist gelöst: Die Planetenbewegung ist als kräftefreie Bewegung durch eine Abänderung des Trägheitsgesetzes gedeutet, die ihren Grund hat in der Beeinflussung von Raum- und Zeitmaßen durch die Anwesenheit eines Zentralkörpers. Es wäre demnach als nächster Punkt das allgemeine statische Feld zu analysieren. Dieses wird bekanntlich bei Newton durch die Poissonsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi k \mu$$

1) Periheldistanz.

beherrscht, wofür man auch die Gaussssche Divergenzbeziehung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -4\pi k \mu$$

schreiben kann. $X\,Y\,Z$ sind die Feldstärken der Gravitation. μ ist die Dichte der schweren Masse Newtons. Wenn wir vorhin m ohne weiteres als Konstante behandelt haben, so erfordert die Einführung von μ eine Untersuchung, die wir hier anschließen.

15. Der Newtonsche starre Körper und die sogenannte inkohärente Massenströmung.

Die Minkowskische Mechanik führt alle Masse auf die Trägheit der Energie zurück. Sie setzt im einfachsten Falle der Ruhe

$$\mu = \frac{\varepsilon}{c^2},$$

wo ε die ruhende Energiedichte ist. Treten Spannungen im Körper auf, so liefern diese gleichfalls einen Beitrag, z. B. für einen isotropen *äußeren* Druck p hätte man[1])

$$\frac{\varepsilon - p}{c^2}$$

als träge Masse usw. Allgemein gesprochen, ersetzt sie die Newtonsche Masse durch den ganzen Tensor T_{ik} $_{i,k=1,2,3,4}$ der Spannungen, des Impulses und der Energiedichte.

Welches ist dieser Tensor in unserem Falle? Hierzu bedenke man, daß Newtons Grundidee der starre Körper ist. Im Falle der Ruhe fallen also alle elastischen Spannungen und der Impuls weg; es bleibt nur die Komponente $T^{(44)}$, die Energiedichte, bestehen. Diesem starren Körper Newtons entspricht daher bei Minkowski der Tensor

$$T^{(ik)} = -\varepsilon \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s} \qquad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Das Minuszeichen rührt davon her, daß wir *äußeren* Druck usw. als positiv rechnen und die Trägheitskräfte als negative Reaktionskräfte ansehen. Die Spannungen, die dieser Tensor für den Fall der Bewegung aufweist, sind scheinbare Spannungen,

1) In der Planckschen Fassung nimmt man den *inneren* Druck positiv und findet $\frac{\varepsilon + p}{c^2}$ als Dichte der trägen Masse

ebenso wie die Lorentzkontraktion eine scheinbare Deformation ist und nur vom zugrundegelegten Bezugssysteme abhängt. Die wirklichen elastischen Spannungen sind die Relativspannungen (Laue), die auf das einfachste mit den Ruhespannungen zusammenhängen.

Nun, diese Relativspannungen und ebenso der Relativenergiestrom verschwinden für den obigen Tensor und nur für diesen. Es handelt sich hier also um die relativistische Minkowskische Übertragung des Newtonschen Begriffes des Systems diskreter Massenpunkte, die ihre Abstände bis auf die Lorentzdeformation unverändert beibehalten. Keinerlei elastische Spannungen sind zwischen den Massenpunkten tätig. Man spricht daher auch von einer *inkohärenten Massenströmung.*

Ist nun dieser Standpunkt des starren Körpers Newtons in seiner Minkowskischen Übertragung bei der Betrachtung der schweren Materie gerechtfertigt? Keineswegs.

Zuerst die fiktiven Ätherspannungen, die Gravitationsspannungen des äußeren Feldes. Diese fallen, wie wir sehen werden, aus den Bewegungsgleichungen aus, sie sind also *keine* elastischen Spannungen, und der Newtonsche Standpunkt wäre gerechtfertigt. In der Tat verlangt die Form unseres Trägheitsgesetzes (die geodätischen Differentialgleichungen) für den Massenpunkt, wie wir sehen werden, den Tensor der inkohärenten Massenströmung (§ 22).

Dabei ist nun etwas vernachlässigt: nämlich das Eigenfeld des Massenpunktes. Dies tun wir ja gewöhnlich bei der Einbringung eines Probekörpers in ein äußeres Feld. Wollte man aber dieses Eigenfeld mitberücksichtigen, so ist sofort klar, daß es dann irgendwelcher Kohäsionsspannungen im Probekörper bedarf, um ihn entgegen der Wirkung des Eigenfeldes zusammenzuhalten. Diese Spannungen sind *elastischer* Natur, und es kann daher der inkohärente Tensor nicht mehr gelten (Näheres Kapitel VI).

Wir werden aber diese Spannungen, die zweiter Ordnung sind, im folgenden vernachlässigen und wollen als Tensor der Materie

$$T^{(ik)} = -\varepsilon \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s}$$

ansetzen, d. h. wir vernachlässigen bei der Betrachtung eines Volumelementes den Einfluß des Eigenfeldes.

Mithin haben wir eine erste Annäherung an den Newtonschen Standpunkt vollzogen. Wir haben den starren Körper adoptiert.

Aber noch sind Unterschiede zurückgeblieben, die gewissen Effekte zweiter Ordnung, durch die Minkowski und Newton sich unterscheiden. Wir wissen, daß Minkowskische und Newtonsche Mechanik sich exakt nur für den Fall der relativen Ruhe decken.

Wenn wir also die Poissonsche Theorie exakt wiederfinden wollen, müssen wir die betrachtete Stelle der Materie als ruhend annehmen. Bei ihrer Kleinheit können wir dann auch die Einwirkung des Eigenfeldes vernachlässigen und finden so noch einmal eine Rechtfertigung für die Annahme des starren Tensors.

Wir gehen nun an diese Aufgabe, die das Analogon zu unserem Vorgange bei den Keplerschen Gesetzen ist, die wir ja auch exakt als Effekte erster Ordnung fanden.

18. Das zugrundegelegte Bogengesetz und seine Extremalen.

Das allgemeine statische Feld Newtons ist frei von t und isotrop. Mithin haben wir

$$(7) \qquad -ds^2 = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} g_{\lambda\mu}(x_1\, x_2\, x_3)\, dx_\lambda\, dx_\mu \quad - g_{44}(x_1\, x_2\, x_3)\, dt^2,$$

Hierin sind die $x_1\, x_2\, x_3$ irgendwelche Lagrangesche generalisierte Koordinaten. Wenn das Bezugssystem *berechtigt* ist, so muß sein

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot (-c^2) = -a \cdot c^2.$$

Hierin sind die $a_{\lambda\mu}$ die Koeffizienten von

$$d\mathfrak{s}^2 = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} a_{\lambda\mu}\, dx_\lambda\, dx_\mu = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

dem dreidimensionalen Bogengesetze Newton-Lagranges, wie es z. B. im Ausdrucke der kinetischen Energie

$$2\,T = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} a_{\lambda\mu} \frac{dx_\lambda}{du} \frac{dx_\mu}{du}$$

bei Lagrange auftritt. u ist hierbei wieder s/c, die Newtonsche Zeit, da die Materie nach Voraussetzung ruht.

Zufolge eben dieser Voraussetzung ist

$$\frac{d x_1}{d s} = \frac{d x_2}{d s} = \frac{d x_3}{d s} = 0,$$

also

$$-1 = \sum_{\lambda, \mu} g_{\lambda \mu} \frac{d x_\lambda}{d s} \frac{d x_\mu}{d s} - g_{44} \left(\frac{d t}{d s}\right)^2 = - g_{44} \left(\frac{d t}{d s}\right)^2,$$

woraus

$$\frac{d t}{d s} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}}$$

folgt.

Die Extremalen liefern mit Benutzung dieses Wertes

$$\frac{d}{d s}\left(\sum_{\mu=1}^{3} g_{\lambda \mu} \frac{d x_\mu}{d s}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\lambda} \cdot \frac{1}{g_{44}} = 0, \qquad \lambda = 1,2,3$$

$$\frac{d}{d s}\left(g_{44} \frac{d t}{d s}\right) = 0.$$

Die vierte Gleichung zeigt uns, daß die von uns angenommene Ruhe nicht zeitlich andauern kann, da sie mit dem obigen Werte von dt/ds nicht verträglich ist. Wir müssen uns daher auf den speziellen Fall der momentanen Ruhe beschränken und deuten dies an, indem wir die Koordinaten stricheln. Ein solcher spezieller Fall der momentanen Ruhe im Schwerefelde ist z. B. der Umkehrpunkt eines aufwärts geworfenen Steines.

Wir haben also die drei Gleichungen, bei Einführung von $u = \frac{s}{c}$

$$\frac{d}{d u}\left(\sum_{\mu} g_{\lambda \mu}' \frac{d x_\mu'}{d u}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\lambda'} \cdot \frac{c^2}{g_{44}'} = 0 \qquad \lambda = 1,2,3.$$

Bei Durchführung der Differentiation und Berücksichtigung von

$$\frac{d x_1'}{d s} = \frac{d x_2'}{d s} = \frac{d x_3'}{d s} = 0$$

kommt

$$\sum_{\mu=1}^{3} g_{\lambda \mu}' \frac{d x_\mu^{2\prime}}{d u^2} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{g_{44}'} \cdot \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\lambda'} = 0 \qquad \lambda = 1,2,3.$$

Die Auflösung dieser drei Gleichungen nach den drei Unbekannten $\frac{d^2 x_\mu'}{d u^2}$ liefert

$$\frac{d^2 x_\lambda'}{d u^2} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3} g'^{(\lambda\mu)} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\mu'} \frac{c^2}{g_{44}'} = 0 \qquad \lambda = 1,2,3.$$

Hierin sind die $g^{(\lambda\mu)}$ die zu $g_{\lambda\mu}$ adjungierten Unterdeterminanten von g, gebrochen durch g.

In Newtonscher Ausdrucksweise haben wir mithin für die Feldstärke der Gravitation die Komponenten

$$X'^{(\lambda)} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3} g'^{(\lambda\mu)} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\mu'} \frac{c^2}{g_{44}'} \qquad \lambda = 1,2,3. \tag{8}$$

17. Anwendung der Poissonschen Gleichung.

Wir können jetzt die Poissonsche Gleichung anwenden, denn die unmittelbare Umgebung der betrachteten Stelle der Materie ruht. Zu berücksichtigen ist hierbei, daß wir mit Gauss die Divergenz der Feldstärke zu bilden haben, jedoch in generalisierten Koordinaten. Man findet für solche Koordinaten, für die also

$$d\mathfrak{s}^2 = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} a_{\lambda\mu}\, d x_\lambda\, d x_\mu$$

leicht die transformierte Form der Divergenzbeziehung für einen Vektor, wie es die Feldstärke ist. Es kommt

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{a}\, X^{(1)}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{a}\, X^{(2)}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{a}\, X^{(3)}\right) \right\}.$$

Dies angewendet, ergibt zufolge (8)

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X' = \frac{c^2}{g_{44}'} \Bigg\{ & \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\lambda'} \left(\sum_{\mu=1}^{3} g'^{(\lambda\mu)} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\mu'} \right] \right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} g'^{(\lambda\mu)} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\mu'} \cdot \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\lambda'} \cdot \frac{1}{g_{44}'} - \frac{1}{2a'} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial a'}{\partial x_\lambda'} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3} g'^{(\lambda\mu)} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\mu'} \Bigg\} \\ = -4\pi k \mu\,.\end{aligned}$$

Hier kann man zufolge der Invarianzbeziehung $g' = -a' c^2$ substituieren und hat schließlich, indem man noch $\mu = \frac{\varepsilon}{c^2}$ setzt

$$\left\{\begin{aligned} & \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\lambda'} \left(\sum_{\mu=1}^{3} g'^{(\lambda\mu)} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\mu'} \right] \right) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} g'^{(\lambda\mu)} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\mu'} \cdot \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\lambda'} \cdot \frac{1}{g_{44}'} \\ & \qquad - \frac{1}{2g'} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial g'}{\partial x_\lambda'} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3} g'^{(\lambda\mu)} \frac{\partial g_{44}'}{\partial x_\mu'} = -\frac{4\pi k}{c^4}\, \varepsilon\, g_{44}' \end{aligned}\right. \tag{9}$$

18. Einführung der Differentialinvariantentheorie.

Bevor wir weitergehen, bedarf es der Einführung einer neuen Vektoranalysis.

In der alten Mechanik verwendet man dreidimensionale Vektoren, d. h. Größen, denen unabhängig von den Koordinaten für die

$$d\mathfrak{s}^2 = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} a_{\lambda\mu}\, dx_\lambda\, dx_\mu = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sei, eine Bedeutung zukommt. Ein solcher Vektor war z. B. die Kraft

$$X^{(1)}\; X^{(2)}\; X^{(3)}$$

vorhin; wie immer wir auch die Koordinaten definieren, ob sie kartesische oder generalisierte seien, immer repräsentiert $X^{(1)} X^{(2)} X^{(3)}$ dieselbe Strecke nach Richtung und Größe. Man sagt: X muß sich wie die Koordinatendifferentiale transformieren. Also in neuen Koordinaten $x_1'\; x_2'\; x_3'$ hat man

$$X'^{(1)} = \sum_{\lambda=1}^{3} X^{(\lambda)} \frac{\partial x_1'}{\partial x_\lambda} \quad \text{usw.}$$

Nur Vektoren (Tensoren) haben eine physikalische Bedeutung, unabhängig vom Koordinatensystem.

Minkowski hat vierdimensionale Vektoren eingeführt. Bei ihm sind ja Raum und Zeit in einer Art Union verbunden, für die ebenfalls ein

$$-ds^2 = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} a_{\lambda\mu}\, dx_\lambda\, dx_\mu - c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

gilt. Dieses Gesetz sagt aus, daß nur solche Koordinatentransformationen zulässig sind, die das ds^2 erhalten. Hierbei sind außer den gewöhnlichen Raumtransformationen auch Raumzeittransformationen zugelassen, deren physikalische Bedeutung eine kinematische ist, nämlich des Übergangs zu einem relativ gleichförmig bewegten System (Lorentztransformation).

Was bedeutet nun diese Erhaltung des ds^2? Offenbar die Beibehaltung des grundlegenden Trägheitsgesetzes und der damit zusammenhängenden Lichtausbreitungsgesetze bei allen irgendwie möglichen Auffassungen von Raum, Zeit und Bewegungszustand.

In diesem Sinne ist diese Kovarianz auch für das verallgemeinerte ds^2 zu fordern. Denn das Trägheitsgesetz ist das Fundament aller Mechanik und Physik, auf dem erst das übrige Gebäude errichtet wird. Die Unverrückbarkeit dieses Fundamentes, das eben ist die allgemeine Einsteinsche Kovarianz.

Diese Kovarianz führt auf die Einführung der Differentialinvarianten. Ein Vektor $A^{(1)} A^{(2)} A^{(3)} A^{(4)}$ ist dann beim Übergang zu neuen Koordinaten x' charakterisiert durch die Beziehungen

$$A'^{(i)} = \sum_{k=1}^{4} A^{(k)} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

(Kontravariante 1. Ordnung). Analog definiert man Kontra- und Kovarianten höherer Ordnung.

Die Veränderlichkeit der Maßstäbe von Punkt zu Punkt bringt es mit sich, daß die Komponenten eines Vektors sich ändern, erstens infolge der Änderung des Vektors selbst, zweitens infolge der Veränderung der Maßstäbe. Nur die erste Änderung ist offenbar vektorieller Natur. In den Differentialquotienten $\partial A / \partial x$ stecken aber beide; die letztere muß daher eliminiert werden. Dies geschieht mit Hilfe einer neuen Art Differentialrechnung, dem absoluten Differentialkalkül von Ricci und Levi-Civita, der den gewöhnlichen Differentialquotienten Zusatzglieder anfügt, die von der Veränderlichkeit der Maßstäbe herrühren. Sie enthalten die sogenannten Dreiindizessymbole Christoffels zweiter Art, nämlich

$$\begin{Bmatrix} i k \\ h \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{4} g^{(hj)} \begin{bmatrix} i k \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{4} g^{(hj)} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) .$$

Sie selbst sind nicht vektoriell, wohl aber sind es die aus ihnen gebildeten Vierindizessymbole zweiter Art

$$\{h i, r s\} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} h r \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_s} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} h s \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_r} + \sum_{p=1}^{4} \left(\begin{Bmatrix} h r \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p s \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} h s \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p r \\ i \end{Bmatrix} \right) .$$

Insbesondere sind die von Einstein hieraus gebildeten Größen [1])

1) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. 49. p. 769. 1916, wo man Näheres über den absoluten Kalkül findet. Einstein bezeichnet K_{hi} mit $-B_{hj}$.

$$K_{hi} = \sum_{q=1}^{4}{}' \left\{h q, i q\right\}$$

Kovarianten zweiter Ordnung.

19. Anwendung.

Wir berechnen für ein Bogenelement

$$-d s^2 = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3}{}' g_{\lambda\mu}(x_1\, x_2\, x_3)\, d x_\lambda\, d x_\mu - g_{44}(x_1\, x_2\, x_3)\, d t^2$$

den Wert von

$$K_{44} = \sum_{q=1}^{4} \left\{4 q, 4 q\right\},$$

wofür man zufolge der Eigenschaften der Vierindizessymbole auch schreiben kann

$$K_{44} = \sum_{\lambda=1}^{3} \left\{4 \lambda, 4 \lambda\right\} = \sum_{\lambda=1}^{3} \left(\frac{\partial \left\{ {44 \atop \lambda} \right\}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial \left\{ {4\lambda \atop \lambda} \right\}}{\partial x_4} + \sum_{p=1}^{4} \left\{ {44 \atop p} \right\} \left\{ {p\lambda \atop \lambda} \right\} - \left\{ {4\lambda \atop p} \right\} \left\{ {p4 \atop \lambda} \right\} \right)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial \left\{ {44 \atop \lambda} \right\}}{\partial x_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{4} \left(\left\{ {44 \atop \mu} \right\} \left\{ {\mu\lambda \atop \lambda} \right\} - \left\{ {4\lambda \atop 4} \right\} \left\{ {44 \atop \lambda} \right\} \right).$$

Es ist (man hat ja $-g_{44}$ als Koeffizienten zu nehmen)

$$\left\{ {44 \atop \lambda} \right\} = \sum_{\mu=1}^{3} g^{(\lambda\mu)} \left[+ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu} \right],$$

$$\left\{ {\mu\lambda \atop \lambda} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\nu=1}^{3} g^{(\lambda\nu)} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2 g_{44}} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu},$$

$$\left\{ {4\lambda \atop 4} \right\} = \frac{1}{2 g_{44}} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\lambda},$$

mithin

$$-K_{44} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(g^{(\lambda\mu)} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu} \right] \right) + \frac{1}{2 g_{44}} \sum_{\lambda,\mu} g^{(\lambda\mu)} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu}$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{\lambda,\mu} g^{(\lambda\mu)} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu} \cdot \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_\lambda}.$$

Wenn wir damit die Poissonsche Gleichung (9) vergleichen, so ist die linke Seite genau $-K_{44}'$, mithin

$$K_{44}' = \frac{4 \pi k}{c^4}\, g_{44}'\, \varepsilon.$$

Bedenken wir noch, daß der Tensor des starren Körpers

$$T^{(ik)} = -\varepsilon \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s}$$

sich in unserem speziellen Falle auf das eine Glied

$$T'^{(44)} = -\varepsilon \cdot \frac{1}{g_{44}'}$$

reduziert, also

$$T_{44}' = -\varepsilon g_{44}'$$

ist, so haben wir gefunden

$$K_{44}' = -\frac{\varkappa}{2} T_{44}'. \tag{9a}$$

Hierin ist gesetzt

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^4}.$$

20. Ableitung der Einsteinschen Gleichungen aus der Poissonschen Gleichung.

Die Beziehung (9a) ist der kovariante Ausdruck der Poissonschen Gleichung für den speziellen Fall, daß der Tensor der Materie den Newtonschen starren Körper entspricht, sich also im Falle der Ruhe auf das einzige von Null verschiedene Glied $T'^{(44)}$ reduziert. Diese Eigenschaft des Tensors kann auch folgendermaßen zum Ausdruck gebracht werden. Sei

$$T = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik} T^{(ik)} = -\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik} \cdot \varepsilon \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s} = \varepsilon,$$

denn es besteht die Beziehung

$$-ds^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik} d x_i d x_k,$$

so ist

$$T'^{(44)} = -\varepsilon \cdot \frac{1}{g'_{44}} = T g'^{(44)}, \quad T'^{(\lambda\mu)} = T'^{(\lambda 4)} = 0 \quad \lambda, \mu = 1,2,3.$$

Mithin wird

$$S^{(ik)} = -g^{(ik)} T + T^{(ik)} = -\left(g^{(ik)} + \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s}\right)\varepsilon$$

ein Tensor, dessen Komponente im Falle der Ruhe verschwindet (es ist ja $g^{(44)} = -1/g_{44}$).

Kehren wir zur kovarianten Form der Poissonschen Gleichung

$$K_{44}' = -\frac{\varkappa}{2} T_{44}' \tag{9a}$$

zurück. Diese Form ist, da wir ein *berechtigtes* Bezugssystem haben und die Materie ruht, mithin die Effekte zweiter Ordnung wegfallen, die exakte Form, genau so wie wir die exakte Form der Keplerschen Gleichungen bei Weglassung der Effekte zweiter Ordnung fanden.

Welches ist nun aber die Form der Poissonschen Gleichung bzw. der ihr entsprechenden Relationen, wenn die Materie nicht ruht? Die Beziehung (9a) ist ja offenbar spezialisiert für ein Koordinatensystem mit einer besonderen Orientierung der Zeitkoordinate x'_4, eben für Ruhe. Gehen wir zu einem anderen Bezugssystem über, etwa den ungestrichelten x, so erhalten wir

$$\sum_{h,i=1}^{4} K_{hi} \frac{\partial x_h}{\partial x_4'} \frac{\partial x_i}{\partial x_4'} = -\frac{\varkappa}{2} \sum_{h,i=1}^{4} T_{hi} \frac{\partial x_h}{\partial x_4'} \frac{\partial x_i}{\partial x_4'},$$

denn die Relation (9a) muß ja vektoriell sein. Da nun dieses ungestrichelte Bezugssystem, in welchem die Materie nicht mehr ruht, willkürlich ist, insofern die absolute Translationsgeschwindigkeit der Materie willkürlich ist, so folgt, daß

$$\sum_{h,i=1}^{4} \left(K_{hi} + \frac{\varkappa}{2} T_{hi}\right) \frac{\partial x_h}{\partial x_4'} \frac{\partial x_i}{\partial x_4'} = 0$$

unabhängig von den Werten $\partial x / \partial x'_4$ befriedigt sein muß, wofern nur die Nebenbedingung berücksichtigt wird

$$S'_{44} = \sum_{h,i}^{4} S_{hi} \frac{\partial x_h}{\partial x_4'} \frac{\partial x_i}{\partial x_4} = 0$$

die für den Tensor T_{hi} besteht. Das heißt aber

(9b) $$K_{hi} = -\frac{\varkappa}{2} T_{hi} + \lambda (T_{hi} - g_{hi} T), \quad h, i = 1,2,3,4$$

wo λ eine noch zu bestimmende Konstante (Lagrangescher Multiplikator) ist.

21. Bestimmung des Multiplikators aus dem Impulsenergiesatz.

Analog wie die Größe T gibt es auch eine Größe

$$K = \sum_{h,i=1}^{4} g^{(hi)} K_{hi}$$

Man definiert nun mit deren Hilfe folgende Größen

$$G_{hi} = \tfrac{1}{2} g_{hi} K - K_{hi} \qquad h, i = 1, 2, 3, 4.$$

Ausgeschrieben lauten diese

$$G_{hi} = \tfrac{1}{2} g_{hi} \cdot \sum_{l,m=1}^{4} g^{(lm)} K_{lm} - K_{hi}$$

Hierbei ist

$$K_{hi} = \sum_{p=1}^{4} \left\{ hp, ip \right\} = \sum_{p,q=1}^{4} g^{(pq)} (hp, iq)$$

worin

$$(hp, iq) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{hq}}{\partial x_p \partial x_i} + \frac{\partial^2 g_{pi}}{\partial x_h \partial x_q} - \frac{\partial^2 g_{hi}}{\partial x_p \partial x_q} - \frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x_h \partial x_i} \right)$$
$$+ \sum_{r,s=1}^{4} g^{(rs)} \left(\begin{bmatrix} hq \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pi \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} hi \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pq \\ s \end{bmatrix} \right)$$

das Vierindizessymbol erster Art (Riemannsymbol) ist, das bekanntlich durchwegs im euklidischen Raume verschwinden muß.

Diese Riemannsymbole haben gewisse symmetrische und zyklische Eigenschaften; so ist beispielsweise die Relation

$$K_{hi} = K_{ih}$$

eine Folge derselben. Eine uns hier interessierende Relation ist die folgende

$$(hi, kl)_{/m} + (hi, lm)_{/k} + (hi, mk)_{/l} = 0\,.$$

Hierin bedeutet

$$(hi, kl)_{/m} = \frac{\partial}{\partial x_m} (hi, kl) - \sum_{r=1}^{4} \left\{ \begin{matrix} hm \\ r \end{matrix} \right\} (ri, kl) - \sum_{r=1}^{4} \left\{ \begin{matrix} im \\ r \end{matrix} \right\} (hr, kl)$$
$$- \sum_{r=1}^{4} \left\{ \begin{matrix} km \\ r \end{matrix} \right\} (hi, rl) - \sum_{r=1}^{4} \left\{ \begin{matrix} lm \\ \nu \end{matrix} \right\} (hi, kr)$$

den kovarianten Differentialquotienten von (hi, kl) nach x_m. Aus dieser Relation leitet man leicht ab, daß die wichtige Identität

$$\sum_{r,s=1}^{4} g^{(rs)} G_{ir/s} = 0 \tag{10}$$

besteht. Diese Identität hat die Form der Tensordivergenz, die den Impulsenergiesatz charakterisiert. Nämlich, es lautete dieser bei Minkowski z. B. für einen Tensor T_{ik}

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4} = 0 \quad \text{usw.}$$

Hier treten an Stelle der gewöhnlichen Differentialquotienten kovariante Differentiationen, so daß die Form der Tensordivergenz jetzt

$$\sum_{r,s=1}^{4} g^{(rs)} T_{ir/s} \qquad i = 1,2,3,4$$

wird. Hierfür kann man bei Einführung des kontravarianten Tensors

$$T^{(ik)} = \sum_{l,m=1}^{4} g^{(il)} g^{(km)} T_{(lm)}$$

auch schreiben:

$$T_{/1}^{(11)} + T_{/2}^{(12)} + T_{/3}^{(13)} + T_{/4}^{(14)}$$

wobei z. B.

$$T_{/2}^{(12)} = \frac{\partial T^{(12)}}{\partial x_2} + \sum_{r=1}^{4} \left\{ {2r \atop 1} \right\} T^{(r2)} + \sum_{r=1}^{4} \left\{ {2r \atop 2} \right\} T^{(1r)}$$

bedeutet.

Der Impulsenergiesatz, d. h die Beziehung

$$\sum_{r,s=1}^{4} g^{(rs)} T_{ir/s} = 0 \qquad i = 1,2,3,4$$

die der *vollständige* Tensor der Materie befriedigt, ist bekanntlich das Seitenstück der Minkowskischen Mechanik zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen oder, besser gesagt, den Bewegungsgleichungen der Cauchy-Poissonschen Elastizitätstheorie. Ist nun unser Tensor

$$T^{(ik)} = -\varepsilon \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}$$

ein vollständiger Tensor? Keineswegs. Wir wissen bereits, daß im Schwerefeld elastische Spannungen auftreten, während der obige Tensor nur scheinbare Lorentzspannungen enthält. Aber wir wissen auch, daß wir berechtigt waren, bei der Ableitung der Poissonschen Gleichung (9a) von diesen Spannungen abzusehen. Die Form des Endresultates (9b) wird durch diese Vernachlässigung nicht berührt, nur müssen wir jetzt unter T einen vervollständigten Tensor verstehen, der also die Relationen des Impulsenergiesatzes

(11) $$\sum_{r,s} g^{(rs)} T_{ir/s} = 0 \qquad i = 1,2,3,4$$

erfüllt.

Ist dies der Fall, dann haben wir in (10) und (11) das Mittel zur Bestimmung der Konstanten.

Hierzu schreiben wir (9b) in der Form:

$$K_{hi} = \left(-\frac{\varkappa}{2} + \lambda\right) T_{hi} - \lambda g_{hi} T.$$

Hieraus folgt

$$K = \left(-\frac{\varkappa}{2} \cdot 3\lambda\right) T,$$

also

$$K_{hi} - \frac{2\lambda}{\varkappa + 6\lambda} g_{hi} K = \left(-\frac{\varkappa}{2} + \lambda\right) T_{hi},$$

oder

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{\varkappa + 6\lambda}\right) g_{hi} K = \left(-\frac{\varkappa}{2} + \lambda\right) T_{hi} + G_{hi}.$$

Vermöge (10) und (11) befriedigt die rechte Seite identisch eine Relation von der Form des Impulsenergiesatzes. Dies ergibt für die linke Seite die Bedingung

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{\varkappa + 6\lambda}\right) K_{/h} \equiv 0,$$

Das ist aber nur möglich, wenn

$$\frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{\varkappa + 6\lambda} = 0,$$

oder

$$\lambda = -\frac{\varkappa}{2},$$

woraus folgt

(9c) $$G_{hi} = \varkappa T_{hi}.$$

Dies ist die endgültige Form der Relationen, deren Spezialfall die Poissonsche Gleichung ist. Hierbei bedeutet

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^4}.$$

22. Diskussion der Einsteinschen Gleichungen.

Die gefundenen Einsteinschen Gleichungen (9c) gelten vermöge ihrer Ableitung nur für ein Poissonsches, d. h. statisches Schwerefeld; aber wir haben ja voraussetzungsgemäß unsere Betrachtungen auf stationäre Felder beschränkt. Die Gravitation sollte durchaus stationären Charakter haben. Wollten wir Wellen zulassen, so ist zumindest zu bezweifeln, ob die Gleichungen (9c) ausreichen.

Indem wir die Beschränkung auf stationäre Felder aufrechterhalten, gehen wir zur Diskussion der Gleichungen über. Zunächst stellen wir fest, daß die G_{hi} scheinbare, aber auch nur scheinbare „Gravitationsspannungen", nämlich jene fiktiven Ätherspannungen darstellen.[1]) Denn aus dem Impulsenergiesatz fallen sie aus, wie man sofort sieht, indem man von beiden Seiten die Tensordivergenz nimmt

$$\sum_{r,s} g^{(rs)} G_{ir/s} = \varkappa \sum_{r,s} g^{(rs)} T_{ir/s} \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die linke Seite ist identisch Null. So erhält der Impulsenergiesatz die Form

$$\sum_{r,s=1} g^{(rs)} T_{ir/s} = 0$$

in der das Gravitationsfeld nur durch seinen Einfluß auf die Maßstäbe mitwirkt. Die Voraussage von § 6 ist also erfüllt: Es gibt keine Wechselwirkung zwischen Gravitation und anderen Energien. Die Bewegung im Schwerefelde, und nur diese, ist rein konservativ ($T_{hi} = 0$).

Daß (von der Eigengravitation abgesehen) im Probekörper, mit dem wir das Feld untersuchen, keinerlei elastische Spannungen herrschen, also der inkohärente Tensor gilt, läßt sich auch so zeigen:

Es gilt das Trägheitsgesetz, d. h.

$$\frac{d^2 x_i}{d s^2} + \sum_{l,m} \begin{Bmatrix} l\,m \\ i \end{Bmatrix} \frac{d x_l}{d s} \frac{d x_m}{d s} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Das ist völlig identisch mit der Aussage

$$\sum_{k=1}^{4} T^{(ik)}_{/k} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

wofern

$$T^{(ik)} = -\,\varepsilon \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s}.$$

Denn

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} T^{(ik)}_{/k} &= \sum_{k} \frac{\partial T^{(ik)}}{\partial x_k} + \sum_{k,p} \begin{Bmatrix} k\,p \\ i \end{Bmatrix} T^{(pk)} + \sum_{k,p} \begin{Bmatrix} k\,p \\ k \end{Bmatrix} T^{(ip)} \\ &= -\frac{d x_i}{d s} \sum_{k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varepsilon \frac{d x_k}{d s} \right) + \sum_{k,p} \begin{Bmatrix} k\,p \\ k \end{Bmatrix} \frac{d x_p}{d s} \varepsilon \right] \\ &\quad - \varepsilon \sum_{k} \frac{d x_k}{d s} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d x_i}{d s} \right) - \varepsilon \sum_{k,p} \begin{Bmatrix} k\,p \\ i \end{Bmatrix} \frac{d x_p}{d s} \frac{d x_k}{d s}.\end{aligned}$$

---

1) Einstein definiert als Gravitationsspannungen andere Größen, die nicht kovariant sind; vgl. z. B. A. Einstein, Über Gravitationswellen, Berl. Ber. 1918, p. 154.

Der Klammerausdruck der ersten Zeile ist aber nichts anderes als die Kontinuitätsgleichung, welche aussagt, daß Materie nicht plötzlich verschwinden oder entstehen kann. Denn

$$\operatorname{Div}\left(\varepsilon \frac{d x}{d s}\right)=\sum_{k} \frac{\partial}{\partial x_{k}}\left(\varepsilon \frac{d x_{k}}{d s}\right)+\sum_{k, p}\left\{\begin{matrix} k\,p \\ k \end{matrix}\right\} \varepsilon \frac{d x_{p}}{d s}=0,$$

Daher bleibt nur die zweite Zeile, die man offenbar schreiben kann:

$$-\varepsilon\left(\frac{d^{2} x_{i}}{d s^{2}}+\sum_{k, p}\left\{\begin{matrix} k\,p \\ i \end{matrix}\right\} \frac{d x_{k}}{d s} \frac{d x_{p}}{d s}\right),$$

womit der Beweis erbracht ist.

Die Voraussetzung war freilich, daß das Eigenfeld des Probekörpers oder bei räumlich ausgedehnter Materie, das Eigenfeld der betrachteten Stelle der Materie vernachlässigt werden kann. Sonst treten, wie wir sehen werden, elastische Spannungen hinzu, die zur Kompensation des Eigenfeldes nötig sind. Das bedeutet nun keineswegs, daß dieses Außenfeld nicht mehr konservativ ist. Sondern es ist dies bloß eine Berücksichtigung der Kohäsion der Materie. Die Rechnung muß ergeben, daß auch bei Berücksichtigung der Störung durch das Eigenfeld des Probekörpers alles so verläuft, als ob der Tensor $\varepsilon \frac{d x}{d s} \frac{d x}{d s}$, nur mit geändertem ε, für den Probekörper zugrunde liegt.

V. Das Innere der Materie.

Um nun einen Einblick in die erwähnten Spannungen im Inneren der Materie zu gewinnen, wenden wir uns im folgenden der Betrachtung einer isolierten homogenen Massenkugel zu, die im Gleichgewichte sein soll.

23. Das Außenfeld der homogenen ruhenden Kugel.

Für das Außenfeld dieser Kugel finden wir den bekannten Satz der Newtonschen Theorie wieder: Die homogene Kugel wirkt nach außen wie ein Massenpunkt im Zentrum mit der vereinigten Masse der Kugel.

Seien nämlich wieder wie in § 14 r, ϑ, φ Polarkoordinaten, dann wird wegen der allseitigen Symmetrie sowohl im Inneren als im Äußeren das Bogengesetz gelten müssen

$$-d s^{2}=g_{1}(r) d r^{2}+r^{2} d \vartheta^{2}+r^{2} \sin ^{2} \vartheta\, d \varphi^{2}-g_{4}(r) d t^{2}. \tag{4}$$

Wir wollen vorläufig unsere Grundbedingung

$$g_1 \, g_4 = c^2$$

außer acht lassen: wir werden sie aus den Differentialgleichungen wieder finden.

Unsere Differentialgleichungen lauten nunmehr

$$G_{hi} = \varkappa \, T_{hi} \, ,$$

also im Außenraume

$$G_{hi} = 0 \, .$$

Es ist bequemer, die „gemischte" Form zu verwenden, das ist

$$G_i^{(h)} = \sum_{j=1}^{4} g^{(hj)} \, G_{ji} \, .$$

Man findet[1])

$$\left\{\begin{aligned}
G_1^{(1)} &= \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g_1}\right) - \frac{g_4'}{g_1 \, g_4} \, \frac{1}{r} \, , \\
G_2^{(2)} &= \frac{g_1'}{2 g_1^2} \, \frac{1}{r} - \frac{g_4'}{2 g_1 \, g_4} \, \frac{1}{r} - \frac{g_4''}{2 g_1 \, g_4} + \frac{g_4'^2}{4 g_1 \, g_4^2} + \frac{g_4' \, g_1'}{4 g_1^2 \, g_4} \, , \\
G_3^{(3)} &= G_2^{(2)} \, , \\
G_4^{(4)} &= \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g_1}\right) + \frac{g_1'}{g_1^2} \, \frac{1}{r} \, ,
\end{aligned}\right.$$

Alle anderen $G_i^{(h)} \equiv 0$. Dabei sind die bekannten vier Identitäten (10) erfüllt, woraus folgt, daß z. B. $G_2^{(2)}$ als eine lineare Kombination von $G_1^{(1)}$ und $G_4^{(4)}$ bzw. deren Derivierten dargestellt werden kann.

Aus den unabhängigen Relationen

$$G_1^{(1)} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g_1}\right) - \frac{g_4'}{g_1 \, g_4} \, \frac{1}{r} = 0 \, ,$$

$$G_4^{(4)} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g_1}\right) - \frac{g_1'}{g_1^2} \, \frac{1}{r} = 0 \, ,$$

die außerhalb der Kugel gelten müssen, folgt daher zunächst

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\mathrm{const}}{r} .$$

Wir schreiben für die Konstante, die beim Massenpunkte den Wert

$$\frac{2 \, k \, m}{c^2}$$

hatte,

$$\frac{a^3}{R^2} .$$

1) Der Akzent bedeutet hier und im folgenden die Derivierte nach r.

Hier ist a der (Newtonsche) Radius der Kugel, R eine Größe die später erklärt werden wird. Mithin

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{a^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r} \, .$$

Dann folgt

$$g_4 = \text{const} \left(1 - \frac{a^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r}\right) .$$

Wenn im unendlich Fernen g_4 den Wert c^2 haben soll, wie es selbstverständlich ist, haben wir

$$g_4 = c^2 \left(1 - \frac{a^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r}\right) .$$

Wir haben mithin das Gesetz

$$g_1 \, g_4 = c^2$$

wiedergefunden und außerdem den eingangs erwähnten Newtonschen Lehrsatz: Eine homogene Kugel wirkt nach außen wie die vereinigte Masse im Mittelpunkte.

Denn wir haben genau die Form (6) des Massenpunktes für unser

$$- d s^2 = \frac{1}{1 - \frac{a^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r}} \, d r^2 + r^2 \, d \vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2 \\ - c^2 \left(1 - \frac{a^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r}\right) d t^2 \, .$$

24. Das Feld im Inneren der homogenen Kugel.

Beim Übergang zum Inneren der Kugel müssen wir zunächst den Tensor T untersuchen. Voraussetzung ist hierbei, daß die Kugel ruht. Dann nimmt unser Tensor $- \varepsilon \frac{d x}{d s} \frac{d x}{d s}$ die Form an

$$T^{(11)} = T^{(12)} = \ldots = T^{(34)} = 0 \, , \quad T^{(44)} = - \varepsilon \cdot \frac{1}{g_4} \, .$$

Hiervon ist leicht zu zeigen, daß der Impulsenergiesatz nicht erfüllt ist, wie auch selbstverständlich, da zufolge (4) die Eigengravitation existiert, die nicht kompensiert ist.

Zu ihrer Kompensation ist also eine Erweiterung des Tensors durch *elastische* Spannungen erforderlich. Wir nehmen den einfachsten Fall eines isotropen, äußeren Druckes, p, welcher hierbei eine Funktion von r sein kann. Dann wissen wir aus der Planck-Minkowskischen Mechanik, daß sich die Masse des betrachteten Körpers um den äußeren Druck vermindert. Nämlich die Dichte der Masse ist jetzt nicht mehr

$$\frac{\varepsilon}{c^2}$$

sondern

$$\frac{\eta}{c^2} = \frac{\varepsilon - p}{c^2} .$$

Wir schreiben den gemischten Tensor daher in der Form

$$T_1^{(1)} = T_2^{(2)} = T_3^{(3)} = p \qquad T_4^{(4)} = \varepsilon = \eta + p .$$

Der Impulsenergiesatz liefert nunmehr die Relation

$$p' - \frac{g_4'}{2 g_4} \eta = 0 . \tag{12}$$

Dies erinnert an die Gleichgewichtsbedingung der Hydrodynamik, wobei

$$\tfrac{1}{2} \ln g_4$$

die Rolle des Potentials der auf die Masseneinheit bezogenen Kräfte, η die Dichte repräsentiert.

Wir entnehmen hieraus, daß das Feld im Inneren von g_4 beherrscht wird.

Ferner haben wir die Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} G_1^{(1)} &= \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g_1}\right) - \frac{g_4'}{g_1 g_4}\frac{1}{r} = \varkappa\, T_1^{(1)} = \varkappa\, p \\ G_4^{(4)} &= \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g_1}\right) - \frac{g_1'}{g_1^2}\frac{1}{r} = \varkappa\, T_4^{(4)} = \varkappa(\eta + p) . \end{aligned} \right.$$

Hier ist

$$\eta = \varepsilon - p ,$$

so daß wir

$$\varkappa(\eta + p) = \varkappa\, \varepsilon = \text{const} = \frac{3}{R^2}$$

schreiben können, d. h. wir setzen die Kugel als homogen voraus. Die Konstante $1/R^2$ wird sofort erklärt werden. Nunmehr kommt

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{\text{const}}{r} .$$

Da $r = 0$ im Integrationsgebiete, folgt aus der Endlichkeit von g_1, daß sein muß: const $= 0$, also

$$g_1 = \frac{1}{1 - r^2/R^2} .$$

Dies erreicht für $r = a$ den Wert

$$(g_1)_a = \frac{1}{1 - a^2/R^2},$$

während im Außenraume

$$g_1 = \frac{1}{1 - a^3/R^2 \, \frac{1}{r}}$$

denselben Wert

$$(g_1)_a = \frac{1}{1 - a^2/R^2}$$

liefert. Wir haben mithin, wie es sich von selbst versteht, stetigen Anschluß der Werte g_1 im Außen- und Innenraume, nicht aber der Werte dg_1/dr im Außen- und Innenraume. *Die Stetigkeit der ersten Derivierten ist für g_1 keineswegs zu postulieren*, was ja auch daraus hervorgeht, daß das einzige Argument hierfür die Stetigkeit des Feldes wäre, was nicht zutrifft, da für das Feld, wie wir vorhin sahen, nur g_4 maßgebend ist.

Verweilen wir einen Augenblick bei der Gestalt von g_1. Der raumartige Teil von (4) ist

$$d\mathfrak{s}^2 = \frac{1}{1 - r^2/R^2} d r^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2 \, .$$

Man ersieht mit Hilfe der Transformation

$$r = R \sin \varrho \, ,$$

daß dies auf die Form

$$d\mathfrak{s}^2 = R^2 d\varrho^2 + R^2 \sin^2\varrho \, d\vartheta^2 + R^2 \sin^2\varrho \sin^2\vartheta \, d\varphi^2$$

gebracht werden kann. Dies ist aber die bekannte Form des Bogens für den sphärischen Raum. Man kann also sagen: Der Einfluß der Eigengravitation auf die räumliche Maßbestimmung innerhalb der Kugel beruht in dem Ersatz der euklidischen Geometrie durch die elliptische Geometrie. Der Krümmungsradius R ist dabei folgendermaßen gegeben: Für den Außenraum wirkt unsere Kugel wie ein Massenpunkt mit der Newtonschen Masse m

$$\frac{2km}{c^2} = \frac{a^3}{R^2} \, .$$

Denn wir haben ja bei Newton

$$p = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{3}{\varkappa c^2 R^2} = \frac{3c^2}{8\pi k R^2}$$

also
$$m = \frac{4\pi}{3} a^3 \mu = \frac{c^2}{2k} \cdot \frac{a^3}{R^2}.$$

So rechtfertigen wir nachträglich die Wahl unserer Konstanten für das Außenfeld.

Das Eintreten der elliptischen Geometrie mit einem Krümmungsmaße
$$\frac{1}{R^2} = \frac{2km}{a^3 c^2}$$
(also in zweiter Ordnung) hat nun für die Gravitationstheorie die Beseitigung einer bekannten Schwierigkeit zur Folge.[1]) Nämlich es folgt hieraus, wenn dieses Resultat auf die gesamte Welt ausgedehnt wird, die Begrenztheit der Gesamtmasse der Welt. Bei unbegrenzter Erstreckung ins Unendliche würde die „Kohäsion" des Newtonschen Massensystems unverständlich (Seeliger 1896).

25. Die Grenzbedingungen.

Zur weiteren Integration, also Ermittlung von g_4, bedarf es der Angabe der Grenzbedingungen für das Feld. Denn dieses ist von g_4 bzw. g_4' abhängig.

Erste Annahme: Stetiger Übergang von p (Schwarzschild).

Wir machen mit Schwarzschild[2]) zunächst die Annahme des stetigen Überganges des Feldes. Also muß g_4' stetig übergehen und $p = 0$ in der Grenzfläche $r = a$ sein. Man findet:

$$\text{(13a)} \quad \left\{ \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{1 - r^2/R^2}, \\ p &= -\frac{3}{R^2 k} \frac{\sqrt{1 - r^2/R^2} - \sqrt{1 - a^2/R^2}}{3\sqrt{1 - a^2/R^2} - \sqrt{1 - r^2/R^2}}, \\ \eta &= \frac{6}{R^2 k} \frac{\sqrt{1 - a^2/R^2}}{3\sqrt{1 - a^2/R^2} - \sqrt{1 - r^2/R^2}}, \\ g_4 &= c^2 \left(\frac{3\sqrt{1 - a^2/R^2} - \sqrt{1 - r^2/R^2}}{2} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

1) A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Berl. Ber. p. 142. 1917.

2) K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Berl. Ber. p. 424. 1916.

p ist negativ, also Zugspannung. Dies entspricht nämlich dem Umstande, daß die Lichtgeschwindigkeit $\sqrt{g_4}$ (Schwarzschild nimmt irrtümlich hierfür $1/\sqrt{g_4}$) gegen das Zentrum zu sinkt, d. h. Anziehung zum Zentrum als Folge der Eigengravitation auftritt. Diese wird durch den erwähnten Zug kompensiert. Das Feld ist verhältnismäßig schwächer als im Außenraume.

Zweite Annahme: Konstanz von p (Einstein, Schrödinger).

Wir machen nun mit Einstein l. c., indem wir das dortige Zusatzglied zu den Feldgleichungen λg_{ik}

$$G_{ik} - \lambda g_{ik} = \varkappa T_{ik}$$

mit Schrödinger[1]) in den Tensor T_{ik} hinüberziehen, also als isotropen Druck deuten, die Annahme unstetigen Überganges, dafür

$$p = \text{const.}$$

Dann liefert der Impulsenergiesatz (12)

$$p' - \frac{g_4'}{2 g_4'} \eta = 0$$

die Beziehung

$$g_4 = \text{const},$$

sofern nicht $\eta = 0$, was wir vorläufig ausschließen.

Es kommt

$$(13\text{b}) \qquad \left\{ \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{1 - r^2/R^2}, \\ g_4 &= c^2 \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right), \\ p &= \frac{1}{\varkappa R^2}, \\ \eta &= \frac{2}{\varkappa R^2}, \end{aligned} \right.$$

das von Einstein l. c. gegebene Lösungssystem. Da $g_4 = \text{const}$, herrscht im Inneren diesmal kein Feld.

Dritte Annahme: $\eta = 0$. Masse der isolierten Kugel Null.

Wir betrachten den bisher ausgeschlossenen Fall

$$\eta = 0 .$$

Dies bedeutet, *daß die Dichte der gesamten Trägheit der Kugel*

1) E. Schrödinger, Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen. Physik. Zeitschr. **19**. p. 20. 1918.

Null ist. Dies ist aber ein bekanntes Postulat der Relativitätstheorie. Die Trägheit ist ja definiert als Widerstand gegen eine äußere Kraft. Bei einem abgeschlossenen System, wie es unsere Kugel ist, liegt keine solche Kraft vor. Es muß daher auch dieser Widerstand verschwinden.

Die Lösung $\eta = 0$ ist also gerade diejenige, die durch die Relativitätstheorie für ein abgeschlossenes System gefordert wird. Bei Minkowski war dieses Postulat nicht erfüllt, da dort noch der Newtonsche Gesichtspunkt der Abstraktion von der Gravitation festgehalten wurde. Infolgedessen war Minkowskis System kein abgeschlossenes. Erst mit Berücksichtigung der Eigengravitation ist das System ein abgeschlossenes, und dann muß die Dichte der gesamten Trägheit $\eta = 0$ sein.

Wir erhalten

$$\text{(13c)} \quad \left\{ \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{1 - r^2/R^2}, \\ g_4 &= c^2 (1 - r^2/R^2), \\ p &= \frac{3}{\varkappa R^2}, \\ \eta &= \varepsilon - p = 0. \end{aligned} \right.$$

Wir bemerken, daß wieder die Beziehung

$$g_1 \, g_4 = c^2$$

erfüllt ist. D. h. wir haben ein berechtigtes Bezugssystem in Polarkoordinaten. Davon hätten wir umgekehrt ausgehen können und hätten so (13c) gefunden.

Für das Fernere verwerfen wir demgemäß die Schwarzschildsche Lösung (13a) und die Einsteinsche Lösung (13b).

26. Diskussion der gewählten Lösung. — Einiges aus der Theorie der Materie.

Wir bemerken, daß die Lichtgeschwindigkeit im Innenraume

$$g_4 = c^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

ist. D. h. sie nimmt von innen nach außen ab.

Im Außenraume nimmt sie, da

$$g_4 = c^2 \left(1 - \frac{a^3}{R_2} \cdot \frac{1}{r}\right)$$

ist, wieder zu. Und zwar ist im Mittelpunkte $r = 0$

$$(g_4)_0 = c^2 \ .$$

Ebenso im Unendlichen $r = \infty$

$$(g_4)_\infty = c^2 .$$

Dazwischen liegt das Minimum an der Grenzfläche $r = a$,

$$(g_4)_a = c^2\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) .$$

Der Übergang erfolgt unstetig in den ersten Derivierten.

$$\left(\frac{d g_4}{d r}\right)_{r = a - 0} = -\frac{2 a}{R^2} c^2 ,$$

$$\left(\frac{d g_4}{d r}\right)_{r = a + 0} = \frac{a}{R^2} c^2 .$$

Das Feld ist also innen doppelt so stark als außen und überdies entgegengesetzt gerichtet. *Wir haben eine Abstoßung vom Zentrum.* (Dementsprechend ist $p > 0$. Das heißt, wir haben Kohäsionsdruck.)

Dieses paradoxe Resultat ist nun gerade dasjenige, das eine bekannte Schwierigkeit der Gravitation aufhebt. Nämlich es hat bereits Maxwell darauf hingewiesen, daß die Ätherhypothese in der Gravitation auf Schwierigkeiten stößt, wenn die Gravitationskräfte durchaus auf nziehung beruhen. Die statische Äthertheorie muß nämlich von einer Deformation des Äthers ausgehen, wie wir dies ja getan haben. Die Deformationsenergie ist dann die Gravitationsenergie. Das heißt aber, die Gesamtenergie des Äthers muß zunehmen, wenn Materie eingebracht wird. Denn das Minimum der Energie entspricht dem stabilen Gleichgewichte, als welches doch offenbar der materielose Zustand zu gelten hat. Bei reinen Attraktionskräften ist das nun nicht der Fall. Die Energie wird im Gegenteil (durch das negative Vorzeichen der Attraktion) kleiner als im materielosen Zustande. Wenn man sie also nicht mit einer unendlich großen positiven Konstanten beschweren will, was dem Endlichkeitsaxiom unserer Weltanschauung widersprechen würde, bleibt nichts anderes übrig, als die Annahme, daß der materiefreie Äther nicht im stabilen Gleichgewicht wäre.[1])

Hier treten nun im Inneren abstoßende Kräfte auf. Hierdurch wird der Beitrag zur Energiedichte positiv. Die Energiedichte des Äthers müßte freilich erst definiert werden

1) Vgl. W. Ritz, Die Gravitation, Scientia 5. p. 241. 1909.

Die fiktiven Spannungen wurden hierfür $G_4^{(4)}$ nahegelegt. Dem widerspricht deren Verschwinden im Außenraume, da doch nicht gut angenommen werden kann, daß dort keine Deformationsenergie herrscht.

Wenn wir auch die Ätherhypothese nicht weiter verfolgen, so behalten wir doch die Tatsache, daß die *Stabilität der Materie* gerade diese Umkehrung der Feldrichtung zu verlangen scheint. Es ist dies nämlich nichts anderes als das alte Dogma von der *Undurchdringlichkeit der Materie* cum grano salis genommen.

27. Schwere und träge Masse.

Wir sagten vorhin, daß p einen Kohäsionsdruck vorstelle. Es ist

$$p = \frac{3}{\varkappa R^2} = \varepsilon = \mu c^2.$$

Woher kommt dieser Kohäsionsdruck? Und wie kommt es, daß wir dem Massenpunkt im Schwerefelde gleichwohl den Tensor

$$-\varepsilon \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s}$$

zuschreiben durften, ohne die Veränderung der Trägheit durch die inneren Spannungen in Rechnung zu ziehen?

Dies letztere zuerst rechtfertigend, weisen wir darauf hin, daß

$$p = \frac{3}{\varkappa R^2}$$

ist, also vernachlässigt werden kann mit $1/R^2$, d. h. der Einwirkung des Eigenfeldes auf die Umgebung. Nur zur Kompensation des Eigenfeldes wurde ja der Kohäsionsdruck benötigt.

Aber genau genommen ist er immer da; er ist nämlich unlösbar mit schwerer Masse verknüpft. Denn

$$p = \mu c^2$$

Sowie wir dem Massenpunkt eine Masse zuerkennen, haben wir gemäß obiger Relation den unzertrennlichen Begleiter p. Hiermit erkennen wir, daß der Kohäsionsdruck auf nichts weiter zurückgeführt werden kann, daß er als eine primäre Tatsache ebenso wie die Masse aufgefaßt werden muß.

Wie sich, exakt gesprochen, Eigenfeld und äußeres Feld superponieren, so daß dann angenähert

$$-\varepsilon_1 \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s} \qquad (\varepsilon_1 \gtrless \varepsilon)$$

für den Massenpunkt gelten wird, muß die Rechnung zeigen, die aber sehr kompliziert ausfällt, selbst wenn man das einfachste äußere Feld, das homogene Feld, nimmt.

Nehmen wir immerhin jetzt $1/R^2$ als zu vernachlässigend an, so verbleibt der Tensor

$$-\varepsilon \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s}$$

und es zeigt sich, daß

$$\mu = \frac{\varepsilon}{c^2}$$

die Rolle der schweren Massendichte spielt und gleichzeitig die der Trägheitsdichte. Bei der Betrachtung der Bewegung im Schwerefelde fällt ε in den geodätischen Differentialgleichungen überhaupt aus. Die alte Galileische Erfahrung von der uniformen Fallbeschleunigung ist gerechtfertigt.

Kommt eine äußere Kraft hinzu, so spielt ε/c^2 die Rolle der Trägheitsdichte. Warum ist hier die Trägheit nicht Null wie vorhin?

Für ein abgeschlossenes System hatten wir die Gesamtträgheit Null. Ist das System nicht abgeschlosen, so können wir die Eigengravitation entweder vernachlässigen — dann haben wir einfach ε/c^2 als träge Dichte — oder mitberücksichtigen. Im letzteren Falle ist nun der Impulsenergiesatz nicht mehr für Ruhe erfüllt, es kommen vielmehr die von den

$$\frac{d x_1}{d s} \frac{d x_2}{d s} \frac{d x_3}{d s}$$

herrührenden Trägheitsglieder hinzu. Diese liefern einen Beitrag zur Trägheit, und der Koeffizient ε/c^2 der Beschleunigung gilt als träge Masse im Newtonschen Sinne. Der Einfluß des Kohäsionsdruckes, der sich gegen die Eigengravitation hebt, fällt aus. Darum macht sich *anders als in der Planck-Minkowskischen Dynamik* der Kohäsionsdruck nicht im Gesamtresultat geltend.

28. Die Massenschale.

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Betrachtung der Massenschale. Es sei nämlich die homogene Massendichte

$$\mu = \frac{\varepsilon}{c^2}$$

nicht mehr über die Vollkugel

$$0 \leqq r \leqq a$$

ausgebreitet, sondern nur über die Schale,

$$0 < b \leqq r \leqq a .$$

Der einzige Unterschied gegen früher ist, daß jetzt in der Materie

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{\text{const}}{r} \qquad b \leqq r \leqq a$$

genommen werden kann. Für den Innenraum $0 \leqq r \leqq b$ haben wir

$$\frac{1}{g_1} = 1 + \frac{\text{const}}{r}$$

und hier muß wieder die Konstante verschwinden; also

$$g_1 = 1 \qquad \text{für } 0 \leqq r \leqq b .$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{2km}{c^2} \cdot \frac{1}{r} \qquad \text{für } a \leqq r < \infty ,$$

da aber jetzt

$$\frac{2km}{c^2} = \frac{8\pi k}{3c^4} \varepsilon (a^3 - b^3) = \frac{\varkappa \varepsilon}{3} (a^3 - b^3),$$

folgt bei stetigem Anschluß der g_1-Werte für $r = b$ bzw. $r = a$ wieder

$$\varkappa \varepsilon = \frac{3}{R^2},$$

womit die analogen Schlußfolgerungen wie vorhin auftreten. Die Lösung ist jetzt, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned} & g_1 = 1, \quad g_4 = c^2 && \text{für } 0 \leqq r \leqq b, \\ & \frac{1}{g_1} = 1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{b^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r}, \quad g_4 = c^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{b^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r}\right) && \text{für } b \leqq r \leqq a, \\ & \frac{1}{g_1} = 1 - \frac{a^3 - b^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r}, \quad g_4 = c^2\left(1 - \frac{a^3 - b^3}{R^2} \cdot \frac{1}{r}\right) && \text{für } a \leqq r < \infty. \end{aligned}\right\}$$

Wir haben also das wichtige Resultat:

Im Inneren einer ruhenden Massenschale herrscht kein Feld. Es gilt Minkowskische Mechanik.

Auch dies ist ein bekannter Satz der Newtonschen Theorie, der also auch in der neuen Theorie gilt.

29. Die Leithypothese $g = -c^2$ für kartesische Koordinate.

Wieder finden wir durchgehend, wie es für berechtigte Polarkoordinaten sein muß,

$$g = -r^4 \sin^2 \vartheta \, c^2$$

erfüllt. Schwarzschilds und Einsteins Lösungen (13a) bzw. (13b) sind hingegen nicht berechtigt.

Halten wir dem entgegen, wo wir die Leithypothese bestätigt fanden:

1. In der Ableitung der Keplerschen Gesetze.
2. In der Ableitung der Poissonschen Gleichung.
3. In der Gesamtträgheit der isolierten Masse, die Null sein muß.
4. In der repulsiven Wirkung der Gravitation im Inneren der Materie, welche durch die Stabilität und die Undurchdringlichkeit gefordert wird. Es erscheint mithin, daß diese Leithypothese, welche nichts anderes ist als eine andere Form für das, was seinerzeit das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bei Minkowski war, genügend ihre Berechtigung dargetan hat, insbesondere indem sie die Frage der Grenzbedingungen löst.

VI. Die kinematischen Sonderfälle des neuen Trägheitsgesetzes.

Wir haben unsere Aufgabe, das Trägheitsgesetz so zu modifizieren, daß aus ihm die ständige Gegenwart der Gravitation in allen physikalischen Erscheinungen folgt, die in § 1 gestellt worden war, im Vorhergehenden gelöst. So ist eine komplette Gravitationstheorie entstanden. Unsere Betrachtungen wären aber nicht vollständig, wenn wir nicht auf die Art eingingen, wie Einstein seine Theorie gefunden hat, welche gekennzeichnet ist durch seine Bezeichnung „allgemeine Relativitätstheorie“ statt Gravitationstheorie.

30. Die Insichtransformation des ds^2 und die Relativitätstheorie.

Bekanntlich hat die Relativitätstheorie ihren Ausgangspunkt von der Form der Newtonschen Bewegungsgleichungen genommen; diese sind Differentialgleichungen 2. Ordnung in den kartesischen Koordinaten, wenn die Zeit als unabhängige Variable genommen wird, und diesem Umstande ist es zu danken, daß eine hinzugefügte gleichförmige Translation am Ablauf der Erscheinungen nichts ändert, indem der zweite Differentialquotient nach der Zeit für eine solche verschwindet.

Physikalisch gesprochen heißt dies: Es ist in jedem Augenblicke einer Bewegung eines Systems relativ zu einem anderen gleichgültig, ob ich dem System die *eine* Bewegung und dem anderen Ruhe zuschreibe oder umgekehrt dem anderen System die entgegengesetzte Bewegung, dem ersten dafür Ruhe.

Eine Folge hiervon ist, daß bei Newton eine Relativität für beliebig beschleunigte Bewegungen möglich ist; z. B. kann ich die Erde sich drehen lassen und die Sonne stillstehen, oder umgekehrt. Allerdings nur solange die Erde ein starrer Körper ist. Ist sie deformierbar, wie es in Wirklichkeit ist, so treten die gewissen Abplattungseffekte auf infolge der Zentrifugalkraft. Ferner wirkt auf nicht starr verbundene Teile des Massensystems der Erde, wie z. B. den freifallenden Stein, das Foucaultsche Pendel usw., die zusammengesetzte Zentrifugalkraft oder die Coriolissche Kraft.

Wenn wir aber nur ein starres Punktesystem, wie es dem Sinne der Newtonschen Mechanik entspricht, annehmen, gilt die Relativität auch für die beschleunigte Bewegung. Wir werden später sehen, wie sich die Relativität der gleichförmig beschleunigten Bewegung auch für das nichtstarre System bei Newton durch Zurückführung der Reaktionskräfte (Zentrifugalkraft usw.) auf fiktive Felder aufrechterhalten ließe.

Bleiben wir für den Augenblick beim starren System und gehen wir jetzt zur Minkowskischen Mechanik über. Diese kennt im allgemeinen keinen starren Körper wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Spannungen. Also nur für den Fall, daß solche Störungen wegfallen, für die unbeschleunigte Bewegung, läßt sich die Relativität der Bewegung. bei Minkowski aufrechterhalten.

Es ist bekannt, daß in diesem Falle der gleichförmigen Translation tatsächlich die Relativität gewahrt ist. Dies hat Lorentz mit seiner bekannten Transformation gezeigt. Mathematisch gesprochen bedeutet sie, daß der Bewegungszustand eines Systems in gewissem Sinne willkürlich, d. i. relativ ist, indem das ds^2 Minkowskis

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2$$

unendlich viele Insichtransformationen in den kartesischen Koordinaten gestattet, also die Interpretation des Trägheitsgesetzes (Ruhe oder Bewegung) in gewissem Grade willkürlich ist.

Der Zusatz „in kartesischen Koordinaten" ist dabei wesentlich. Denn die bloße Tatsache, daß das ds^2 umtransformiert werden kann, wenn die neuen Koordinaten krummlinig wären, wäre *physikalisch bedeutungslos.*

Lorentz hat gezeigt, daß jeder raumzeitlichen Insichtransformation (Drehung) des ds^2 der Sinn zukommt, daß damit die Einführung einer bestimmten relativen Translation verbunden ist.

Das eingangs erwähnte Newtonsche Resultat, daß die Hinzufügung einer beliebigen gleichförmigen Translation am Ablaufe der Naturerscheinunge nichts ändert, ist also in der Minkowskischen Mechanik bestätigt.

Was ist es nun mit der beschleunigten Bewegung beim unstarren Newtonschen Körper? Hat Ptolemaeus oder hat Kopernikus recht?

31. Die Relativität der Beschleunigung bei Newton im unstarren Körper.

„Warum", so fragt Poincaré[1]), „ist das Relativitätsprinzip nur wahr für den Fall geradliniger und gleichförmiger Bewegung der Achsen? Wenn ich mich im Eisenbahnwagen befinde und der Zug auf ein Hindernis stößt, so daß er plötzlich anhält, so werde ich auf die gegenüberliegende Bank geschleudert, obwohl ich nicht direkt irgendeiner Kraftwirkung ausgesetzt gewesen war. Darin liegt nichts Wunderbares. War *ich* nicht der äußeren Kraft ausgesetzt, so war es der Zug, der den äußeren Stoß erlitten hat. Daß die Relativbewegung zweier Körper gestört wird, wenn die Bewegung des einen oder des anderen durch eine äußere Ursache modifiziert wird, ist nicht zu verwundern."

In diesem Falle gilt also das Prinzip der Relativität auch in der Newtonschen Mechanik nicht. Wir erkennen, daß

1) H. Poincaré, La science et l'hypothèse, chap. III, p. 137f.

es der Stoß ist und das infolgedessen auftretende nichtstarre Verhalten des Systems, das hier die absolute Beschleunigung, d. h. die Einwirkung einer äußeren Kraft festlegt.

Gehen wir mit Poincaré zu dem schwierigeren Falle der gleichförmigen Rotation über. „Wenn der Himmel beständig von Wolken bedeckt wäre, wenn wir kein Mittel hätten, die Sterne zu beobachten, so könnten wir doch schließen, daß sich die Erde dreht; wir würden dies erkennen an ihrer Abplattung oder auch am Foucaultschen Pendelversuche. Und doch, was hat das für einen Sinn, in diesem Falle zu sagen, daß sich die Erde dreht? Wenn es keinen absoluten Raum gibt, kann es eine Drehung geben ohne Drehung in bezug auf etwas? Oder sollen wir die Schlußfolgerung Newtons annehmen und an den absoluten Raum glauben? Kehren wir also zu unserer Fiktion zurück. Dichte Wolken verbergen die Gestirne den Menschen, die sie nicht beobachten können, von deren Existenz sie sogar nichts wissen. Wie sollten diese Menschen wissen, daß sich die Erde dreht? Viel eher noch als unsere Vorfahren werden sie den Erdboden, der sie trägt, für fest und unerschütterlich ansehen. Die Gelehrten dieser imaginären Welt werden auf keine Widersprüche mit dem Trägheitsgesetze stoßen, wenn sie die beiden fiktiven Kräfte, die gewöhnliche und die zusammengesetzte Zentrifugalkraft, studieren. Sie werden sie als wirkliche Kräfte erklären; die erste wird abhängen von den relativen Lagen der Teile des Systems, wie die wirklichen Anziehungszentralkräfte; die letztere wird abhängen von den Relativgeschwindigkeiten der Teile, wie die wirkliche Reibung. Allerdings würden bald Schwierigkeiten entstehen, die ihrer Aufmerksamkeit nicht entgehen könnten. Diese Anziehungskräfte würden keineswegs bei wachsender Entfernung verschwinden; weit entfernt hiervon, wächst ja die Zentrifugalkraft ins Unendliche mit zunehmender Entfernung. Vielleicht würden sie sich helfen durch Erfindung eines Mediums, analog unserem Äther, in das alle Körper eingebettet wären und welches auf diese eine abstoßende Kraft ausüben würde. Aber das sind nicht alle Schwierigkeiten. Der Raum würde nicht mehr symmetrisch erscheinen; man müßte zwischen links und rechts unterscheiden. Die Zyklonen drehen sich immer im selben Sinne, ohne daß ein Grund offenbar wäre, warum hier die Symmetrie des

Raumes gestört ist und warum der eine Drehungssinn vor dem anderen bevorzugt wäre.[1]) Kurz, die Schwierigkeiten würden sich häufen, bis daß der lang erwartete Kopernikus erschiene und sie alle auf einmal hinwegfegte, indem er sagen würde: „Es ist viel einfacher anzunehmen, daß sich die Erde dreht."

Was unterscheidet dieses Beispiel Poincarés von seinem früheren? Es fehlt der Stoß. Die Beschleunigung ist stationär und darum kann sie verborgen bleiben. Das System ist quasistarr. Die hier von Poincaré angedeutete Relativitätstheorie der Beschleunigung wollen wir uns näher ansehen.

Worauf geht sie zurück? Offenbar auf eine Abänderung des Trägheitsgesetzes. Denken wir nämlich an das Additionsgesetz der Geschwindigkeiten für die gleichförmige Rotation

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{r}}{dt'} + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]$$

d. h. die absolute Geschwindigkeit ist gleich der relativen Geschwindigkeit vermehrt um die Drehgeschwindigkeit; so liefert dieses bei Differentiation

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d'^2\mathfrak{r}}{dt'^2} + 2\left[\mathfrak{u}\,\frac{d'\mathfrak{r}}{dt'}\right] + \left[\mathfrak{u}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\right]$$

d. h. die absolute Beschleunigung ist gleich der relativen Beschleunigung vermehrt um die Coriolisbeschleunigung und die Zentrifugalbeschleunigung.

Haben wir also

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = 0$$

d. h. ist die Bewegung des Systems kräftefrei (und dies ist in der alten Mechanik für die gleichförmige Rotation der Fall, nicht so in der neuen Mechanik), so haben wir im Relativsystem

$$\frac{d'^2\mathfrak{r}}{dt'^2} + 2\left[\mathfrak{u}\,\frac{d'\mathfrak{r}}{dt'}\right] + \left[\mathfrak{u}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\right] = 0$$

als neues Trägheitsgesetz. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Anders ausgedrückt: Es gibt bei Newton Raumzeittransformationen in kartesischen Koordinaten, die den Übergang auf beschleunigte Systeme vermitteln. Ist die Be-

1) Wie es die gleichförmige Rotation ja ist.

wegung hierbei gleichförmig beschleunigt,[1]) so gibt es auch für den unstarren Körper Newtons ein Verborgenbleiben der Beschleunigung.

Der Zusammenhang dieser Ideen mit unseren Betrachtungen über das Trägheitsgesetz ist nunmehr schon klarer geworden.

32. **Die Relativität der Beschleunigung bei Minkowski.**

Zur genaueren Untersuchung dieses Zusammenhanges kehren wir zu Minkowskis Mechanik zurück.

Wir sagten, daß die Relativität der gleichförmigen Translation auf die in sich Transformierbarkeit (in kartesischen Koordinaten) des ds^2 zurückginge. Ist diese Transformation auf die Translation beschränkt? Und was ist die Translation von diesem Gesichtspunkte?

Wir finden, daß die gleichförmige Translation eines Systems auf eine Schiebung des Minkowskischen vierdimensionalen Raumes hinausläuft. Das kann man sich leicht klar machen am geometrischen Bilde der Weltlinien. Sie sind für eine gleichförmige Translation eines Systems parallele Gerade; ein ebener (raumartiger) Schnitt liefert die augenblickliche Lage des Systems bei irgendeinen Zeitauffassung. Die parallelen Ebenen liefern die sukzessiven Lagen des Systems (bei dieser Zeitauffassung), d. h. aber, wir haben es mit einer Schiebung im S_4 zu tun. Mit Lorentz kann man dann die Zeitachse drehen, so daß sie in die gemeinsame Richtung dieser Geraden fällt, also ständig einer Weltlinie parallel ist; man sagt dann, wir hätten auf Ruhe transformiert.

Der Bewegungszustand ist also in gewissem Sinne relativ oder willkürlich.

Ist die gleichförmige Translation — so fragen wir noch einmal — die einzige Insichtransformation des Minkowskischen ds^2?

Nein, man findet leicht, daß es noch einige Klassen von solchen Bewegungen gibt, die nicht mit der gleichförmigen Translation identisch sind, die also krumme Weltlinienscharen besitzen oder beschleunigt sind. Es gibt also eine Relativität der Beschleunigung auch bei Minkowski.

1) Vgl. aber das im Kap. VIII angegebene Gravitationsdrehfeld, das genau diese Eigenschaften hat.

Sehen wir zu, wie wir zu diesem anscheinend paradoxen Resultate kommen, das wir vorhin ausschlossen, weil es doch keinen starren Körper bei Minkowski geben sollte.

Denken wir wieder an die gleichförmige Rotation bei Poincaré und wie sie einen Unterschied gegen den stoßenden Eisenbahnzug gebildet hat. Worauf ist dieser Unterschied zurückzuführen? Wir sagten schon: auf das Fehlen des Stoßes bei dem ersteren Falle. Denn nur durch den Stoß wird die unstarre Natur des Bezugssystems offenbar, indem sich dann eine gegenseitige Verschiebung seiner Teile einstellt. Aber es gibt beschleunigte Bewegungen, denen der Stoß fehlt. Das sind offenbar diejenigen, die bei Newton konstante Beschleunigung aufweisen. Denn alsdann kann sich ein stationärer Zustand herstellen, so daß alle Kraftwellen sich ausgeglichen haben.

Wir kommen also zu dem Resultate: Diejenigen beschleunigten Bewegungen, die stationär sind, ermöglichen einen quasistarren Körper[1]), und für diese und nur für diese gilt Relativität der Beschleunigung.

Man findet leicht, daß das im wesentlichen der freie Fall und die gleichförmige Rotation sein werden.[2])

In der Tat läßt sich zeigen, daß die entsprechenden Weltlinienscharen einer Insichtransformation (Drehung) des ds^2 ihren Ursprung verdanken.

So haben wir denn auch in der Minkowskischen Mechanik den Anschluß an die gewöhnliche Erfahrung erreicht, indem das Relativitätsprinzip nicht nur für die gleichförmige Translation, sondern auch für die stationäre Beschleunigung gilt. Für ungleichförmige Beschleunigung, bei der also Stöße vorkommen, schließen wir es, wieder in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Erfahrung, aus.

33. Die Relativität der Beschleunigung bei Einstein. Die Äquivalenzhypothese.

Halten wir fest, was wir gefunden haben. Das Minkowskische ds^2 läßt unendlich viele Insichtransformationen zu, und

1) Den einen Haupttypus des sogenannten Bornschen starren Körpers.

2) Vgl. F. Kottler, Relativitätsprinzip und beschleunigte Bewegung. Ann. d. Phys. 44. p. 701. 1914.

hierauf gründet sich die gewisse Relativität oder Willkürlichkeit der Auffassung des Bewegungszustandes bei Minkowski.

Nun, in der neuen Gravitationstheorie haben wir ein anderes ds^2. Ist dieses auch insichtransformierbar? Nein, im allgemeinen nicht.

Der Bewegungszustand im Schwerefelde ist nicht mehr *willkürlich, sondern genau vorgeschrieben.* Natürlich in kartesischen Koordinaten. *Von diesem Gesichtspunkte aus ist Einsteins Theorie keine Relativitätstheorie, sondern eine Absoluttheorie.*[1])

Wann gibt es für ein ds^2 unendlich viele Insichtransformationen? Nur wenn dieses ds^2 einem S_4 mit konstantem Riemannschen Krümmungsmaße entspricht (von den unsymmetrischen Spezialfällen der Rotationsmannigfaltigkeiten abgesehen).

Es ist leicht zu zeigen, daß ein konstantes Riemannsches Krümmungsmaß die Einsteinschen Gleichungen (9c) im materiefreien Gebiete nicht befriedigt.

Ausgenommen nur den Fall, daß dieses Krümmungsmaß Null ist, d. h. aber wieder für das Minkowskische ds^2.

Die Minkowskische Physik muß ja einen Spezialfall der Einsteinschen bilden.

Wenn nun hier in kartesischen Koordinaten eine Umgestaltung des ds^2 möglich ist, wie wir gesehen haben, wie müssen wir sie mit Einstein deuten? Als ein (spezielles) Schwerefeld! Wie deutet sie Minkowski? Als beschleunigtes System! Beide Deutungen sind gleichberechtigt! *Dies ist Einsteins Äquivalenzhypothese.*

Damit ist ein Postulat der Relativität der Beschleunigung erfüllt. Wenn eine solche möglich ist, so müssen ja die Reaktionskräfte des beschleunigten Systems als Feldkräfte gedeutet werden können. Dies tun ja Poincarés imaginäre Gelehrte im obigen Beispiele mit der Zentrifugalkraft und der Corioliskraft. (§ 31.)

Von diesem Postulate hat Einstein seinen Ausgangspunkt genommen bei der Aufstellung seiner Gravitationstheorie. Nur war es für ihn mehr Exemplifikation des Ganzen;

1) E. Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate. Ann. d. Phys. **53.** p. 575. 1917.

die mathematische Ableitung erfolgte auf rein formaler invariantentheoretischer Grundlage.

Kann die Äquivalenzhypothese aber wirklich als mathematische Basis dienen? Hierzu bedarf es einer gewissen Einschränkung, die auf unsere Leithypothese $g = -c^2$ in kartesischen Koordinaten hinausläuft, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden.

Vorerst machen wir uns die Beschränkungen der Gültigkeit der Äquivalenzhypothese klar.

Erstens haben wir sie auf Minkowskische Physik (spezielle Relativitätstheorie nach Einsteins Bezeichnung) beschränkt.

Zweitens haben wir sie auch da auf stationäre Felder beschränkt. Bei Einstein gibt es hingegen auch stoßende Gravitationsfelder.[1])

Nach unseren früheren Betrachtungen halten wir aber diese, so lange keine gegenteilige Erfahrung vorliegt, für ausgeschlossen. Im Zusammenhange hiermit steht die Strahlungsfreiheit der Gravitationsbewegung.

Zu deren Exemplifikation diene das folgende elektromagnetische Bild, das ich in der Arbeit „Relativitätsprinzip und beschleunigte Bewegung" von der Entstehung der stationär beschleunigten Bewegungen gegeben habe: Denkt man sich nämlich ein quasistarres Elektron, so muß für dieses der Tensor

$$-\varepsilon \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s}$$

statthaben. Wirkt nun ein konstantes homogenes elektromagnetisches Feld, z. B. ein elektrostatisches oder magnetostatisches Feld, so wird sich der freie Fall bzw. die gleichförmige Rotation entwickeln. Das Interessante hierbei ist, daß die Elektronen, wenn die Bewegung einmal im Gange, also nach geraumer Zeit, nicht strahlen.

Damit soll nicht etwa gesagt werden, daß die wirklichen Elektronen im statischen Felde das tun würden, wie dies Bohr behauptet. Für diese gilt sicher ein anderer Tensor als oben, weil ja Kohäsion da sein muß. Aber als Bild für

1) So erklärt er den Ruck im gebremsten Eisenbahnwagen. A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Samml. Vieweg 1917. p. 48). Relativität im Sinne des Verborgenbleibens der beschleunigten Bewegung ist dies, selbst bei Zulassung der stoßenden Felder, nicht.

die Vorgänge im Schwerefelde ist diese „Erhaltung der Kraft", wenn einmal der stationäre Zustand eingetreten, wertvoll. Denn die Strahlung des beschleunigten Elektrons geht ja auf das elektrische Eigenfeld zurück. Ist dieses samt dem konstanten äußeren Felde in einen stabilen Zustand gelangt (und ein solcher ist möglich, weil das äußere Feld konstant bleibt), so bleibt die beschleunigte Bewegung strahlungsfrei.

VII. Der freie Fall und das homogene Schwerefeld.

34. Der freie Fall bei Minkowski.

Wir gehen nunmehr an die Untersuchung der beiden Haupttypen der stationären Beschleunigung.

Das erste ist der freie Fall bzw. sein relativistisches Seitenstück die Bornsche Hyperbelbewegung. Welches ist hier die Gestalt der Raumzeittransformation, die den Übergang vom ruhenden zum mitbewegten Systeme vermittelt?[1]

Sei γ die (Minkowskische) Fallbeschleunigung, die etwa entgegen der positiven Z-Achse wirke, sei $x\ y\ z\ t$ ein gewöhnliches Minkowskisches Bezugssystem, sei $x'\ y'\ z'\ t'$ das fallende Bezugssystem, so ist die Raumzeittransformation gegeben durch

$$
(14\text{a})\qquad \left\{\begin{aligned}
x &= x', \\
y &= y', \\
\frac{c^2}{\gamma} + z &= \left(\frac{c^2}{\gamma} + z'\right)\cosh\frac{\gamma t'}{c}, \\
c\,t &= \left(\frac{c^2}{\gamma} + z'\right)\sinh\frac{\gamma t'}{c}.
\end{aligned}\right.
$$

Entwickeln wir die hyperbolischen Funktionen, so kommt

$$
\left\{\begin{aligned}
x &= x' \\
y &= y' \\
z &= z' + {}^1\!/_2\,\gamma t'^2 + \dots \qquad &&+ \text{Glieder mit } \frac{1}{c^2}, \\
t &= t' + \dots &&+ \text{Glieder mit } \frac{1}{c^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Das heißt, bei Weglassung der Effekte zweiter Ordnung haben wir die bekannte Galileische Form der Newtonschen Mechanik.

---

1) F. Kottler, Fallende Bezugssysteme vom Standpunkte des Relativitätsprinzips. Ann. d. Phys. **45**. p. 481. 1914.

Kehren wir zu (14a) zurück und bilden das ds^2. Es kommt

$$
(15\text{a})\quad \begin{cases} -ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \\ \qquad = dx'^2 + dy' + dz'^2 - c^2\left(1 + \frac{\gamma z'}{c^2}\right)^2 dt'^2 \,. \end{cases}
$$

Dies ist ein solcher spezieller Fall eines Schwerefeldes, wie es Einsteins Hypothese voraussieht. Daß es die Feldgleichungen befriedigt, versteht sich von selbst. Denn (15a) ist euklidisch; es verschwinden alle Riemannsymbole und daher auch die aus ihnen kombinierten G_{ik}.

Dies wäre also der gesuchte Baustein für unsere Gravitationstheorie. Tatsächlich hatte Einstein in seinen ersten Arbeiten[1]) die obige Raumzeittransformation, allerdings in der Beschränkung auf erste Ordnung, zugrunde gelegt.

Warum ist das nun nicht der Fall? Warum ist die Äquivalenzhypothese in dieser Form, also: „Minkowskis beschleunigtes System äquivalent einem Schwerefelde", unbrauchbar?

35. Das homogene Feld.

Hierzu untersuchen wir, was das für ein Schwerefeld wäre, das durch (15a) repräsentiert werden sollte. Es ist dies offenbar ein längs der z-Achse wirkendes homogenes Schwerefeld.

Wann entsteht aber ein solches Feld? Dies ist offenbar der Charakter des Schwerefeldes eines Massenpunktes in einem sehr kleinen Bereiche oder in sehr weiter Entfernung vom Massenpunkte.

Wie sieht dieses Feld nach unserer früheren Theorie aus?

Greifen wir auf die wohlbekannte Gestalt (4) des für den Massenpunkt

$$
(4)\quad \begin{cases} -ds^2 = \dfrac{dr^2}{1 - \dfrac{2km}{c^2}\dfrac{1}{r}} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \\ \qquad\qquad - c^2\left(1 - \dfrac{2km}{c^2}\dfrac{1}{r}\right) dt^2 \,. \end{cases}
$$

Dann sehen wir, daß das homogene Feld niemals die Gestalt (15a) haben wird. Setzen wir nämlich

$$
r = r_0 + z
$$

1) A. Einstein, Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes. Ann. d. Phys. 38. p. 355. 1912.

und sei z klein gegen r_0, so wird

$$1 - \frac{2km}{c^2}\frac{1}{r} = 1 - \frac{2km}{c^2}\frac{1}{r_0} + \frac{2km}{c^2}\frac{z}{r_0^2} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{2km}{c^2}\frac{1}{r_0}\right)\left(1 + \frac{2km}{c^2\left(1 - \frac{2km}{c^2}\frac{1}{r_0}\right)}\frac{z}{r_0^2} + \cdots\right)$$

Nun ist die Lichtgeschwindigkeit für $r = r_0$

$$c_0^2 = c^2\left(1 - \frac{2km}{c^2}\frac{1}{r_0}\right),$$

ferner ist die Feldbeschleunigung nach Newton für $r = r_0$

$$\frac{km}{r_0^2} = \gamma,$$

also haben wir

$$c^2\left(1 - \frac{2km}{c^2}\frac{1}{r}\right) = c_0^2\left(1 + \frac{2\gamma z}{c_0^2}\right)$$

und mithin bei großer Entfernung r_0, wo z^2 gegen r_0^2 vernachlässigt werden und $c = c_0$ genommen werden kann, für das homogene Feld in der z-Richtung, die mit dem Radiusvektor nun zusammenfällt,

$$\text{(15b)} \qquad -ds^2 = \frac{dz^2}{1 + \frac{2\gamma z}{c^2}} + dy^2 + dx^2 - c^2\left(1 + \frac{2\gamma z}{c^2}\right)dt^2 \,.$$

Es ist leicht zu sehen, daß dieses ds^2 ebenfalls Minkowskisch ist. Nämlich mit Hilfe der Transformation

$$\sqrt{\frac{c^4}{\gamma^2} + 2\frac{c^2}{\gamma}z} = \frac{c^2}{\gamma} + z_1$$

kann es auf die Form gebracht werden

$$\text{(15a)} \qquad -ds^2 = dz_1^2 + dy^2 + dx^2 - c^2\left(1 + \frac{\gamma z_1}{c^2}\right)^2 dt^2$$

und dies ist genau die Form (15a), von der wir ja wissen, daß sie ein Minkowskisches Element vorstellt.

Warum aber unterscheiden sich die Maßbestimmungen des beschleunigten Minkowskischen Systems (15a) von der Maßbestimmung (15b)?

Hierzu bemerken wir, daß die Maßbestimmung (15a) durch die Minkowskische Physik gefordert wird, wenn anders der Übergang vom bewegten zum ruhenden System sich durch eine instantane Lorentztransformation vollziehen soll. *Der*

Widerspruch ist also nicht durch irgendwelche Hinweise auf die Freiheit der Maßbestimmung des mitbewegten Beobachters zu beseitigen.

Wo liegt also der Schlüssel zu diesem Versagen der Äquivalenzhypothese? Der Grund ist einfach der, daß (15a)

kein berechtigtes Bezugssystem

ist. Denn der Wert g ist für (15a)

$$g = -c^2\left(1 + \frac{\gamma z}{c^2}\right)^2$$

hingegen ist (15b) ein berechtigtes Bezugssystem, denn es ist

$$g = -c^2 .$$

Ich will nun zeigen, wie wichtig diese Forderung des berechtigten Bezugssystems ist, damit Übereinstimmung mit der Newtonschen Näherung und auch mit den Effekten zweiter Ordnung erzielt werde.

36. Vergleich mit der Erfahrung.

Hierzu berechnen wir die geodätischen Bewegungsgleichungen für (15b)

$$\frac{d^2 x}{d s^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{d s^2} = 0,$$

$$\frac{d}{d s}\left(\frac{1}{1 + \frac{2\gamma z}{c^2}}\,\frac{d z}{d s}\right) + \gamma\left(\frac{d t}{d s}\right)^2 + \frac{\gamma}{\left(1 + \frac{2\gamma z}{c^2}\right)^2}\left(\frac{d z}{d s}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d}{d s}\left[\left(1 + \frac{2\gamma z}{c^2}\right)\frac{d t}{d s}\right] = 0.$$

Wir erhalten mit $\frac{s}{c} = u$ als Zeit die Integrale

$$x - x_1 = q_x(u - u_1),$$
$$y - y_1 = q_y(u - u_1),$$
$$z - z_1 = -\frac{\gamma}{2}(u - u_1)^2,$$

wo die $q_x\, q_y$ gewisse Integrationskonstanten sind. $u = u_1$ ist der Zeitpunkt der Umkehr $\frac{d z}{d u} = 0$.

Dies ist nun genau analog der Galileischen Wurfparabel. Denn für diese gilt

$$x - x_1 = v_x (t - t_1),$$
$$y - y_1 = v_y (t - t_1)$$
$$z - z_1 = -\frac{\gamma}{2} (t - t_1)^2.$$

Also bei Vernachlässigung der Effekte zweiter Ordnung ist $\frac{s}{c} = t$ und wir haben exakt die Galileische Parabel.

Hingegen findet man für (15a), wie ich l. c. gezeigt habe, als Wurfbahn eine (parabelartige) Ellipse.

Also ist (15b) im besseren Einklang mit der Erfahrung als (15a). Noch einen anderen Widerspruch mit der Erfahrung können wir nachweisen. Konstruiert man nämlich, wie ich es 1916 versuchte [1]), von (15a) rückwärts das Feld des Massenpunktes, so muß es offenbar die Gestalt haben

$$- ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - c^2 \left(1 - \frac{k m}{c^2} \frac{1}{r}\right)^2 dt^2.$$

Dieses ds^2 befriedigt auch gewisse invariante Differentialgleichungen analog den Einsteinschen Gleichungen; aber es liefert nur die halbe Perihelbewegung des Merkur. [2])

Mithin erkennen wir, daß die Äquivalenzhypothese, also die Äquivalenz eines Minkowskischen beschleunigten Systems mit einem Schwerefelde, zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt und daß sie auch nicht als Ausgangspunkt der Theorie dienen kann.

Gibt man ihr freilich eine andere Form, verlangt man nämlich die Änderung der Längenmaßbestimmung auch für das beschleunigte System, so ließe sie sich aufrechterhalten. Dies wäre dann freilich kein mitbewegtes System im Sinne

---

1) Auch Einstein hatte ursprünglich die Erfüllung der Laplaceschen Gleichung für $\sqrt{g_{44}}$ im materiefreien Felde verlangt (vgl. Ann. d. Phys. **38**. p. 360. 1912). In der nachfolgenden Arbeit „Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes" (l. c. **36**. p. 452. 1912) verwirft er diese Form von g_{44} und nimmt die (unrichtige) Form an, wonach $\sqrt[4]{g_{44}}$ die Laplacesche Gleichung befriedigt. Es heißt dort p. 456 oben wörtlich: „Zu diesem Schritte entschließe ich mich schwer, weil ich mit ihm den Boden des unbedingten Äquivalenzprinzips verlasse".

Hatte ich also 1916 so Unrecht, zu sagen: „Einstein hat die Äquivalenzhypothese aufgegeben"?

2) Vgl. E. Reichenbächer, der dieses Bogenelement adoptiert. Ann. d. Phys. **52**. p. 161. 1917.

Lorentz mehr, und es ist nicht einzusehen, was der Begriff des berechtigten Bezugssystems, der in der Gravitation wurzelt, in der Minkowskischen Kinematik zu sagen hätte.

Davon abgesehen läßt sich jedenfalls die Aussage aufrechterhalten: Die Anschauungen der Ruhe im Schwerefelde und des fallenden Bezugssystems sind bei geeigneten Voraussetzungen über die Maßstäbe äquivalent.

VIII. Die gleichförmige Rotation und das Gravitationsdrehfeld.

37. Die gleichförmige Rotation bei Minkowski.

Dies ist der zweite Haupttypus der stationären Beschleunigung. Zur Aufstellung der Raumzeittransformation, welche den Übergang vom ruhenden zum mitbewegten System vermittelt, bediene man sich folgender Koordinaten:

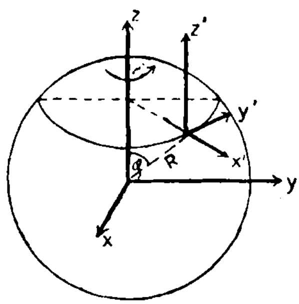

Fig. 1.

Die Rotation geschehe um die z-Achse mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω. Dann sei die z'-Achse der z-Achse stets parallel, die x'-Achse weise in der Richtung der Zentrifugalkraft, die y'-Achse sei senkrecht hierzu. Auf die Erde übertragen heißt dies: Sei R der Erdradius, sei φ das Komplement zur geographischen Breite, so ist die

z'-Achse parallel zur Erdachse, d. h. unter einem Winkel φ geneigt zur Lotlinie,

x'-Achse in der Meridianebene hierzu senkrecht,

y'-Achse horizontal entlang dem Breitenparallelkreis.

Dann lautet die von mir angegebene Raumzeittransformation

$$(16)\quad \begin{cases} x = (R \sin \varphi + x') \cos \omega t - \dfrac{y'}{\sqrt{\beta}} \sin \omega t, \\ y = (R \sin \varphi + x') \sin \omega t + \dfrac{y'}{\sqrt{\beta}} \cos \omega t, \\ z = R \cos \varphi + z', \\ t = \dfrac{t' + R \sin \varphi \dfrac{\omega}{c^2} \cdot y'}{\sqrt{\beta}}. \end{cases}$$

Hierin ist abkürzungshalber

$$\beta = 1 - R^2 \sin^2 \varphi \frac{\omega^2}{c^2}$$

gesetzt. Dies liefert, wenn $dt' = dt \sqrt{\beta}$ berücksichtigt wird, das folgende ds^2

$$(16\text{a})\quad \begin{cases} -ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \\ \qquad = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + 2 g_{14} dx' dt' + 2 g_{24} dy' dt' \\ \qquad\qquad + g_{44} dt'^2. \end{cases}$$

Hierbei entnimmt man die Werte der $g_{i\varkappa}$ folgendem Schema

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{\omega y'}{\beta} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{\omega x'}{\beta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\omega y'}{\beta} & \dfrac{\omega x'}{\beta} & 0 & -c^2 \left[\left(1 - \dfrac{x' \dfrac{\omega^2}{c^2} R \sin \varphi}{\beta} \right)^2 - \dfrac{x'^2 + y'^2}{\beta^2} \dfrac{\omega^2}{c^2} \right] \end{vmatrix}$$

Der Wert dieser Determinante ist

$$g = -c^2 \left(1 - \frac{x' \dfrac{\omega^2}{c^2} R \sin \varphi}{\beta} \right)^2$$

widerspricht also unserer Leithypothese

$$g = -c^2.$$

Selbstverständlich befriedigt (16a) die Einsteinschen Feldgleichungen. Es folgt also, daß die Geometrie des bewegten Beobachters euklidisch sein *könnte*. Einstein ist also im Irrtum, wenn er[1]) meint, daß die Notwendigkeit einer Längen-

1) A. Einstein, Über die spezielle usw. Relativitätstheorie. p. 55.

änderung im Schwerefelde aus den Verhältnissen beim rotierenden Bezugssystem gefolgert werden könnte. Maßgebend hierfür ist vielmehr erst der Begriff des berechtigten Bezugssystems mit dem postulierten Anschlusse an die Newtonsche Erfahrung.

Wir können statt (16a) leicht ein berechtigtes Bezugssystem einführen, indem wir setzen

$$y' = y_1\,,\quad z' = z_1\,,\quad t' = t_1$$

$$1 - \frac{x' \frac{\omega^2}{c^2} R \sin\varphi}{\beta} = \sqrt{1 - \frac{2x_1 \frac{\omega^2}{c^2} R \sin\varphi}{\beta}}\,.$$

Man findet dann

$$\text{(16b)}\quad \left\{ \begin{aligned} -ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 + 2g_{14}\,dx_1\,dt_1 \\ + 2g_{24}\,dy_1\,dt_1 + g_{44}\,dt_1^2\,, \end{aligned} \right.$$

wobei die Determinante g gegeben ist durch

$$g = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1 - \dfrac{2x_1 \frac{\omega^2}{c^2} R\sin\varphi}{\beta}} & 0 & 0 & -\dfrac{\omega y_1}{\beta}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{2x_1 \frac{\omega^2}{c^2} R\sin\varphi}{\beta}}} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{\omega\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{2x_1 \frac{\omega^2}{c^2} R\sin\varphi}{\beta}}\right)}{\omega^2/c^2\, R\sin\varphi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\omega y_1}{\beta}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{2x_1 \frac{\omega^2}{c^2} R\sin\varphi}{\beta}}} & \dfrac{\omega\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{2x_1 \omega^2}{c^2}\dfrac{R\sin\varphi}{\beta}}\right)}{\omega^2/c^2\, R\sin\varphi} & 0 & \begin{aligned} -c^2\Bigg\{\left(1 - 2x_1\frac{\omega^2}{c^2}\frac{R\sin\varphi}{\beta}\right) \\ -\frac{\omega^2}{c^2}\left[\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 2x_1\frac{\omega^2}{c^2}\frac{R\sin\varphi}{\beta}}}{\omega^2/c^2\, R\sin\varphi}\right)^2 + \frac{y_1^2}{\beta^2}\right]\Bigg\} \end{aligned} \end{vmatrix}$$

wobei wieder abkürzungshalber

$$\beta = 1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}\sin^2\varphi$$

gesetzt wurde.

Dieses Element (16b) stellt also nach allem Vorausgegangenen ein Schwerefeld dar. Was für eines?

38. Das Gravitationsdrehfeld.

Hierzu greifen wir zurück auf das in § 28 über die Physik innerhalb einer homogenen Massenschale Gesagte: Im Inneren einer ruhenden Massenschale herrscht Minkowskische Physik, also ein Element

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 \,.$$

Dieses Resultat muß offenbar auch aufrechterhalten werden, wenn sich die homogene Massenschale in gleichförmige drehende Bewegung versetzt. Nur tritt dann an Stelle der Minkowskischen Maßbestimmung die Maßbestimmung (16b).

Unser Schwerefeld ist also das Drehfeld im Inneren einer homogenen, gleichförmig rotierenden Massenschale.

Bildet man die Geodäten, so findet man leicht bis auf Effekte zweiter Ordnung die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft wieder, diesmal als Gravitationsfeldkräfte.[1])

Einem alten Postulate der Relativität ist so Genüge getan. Ptolemaeus und Kopernikus behalten *beide* recht.

IX. Zusammenfassung der Leistungen der neuen Theorie.

Fassen wir zusammen, was die neue Theorie alles geleistet hat.

Sie erklärt erstens die Uniformität der Gravitation, d. i. die Tatsache, daß alle Körper gleich schnell fallen, den Mangel einer Dispersion bei der Gravitation usw.

Sie erklärt ferner, warum die Gravitation rein konservativ ist.

Die Keplerschen Gesetze liefert sie exakt als Effekt erster Ordnung.

Die Perihelbewegung des Merkur ergibt sich als Effekt zweiter Ordnung auf derselben Grundlage wie die Veränderlichkeit der Masse in der Minkowskischen Mechanik.

Auch die allgemeine Poissonsche Theorie der Gravitation findet sich als Effekt erster Ordnung wieder.

Sie ergibt für das abgeschlossene System die Gesamtmasse Null.

Sie liefert die Begrenztheit der Welt und ihrer Masse.

---

1) Von anderen Randbedingungen ausgehend, findet H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie (Physik. Zeitschr. **19**. p. 33. 1918) eine Lösung, die aber mit der Erfahrung nicht im Einklang steht.

Weiters zeigt sich im Inneren der Materie abstoßende Wirkung an Stelle der anziehenden Wirkung im Außenraume. Hierdurch löst sich die Maxwellsche Schwierigkeit der Stabilität für eine Äthertheorie der Gravitation. Ferner wird die Undurchdringlichkeit der Materie hierdurch gekennzeichnet,

Endlich ergibt sich für die Theorie der Relativität der stationären Beschleunigung eine gewisse Äquivalenz zwischen Schwerefeld und beschleunigtem Bezugssystem, womit ein Relativitätspostulat befriedigt wird.

Alles in allem können wir sagen, daß unsere einleitenden Bemerkungen, durch die Einsteinsche Theorie wäre das drei Jahrhunderte alte Problem der Gravitation gelöst, gerechtfertigt sind.

(Eingegangen 14. März 1918.)