# 2. *Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation;*

*von Ernst Reichenbächer.*



## Einleitung.

### Die Möglichkeit einer elementaren mathematischen Erklärung der Elektrizität und der Gravitation.

Die Versuche, die rätselhafte Wirkung der Gravitation zu erklären, sind durch die Schöpfung der Relativitätstheorie in ein neues Stadium getreten und haben in den Ansätzen von Mie[1]) und Einstein[2]), deren Theorien dann durch Hilbert[3]) zusammengefaßt worden sind, bereits zu befriedigenden Ergebnissen geführt. Wenn im folgenden versucht werden

1) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys. **37.** p. 571. 1912; **39.** p. 1. 1912; **40.** p. 1. 1913.

2) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. **49.** p. 769. 1916.

3) D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1915, Math.-physik. Kl. H. **3.** p. 395.

soll, eine neue Erklärung für die grundlegenden Gesetze der Elektrizität und der Gravitation, die von Maxwell, Coulomb und Newton, zu bringen, so ist dies damit begründet, daß es mir gelungen ist, eine einfache geometrische Deutung für den elektromagnetischen Sechservektor zu finden, aus der unter Hinzunahme weniger vereinfachender Hilfshypothesen diese Gesetze sich mit Notwendigkeit ergeben. Dabei ist einerseits die Klippe der Explosion des Elektrons durch Abstoßung seiner einzelnen Teile vermieden, die in den Theorien von Mie und Einstein[1]) noch vorhanden war, andererseits aber ein Weg gewonnen, der zu einem gewissen Verständnis für das Auftreten der Mieschen Weltfunktion führt.

Die grundlegende Annahme, alles physikalische Sein, sei es Materie, Gravitation oder Elektrizität, ist geometrisch zu erklären, d. h. die mit diesen Begriffen verbundenen Vorstellungen sind auf rein mathematische Eigenschaften des vierdimensionalen Raumzeitkontinuums zurückzuführen, überhebt mich der Notwendigkeit, gewisse Minimaleigenschaften, wie sie in den geodätischen Linien und den Hamiltonschen Integralen vorkommen, vorauszusetzen. Das ganze physikalische Problem wird zu einem geometrischen, da alle möglichen Mannigfaltigkeiten Erscheinungen zeigen müssen, die der Elektrizität und der Gravitation entsprechen, wenn sie einer Veränderung unterworfen werden, die wir als den elektromagnetischen Sechservektor deuten, und dabei stets die einfachsten Nebenannahmen gemacht werden.

## I. Hauptteil. Die Elektrizität.

### 1. Abschnitt. Geometrische Deutung der elektrischen Fundamentalgrößen.

Die gewöhnliche Relativitätstheorie von Lorentz und Einstein hat Minkowski[2]) zur Schöpfung seines vierdimensionalen Raumzeitkontinuums geführt, in dem man die Euklidische Geometrie als gültig ansehen kann, wenn man

1) Vgl. H. Reißner, Eigengravitation des elektrischen Feldes, Ann. d. Phys. 50. p. 106. 1916.

2) H. Minkowski, Raum und Zeit. Vortrag, gehalten auf der 80. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Köln 1908; vgl. Fortschr. d. Math. Wissensch. in Monographien, von O. Blumenthal, Heft 2: Das Relativitätsprinzip. p. 56.

der einen Veränderlichen, die der Zeit entspricht, nur imaginäre Werte zuschreibt. Unter dieser Voraussetzung kann also die Minkowskische Welt als lineare Mannigfaltigkeit von vier Ausdehnungen angesehen werden. Es muß ihr also jegliche Krümmung im Riemannschen Sinne fehlen.

Dies ist aber nicht mehr ohne weiteres der Fall, wenn man die gewöhnliche Relativitätstheorie durch Einsteins Verallgemeinerung ersetzt; es muß vielmehr die Wahl der zulässigen Koordinatensysteme bedeutend eingeschränkt werden, wenn der Bedingung genügt werden soll, daß unsere Welt als ein krümmungsfreies Raumzeitkontinuum angesehen werden kann. Ob diese Annahme den Tatsachen überhaupt entspricht, muß die weitere Untersuchung lehren. Wenn aber unsere Welt krümmungsfrei ist, so liegt ohne besonderen Grund keine Veranlassung vor, von der gewöhnlichen Relativitätstheorie abzuweichen. Diese legt bekanntlich ein orthogonales geradliniges isometrisches Koordinatensystem zugrunde, und dies ist auch das einzige, das die Gleichwertigkeit aller Raumzeitpunkte zum Ausdruck bringt. Der Forderung der Isometrie wird durch die Festsetzung der Lichtgeschwindigkeit gleich 1 oder besser gleich $i$ genügt, was Minkowski[1]) durch die „mystische" Gleichung

$$300\,000\ km = \sqrt{-1}\ \text{sec}$$

ausdrückt.

Zur Annahme einer von der gewöhnlichen abweichenden Relativitätstheorie wird man also erst durch die Existenz ungleichartiger Raumzeitpunkte geführt. Solche muß es aber unzweifelhaft geben, da sonst jede Erfahrung unmöglich wäre, und sie sind nach allgemeinem Dafürhalten in den Elektronen und der Materie gegenüber dem freien Äther vorhanden. Daher nimmt Einstein mit Recht an, daß in unendlicher Entfernung von allen Elektronen die gewöhnliche Relativitätstheorie gelten muß, d. h. das Minkowskische Raumzeitkontinuum ungestört ist.

Die Störung, die durch die Elektronen erzeugt wird und uns also zur Annahme eines von dem gewöhnlichen abweichenden Weltkoordinatensystems zwingt, wird nun bekanntlich als der elektromagnetische Sechservektor aufgefaßt. Dieser

---

1) l. c. p. 66.

ist daher nichts anderes als eine Änderung der einfachen Beziehungen der einzelnen Raumzeitelemente der Minkowskischen Welt zueinander und wird von mir durch eine Drehung derselben gegen den Normalzustand definiert. Diese Drehung erfolgt selbstverständlich, da es sich um vier Dimensionen handelt, im allgemeinen in zwei „dualen", d. h. zueinander senkrechten, sich aber nur in einem Punkte schneidenden Ebenen, z. B. der $x_0\, x_1$-[1]) und der $x_2\, x_3$-Ebene. Aus dieser Definition des elektromagnetischen Sechservektors durch die Drehung des vierdimensionalen Raumzeitelementes gegen den Minkowskischen Normalzustand folgen unmittelbar die Maxwellschen Gesetze und unter Hinzunahme weniger einfacher Hypothesen auch die von Newton und Coulomb.

Die Änderungen, die in einer Mannigfaltigkeit durch Drehung ihrer Elemente gegen den Normalzustand eintreten, lassen sich ganz unabhängig von ihrer physikalischen Bedeutung für unsere vierdimensionale Welt in jeder beliebigen betrachten, die mehr als eine Ausdehnung besitzt, und es wird zur Veranschaulichung der Ableitungen dienlich sein, als solche Mannigfaltigkeit zunächst eine Ebene zu behandeln, wobei auch fürs erste von dem imaginären Charakter der Veränderlichen $x_0$ abgesehen werden soll. Der Minkowskische Normalzustand dieser Ebene wird durch ein rechtwinkliges, geradliniges und isometrisches System ausgedrückt, dessen Koordinaten $x_0$ und $x_1$ heißen sollen, wobei $x_0$ dem $y$ und $x_1$ dem $x$ der gewöhnlichen Bezeichnungsweise entspricht. Aus diesem Normalzustand soll nun ein Störungs- oder Spannungszustand dadurch hergeleitet werden, daß sich jedes Flächenelement um einen Winkel dreht, der naturgemäß von seiner Lage stetig abhängen soll. Durch diese Drehung wird jedes System senkrechter Trajektorien in ein ebensolches übergeführt. Insbesondere gilt dies auch für die Parameterlinien $x_0 = \text{const.}$ und $x_1 = \text{const.}$ der Normalkoordinaten, die in die Parameterkurven $\xi_0 = \text{const.}$ und $\xi_1 = \text{const.}$ eines neuen orthogonalen Systems, das Spannungssystem heißen soll, verwandelt werden.

Analytisch kann dieser Übergang durch die Gleichungen ausgedrückt werden:

---

1) Ich bezeichne allgemein die zeitliche Koordinate mit dem Index 0 statt mit 4, um von der Dimensionszahl unabhängig zu sein.

$$(1)\qquad \begin{cases} \sqrt{g_0}\, d\xi_0 = d x_0 \cos\vartheta - d x_1 \sin\vartheta, \\ \sqrt{g_1}\, d\xi_1 = d x_0 \sin\vartheta + d x_1 \cos\vartheta. \end{cases}$$

Darin bedeutet $\vartheta$ den Drehungswinkel des Elementes der Mannigfaltigkeit; die Größen $g$ sind durch die Formeln gegeben:

$$(2)\qquad g_i^{-1} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\right)^2; \quad g_i = \left(\frac{\partial x_0}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\right)^2 .$$

Sie sind auch, wenn $\vartheta$ in jedem Punkte bekannt ist, nicht völlig bestimmt, da sie dadurch geändert werden können, daß man neue Veränderliche durch $\xi_0 = f_0(x_0)$ und $\xi_1 = f_1(x_1)$ mit ganz willkürlichen Funktionen $f_0$ und $f_1$ einführen kann, ohne daß an dem Aussehen des Spannungssystemes etwas geändert wird.

Das Quadrat des Linienelementes ist

$$(3)\qquad d s^2 = d x_0^2 + d x_1^2 = g_0\, d\xi_0^2 + g_1\, d\xi_1^2 .$$

Das Element der $\xi_i$-Linie $d s_i$ folgt hieraus zu:

$$(4)\qquad d s_i = \sqrt{g_i}\, d\xi_i .$$

Überträgt man diese Beziehungen auf mehrere Dimensionen, so erhält man nicht durch jede beliebige Drehung der Elemente aus einem Orthogonalsystem wieder ein neues; es muß vielmehr die Drehung bestimmten Bedingungen genügen, die im vierdimensionalen Falle der einen Gruppe der Maxwellschen Gleichungen entsprechen, die den elektromagnetischen Sechservektor als Rotation des Viererpotentials erscheinen läßt. Darauf soll später noch eingegangen werden. Die Gleichungen (2) bis (4) können ohne weiteres auf mehr Dimensionen übertragen werden.

Um die zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen herzuleiten, betrachte ich zunächst wieder in der Ebene die Krümmung der Parameterkurven des Spannungssystems. Eine leichte Überlegung liefert die Beziehung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s_i} = \left|\frac{1}{\varrho_i}\right|,$$

worin $\varrho_i$ der Krümmungsradius der $\xi_i$-Linie ist. Um die Vorzeichen zu bestimmen, setze ich fest, daß die Krümmungsradien positiv in der Richtung von den Mittelpunkten aus zu rechnen seien; dann ergibt sich:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} = \frac{1}{\varrho_0}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} = -\frac{1}{\varrho_1}. \tag{5}$$

Ersetzt man hierin $d s_i$ durch $\sqrt{g_i}\, d\xi_i$, so erhält man nach Multiplikation mit $\sqrt{g_i}$:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0} = \frac{\sqrt{g_0}}{\varrho_0}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1} = -\frac{\sqrt{g_1}}{\varrho_1}. \tag{6}$$

Hieraus kann man die Abhängigkeit der Drehung $\vartheta$ von $x_0$ und $x_1$ ermitteln:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_0} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0}\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0}\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1},$$

also nach (1):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_0} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{g_0}} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{g_1}},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{g_0}} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{g_1}}.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_0} &= \frac{\cos\vartheta}{\varrho_0} - \frac{\sin\vartheta}{\varrho_1}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} &= -\frac{\sin\vartheta}{\varrho_0} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho_1}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Löst man diese Gleichungen nach der Krümmung $1/\varrho_1$ auf, so erhält man:

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\sin\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial x_0} - \cos\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial x_0} - \frac{\partial \sin\vartheta}{\partial x_1}. \tag{8}$$

Ist das Koordinatensystem so gelegt, daß die Änderung der Größe $\vartheta$ in der Richtung $x_0$ verschwindet, so ist die Gleichung (8) zu ersetzen durch:

$$\frac{d\sin\vartheta}{d x_1} = -\frac{1}{\varrho_1}. \tag{9}$$

Eine solche Wahl des Koordinatensystems ist wenigstens für die nächste Umgebung eines beliebig gewählten Punktes möglich. Da nämlich das zulässige Wertsystem von $\vartheta$ nur einfach unendlich ist, so müssen, von Ausnahmefällen abgesehen, in der Nachbarschaft jedes Punktes andere vorkommen, für die der Wert der Drehung derselbe ist wie für den ersten; solche Punkte „gleicher Drehung" lassen sich durch Kurven verbinden, die „Isogonen" heißen sollen. Die $x_0$-Achse soll nun in dem betreffenden Punkt so gelegt werden, daß sie entweder mit der Isogone oder ihrer Tangente zusammenfällt.

Eine andere Ableitung der Gleichung (9) kann die Tatsache benutzen, daß für

$$x_0 = y\,, \quad x_1 = x: \quad \operatorname{tg} \vartheta = y'\,, \quad \sin \vartheta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

und

$$\varrho = - \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}$$

ist. Dann ist aber:

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3}. \tag{10}$$

Beim Übergang zu mehr als zwei Ausdehnungen könnte es zunächst zweifelhaft erscheinen, ob an dem Begriff der Isogonen festgehalten werden kann.

Als für einen flächenhaften Vektor stehen nämlich für die Drehung $\vartheta$ bei $n$ Dimensionen $\frac{n(n-1)}{2}$ fach unendlich viel Werte zur Verfügung, so daß es zweifelhaft erscheinen könnte, ob in der Nachbarschaft eines Punktes andere mit gleicher Drehung vorkommen, die mit ihm durch eine Isogone verbunden werden können. Durch die Bedingung, daß durch die Drehung ein orthogonales System in ein anderes übergeführt wird, d. h. durch die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen, wird aber die Möglichkeit der Wahl des Drehungsvektors so beschränkt, daß dies tatsächlich überall, wiederum von Ausnahmepunkten abgesehen, wo die Isogonen zu einem einzigen Punkte entarten, möglich ist. Legt man nun wieder die $x_0$-Achse in die Richtung der Isogonen, so erhält man an Stelle von Gleichung (9) oder (10):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sin \vartheta_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sin \vartheta_{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sin \vartheta_{03}}{\partial x_3} + \ldots &= \operatorname{Div}_0 \sin \vartheta \\ &= - \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \ldots \right). \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Diese Gleichung entspricht der ersten aus der zweiten Gruppe der Maxwellschen Gleichungen, wenn diese auf ein Ruhkoordinatensystem bezogen sind. Sie wird ergänzt durch

$$\operatorname{Div}_i \sin \vartheta = 0 \; (i = 1, 2, 3 \ldots) \,, \tag{12}$$

die ohne weiteres dann gegeben ist, wenn der Drehungsvektor in eine einzige Ebene fällt, die außerdem die $x_0$-Achse enthält. Wie man später sehen wird, ist dies für die Elementarwirkung eines Elektrons der Fall. Die elektrische Ruhdichte entspricht also der mittleren Krümmung des $\xi_1 \xi_2 \xi_3$-Raumes im Spannungssystem.

In einem Koordinatensystem, dessen $x_0$-Achse in die Richtung der Isogonen fällt, ist also auch die zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen erfüllt, wenn man dem Sinus des Drehungswinkels die Bedeutung des elektromagnetischen Sechservektors und der mittleren Krümmung des durch die Drehung aus dem $x_1 x_2 x_3$-Raum entstehenden $\xi_1 \xi_2 \xi_3$-Raumes die der elektrischen Ruhdichte gibt.

In einem derartigen System ist es nun auch möglich, die Größe $\sin \vartheta$ selbst als Differentialquotient einer anderen Funktion $-q$ darzustellen. Wandert man nämlich längs einer $x_1$-Linie, so wird man immer neue $\xi_1$-Linien schneiden und bei jedem Schritt $d x_1$ ein Stück $-d q$ einer $\xi_0$-Linie, das zwischen einer $\xi_1$-Linie und ihrer Nachfolgerin liegt, hinter sich lassen. Die Summe $-q$ aller dieser Stücke kann als Potential angesehen werden. Diese Definition läßt sich unmittelbar auf mehrere Dimensionen übertragen; es muß nur die $x_1$-Linie durch eine beliebige Gerade des $x_1 x_2 x_3$-Raumes und die $\xi_1$-Linien durch die $\xi_1 \xi_2 \xi_3$-Räume ersetzt werden. Deren Existenz war ja als einschränkende Bedingung für die Wahl der $\vartheta$ gefordert worden; man sieht jetzt ein, daß sie Anlaß zur Definition der Größe $q$ gibt. Damit ist, zunächst im Ruhsystem, das Potential gegeben, als dessen Ableitungen die Komponenten des elektrischen Vektors erscheinen. Da nach (4): $-d q = -\sqrt{g_0}\, d \xi_0$ ist, läßt sich dieses Potential auch in der Gestalt

$$q = -\int \sqrt{g_0}\, d \xi_0 \tag{13}$$

angeben. Wäre $g_0 = 1$, so würde $q$ die Differenz der beiden Werte der Koordinate $\xi_0$ in dem betrachteten und einem beliebigen, aber festen zweiten Punkte sein, so daß für diesen Grenzfall $q$ durch die Koordinate $\xi_0$ bis auf eine Konstante ersetzt werden könnte. Für verschiedene $\xi_1 \xi_2 \xi_3$-Räume ist die Integrationskonstante zweckmäßig so zu wählen, daß die Punkte gleicher Drehung auch gleiches Potential besitzen. Es wäre dann in dem Grenzfall $g_0 = 1$ nicht $\xi_0$, sondern $\xi_0 - x_0$ als Potentialfunktion zu wählen.

Bisher war ein Koordinatensystem zugrunde gelegt worden, dessen $x_0$-Achse in die Richtung der Isogonen, d. h. der Linien, längs deren sich die Drehung $\vartheta$ nicht ändert, fällt, so daß die Fundamentalgrößen, nämlich Drehung, mittlere Krümmung und Potential, von $x_0$ unabhängig ausfallen. Nun soll untersucht werden, inwiefern die Wahl dieses Systems eine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt; zu diesem Zweck sind die Isogonen einer eingehenden Prüfung zu unterziehen.

Zunächst ist es selbstverständlich, daß zwei Isogonen sich nirgends schneiden dürfen, da sonst das im Schnittpunkt liegende Raumzeitelement zwei verschiedenen Drehungen unterworfen wäre. Sonst läßt sich über die Isogonen ohne weiteres nichts aussagen; sie können krumm oder gerade sein. Sind sie nirgends gekrümmt, so müssen sie in einer Ebene notwendig parallel werden, um obiger Bedingung zu genügen.

Soll die Annahme, daß die Fundamentalgrößen von $x_0$ unabhängig sind, nicht nur für die Nachbarschaft eines Punktes, sondern allgemein gelten, so müssen die Isogonen geradlinig sein. Da die Wahl der Achsenrichtungen des Normalsystems von vornherein beliebig ist, so kann stets die $x_0$-Achse in die Richtung dieser geradlinigen Isogonen gelegt werden; ein solches System heiße Haupt- oder Ruhsystem, während jedes andere Normalsystem als Nebensystem bezeichnet werden soll.

Sind die Isogonen gekrümmt, so kann man ein Hauptsystem nur für die allernächste Nachbarschaft eines Raumzeitpunktes annehmen und ist gezwungen, die Achsenrichtungen zu ändern, wenn man von einem Punkte zum andern übergeht. Dabei aber bietet sich in einem besonderen Falle die Möglichkeit, an den Achsenrichtungen festzuhalten, wenn man in senkrechter Richtung zu den Isogonen, also in räumlicher Richtung, fortschreitet, nämlich dann, wenn diese Parallelkurven, d. h. senkrechte Trajektorien einer Schar linearer Räume sind. Diese Bedingung stimmt mit der Forderung überein, die man allgemein an die sogenannten Weltlinien benachbarter Punkte starrer Körper stellt, und es wird sich herausstellen, daß wir die Isogonen als Weltlinien ansehen können. In diesem Sonderfalle ist also ein und dasselbe Hauptsystem für den ganzen $x_1\, x_2\, x_3$-Raum gültig und nur eine Beschränkung auf ein kleines Stück der Isogonen selbst, also in der $x_0$-Richtung, nötig.

Geht man nun von einem Haupt- oder Ruhsystem zu einem Nebensystem über, dessen $x_0$-Achse nicht mehr in die Richtung der Isogonen fällt, so müssen sich die entwickelten Gleichungen den Sätzen der Relativitätstheorie anpassen, d. h. eine Gestalt annehmen, die bei einer derartigen Umformung unveränderlich ist. Die Drehung $\vartheta$ ist, wie gesagt, ein Sechservektor; dagegen erscheinen Potential und Krümmung als Vierervektoren, die in die Richtung der Isogonen fallen. Daraus ergeben sich dann die für jedes Normalsystem gültigen Maxwellschen Gleichungen, die einerseits den Sinus des Drehungswinkels als Rotation des Potentials, andererseits die negative mittlere Krümmung als Divergenz dieses Sinus erscheinen lassen.

### 2. Abschnitt. Elektron und Äther.

Durch die Krümmung der Isogonen werden natürlich auch die Systeme der Parameterkurven der Spannung, d. h. die $\xi$-Kurven, beeinflußt, da sie ja mit den Richtungen des jeweiligen Hauptsystems den Winkel $\vartheta$ bilden. Jedoch behalten die $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$-Räume die Eigenschaft, untereinander kongruent zu sein, da ja die Isogonen als Parallelkurven vorausgesetzt waren; aber jeder Raum dieser Schar erscheint gegen den benachbarten nicht nur verschoben, sondern wegen der Krümmung der Isogonen auch gedreht. Nur wenn diese Räume Hyperkugeln oder, da die Werte von $x_0$ als rein imaginär vorausgesetzt werden, gleichseitige Hyperboloidräume sind, kann von dieser Drehung abgesehen werden, da diese Räume sich nach allen Richtungen invariant verhalten. Soll daher die Richtungsänderung der Isogonen ohne drehenden Einfluß auf die $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$-Räume sein, so müssen diese als gleichseitige Hyperboloidräume angenommen werden. Sie dürfen natürlich keine zeitlichen Richtungen enthalten und müssen daher zweischalig sein; von den beiden Schalen darf selbstverständlich nur eine vorausgesetzt werden. Es ist aber nicht nötig, diese Schale sich bis ins Unendliche erstrecken zu lassen; vielmehr wird sich herausstellen, daß man sich auf einen kugelförmigen Ausschnitt aus dieser Schale zu beschränken hat, dessen Radius $a$ gegen den Krümmungsradius $\varrho$ des Hyperboloids verschwindend klein ist ($a : \varrho =$ ca. $1 : 10^{21}$). Ein solcher Ausschnitt liegt zwischen zwei parallelen $x_1\, x_2\, x_3$-Räumen, von denen der eine ihn im Mittelpunkt berührt, während der zweite ihn nach außen begrenzt, indem er den Hyperboloidraum in einer Kugelfläche mit dem Radius $a$ schneidet. Die Isogonen bilden eine Schar paralleler Linien, die auf dem ersten dieser Räume senkrecht stehen; auf ihnen sind alle die dem gegebenen kongruenten Hyperboloidräume aufgereiht. So entsteht eine zylindrische oder im Falle der Krümmung der Isogonen zylindroidische Röhre, die Primärröhre heißen möge; sie ist die Weltröhre eines Elektrons, während dieses selbst sich in dem zweiten $x_1\, x_2\, x_3$-Raum als Kugel mit dem Radius $a$ zeigt. Dadurch ist seine Begrenzung nach außen gegeben; seine innere Natur aber wird durch den Hyperboloidraum bestimmt, und es ist leicht, unter den gegebenen Voraussetzungen die drei elektrischen Fundamentalgrößen zu bestimmen. Es ist zunächst offenbar, daß ein Drehungsvektor nur in den durch die $x_0$-Achse des Hauptsystems, die den Mittelpunkt des Hyperboloidraumes mit dem seines kugelförmigen Ausschnittes, d. h. des Elektrons, verbindet, gelegten Ebenen auftreten kann. Bezeichne ich mit $r$ den Abstand irgendeines Punktes des Hyperboloidraumes von der $x_0$-Achse, so ist

$$\sin \vartheta = -\frac{i r}{\varrho} = -i \mathfrak{E}. \tag{14}$$

Die Einführung der imaginären Einheit $i$ wird der Tatsache gerecht, daß auf der $x_0$-Achse nur imaginäre Werte der Koordinaten vorkommen können. Aus Gleichung (14) ergeben sich die anderen Fundamentalgrößen:

$$\mathrm{Div}_0 \sin \vartheta = -\frac{3 i}{\varrho} = -i d, \tag{15}$$

$$q = \frac{i r^2}{2 \varrho} + \mathrm{const} = -i \varphi. \tag{16}$$

Durch diese Gleichungen sind der Reihe nach der elektrostatische Vektor $\mathfrak{E}$, die Ruhdichte $d$ und das elektrostatische Potential $\varphi$ in jedem Punkte des Elektrons gegeben. Aus der Dichte ergibt sich die Gesamtladung $e$ durch Integration über $r$ in den Grenzen von 0 bis $a$ zu

$$e = 4\pi \int_0^a r^2 \cdot d \cdot dr = \frac{4\pi a^3}{\varrho}. \tag{17}$$

In der Grenzkugel nehmen die Fundamentalgrößen die Werte an:

$$\mathfrak{E} = \frac{a}{\varrho}, \tag{18}$$

$$d = \frac{3}{\varrho}, \tag{19}$$

$$\varphi = -\frac{a^2}{2\varrho} + \text{const.} \tag{20}$$

Da die Primärröhre räumlich beschränkt ist, ist es nötig, auch noch den übrigen Teil des Raumzeitkontinuums, den ich das Sekundärgebiet nennen will, zu betrachten; denn die Drehung $\vartheta$ der Elementarteile wird, weil sie eine stetige Funktion sein soll, sich natürlich in dieses Gebiet fortsetzen. Für dieses sind zunächst nur die Größen $\vartheta$ und $q$ in der kugelförmigen Begrenzung bekannt; in welcher Weise sich ihre stetige Änderung vollzieht, wird erst durch den Wert der Größe $d$, die der mittleren Krümmung des $\xi_1 \xi_2 \xi_3$-Raumes entspricht, bestimmt. Die geringste Abweichung vom Normalzustand erhält man, wenn man diese gleich 0 annimmt. Da nun ein Drehungsvektor nur in den durch die $x_0$-Achse gelegten Ebenen auftreten kann, ergibt sich durch Umrechnung der Maxwellschen Gleichungen auf räumliche Polarkoordinaten:

$$\sin\vartheta = -\frac{i a^3}{\varrho r^2}; \quad \mathfrak{E} = \frac{a^3}{\varrho r^2}, \tag{21}$$

und hieraus folgt:

$$q = -\frac{i a^3}{\varrho r}, \quad \varphi = \frac{a^3}{\varrho r}. \tag{22}$$

In Gleichung (22) ist die Integrationskonstante weggelassen, damit das Potential im Unendlichen verschwindet. Da es eine stetige Funktion sein soll, lassen sich die Konstanten der Gleichungen (16) und (20) hieraus bestimmen, und es wird genauer:

$$q = \frac{i r^2}{2\varrho} - \frac{3 i a^2}{2\varrho}, \tag{16}$$

$$\varphi = -\frac{r^2}{2\varrho} + \frac{3a^2}{2\varrho}. \tag{20}$$

Sind die Fundamentalgrößen wie eben angesetzt gegeben, so ist, da der stetige Übergang der Größen $q$ und $\vartheta$ überall gewahrt ist, damit das Sekundärgebiet mit der Primärröhre in Einklang gebracht. Durch seine bloße Existenz gibt also der Hyperboloidausschnitt, d. h. das Elektron, Anlaß zur Drehung sämtlicher Raumzeitelemente, also zur Störung des elektromagnetischen Gleichgewichtes, in dem umgebenden Sekundärgebiete, das wir mit dem Äther identifizieren können.

Wenn nun die Isogonen gekrümmt sind, so soll der Einfachheit halber nur der Fall besprochen werden, daß ihre Krümmung konstant ist, daß sie also gleichseitige Hyperbeln sind, deren Mittelpunkte sämtlich in einer Ebene des $x_1\, x_2\, x_3$-Raumes liegen. Das Stück des Hyperboloidraumes, das wir als das Wesentliche des Elektrons erkannt hatten, lag zwischen zwei parallelen $x_1\, x_2\, x_3$-Räumen, einem Tangenten- und einem Sekantenraum; da die Isogonen auf ersterem senkrecht stehen, müssen ihre Krümmungsmittelpunkte auch in diesem Raume liegen. Von diesem besitzt der Sekantenraum, in dem die Grenzkugel des Elektrons liegt, den Abstand

$$b = -i\left(\sqrt{a^2 + \varrho^2} - \varrho\right) \sim -\frac{i a^2}{2\varrho}$$

vorwärts oder rückwärts in zeitlicher Richtung. Auf diesem Raume stehen die Isogonen keineswegs mehr senkrecht; ist ihr Krümmungsradius $\sigma$, so bilden sie mit der Senkrechten vielmehr einen Winkel $\vartheta$, der durch die Gleichung

$$\sin\vartheta = \frac{b}{\sigma} = -\frac{i a^2}{2\varrho\sigma} \tag{23}$$

gegeben ist. Da $\sigma$ nicht für alle Punkte des Elektrons gleich, sondern von dem dem Krümmungsmittelpunkte nächsten bis zum fernsten sich um ungefähr $2a$ ändert, sind auch die Werte von $\vartheta$ für die einzelnen Punkte im allgemeinen nicht gleich; wenn aber $a$ nur sehr klein ist, kann man ohne großen

Fehler den Wert des Mittelpunktes als für alle gültig annehmen.

Die Krümmung der Isogonen bringt also in diesem Sinne doch eine Drehung der Raumzeitelemente gegen ihr Hauptsystem um diesen Winkel $\vartheta$ hervor, wenn sie auch wegen der Invarianz des Hyperboloidraumes gegen eine Richtungsänderung keine Verlagerung der einzelnen Teile des Elektrons gegeneinander erzeugen kann.

### 3. Abschnitt. Coulombs Gesetz.

Diese Krümmungsdrehung $\vartheta$ ist nun insofern von großer Bedeutung, als sich durch sie ein Elektron in das Feld eines anderen, d. h. in dessen Sekundärgebiet, einfügen kann, ohne daß die Stetigkeit des Drehungsvektors gestört wird. Es wird sich also jede Primärröhre in einem fremden Sekundärgebiet so krümmen, daß ihre Krümmungsdrehung der Elementardrehung des betreffenden Sekundärgebietes in diesem Punkte entspricht. Hieraus erklärt sich die gegenseitige Anziehung und Abstoßung der Elektronen. Die Wirkung findet aber immer nur zwischen ganzen Elektronen, nicht zwischen den Teilen eines einzelnen unter sich statt; denn jedes Elektron befindet sich mit seinem Sekundärgebiet im Ausgleich, da, wie früher ausgeführt, in der Grenze der stetige Übergang des Potentials und der Drehung gesichert ist.

Ob Anziehung oder Abstoßung erfolgt, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Die Drehung der Elementarteile des Feldes erfolgt so, daß die $\xi_0$-Linien nach dem Krümmungsmittelpunkte des erzeugenden Elektrons hin konvergieren. Die Isogonen des zweiten Elektrons müssen sich dieser Richtungsänderung anbequemen; sie werden also in dem Grenzraum seiner Weltröhre ebenfalls nach dem Mittelpunkte des ersten weisen. Liegt nun der Krümmungsmittelpunkt des zweiten auf derselben Seite, so werden sie bei der Annäherung an diesen erst den Berührungsraum senkrecht durchsetzen, also ihre ursprüngliche Neigung zum erzeugenden Elektron wieder aufgeben müssen. Ihre Krümmung wird sie also von dem ersten hinwegführen. Bei ungleicher Lage der Krümmungsmittelpunkte der Elektronen tritt natürlich das Gegenteil, also Anziehung, ein. Diese Erscheinungen sind durch die imaginäre Natur der Zeitachse bedingt. In einer nur reellen

Mannigfaltigkeit ergeben gleiche Zeichen Anziehung, ungleiche Abstoßung (vgl. Fig. 1).[1])

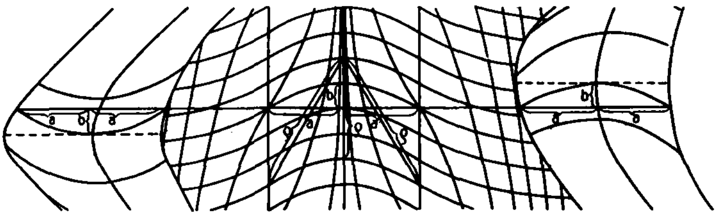

Fig. 1.

Die Stärke der elektrischen Wirkung ergibt sich aus der Gleichsetzung der beiden Werte von $\sin\vartheta$ in (21) und (23), wobei die Radien der beiden Elektronen durch die Indizes I und II unterschieden und höhere Potenzen von $a^2/\varrho^2$ vernachlässigt werden:

$$\frac{-i\,a_{II}^2}{2\,\varrho_{II}\,\sigma_{II}} = -\frac{i\,a_I^3}{\varrho_I\,r^2},$$

$$\frac{a_{II}^2}{2\,\varrho_{II}} \cdot \frac{1}{\sigma_{II}} = \frac{a_I^3}{\varrho_I} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Hieraus läßt sich die Krümmung $1/\sigma_{II}$, die als Beschleunigung zu deuten ist, berechnen:

$$\frac{1}{\sigma_{II}} = \frac{2\,\varrho_{II}}{a_{II}^2} \cdot \frac{a_I^3}{\varrho_I} \cdot \frac{1}{r^2}. \tag{24}$$

Durch Multiplikation mit

$$\frac{8\pi^2\,a_{II}^5}{\varrho_{II}^2}$$

erhält man hieraus:

$$\frac{8\pi^2\,a_{II}^5}{\varrho_{II}^2} \cdot \frac{1}{\sigma_{II}} = \frac{4\pi\,a_I^3}{\varrho_I} \cdot \frac{4\pi\,a_{II}^3}{\varrho_{II}} \cdot \frac{1}{r^2}. \tag{25}$$

1) Die beigegebene Figur stellt einen Schritt längs der $x_0\,x_1$-Ebene dar. In der Mitte zeigt sie die Primärröhre eines ruhenden Elektrons mit eingezeichneten $\xi_0$- und $\xi_1$-Linien, die das Feld im Innern und im Äußern bestimmen. Die drei senkrechten Geraden sind die beiden Grenz- und die Mittelisogone. Rechts ist die abgestoßene Primärröhre eines Elektrons gleicher Krümmung und links die angezogene eines solchen entgegengesetzter Krümmung der $\xi_1$-Linie gezeichnet. Die gestrichelten Linien sind die Tangenten, auf denen die Isogonen der beschleunigten Elektronen senkrecht stehen.

Nun war

$$\frac{4\pi a^3}{\varrho}$$

die Ladung $e$ eines Elektrons; deutet man

$$\frac{8\pi^2 a^5}{\varrho^2}$$

als seine träge Masse $m$, so erhält man für $1/\sigma = \beta$:

$$m_{II}\beta_{II} = \frac{e_I e_{II}}{r^2}, \tag{26}$$

das Coulombsche Gesetz. Bemerkenswert ist noch die Gleichung:

$$m = \frac{e^2}{2a} \quad \text{oder} \quad a = \frac{e^2}{2m}, \tag{27}$$

die Ladung und träge Masse eines Elektrons in Beziehung setzt.

## II. Hauptteil. Die Gravitation.

### 1. Abschnitt. Die Verzerrung und Krümmung des Raumzeitkontinuums infolge der Elementardrehung.

In den bisherigen Ableitungen ist noch keine Rücksicht darauf genommen worden, daß durch die Drehung der Elementarteile eine Verzerrung herbeigeführt worden ist. Diese soll nunmehr Gegenstand der Untersuchung sein, bei der ich auch wieder zunächst eine reelle Ebene als gegebene Mannigfaltigkeit annehme. In dieser wurde das normale $x_0\, x_1$-System durch die Drehung in das Spannungssystem der $\xi_0\, \xi_1$ übergeführt. Durch dieselbe Drehung kommt aber, wenn die $x_0$-Linien wieder in die Richtung der Isogonen fallen, ein zweites Spannungssystem, das zum ersten in bezug auf die $x_1$-Linien in den kleinsten Teilen symmetrisch liegt, in die Lage des Normalsystems. Für dieses zweite Spannungssystem gelten dieselben Gleichungen wie für das erste, nur ist das Vorzeichen des Winkels $\vartheta$ umzukehren. Da die Drehung es aber an Stelle des Normalsystems setzt, so erleidet dieses Verzerrungen, die durch die Gleichungen (3) und (4) ausgesprochen werden, wenn in ihnen $\xi_i$ durch $x_i$ ersetzt wird. Es ist also

$$ds^2 = g_0\, dx_0^2 + g_1\, dx_1^2, \tag{28}$$

$$ds_i = \sqrt{g_i}\, dx_i. \tag{29}$$

Die Größen $\sqrt{g_i}$ geben also die Verzerrungen an, die hiermit als Folge der Elementardrehung erscheinen. Im 1. Abschnitt des I. Hauptteiles war aber bemerkt worden, daß ihr Wert nicht völlig bestimmt, sondern von der Annahme der Funktionen $\xi_i = f_i(x_i)$ abhängig ist. Entsprechend sind auch in den Gleichungen (28) und (29) die Größen $g_i$ von zwei Funktionen $f_0$ und $f_1$ abhängig, die aber als Argument nur $x_1$ haben können, da im angenommenen Hauptsystem alle Werte nur von $x_1$ abhängen. Diese Funktionen können dadurch festgelegt werden, daß man in Gleichung (1) die Werte von

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_0}$$

als gegeben annimmt. Das Nächstliegende wäre, diese Größen als konstant, $k_0$ und $k_1$, anzusehen, da die $\xi_0$- und $\xi_1$-Linien parallele kongruente Kurven mit den Gleichungen

$$\frac{\xi_0}{k_0} = x_0 + \int \frac{1}{\varphi(x_1)}\, d x_1 ,$$

$$\frac{\xi_1}{k_1} = x_0 - \int \varphi(x_1)\, d x_1$$

sind. Das läßt sich auch für das Innere eines Primärstreifens, der in der Ebene der Primärröhre der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht, durchführen und gibt zu den Gleichungen Anlaß:

$$\text{(30)} \qquad \sqrt{g_0} = \frac{\cos \vartheta}{k_0}, \quad \sqrt{g_1} = -\frac{\sin \vartheta}{k_1}.$$

Man überzeugt sich aber leicht, daß durch Einführung einer neuen Veränderlichen, die übrigens mit $q/k_1$ übereinstimmt, an Stelle von $x_1$ die Größe $\sqrt{g_1}$ gleich 1 gemacht werden kann. Es ist deshalb von vornherein zweckmäßiger

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_0} = \sin \vartheta$$

zu wählen, wogegen man an

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = k_0$$

als dem natürlichsten Ansatz für das Innere des unbeeinflußten Primärstreifens festzuhalten hat. Unter diesen Voraussetzungen[1]) erhält man:

$$d s^2 = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2}\, d x_0^2 + d x_1^2 . \tag{31}$$

Um nun zur vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit überzugehen, führe ich räumliche Polarkoordinaten ein, die den Mittelpunkt eines Elektrons zum Pol haben; dann liegt der Drehungsvektor nur in der $x_0\, x_1$-Ebene, wenn $x_1$ den Radiusvektor bezeichnet.

Für solche Koordinaten gilt nun im unverzerrten System:

$$d s^2 = d x_0^2 + d x_1^2 + x_1^2\, d x_2^2 + x_1^2 \cos^2 x_2\, d x_3^2 . \tag{32}$$

Die Verzerrung beschränkt sich nun auch hier auf das erste Glied, da sie im zweiten wie oben beseitigt werden kann und für das dritte und vierte von vornherein nicht in Betracht kommt. Es gilt demnach nach der Drehung:

$$d s^2 = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2}\, d x_0^2 + d x_1^2 + x_1^2\, d x_2^2 + x_1^2 \cos^2 x_2\, d x_3^2 . \tag{33}$$

Diese Gleichung kann aber nur für das Innere der Primärröhre gültig sein, da aus ihr die Riemannsche Krümmung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit sich berechnet als [vgl. Gleichung (36)]:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \frac{2}{x_1^2 \cos \vartheta}\, \frac{d}{d x_1}\, x_1^2 \frac{d \cos \vartheta}{d x_1} \\ &= \frac{2}{x_1^2 \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{\varrho^2}}}\, \frac{d}{d x_1}\, \frac{x_1^3}{\varrho^2 \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{\varrho^2}}} = \frac{6 \varrho^2 + 4 x_1^2}{(\varrho^2 + x_1^2)^2} . \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Es kann nun nicht angenommen werden, daß der Einfluß des Elektrons sich auch auf die Krümmung des Sekundärgebietes erstreckt; diese muß vielmehr dieselbe bleiben, wie wenn kein Feld vorhanden wäre, also gleich 0. Dann kann im Sekundärgebiet Gleichung (33) nicht richtig sein, womit auch ihre Voraussetzung

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = k_0$$

hinfällig wird. Es ist vielmehr:

$$d s^2 = g_0\, d x_0^2 + d x_1^2 + x_1^2\, d x_2^2 + x_1^2 \cos^2 x_2\, d x_3^2 \tag{35}$$

anzusetzen und die Funktion $g_0$ so zu bestimmen, daß die

---

1) Würde man

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = \cos \vartheta$$

setzen, so erhielte man wieder die unverzerrte Ebene. Dieser Ansatz erscheint aber wegen der Parallelität der $\xi_1$-Linien nicht so natürlich wie der gewählte.

Riemannsche Krümmung $\mathfrak{K}$ verschwindet, aber in der Grenzkugel $g_0$ mit seiner ersten Ableitung sich stetig an die Innenwerte anschließt, während es in der Unendlichkeit den normalen Wert 1 annimmt. Bei der Berechnung von $\mathfrak{K}$ muß beachtet werden, daß $g_0$ nur eine Funktion von $x_1$ sein kann.

Die Komponenten des Einsteinschen Fundamentaltensors sind, da der Index 4 meinem Index 0 entspricht:

$$g_{11} = 1\,, \quad g_{22} = x_1^{\,2}\,, \quad g_{33} = x_1^{\,2} \cos^2 x_2\,, \quad g_{44} = g_0\,.$$

Alle anderen Komponenten verschwinden, wodurch die Fundamentaldeterminante, die ich mit $G$ bezeichnen will, gleich $g_0\, g_1\, g_2\, g_3$ wird und der kontravariante Tensor $g^{\mu\sigma}$ die reziproken Werte des kovarianten $g_{\mu\sigma}$ annimmt. Das Christoffelsche 3-Indizessymbol 1. Art

$$\begin{bmatrix} k\varrho \\ \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k\sigma}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial g_{\sigma\varrho}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{k\varrho}}{\partial x_\sigma}\right)$$

ist nur von 0 verschieden, wenn zwei der Indizes gleich sind. Nur in folgenden Fällen ergibt sich ein Wert, der nicht verschwindet:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = x_1\,; \qquad \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = -x_1\,;$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} = x_1 \cos^2 x_2\,; \qquad \begin{bmatrix} 33 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} = -x_1 \cos^2 x_2\,;$$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} g_0'\,; \qquad \begin{bmatrix} 44 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} g_0'\,;$$

$$\begin{bmatrix} 23 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} = -x_1^{\,2} \sin x_2 \cos x_2\,;$$

$$\begin{bmatrix} 33 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} = x_1^{\,2} \sin x_2 \cos x_2\,.$$

Es existieren auch nur die entsprechenden 3-Indizessymbole 2. Art:

$$\begin{Bmatrix} k\varrho \\ \mu \end{Bmatrix} = g^{\mu\sigma} \begin{bmatrix} k\varrho \\ \sigma \end{bmatrix} \text{ 1)}:$$

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 2 \end{Bmatrix} = g^{22}\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1}\,; \qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = g^{11}\begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} = -x_1\,;$$

$$\begin{Bmatrix} 13 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31 \\ 3 \end{Bmatrix} = g^{33}\begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1}\,; \qquad \begin{Bmatrix} 33 \\ 1 \end{Bmatrix} = g^{11}\begin{bmatrix} 33 \\ 1 \end{bmatrix} = -x_1 \cos^2 x_2\,;$$

$$\begin{Bmatrix} 14 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 41 \\ 4 \end{Bmatrix} = g^{44}\begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{g_0'}{2 g_0}\,; \qquad \begin{Bmatrix} 44 \\ 1 \end{Bmatrix} = g^{11}\begin{bmatrix} 44 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} g_0'\,;$$

$$\begin{Bmatrix} 23 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 32 \\ 3 \end{Bmatrix} = g^{33}\begin{bmatrix} 23 \\ 3 \end{bmatrix} = -\operatorname{tg} x_2\,; \qquad \begin{Bmatrix} 33 \\ 2 \end{Bmatrix} = g^{22}\begin{bmatrix} 33 \\ 2 \end{bmatrix} = \sin x_2 \cos x_2\,.$$

---

1) Ich bediene mich hier der abkürzenden Schreibweise Einsteins (l. c. p. 781), die die Summationszeichen wegläßt, da stets nur über zweifach auftretende Indizes zu summieren ist.

Von den Komponenten des Krümmungstensors

$$K_{\mu\nu}{}^{1)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\varkappa\\ \varkappa\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{Bmatrix}\right) + \left(\begin{Bmatrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda\varkappa\\ \varkappa\end{Bmatrix}\right)$$

verschwinden alle mit ungleichen Indizes, was an sich selbstverständlich ist und sich auch bei der Durchrechnung bestätigt. Die übrigen werden:

$$K_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right] + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}^2,$$

$$K_{11} = -\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_1^2} + \frac{d}{d x_1}\frac{g_0'}{2 g_0} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{g_0'}{2 g_0}\right)^2,$$

$$\underline{K_{11} = \frac{d}{d x_1}\frac{g_0'}{2 g_0} + \left(\frac{g_0'}{2 g_0}\right)^2};$$

$$K_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}$$
$$- \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right],$$

$$K_{22} = -\frac{1}{\cos^2 x_2} + 1 - 1 - 1 + \mathrm{tg}^2 x_2 + x_1\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{g_0'}{2 g_0}\right] = \underline{x_1 \cdot \frac{g_0'}{2 g_0}};$$

$$K_{33} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}$$
$$+ \begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right] - \begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix};$$

$$K_{33} = \cos^2 x_2 - \cos^2 x_2 + \sin^2 x_2 - \cos^2 x_2 - \cos^2 x_2 - \sin^2 x_2 - \sin^2 x_2$$
$$+ x_1 \cos^2 x_2\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{g_0'}{2 g_0}\right] + \sin^2 x_2 = \underline{x_1 \cos^2 x_2 \frac{g_0'}{2 g_0}};$$

$$K_{44} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right],$$

$$K_{44} = \frac{d}{d x_1}\frac{g_0'}{2} - \frac{g_0'^2}{4 g_0} - \frac{g_0'^2}{4 g_0} + \frac{1}{2} g_0'\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{g_0'}{2 g_0}\right],$$

$$\underline{K_{44} = \frac{g_0'}{x_1} - \frac{g_0'^2}{4 g_0} + \frac{d}{d x_1}\frac{g_0'}{2}}.$$

Daraus berechnet sich die Gesamtkrümmung

$$\mathfrak{K} = g^{11} K_{11} + g^{22} K_{22} + g^{33} K_{33} + g^{44} K_{44},$$

$$\mathfrak{K} = \frac{d}{d x_1}\frac{g_0'}{2 g_0} + \frac{g_0'^2}{4 g_0^2} + \frac{1}{x_1}\frac{g_0'}{2 g_0} + \frac{1}{x_1}\frac{g_0'}{2 g_0} + \frac{1}{x_1}\frac{g_0'}{g_0} - \frac{g_0'^2}{4 g_0^2} + \frac{1}{g_0}\frac{d}{d x_1}\frac{g_0'}{2},$$

$$\underline{\mathfrak{K} = \frac{2 g_0'}{x_1 \cdot g_0} + \frac{d}{d x_1}\frac{g_0'}{2 g_0} + \frac{1}{g_0}\frac{d}{d x_1}\frac{g_0'}{2}}.$$

1) Vgl, Anmerkung auf vorhergehender Seite.

Durch Umformung erhält man hieraus:

$$(36)\qquad \mathfrak{K} = \frac{1}{2 g_0' x_1^4} \frac{d}{d x_1}\left(\frac{x_1^4 g_0'^2}{g_0}\right) = \underline{\frac{2}{x_1^2 \sqrt{g_0}} \frac{d}{d x_1}\left(x_1^2 \frac{d\sqrt{g_0}}{d x_1}\right)}\,.$$

Setzt man hierin

$$g_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2},$$

so erhält man Gleichung (34). Soll nun die Riemannsche Krümmung außerhalb der Elektronen verschwinden, so muß

$$x_1^2 \frac{d\sqrt{g_0}}{d x_1} = c_1,$$

$$\sqrt{g_0} = c_2 - \frac{c_1}{x_1},$$

$$(37)\qquad g_0 = \left(c_2 - \frac{c_1}{x_1}\right)^2$$

sein. In der Primärröhre war

$$(38)\qquad g_0 = \frac{1}{k_0^2}\left(1 + \frac{x_1^2}{\varrho^2}\right) = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2}.$$

Die Konstanten $c_1$, $c_2$ und $k_0$ lassen sich daraus bestimmen, daß erstens $g_0$ im Unendlichen gleich 1 wird und zweitens in der Grenzkugel, also für $x_1 = a$, sowohl

$$\sqrt{g_0} \quad \text{als} \quad \frac{d\sqrt{g_0}}{d x_1}$$

stetige Funktionen sind. Aus der ersten Festsetzung folgt:

$$(39\,\text{a})\qquad c_2 = 1,$$

aus der zweiten die Gleichungen:

$$1 - \frac{c_1}{a} = \frac{1}{k_0}\sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}} \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{a^2} = \frac{a}{k_0 \varrho^2 \sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}}},$$

d. h.

$$(39\,\text{b})\qquad c_1 = \frac{a^3}{\varrho^2 + 2a^2},$$

$$(39\,\text{c})\qquad k_0 = \frac{1 + \frac{2a^2}{\varrho^2}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}}}.$$

Die Größe $\sqrt{g_0}$, die nach (37) und (38) zu bestimmen ist, stellt die veränderliche Lichtgeschwindigkeit dar. Sie erreicht in der Unendlichkeit den größten Wert 1 und nimmt im

Mittelpunkt des Elektrons ihren kleinsten Wert an. Durch Anhäufung vieler Elektronen kann die Lichtgeschwindigkeit merklich verändert und der Lichtstrahl daher gekrümmt werden, wie es die Einsteinsche Theorie verlangt. Dies erkennt man am besten, wenn man die Gravitation betrachtet, deren Potential durch die Größe $\sqrt{g_0}$ bestimmt wird.

### 2. Abschnitt. Die anziehende Wirkung der Gravitation.

Um die anziehende Wirkung der Gravitation zu erklären, braucht man nur daran zu denken, daß in dem verzerrten System das Einheitsmaß in zeitlicher Richtung sich im Verhältnis der Größe $1/\sqrt{g_0}$ ändert. Die Isogonen einer zusammenhängenden Primärröhre können daher nicht mehr geradlinig bleiben, sondern müssen eine Krümmung erleiden, die der Änderung dieser Funktion entspricht. Daraus aber wird sich die Gleichung (67) in Einsteins Arbeit[1]) ebenfalls ergeben, so daß sich die Einführung geodätischer Linien erübrigt.

Am einfachsten ist die Krümmung der Isogonen zu behandeln, die den $x_0$-Linien des Feldes parallel laufen, da ihr Krümmungsradius $\sigma$ selbstverständlich in die Richtung des Gradienten der Funktion $1/\sqrt{g_0}$ fällt, deren skalare Natur, wie alsbald nachgewiesen werden soll, aus der der Krümmung $\mathfrak{K}$ hervorgeht. Für diese Isogonen ist wie für ebene Kurven:

$$\sigma : \sigma + d\sigma = \frac{1}{\sqrt{g_0}} : \frac{1}{\sqrt{g_0}} + d\frac{1}{\sqrt{g_0}},$$

also

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\partial \lg \frac{1}{\sqrt{g_0}}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma}. \tag{40}$$

Sind die Isogonen irgendwie anders gerichtet, so fällt doch ihr Krümmungsradius wenigstens in die Ebene, die von dem Gradienten und der $x_0$-Linie gebildet wird. In diesem allgemeineren Falle ist es möglich, daß die Isogone auch in diese Ebene fällt; dann soll die Krümmung longitudinal heißen. Steht die Isogone dagegen auf dem Gradienten senkrecht, so heißt die Krümmung transversal. Für die longitudinale Krümmung läßt sich obige Formel (40) ohne weiteres

1) l. c. p. 817.

auch anwenden, da $\lg g_0$ ein Skalar ist. Wenn dagegen die Isogone nicht in die $x_0\,\sigma$-Ebene hineinfällt, so ist das Problem der Krümmung nicht mehr zwei-, sondern dreidimensional, und es muß, da offenbar eine zur $x_0\,\sigma$-Ebene senkrechte Linie überhaupt nicht mehr gekrümmt wird, in Formel (40) auf der rechten Seite der Faktor $\cos^2\psi$ hinzugefügt werden, wobei $\psi$ der Winkel zwischen der Isogone und der $x_0\,\sigma$-Ebene ist.

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma}\cos^2\psi\,. \tag{40a}$$

Es ist nämlich allgemein

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1}\cos^2\psi + \frac{1}{\sigma_2}\sin^2\psi\,,$$

worin $1/\sigma_1$ die longitudinale Krümmung nach Gleichung (40), $1/\sigma_2$ aber die Krümmung der Senkrechten auf der $x_0\,\sigma$-Ebene angibt.

Nun bedeute $x_\tau$ irgendeine räumliche, d. h. zu $x_0$ senkrechte Richtung; dann ist die Krümmung einer Raumkurve durch die Gleichung:

$$\frac{\cos(x_\tau\,\sigma)}{\sigma} = -\frac{d^2 s_\tau}{d s^2}$$

gegeben. Hierin ist $d\,s_\tau$ das zu $x_\tau$ gehörige Längendifferential, $d\,s$ das der Isogone, und das Minuszeichen ist gesetzt, weil der Krümmungsradius vom Mittelpunkt aus gerechnet werden sollte. Setzt man dies in (40a) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 s_\tau}{d s^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma}\cos(x_\tau\,\sigma)\cos^2\psi\,.$$

Gibt nun $r$ die Richtung des Gradienten an, so kann

$$\frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma} = \frac{\partial \lg g_0}{\partial r}\cos(r\,\sigma)$$

gesetzt werden, da die Differentialquotienten in allen zu $r$ senkrechten Richtungen verschwinden. Also wird:

$$\frac{d^2 s_\tau}{d s^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial r}\cos(r\,\sigma)\cos(x_\tau\,\sigma)\cos^2\psi\,.$$

Ferner ist

$$\cos(x_\tau\,\sigma) = \cos(r\,\sigma)\cos(r\,x_\tau) + \cos(x_0\,\sigma)\cos(x_0\,x_\tau)$$

und

$$(r\,\sigma) = \frac{\pi}{2} - (x_0\,\sigma)\,,$$

da $\sigma$ in der $x_0\,r$-Ebene liegt. Ebenso ist

$$0 = \cos(s\,\sigma) = \cos(r\sigma)\cos(rs) + \cos(x_0\sigma)\cos(x_0 s),$$

d. h.
$$\operatorname{tg}(r\,\sigma) = -\frac{\cos(r\,s)}{\cos(x_0\,s)}, \quad \frac{1}{\cos^2(r\,\sigma)} = 1 + \frac{\cos^2(r\,s)}{\cos^2(x_0\,s)}.$$

Setzt man dies ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 s_\tau}{d s^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial r}\,[\cos^2(r\,\sigma)\cos(r\,x_\tau) + \cos(r\,\sigma)\cos(x_0\,x_\tau)$$
$$\cos(x_0\,\sigma)]\cos^2\psi.$$

Nun ist $\cos(x_0\,x_\tau) = 0$, da $x_\tau$ senkrecht auf $x_0$ steht.

$$\frac{d^2 s_\tau}{d s^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial r}\cos^2(r\,\sigma)\cos(r\,x_\tau)\cos^2\psi.$$

Es kann

$$\frac{\partial \lg g_0}{\partial r}\cos(r\,x_\tau) = \frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau}$$

gesetzt werden, während

$$\frac{1}{\cos^2(r\,\sigma)} = 1 + \frac{\cos^2(r\,s)}{\cos^2(x_0\,s)} = 1 + \frac{\left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2}{\left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2} = \frac{\left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2}{\left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2}$$

und

$$\cos^2\psi = \left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2,$$

also

$$\cos^2(r\,\sigma)\cos^2\psi = \left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2$$

ist. So wird

$$\frac{d^2 s_\tau}{d s^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau}\left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2 = 1 - \left(\frac{d\,s_1}{d\,s}\right)^2 - \left(\frac{d\,s_2}{d\,s}\right)^2 - \left(\frac{d\,s_3}{d\,s}\right)^2,$$

und in den zu $x_0$ senkrechten, also unverzerrten Richtungen kann $d\,s_\tau = d\,x_\tau$ gesetzt werden; daher erhält man schließlich:

$$\text{(40 b)} \qquad \frac{\dfrac{d^2 x_\tau}{d s^2}}{1 - \left(\dfrac{d\,x_1}{d\,s}\right)^2 - \left(\dfrac{d\,x_2}{d\,s}\right)^2 - \left(\dfrac{d\,x_3}{d\,s}\right)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau}.$$

Für die Ruhbeschleunigung fällt $d\,s$ mit $d\,s_0 = i\sqrt{g_0}\,d\,t$ zusammen, und es ist dann, da der Nenner gleich 1 wird,

$$\frac{d^2 x_\tau}{d t^2} = -\frac{1}{2}\,g_0\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau},$$

$$\text{(40 c)} \qquad \frac{d^2 x_\tau}{d t^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_0}{\partial x_\tau},$$

genau die Einsteinsche Gleichung (67)[1]), da sein $g_{44}$ mit $g_0$ übereinstimmt. Aber nicht $\frac{1}{2} g_0$, sondern $\frac{1}{2} \lg g_0$ ist als Gravitationspotential anzusehen. Da die skalare Natur dieser Größe nachgewiesen werden kann, ist der Gravitationsvektor der Gradient dieses Skalars und daher, wie Mie[2]) angenommen, ein Vierervektor. Er steht auf dem Grenzraum der die Gravitation erzeugenden Primärröhre senkrecht.

Aus Gleichung (40b) kann in bekannter Weise die Bewegung eines Körpers um einen anziehenden Mittelpunkt hergeleitet werden; aus ihr ergeben sich die beiden folgenden nach Einführung ebener Polarkoordinaten:

$$x_1 = r \cos \varphi\,, \quad x_2 = r \sin \varphi\,, \quad x_3 = \text{const.}:$$

$$(41) \qquad -\frac{1}{2} \lg \left[1 - \left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2\right] = -\frac{1}{2} \lg B + \frac{1}{2} \lg g_0\,,$$

$$(42) \qquad r^2 \frac{d\,\varphi}{d\,s} = \frac{2\,A\,i}{c}\,.$$

$A$ und $B$ sind Integrationskonstanten, $c$ ist die normale Lichtgeschwindigkeit.[3]) Ferner ist für das Feld eines Elektrons nach (37):

$$g_0 = \left(c - \frac{c_1}{r}\right)^2,$$

also für das Feld sehr vieler in einer kugelförmigen Masse vereinigten Elektronen

$$g_0 = \left(c - \frac{b}{c\,r}\right)^2,$$

worin $b$ eine von der Gesamtmasse dieser Elektronen abhängige Konstante ist. Aus Gleichung (41) folgt:

$$(43) \qquad 1 - \left(\frac{d\,r}{d\,s}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2 = \frac{B}{g_0} = \frac{B\,c^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2\,r}\right)^2}\,.$$

Aus (42) ergibt sich:

$$\frac{1}{d\,s} = \frac{2\,A\,i}{c\,r^2} \cdot \frac{1}{d\,\varphi}\,.$$

---

1) l. c. p. 817.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. **40.** p. 26. 1913.

3) Es ist für dieses Problem zweckmäßiger, diese nicht gleich 1 zu setzen, da sich sonst die Konstanten nicht in den gebräuchlichen Maßen ergeben.

Dieser Wert soll in (43) eingesetzt werden.

$$1 + \frac{4A^2}{c^2 r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{4A^2}{c^2 r^2} = \frac{Bc^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2 r}\right)^2}$$

und für $1/r = k$:

$$1 + \frac{4A^2}{c^2}\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + \frac{4A^2}{c^2}k^2 = \frac{Bc^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2}k\right)^2}.$$

(44). $$\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + k^2 = -\frac{c^2}{4A^2}\left[1 - \frac{Bc^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2}k\right)^2}\right].$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, ersetze ich

$$\frac{Bc^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2}k\right)^2} \quad \text{durch} \quad Bc^{-2}\left(1 + \frac{2b}{c^2}k + \frac{3b^2}{c^4}k^2\right),$$

vernachlässige also höhere Potenzen von $bk/c^2$ als die zweite. Dann ist bekanntlich

$$k = \frac{1 + s\cos\lambda\varphi}{p}, \quad \frac{dk}{d\varphi} = -\frac{s\lambda}{p}\sin\lambda\psi,$$

d. h. die Bahn ist eine Ellipse mit Perihelbewegung, die wegen $\lambda < 1$ vorschreitet. Man erhält nämlich in (44) durch Einsetzen:

$$(1 - \cos^2\lambda\varphi)\frac{s^2\lambda^2}{p^2} + \left(1 - \frac{3Bb^2}{4A^2c^4}\right)\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2s}{p^2}\cos\lambda\varphi + \frac{s^2}{p^2}\cos^2\lambda\varphi\right)$$
$$- \frac{2Bb}{4A^2c^2}\left(\frac{1}{p} + \frac{s}{p}\cos\lambda\varphi\right) + \left(1 - \frac{B}{c^2}\right)\frac{c^2}{4A^2} = 0.$$

Dann wird

der Koeffizient von $\cos^2\lambda\varphi$: $\frac{-s^2\lambda^2}{p^2} + \left(1 - \frac{3Bb^2}{4A^2c^4}\right)\frac{s^2}{p^2}$,

der Koeffizient von $\cos\lambda\varphi$: $\frac{2s}{p^2}\left(1 - \frac{3Bb^2}{4A^2c^4}\right) - \frac{2Bb}{4A^2c^2}\frac{s}{p}$,

das Absolutglied: $\frac{s^2\lambda^2}{p^2} + \left(1 - \frac{3Bb^2}{4A^2c^4}\right)\frac{1}{p^2} - \frac{2Bb}{4A^2c^2}\frac{1}{p} + \left(1 - \frac{B}{c^2}\right)\frac{c^2}{4A^2}$.

Durch Nullsetzen dieser Größen erhält man:

(45) $$\lambda^2 = 1 - \frac{3Bb^2}{4A^2c^4},$$

(46) $$\frac{Bbp}{4A^2c^2} = 1 - \frac{3Bb^2}{4A^2c^4},$$

$$\left(1 - \frac{B}{c^2}\right)\frac{c^2}{4A^2} = -\frac{s^2}{p^2}\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{2\lambda^2}{p^2} = \frac{\lambda^2}{p^2}(1 - s^2),$$

d. h.

(47) $$\frac{B}{c^2} = 1 - \frac{\lambda^2 (1 - \varepsilon^2) \cdot 4 A^2}{c^2 p^2} .$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich wegen des großen Wertes von $c$:

$$\frac{B}{c^2} \sim 1 .$$

Dann aber liefert (46) aus demselben Grunde:

$$b \sim \frac{4 A^2}{p} ,$$

und setzt man diese Werte in (45) ein, so bekommt man:

$$\lambda^2 = 1 - \frac{12 A^2}{p^2 c^2}$$

und

(48) $$\lambda = 1 - \frac{6 A^2}{p^2 c^2} < 1 .$$

Nun war

(42) $$\frac{2 A i}{c} = r^2 \frac{d \varphi}{d s} ,$$

ferner

$$d s^2 = g_0 \, d x_0^2 + d r^2 + r^2 d \varphi^2$$

$$d s^2 = - g_0 \, d t^2 + d r^2 + r^2 d \varphi^2$$

$$d s = - i \sqrt{g_0} \, d t \sqrt{1 - \frac{1}{g_0} \left[ \left( \frac{d r}{d t} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d \varphi}{d t} \right)^2 \right]} .$$

$\sqrt{g_0}$, die veränderliche Lichtgeschwindigkeit, kommt ihrem Normalwert $c$ so nahe, daß

$$d s = - i c \, dt$$

gesetzt werden kann, und so erhält man aus (42):

$$2 A = r^2 \frac{d \varphi}{d t} ,$$

d. h. $A$ ist die Flächengeschwindigkeit.

Bei einer geschlossenen Bahn ist, wenn $T$ die Umlaufszeit und $a$ die Halbachse der Ellipse ist ($\varepsilon$ ist die numerische Exzentrizität):

(49) $$A T = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} .$$

Ferner ist der Halbparameter der Ellipse:

(50) $$p = a (1 - \varepsilon^2) .$$

Führt man diese Werte in (48) ein, so erhält man:

$$\lambda = 1 - \frac{6\,\pi^2\,a^2}{c^2\,T^2\,(1-\varepsilon^2)}\,. \tag{51}$$

Nun schreitet das Perihel bei jedem Umlauf vor um

$$\psi = \frac{2\,\pi}{\lambda} - 2\,\pi\,,$$

also um

$$\psi = \frac{12\,\pi^2\,a^2}{c^2\,T^2(1-\varepsilon^2)}\,. \tag{52}$$

Durch diese Perihelwanderung unterscheidet sich also die Bahn eines um ein Anziehungszentrum sich bewegenden Körpers von der klassischen Theorie.

Es erübrigt sich noch, den Begriff der schweren Masse und ihre Dichte zu definieren. Um dabei den Anschluß an die klassische Mechanik zu wahren, ist die Poissonsche Gleichung

$$\varDelta\mathfrak{A} = 4\,\pi\,\varkappa\,\mathfrak{d} \tag{53}$$

als Ausgangspunkt zu wählen, in der $\mathfrak{A}$ das Gravitationspotential, $\varkappa$ die Gravitationskonstante und $\mathfrak{d}$ die Massendichte bedeuten. Für den Fall eines einzigen Elektrons ist

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\lg g_0$$

bekannt; es muß aber noch der für ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem geltende Differentialoperator $\varDelta$ unserem allgemeineren System mit 4 Ausdehnungen angepaßt werden. Bekanntlich kann er durch die beiden aufeinanderfolgenden Operatoren Grad und Div ersetzt werden, die für beliebig viel Dimensionen definiert sind, so daß also, da der Gradient des Potentials der Gravitationsvektor ist, die mit $4\pi\varkappa$ multiplizierte Massendichte als dessen Divergenz auftritt. Nun sind aber die Operatoren von Grad und Div in einem allgemeineren System anders zu definieren als im kartesischen; die allgemeinen Formeln hat Einstein[1]) angegeben. Ich möchte aber für orthogonale Systeme lieber eine andere Form vorziehen, indem ich nicht die ko- und kontravarianten Tensorkomponenten $A_\mu$, $A_{\mu\nu}$ usw. Einsteins, sondern die Projektionen auf die Parameterlinien- und -Flächen einführe. Dabei will ich Skalare stets mit deutschen, Vierervektoren stets

1) l. c. die Gleichungen (35), (36) und (40) des § 11.

mit kleinen lateinischen oder griechischen, und Sechservektoren mit den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnen. Zwischen den Projektionen $\lambda_\mu$ und $\mathsf{M}_{\mu\nu}$ und den Tensorkomponenten $A_\mu$ und $A_{\mu\nu}$ bestehen dann die Beziehungen:

$$\sqrt{g_\mu}\,\lambda_\mu = A_\mu\,, \tag{54}$$

$$\sqrt{g_\mu}\,\mathsf{M}_{\mu\nu}\sqrt{g_\nu} = A_{\mu\nu}\,. \tag{55}$$

Die von mir angewendete Bezeichnungsweise ist zwar nur für orthogonale Systeme anwendbar, hat aber dann den Vorzug, bei Transformationen der Gestalt $x_i = f_i(\mathfrak{x}_i)$, die die Form des Systems nicht beeinflussen, die Komponenten $\lambda_\mu$ und $M_{\mu\nu}$ unverändert zu lassen, was für die der kovarianten Tensoren nicht zutrifft. Rechnet man nun für diese Projektionen die in einem kartesischen System geltenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Div} b = \mathfrak{a}\,,\\ &\operatorname{Rot} f = M\,,\\ &\operatorname{Div} M = l \end{aligned}\right. \tag{56}$$

um, so erhält man folgende Beziehungen[1]):

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Div}\frac{\beta}{\sqrt{g}}\cdot\sqrt{G} = \mathfrak{a}\cdot\sqrt{G}\,,\\ &\operatorname{Rot}\sqrt{g}\cdot\varphi = \sqrt{g}\cdot\mathsf{M}\cdot\sqrt{g}\,,\\ &\operatorname{Div}\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\mathsf{M}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\lambda\cdot\sqrt{G}\,. \end{aligned}\right. \tag{57}$$

Hierin ist jede Komponente eines Vierervektors $\beta$ oder $\varphi$ oder $\lambda$ mit der entsprechenden des Fundamentaltensors $\sqrt{g}$ oder $1/\sqrt{g}$ multipliziert, desgleichen jede Komponente des Sechservektors $\mathsf{M}$ mit den beiden entsprechenden von $\sqrt{g}$ oder $1/\sqrt{g}$. Die Determinante $\sqrt{g_0 g_1 g_2 g_3}$ ist mit $\sqrt{G}$ bezeichnet. Die Gleichungen (57) stimmen mit den Einsteinschen überein, wenn man die Formeln (54) und (55) berücksichtigt.

Um also die Massendichte $\mathfrak{d}$ zu bestimmen, ist in Gleihung (57a) der Vierervektor $\beta$ gleich dem der Gravitation, d. h. gleich dem Gradienten der Funktion $\frac{1}{2}\lg g_0$ zu setzen:

$$\operatorname{Div}\sqrt{G}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\operatorname{Grad}\frac{1}{2}\lg g_0 = 4\pi\varkappa\mathfrak{d}\sqrt{G}\,. \tag{58}$$

---

1) Die Schreibweise entspricht der Matrizenrechnung (vgl. z. B. H. Minkowski, Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge, Math. Annal. 68. § 11. p. 495f)..

Im räumlichen Polarkoordinatensystem verschwinden alle Differentialquotienten mit Ausnahme derer nach $x_1$ oder $r$; man erhält also:

$$\frac{d}{dr}\sqrt{g_0}\, r^2 \cos x_2 \frac{d}{dr}\,\frac{1}{2}\lg g_0 = 4\pi\varkappa\mathfrak{d}\cdot r^2\cos x_2\sqrt{g_0},$$

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{4\pi\varkappa r^2\sqrt{g_0}}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\sqrt{g_0}}{dr}\right). \tag{59}$$

Nun war nach (36):

$$\mathfrak{K} = \frac{2}{r^2\sqrt{g_0}}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\sqrt{g_0}}{dr}\right).$$

Es ist also die Massendichte:

$$\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{K}}{8\pi\varkappa}. \tag{60}$$

Damit ist auch der Beweis für die skalare Natur des Gravitationspotentials $\frac{1}{2}\lg g_0$ gegeben, da die Krümmung $\mathfrak{K}$, die — abgesehen von der Konstanten $8\pi\varkappa$ — als Divergenz seines Gradienten sich ergibt, natürlich skalar ist.

Die Krümmung $\mathfrak{K}$ und damit die Massendichte $\mathfrak{d}$ verschwindet überall im Sekundärgebiet; in der Primärröhre ist sie zwar nicht genau konstant, sondern nach (34):

$$\mathfrak{K} = \frac{6\varrho^2 + 4r^2}{(\varrho^2 + r^2)^2}.$$

Da aber $r$ gegen $\varrho$ verschwindend klein ist, wie wir alsbald bestätigt sehen werden, hat die Krümmung $\mathfrak{K}$ überall mit großer Annäherung den Wert wie im Mittelpunkt, d. h. $6/\varrho^2$.

Um die gesamte schwere Masse eines Elektrons zu finden, muß die Dichte $\mathfrak{d}$ über den räumlichen Querschnitt der Primärröhre integriert werden. Also ist die Ruhmasse:

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{6}{\varrho^2}\cdot\frac{1}{8\pi\varkappa},$$

$$m = \frac{a^3}{\varkappa\varrho^2}. \tag{61}$$

Um Übereinstimmung mit dem Werte der trägen Masse [vgl. Gleichung (25)] zu erzielen, ist die Gravitationskonstante

$$\varkappa = \frac{1}{8\pi^2 a^2} \tag{62}$$

zu setzen.

Aus Gleichung (40c) folgt nun, wenn $x_r$ mit $r$ zusammenfällt:

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = -\frac{1}{2}\frac{d g_0}{d r},$$

und wenn die Beschleunigung mit $\beta$ bezeichnet wird, ergibt sich für die Schwerebeschleunigung im Felde eines Elektrons:

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{d}{d r}\left(1 - \frac{a^3}{r(\varrho^2 + 2 a^2)}\right)^2,$$

also bei Vernachlässigung höherer Potenzen von $a^2/\varrho^2$:

$$\beta_{II} = -\frac{a_I^3}{\varrho_I^2 r_I^2},$$

wenn wieder die Indizes I und II das anziehende von dem angezogenen Elektron unterscheiden. Durch Multiplikation mit der trägen Masse

$$m_{II} = \frac{8\pi^2 a_{II}^5}{\varrho_{II}^2}$$

erhält man:

$$m_{II}\beta_{II} = -\frac{1}{8\pi^2 a_I^2}\cdot\frac{8\pi^2 a_I^5}{\varrho_I^2}\cdot\frac{8\pi^2 a_{II}^5}{\varrho_{II}^2}\cdot\frac{1}{r^2},$$

(63) $$m_{II}\beta_{II} = -\varkappa\frac{m_I m_{II}}{r^2},$$

das Newtonsche Gesetz. Der Wert der Gravitationskonstanten ist durch Gleichung (62) mit dem Radius des Elektrons in Beziehung gesetzt, und man muß daher annehmen, daß die Radien sämtlicher Elektronen, auch die der bis jetzt unbekannten positiven, einander gleich sind.

Für ein negatives Elektron läßt sich $a$ aus

(27) $$a = \frac{e^2}{2m} = \frac{e}{2}\cdot\frac{e}{m}$$

berechnen. Ich benutze dazu die Werte:

$$\frac{e}{m} = 1{,}73\cdot 10^{-7}\,\mathrm{g}^{-1/2}\,\mathrm{cm}^{1/2},\quad e = 1{,}56\cdot 10^{-20}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{1/2},$$

und erhalte:

(64) $$a = 1{,}35\,.\,10^{-13}\,\mathrm{cm}.$$

Nun ist die Gravitationskonstante

$$\varkappa = 6{,}68\,.\,10^{-8}\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{sec}^{-2}$$

gegeben. Man erhält also in Gleichung (62) verschiedene Benennungen und kann daher diese aufeinander zurückführen.

Benutzt man noch Minkowskis Gleichung

$$1 \text{ sec} = 3 \,.\, 10^{10}\, i \text{ cm} \;,$$

so erhält man:

$$\varkappa = 6{,}68 \cdot 10^{-8}\, \text{g}^{-1}\, \text{cm}^3\, \text{sec}^{-2} = -\frac{1}{8 \cdot (1{,}35\pi \cdot 10^{-13})^2\, \text{cm}^2},$$

$$1\,\text{g} = -\,8 \cdot (1{,}35\,\pi \cdot 10^{-13})^2 \cdot 6{,}68 \cdot 10^{-8}\, \text{cm}^5\, \text{sec}^{-2},$$

$$1\,\text{g} = +\,8 \cdot (0{,}45\,\pi \cdot 10^{-23})^2 \cdot 6{,}68 \cdot 10^{-8}\, \text{cm}^3,$$

$$(65) \qquad 1\,\text{g} = 1{,}07 \cdot 10^{-52}\, \text{cm}^3.$$

Damit sind sämtliche physikalische Größen auf eine Einheit, das cm, zurückgeführt. In diesem Maße ergibt sich für die Gravitationskonstante:

$$\varkappa = -\frac{1}{8 \cdot (1{,}35 \cdot 10^{-13})^2}\, \text{cm}^{-2},$$

$$(66) \qquad \varkappa = -\,0{,}686 \cdot 10^{24}\, \text{cm}^{-2}.$$

Die Masse eines Elektrons wird:

$$(67) \qquad m_\varepsilon = 0{,}9 \cdot 10^{-27}\, \text{g} = 0{,}963 \cdot 10^{-79}\, \text{cm}^3.$$

Die Ladung eines Elektrons erhält man zu:

$$(68) \qquad e_\varepsilon = -\,1{,}56 \cdot 10^{-20}\, \text{g}^{1/2}\, \text{cm}^{1/2} = -\,1{,}61 \cdot 10^{-46}\, \text{cm}^2.$$

Hieraus kann man den Krümmungsradius $\varrho$ des negativen Elektrons berechnen. Es war:

$$(17) \qquad e = \frac{4\pi\, a^3}{\varrho},$$

also

$$\varrho = \frac{4\pi\, a^3}{e} = -\frac{4\pi \cdot 1{,}35^3 \cdot 10^{-39}}{1{,}61 \cdot 10^{-46}}\, \text{cm},$$

$$(69) \qquad \varrho = -\,1{,}91 \cdot 10^{8}\, \text{cm}.$$

Dieser Wert ist mehr als tausend Trillionen mal größer als der Radius $a$.[1])

### 3. Abschnitt. Der Einfluß der Gravitation auf die elektrischen Fundamentalgrößen.

Wendet man die Gleichungen (56b, c) und (57b, c) auf die elektrischen Größen: Dichte, Feldstärke und Potential

1) Es ist interessant, daß H. Reißner in seiner Arbeit: Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes, Ann. d. Phys. **50**. p. 115—117. 1900, fast dasselbe Verhältnis für seine Konstanten $\lambda$ und $a$ errechnet ($\lambda : a = 3 \,.\, 10^{21}$).

an, die ich im verzerrten System mit $\delta$, $\mathsf{M}$ und $\chi$ bezeichnen will, so wird

$$\frac{d\sqrt{g_0}\,\chi_0}{d r} = -\sqrt{g_0}\,\mathsf{M}_{01}\sqrt{g_1}\,, \tag{57b}$$

und

$$\frac{d\sqrt{g_2 g_3}\,\mathsf{M}_{01}}{d r} = \sqrt{g_1 g_2 g_3}\,\delta_0\,, \tag{57c}$$

während alle anderen Komponenten von $\chi$, $\mathsf{M}$ und $\delta$ verschwinden. Im Sekundärgebiet ist $\delta_0 = 0$, in der Primärröhre $= 3/\varrho$[1]) zu setzen, um an der Bedingung festzuhalten, daß der $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$-Raum überall die gleiche mittlere Krümmung hat.

Da nun in (57c) die Verzerrung, die durch die Größe $g_0$ gegeben ist, nicht auftritt, erhält man auch die Feldstärke $\mathsf{M}_{01}$ wie im unverzerrten Systeme, also außen

$$-\frac{i\,a^3}{\varrho\,r^2}$$

[Gleichung (21)], innen

$$-\frac{i\,r}{\varrho}$$

[Gleichung (14)]; wieder ist aber daran zu erinnern, daß die Komponenten des kovarianten Tensors wegen Gleichung (55) davon abweichen.

Dagegen wird, da $g_0$ in (57b) auftritt, das Potential geändert. Außen erhält man

$$\frac{d\sqrt{g_0}\,\chi_0}{d r} = +\frac{i\,a^3}{\varrho\,r^2}\sqrt{g_0}$$

mit

$$\sqrt{g_0} = 1 - \frac{a^3}{(\varrho^2 + 2a^2)\,r}\,,$$

also

$$\sqrt{g_0}\,\chi_0 = -\frac{i\,a^3}{\varrho\,r} + \frac{i\,a^6}{2\varrho\,r^2(\varrho^2 + 2a^2)}\,. \tag{70}$$

Diese Gleichung kann auch ersetzt werden durch

$$\sqrt{g_0}\,\chi_0 = +\frac{i\,\varrho}{2}\left(1 + \frac{2a^2}{\varrho^2}\right)(g_0 - 1)\,. \tag{70a}$$

Für $r = a$ war

$$\sqrt{g_0} = \frac{\varrho^2 + a^2}{\varrho^2 + 2a^2}\,.$$

1) Infolgedessen bleibt auch die Gesamtladung eines Elektrons unverändert $\frac{4\pi\,a^3}{\varrho}$.

Also erhält man für $r = a$:

$$\chi_0 = -\frac{i\,a^2(2\varrho^2 + 3a^2)}{2\varrho(\varrho^2 + a^2)}. \tag{71}$$

Im Innern liefert (57b) dagegen:

$$\frac{d\sqrt{g_0}\,\chi_0}{dr} = +i\frac{\cos\vartheta}{k_0}\frac{r}{\varrho} = i\frac{\sqrt{1+\frac{a^2}{\varrho^2}}}{\left(1+\frac{2a^2}{\varrho^2}\right)\varrho}\,r\sqrt{1+\frac{r^2}{\varrho^2}},$$

$$\sqrt{g_0}\,\chi_0 = \frac{i\varrho\sqrt{1+\frac{a^2}{\varrho^2}}}{3\left(1+\frac{2a^2}{\varrho^2}\right)}\sqrt{1+\frac{r^2}{\varrho^2}}^{\,3} + C.$$

Die Konstante $C$ ist so zu bestimmen, daß für $r = a$ wieder der Wert von $\chi_0$ in (71) herauskommt:

$$C = -\frac{i(2\varrho^4 + 10a^2\varrho^2 + 11a^4)}{6\varrho(\varrho^2 + 2a^2)}.$$

Danach wird:

$$\sqrt{g_0}\,\chi_0 = \frac{i\varrho\sqrt{1+\frac{a^2}{\varrho^2}}}{3\varrho(\varrho^2+2a^2)}\sqrt{\varrho^2+r^2}^{\,3} - \frac{i(2\varrho^4 + 10a^2\varrho^2 + 11a^4)}{6\varrho(\varrho^2+2a^2)}. \tag{72}$$

Hieraus erhält man für den Mittelpunkt, da

$$\sqrt{g_0} = \frac{1}{k_0} = \frac{\varrho\sqrt{a^2+\varrho^2}}{\varrho^2+2a^2}$$

für $r = 0$ ist:

$$\chi_0 = \frac{i\varrho}{3} - \frac{i(2\varrho^4 + 10a^2\varrho^2 + 11a^4)}{6\varrho^2\sqrt{a^2+\varrho^2}} = -i\cdot\frac{3}{2}\frac{a^2}{\varrho} - i\cdot\frac{9}{8}\frac{a^4}{\varrho^3}\ldots \tag{73}$$

Die Werte des elektrostatischen Potentials $\varphi$ erhält man aus $\chi_0$ wieder durch Division durch $-i$. Man kann der Gleichung (72) auch die Gestalt geben:

$$\sqrt{g_0}\,\chi_0 = \frac{i(\varrho^2+2a^2)^2}{3\varrho(\varrho^2+a^2)}\left(\sqrt{g_0}^{\,3} - 1\right) - \frac{i\,a^4(3\varrho^2 - 5a^2)}{6\varrho(\varrho^2+2a^2)(\varrho^2+a^2)}. \tag{74}$$

Das Produkt $\sqrt{g_0}\,\chi_0$ stellt die Komponente des kovarianten Vierervektors dar.

### 4. Abschnitt. Die Gesamtwirkung aller Elektronen und die Weltfunktion.

Aus den bisher entwickelten Gleichungen für das elektrische und das Gravitationsfeld eines einzelnen Elektrons ist es nun leicht, das gesamte Weltbild zu konstruieren. Alles physikalische Geschehen spielt sich in der vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit ab; diese zerfällt in die Primärröhren der positiven und negativen Elektronen, die sämtlich in dem Radius $a$ und wahrscheinlich auch im Absolutwert von $\varrho$ übereinstimmen, und in das krümmungsfreie Sekundärgebiet des Äthers. Die elektrischen Wirkungen der positiven und negativen Primärröhren sind einander entgegengesetzt, weil der elektromagnetische Vektor von der ersten Potenz von $\varrho$ abhängt; dagegen addieren sich die Gravitationswirkungen beider Arten, in die nur das Quadrat von $\varrho$ eingeht. Bei keiner Wirkung wird aber eine Änderung der Riemannschen Krümmung $\mathfrak{K}$ oder der mittleren Krümmung des auf den Isogonen oder Weltlinien senkrechten Spannungsraumes erzielt, die die Massendichte bzw. die elektrische Dichte angeben. Für den Äther verschwinden beide; für die Primärröhre ist $\mathfrak{K}$ mit großer Genauigkeit

$$\frac{6}{\varrho^2}\left(\text{genau }\frac{6\varrho^2+4r^2}{(\varrho^2+r^2)^2}\right),$$

die elektrische Ruhdichte $\pm 3/\varrho$.

Aus $\mathfrak{K}$ ist dann in einem allgemeinen Koordinatensystem, dessen Bogendifferential durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu\ ^{1)} \tag{75}$$

gegeben ist, ein zweiter Skalar, die Lichtgeschwindigkeit $\mathfrak{l}$, gemäß folgender Gleichung zu bestimmen:

$$\text{Div Grad lg } \mathfrak{l} = \frac{\mathfrak{K}}{2}, \tag{76}$$

die die Verallgemeinerung der Gleichung (36) darstellt. Dabei müssen die $g_{\mu\nu}$ mit ihren Ableitungen der Bedingung genügen, daß sich aus ihnen der an der betreffenden Raumzeitstelle herrschende Wert von $\mathfrak{K}$, d. h. entweder 0 oder

$$\frac{6\varrho^2+4r^2}{(\varrho^2+r^2)^2}$$

ergibt. Ferner ist die nähere Bestimmung von $\mathfrak{l}$ so zu treffen, daß diese Größe für ein einzelnes Elektron in $\sqrt{g_0}$ übergeht.

1) Ich schließe mich auch hier wieder der abkürzenden Schreibweise Einsteins an und verwende natürlich jetzt allgemein ko- und kontravariante Tensoren.

Man kann in Gleichung (76) die Differentialoperatoren ersetzen:

(77) $$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x_\mu} = \frac{\mathfrak{K}}{2}.$$ [1])

Die Komponenten $d_\mu$ der elektrischen Dichte erfüllen die Gleichung

(78) $$g^{\mu\nu} d_\mu d_\nu = \frac{9}{\varrho^2}$$

im Innern der Primärröhren und verschwinden im Sekundärgebiet sämtlich. Der elektromagnetische Sechservektor $M_{\mu\nu}$ ist gegeben durch

(79) $$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\sqrt{G}\,g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} M_{\mu\nu} = d^\alpha = g^{\alpha\sigma} d_\sigma$$ [2]),

das elektrische Viererpotential durch:

(80) $$\mathrm{Rot}_{\mu\nu}\, q = \frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu} = M_{\mu\nu}.$$ [3])

Das Gravitationspotential ist $\lg \mathfrak{l}$, sein Gradient der Gravitationsvektor.

Um nun die Weltfunktion $\mathfrak{H}$ zu bestimmen, die die beiden Hilbertschen Axiome I und II[4]) erfüllt, suche ich für den Fall der Ruhe die Energiedichte zu bilden. Diese zerfällt in einen Teil, der sich auf die Gravitation bezieht, und einen elektromagnetischen. Jeder Teil besteht wieder aus zwei Summanden, einem potentiellen, der das Produkt der betreffenden Dichte mit dem Potential ist, und einem kinetischen, der das Quadrat des Feldvektors enthält. Für die Gravitation ist

(81) $$\mathfrak{H}_1 = \frac{1}{8\pi\varkappa}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sqrt{G}\cdot g^{\mu\nu}\cdot l_\mu,$$

worin

(81a) $$l_\mu = \frac{\partial \lg^2 \mathfrak{l}}{\partial x_\mu}$$

sein soll, offenbar eine Invariante, da $l_\mu$ kovariant und $g^{\mu\nu} l_\mu$ kontravariant, beide vom 1. Range sind. Dasselbe gilt für den elektromagnetischen Teil:

---

1) Vgl. (58) und (60) und Einstein l. c. p. 797, Gleichung (35).

2) Vgl. 57c und Einstein l. c. p. 798, Gleichung (40).

3) Vgl. 57b und Einstein l. c. p. 797. Gleichung (36).

4) l. c. p. 396.

(82) $$\mathfrak{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}\,\sqrt{G}\,g^{\nu\beta}p_\nu$$

mit

(82a) $$p_\nu = g^{\mu\alpha}q_\alpha M_{\mu\nu};$$

denn $q_\alpha M_{\mu\nu}$ ist ein kovarianter Tensor 3. Ranges, aus dem durch Multiplikation mit $g^{\varrho\sigma}$ ein gemischter Tensor entsteht, der durch zweimalige „Verjüngung„ [1]), d. h. durch Einsetzung von $\mu$ für $\varrho$ und $\alpha$ für $\sigma$ in einen kovarianten Tensor $p_\nu$ 1. Ranges übergeht.

Das Integral über ein beliebiges Stück $d\omega$ der vierfach ausgedehnten Raumzeitmannigfaltigkeit

$$\iiiint(\mathfrak{H}_1+\mathfrak{H}_2)\sqrt{G}\,d\omega$$

kann nach teilweiser Integration durch ein ebensolches über die dreidimensionale Oberfläche $dV$ von $d\omega$ ersetzt werden:

(83) $$\iiiint(\mathfrak{H}_1+\mathfrak{H}_2)\sqrt{G}\,d\omega = \iiint\sqrt{G}\,(g^{\mu\nu}l_\mu + g^{\nu\beta}p_\nu)_n\,dV,$$

worin der Index $n$ andeutet, daß die Komponenten der kontravarianten Vektoren $l$ und $p$ in der Richtung der Normalen auf diese Oberfläche zu nehmen sind:

(83a) $$\iiiint(\mathfrak{H}_1+\mathfrak{H}_2)\sqrt{G}\,d\omega = \iiint\sqrt{G}\,(l^n+p^n)\,dV.$$

Setzt man nun fest, daß ihre Variation auf dieser Oberfläche verschwinden soll, so folgt:

(84) $$\delta\iiiint(\mathfrak{H}_1+\mathfrak{H}_2)\sqrt{G}\,d\omega = 0.$$

Jeder Teil $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ von $\mathfrak{H}$, sowie diese Funktion selbst erfüllt also die beiden Hilbertschen Axiome.

Die Ausrechnung liefert:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_1 &= \frac{1}{8\pi\varkappa}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\,\frac{\partial\lg^2\mathfrak{l}}{\partial x_\mu}\\ &= \frac{2}{8\pi\varkappa}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\lg\mathfrak{l}\,\frac{\partial\lg\mathfrak{l}}{\partial x_\mu}\\ &= \frac{\lg\mathfrak{l}}{8\pi\varkappa}\cdot\frac{2}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\,\frac{\partial\lg\mathfrak{l}}{\partial x_\mu} + \frac{2}{8\pi\varkappa}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\\ &\qquad\cdot\left(\frac{\partial\lg\mathfrak{l}}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\lg\mathfrak{l}}{\partial x_\nu}\right).\end{aligned}$$

1) Vgl. A. Einstein, l. c. p. 784f.

Nun war

(77) $$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x_\mu}=\frac{1}{2}\mathfrak{R},$$

also

$$\mathfrak{H}_1=\frac{\lg \mathfrak{l}}{8\pi\varkappa}\cdot\mathfrak{R}+\frac{1}{4\pi\varkappa}g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x_\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x_\nu}\,.$$

Die Massendichte $\mathfrak{d}$ war

$$\frac{\mathfrak{R}}{8\pi\varkappa},$$

der Skalar

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x_\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x_\nu}=\mathfrak{g}^2$$

stellt das Quadrat des Gravitationsvektors dar.

(85) $$\mathfrak{H}_1=\mathfrak{d}\cdot\lg\mathfrak{l}+\frac{1}{4\pi\varkappa}\cdot\mathfrak{g}^2$$

kann als die Energiedichte der Gravitation für den Ruhezustand angesehen werden.

Entsprechend wird:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_2&=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\sqrt{G}\,g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}q_\alpha\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu}\right)\\&=\frac{q_\alpha}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\sqrt{G}\,g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}M_{\mu\nu}\\&+\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\sqrt{G}\,g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu}\right)\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}\,.\end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach (79) $q_\alpha d^\alpha$ oder $g^{\alpha\sigma}q_\alpha d_\sigma$, das skalare Produkt von Potential und Dichte; der zweite aber kann durch gleichzeitige Vertauschung von $\mu$ mit $\nu$ und $\alpha$ mit $\beta$ die Gestalt

$$g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha}$$

annehmen, ist also gleich:

$$\frac{1}{2}g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha}\right)=\frac{1}{2}g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}M_{\mu\nu}M_{\beta\alpha},$$

also $\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2$, d. h. gleich dem halben Quadrat des elektromagnetischen Vektors. So stellt

$$\mathfrak{H}_2 = q_\alpha d^\alpha + \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}^2 \tag{86}$$

die elektromagnetische Energiedichte im Ruhezustande dar.

Die Summe beider Energiedichten erfüllt also die an die Weltfunktion gestellten Ansprüche; insbesondere ergeben sich die beiden Hilbertschen Axiome als Folgerungen aus dem Aufbau des gesamten Weltbildes aus den Primärröhren der einzelnen Elektronen und dem Sekundärgebiet des freien Äthers.

## Schluß.

### Der Einfluß der Materie auf die elektromagnetischen Fundamentalgrößen und der Atombau.

Zum Schluß möchte ich noch ganz kurz zwei Fragen streifen, die sich bei jeder Theorie der Materie und der Elektrizität aufdrängen. Bekanntlich ändern sich die elektromagnetischen Gleichungen durch den Einfluß der Materie, was durch die magnetische Permeabilität und die Dielektrizitätskonstante ausgedrückt wird. Diese Änderung muß nun nach unserer Theorie durch die Verzerrung des Raumzeitkontinuums geleistet werden, die ja selbstverständlich innerhalb der Materie, d. h. in der Nähe sehr vieler Elektronen am stärksten ist. Diese Verzerrung drückt sich ja auch in der Änderung der Lichtgeschwindigkeit $\mathfrak{l}$ aus, die ja ebenfalls durch die beiden obigen materiellen Konstanten beeinflußt wird, und zwar erfolgt die Änderung im richtigen Sinne, da die veränderliche Lichtgeschwindigkeit $\mathfrak{l}$ am kleinsten innerhalb der Elektronen wird, während sie um so mehr wächst, je weiter man sich von diesen entfernt.

Eine zweite Frage ist die nach dem Atombau. Nach unserer Theorie setzt sich die Materie restlos aus positiven und negativen Elektronen zusammen, die gleiches Volumen, gleiche Masse und absolut gerechnet gleiche Ladung haben. Es unterliegt nun aber wohl kaum mehr einem Zweifel, daß wir es in den Atomen mit einem positiv geladenen Kern und sehr wenigen freien negativen Elektronen zu tun haben (oder auch mit einem neutralen Kern). Nach unserer Theorie wäre dann der Kern aus einer größeren Menge, über tausend, Elektronen beider Arten mit einem geringen Überschuß der positiven zusammenzusetzen, die sehr eng aneinanderliegen und sich gegenseitig sehr fest binden. Das letztere erscheint trotz des Überschusses der positiven Ladung wohl möglich, da bei Einordnung der Elektronen mit abwechselndem Vorzeichen in ein Raumgitter die Anziehung der näheren die Abstoßung der ferneren überwiegt.

(Eingegangen 7. November 1916.)