

## 2. Zur Theorie der Gitter; von W. von Ignatowsky.

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — § 1. Allgemeine Bemerkungen. — § 2. Aufstellung der Grundbeziehungen. — § 3. Einige Hilfsbetrachtungen. — § 4. Berechnung der Amplituden. — § 5. Senkrechte Inzidenz. — § 6. Stabgitter. Angenäherte Berechnung. Arbeiten von A. Winkelmann und H. Weisel. — § 7. Durchsichtiges Stufenfilmgitter. Arbeit von H. Siedentopf. — § 8. Drahtgitter. Erste Annäherung. Arbeit von Cl. Schaefer und F. Reiche. — § 9. Berechnung der Integrale  $F$ . — § 10. Fortsetzung des § 8. — § 11. Drahtgitter. Exakte Lösung. — § 12. Berechnung der Koeffizienten  $D_i$  und  $D_i'$ . — § 13. Umformung der Resultate zwecks Ausrechnung. Absolute Leiter. Sehr große Wellenlänge. — § 14. Arbeit von Du Bois und H. Rubens.

### Verzeichnis der Bezeichnungen.

- $\mathfrak{E}$  = Vektor der elektrischen Kraft.  
 $\mathfrak{H}$  = Vektor der magnetischen Kraft.  
 $\sigma$  = Leitfähigkeit (Permeabilität überall = 1). Alle Größen im absoluten elektromagnetischen Maßsystem.  
 $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.  
 $\epsilon$  = Dielektrizitätskonstante.  
 $T$  = Periode.  
 $\omega = 2\pi/T$ .  
 $a$  = Gitterkonstante.  
 $\lambda = cT$  Wellenlänge im Vakuum.  
 $g = 2\pi/cT = \omega/c = 2\pi/\lambda$ .  
 $p = 2\pi/ag = \lambda/a$ .  
 $i, j, k$  = Einheitsvektoren in Richtung der  $X, Y$  und  $Z$ -Achsen.  
 $A$  = Amplitude der elektrischen Kraft der *einfallenden* Welle.  
 $H$  = Amplitude der magnetischen Kraft der *einfallenden* Welle.  
 $\nu$  = Brechungsexponent.  
 $\kappa$  = Extinktionskoeffizient. Beide Größen auf das Material des Gitters bezogen.  
 $g_i = g(\nu - i\kappa)$ .

### Einleitung.

In den ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit behandeln wir die Theorie der Gitter von einem ganz allgemeinen Standpunkte aus. Hierbei betrachten wir ein Gitter,

dessen Furchen resp. Stäbe unendlich lang sind und deren Anzahl unendlich groß ist. In diesem Fall läßt sich der Zustand außerhalb des Gitters durch eine Fouriersche Reihe darstellen. Andererseits habe ich in meinen früheren Arbeiten gezeigt, daß man die reflektierten Wellen als Integrale längs der Oberfläche (in unserem Falle diejenige des Gitters) darstellen kann. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke kann man die Koeffizienten der Fourierschen Reihe in Abhängigkeit von den Oberflächenwerten der elektrischen und magnetischen Kraft bestimmen. Bei der Integration längs der Oberfläche verfahren wir in der Weise, daß wir zuerst nach den Gitterstäben summieren. Diese Summation läßt sich ganz allgemein exakt ausführen. Es bleibt dann eine Integration nur längs einer Periode des Gitters übrig. Dies vereinfacht die Lösung sehr.

Diese allgemeinen Untersuchungen sind gültig für beliebiges Material des Gitters und beliebige Form der Furchen, resp. Stäbe, sowie für Reflexionsgitter als auch für durchsichtige Gitter. Es folgt nun ganz allgemein, daß die Lagen der Spektren sich exakt durch die bekannten Fraunhoferschen Beziehungen bestimmen.

Um möglichst zu verallgemeinern haben wir sofort schiefe Inzidenz der einfallenden Welle in bezug auf das Gitter angenommen, welcher Fall sich durch Einführung einer transformierten Zeit lösen läßt.

Die Koeffizienten der Fourierschen Reihe bestimmen die Amplituden der gebeugten, resp. reflektierten Wellen. Sind uns also die Oberflächenwerte der elektrischen und magnetischen Kraft bekannt, oder setzen wir hierfür irgendwelche angenäherte Werte, so können wir mit Hilfe der angegebenen Methode sofort die gebeugten Wellen bestimmen. In den folgenden Paragraphen sind hierzu einige Anwendungen gemacht worden. Hierbei beschränkte ich mich auf durchsichtige Gitter und nur vorübergehend, bei der Behandlung des Stufenfilmgitters, erwähnte ich die reflektierenden Glasgitter von J. Fröhlich. Deshalb bin ich auch nicht auf die Arbeiten von Lord Rayleigh und W. Voigt und die sich daran anschließenden eingegangen. Ich hoffe die Reflexionsgitter später behandeln zu können.

Die allgemeinen Untersuchungen basieren auf der Bestimmung eines gewissen Integrals ((37) § 3). Dieses selbst ermöglichte mir andererseits die Hankelschen Zylinderfunktionen nach dem Vielfachen des Arguments zu summieren, was wiederum zur exakten Lösung des Problems des Drahtgitters führte (§§ 11, 12). Einen Versuch in dieser Beziehung hat Hr. F. Závěška<sup>1)</sup> unternommen, indem er die Beugung an drei Drähten untersuchte. Hierzu möchte ich bemerken, daß die von ihm abgeleiteten Formeln bezüglich der Hankelschen Funktionen schon von mir früher angegeben worden sind (vgl. Anmerkung in § 12).

### § 1. Allgemeine Beziehungen.

Im folgenden nehmen wir als einfallende Welle eine ebene geradlinig polarisierte Welle an, die sich in Richtung der negativen  $X$ -Achse fortpflanzt. Ist die elektrische Kraft derselben parallel der  $Z$ -Achse, so haben wir

$$(1) \quad \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{f} A e^{i(\omega t + g x)}.$$

Ist die magnetische Kraft parallel der  $Z$ -Achse, so haben wir

$$(2) \quad \mathfrak{H}_0 = -\mathfrak{f} \frac{A g}{\omega} e^{i(\omega t + g x)} = \mathfrak{f} \cdot H e^{i(\omega t + g x)},$$

wobei die positive Richtung der elektrischen Kraft gleichgerichtet mit der  $Y$ -Achse, d. h. mit  $j$ , angenommen ist.

Diese einfallende Welle wird nun teilweise reflektiert, teilweise absorbiert von Körpern, die durch Zylinderflächen begrenzt sind, deren Erzeugende parallel der  $Z$ -Achse sein sollen. Es wird demnach

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0,$$

und alles symmetrisch in bezug auf die  $Y, X$ -Ebene sein. Wir brauchen also nur die Erscheinungen in dieser Ebene zu untersuchen.

Die Körper sollen aus beliebigem Material sein. Außerhalb der Körper ist Luft, resp. Vakuum.

1) F. Závěška, Ann. d. Phys. 40. p. 1023. 1913. Es handelt sich um die Formeln auf p. 1028—1029.

Es sei  $\mathfrak{E}_0 \parallel Z$ . Die reflektierte elektrische Kraft  $\mathfrak{E}_z$  genügt außerhalb der Körper der Gleichung

$$(4) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial y^2}.$$

Das allgemeinste Integral dieser Gleichung<sup>1)</sup> lautet

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= \frac{i \omega e^{i \omega t}}{2 \pi} \int_s Q_0(g r) \varphi ds \\ &+ \frac{i g e^{i \omega t}}{2 \pi} \int_s Z \mathfrak{R}_0 \Pi Q_1(g r) ds. \end{aligned} \right.$$

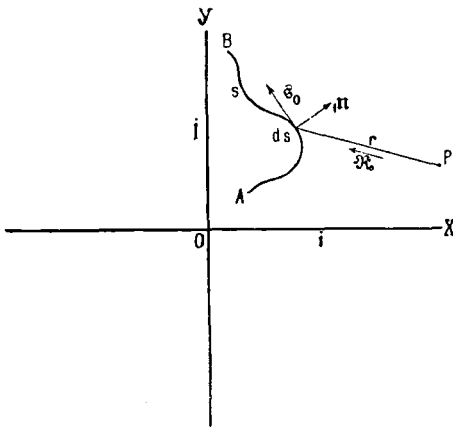


Fig. 1.

Hierbei bedeuten:  $s$  die von dem reflektierenden Körper in der  $Y, X$ -Ebene ausgeschnittenen Begrenzungskurven (Fig. 1),  $r$  die Entfernung vom Aufpunkt  $P$  bis zu einem Element  $ds$  von  $s$ ,  $\mathfrak{R}_0$  den Einheitsvektor längs  $r$  von  $P$  aus gerechnet und  $\Pi$  die zu den Körpern äußere Normale.  $Q_0$  und  $Q_1$  sind die weiter unten definierten Zylinderfunktionen des Argumentes  $gr$ .  $e^{i \omega t} \varphi$  ist die Komponente der gesamten magnetischen Kraft längs  $s$  und  $e^{i \omega t} Z$  die Komponente der gesamten elektrischen Kraft längs der  $Z$ -Achse, beide Größen an der Oberfläche der Körper verstanden. Die positive Richtung längs  $s$  ist in Fig. 1 durch den Einheitsvektor  $\mathfrak{s}_0$  angegeben.

Ist  $\mathfrak{S}_0 \parallel Z$ , so genügt die reflektierte magnetische Kraft  $\mathfrak{S}_z$  außerhalb der Körper derselben Gleichung (4), deren Integral in diesem Falle sein wird<sup>2)</sup>:

1) Vgl. W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 25. p. 116. 1908. Formel (31).

2) Vgl. W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 26. p. 1032. 1908. Formel (33).

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_z &= \frac{g e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \zeta [\mathfrak{H}_0 \mathfrak{E}_0] Q_1(g r) ds - \frac{\mathfrak{k} i g^2 e^{i\omega t}}{2\pi \omega} \int_s S Q_1'(g r) ds \\ &- \frac{\mathfrak{k} i g e^{i\omega t}}{2\pi \omega} \int_s \frac{S Q_1(g r) ds}{r}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist  $Q_1'$  die Derivierte von  $Q_1$  nach  $gr$ ,  $e^{i\omega t} \zeta$  die Komponente der *gesamten* magnetischen Kraft längs der  $Z$ -Achse und  $e^{i\omega t} S$  die Komponente der *gesamten* elektrischen Kraft längs  $s$  auch wieder an der Oberfläche der Körper.

Aus der Theorie der Zylinderfunktionen haben wir die Beziehung

$$(7) \quad \frac{d^2 Q_0(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d Q_0(x)}{dx} + Q_0(x) = 0$$

und

$$(8) \quad Q_1(x) = - \frac{d Q_0(x)}{dx}.$$

Außerdem folgt aus der Fig. 1

$$(9) \quad [\mathfrak{H}_0 \mathfrak{E}_0] = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{H}_0 n.$$

Deshalb erhalten wir statt (6)

$$(10) \quad \mathfrak{G}_z = - \frac{\mathfrak{k} i g^2 e^{i\omega t}}{2\pi \omega} \int_s S Q_0(g r) ds + \frac{\mathfrak{k} g e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \zeta \mathfrak{H}_0 n Q_1(g r) ds.$$

Bedeutet  $H_\mu^2(x)$  die Hankelsche Zylinderfunktion zweiter Gattung  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung, so ist

$$(11) \quad Q_\mu(x) = \frac{i\pi}{2} H_\mu^2(x),$$

und demnach<sup>1)</sup>

$$(12) \quad Q_\mu(x) = \frac{i\pi}{2} J_\mu(x) + \frac{\pi}{2} Y_\mu(x),$$

wo  $J_\mu(x)$  die Zylinderfunktion erster Art und  $Y_\mu(x)$  die Neumannsche Zylinderfunktion, beide von der  $\mu^{\text{ten}}$  Ordnung, bedeuten.

Es ist

$$(13) \quad J_\mu(x) = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s! (\mu + s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu + 2s},$$

1) Vgl. N. Nielsen, Theorie der Zylinderfunktionen. p. 16. Leipzig, Teubner 1904.

und

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} Y_\mu(x) &= \frac{2}{\pi} \left\{ J_\mu(x) \lg \frac{x\gamma}{2} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots \frac{1}{\mu} \right) J_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu!}{2} \sum_{s=0}^{\mu-1} \frac{1}{\mu-s} \left( \frac{2}{x} \right)^{\mu-s} \frac{J_0(x)}{s!} - \sum_{0=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu+2s}{s(\mu+s)} J_{\mu+2s}(x) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist

$$(15) \quad \lg \gamma = C = 0,5772 \quad \text{Eulersche Konstante.}$$

Für den speziellen Fall  $\mu = 0$  folgt aus (14)

$$(16) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ J_0(x) \lg \frac{x\gamma}{2} - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} J_{2s}(x) \right\}.$$

## § 2. Aufstellung der Grundbeziehungen.

Die Gitter, die wir im folgenden betrachten werden, sollen folgende Eigenschaften haben. Die Furchen oder Drähte, falls wir ein Drahtgitter haben, sollen parallel der  $Z$ -Achse und

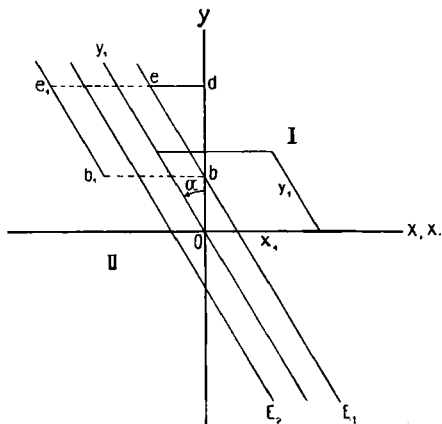


Fig. 2.

beiderseits unendlich lang sein. Längs der  $Y, X$ -Ebene soll das Gitter unendlich breit sein, d. h. die Anzahl der Furchen resp. der Drähte wird unendlich groß sein. Wegen der Periodizität des Gitters muß es demnach eine zur  $Y, X$ -Ebene senkrechte Ebene  $E_1$  (Fig. 2) geben, die innerhalb einer Periode das Gitter wenigstens einmal tangiert längs einer zur  $Z$ -Achse parallelen Linie. Eine beliebige zu  $E_1$  parallele Ebene, die

durch das Material des Gitters geht, wollen wir Gitterebene nennen und die Ebene  $E_1$  selbst — Grenzebene. Ist das Gitter ein durchlässiges, so werden wir noch eine zweite Grenzebene  $E_2$  haben. Für das Nächstfolgende ist es belanglos, aus welchem Material das Gitter besteht, welche Form die Furchen resp. Drähte haben, und ob es ein Reflexionsgitter oder ein durchlässiges Gitter ist.

Wir behandeln sofort den allgemeineren Fall, daß die Gitterebene unter einem Winkel  $\alpha$  zur  $Y, Z$ -Ebene geneigt ist, weshalb auch, wegen (1) § 1, die einfallende Welle unter demselben Winkel  $\alpha$  zur Gitternormale auf das Gitter auffallen wird. Der Fall senkrechter Inzidenz ergibt sich dann als Spezialfall.

Der Raum außerhalb der beiden Grenzebenen  $E_1$  und  $E_2$  zerfällt in zwei Teile *I* und *II*. Innerhalb dieser Teile muß die Gleichung (4) § 1 erfüllt sein. In einem bestimmten Moment  $t_1$  habe die einfallende Welle in der  $Y, X$ -Ebene eine bestimmte Phase, welche demnach auch in  $b$ , dem Schnittpunkt der  $Y, Z$ -Ebene und der Grenzebene  $E_1$ , herrschen wird. In diesem Moment  $t_1$  wird in einem Punkt, mit demselben  $y$  wie  $b$ , z. B.  $b_1$ , ein bestimmter Zustand hervorgerufen.

Es sei nun  $eb = a =$  Gitterkonstante. Nach einer Zeit  $ed/c$ , also im Moment

$$t_2 = t_1 + \frac{ed}{c} = t_1 + \frac{bd \operatorname{tg} \alpha}{c},$$

wird die einfallende Welle die Grenzebene  $E_1$  im Punkte  $e$  mit derselben Phase schneiden. Da nun das Gitter periodisch längs der Gitterebene  $Y_1 Z$  ist, mit der Periode  $a$ , so müssen wir annehmen, daß in einem Punkt  $e_1$ , welcher um  $a$  von  $b_1$  längs einer zu  $Y_1$  parallelen Geraden entfernt ist, im Moment  $t_2$  derselbe Zustand herrschen wird wie im Punkt  $b_1$  zur Zeit  $t_1$ .

Nun ist  $bd = y - ob$ . Demnach

$$t_2 = t_1 + \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{c} - \frac{ob \operatorname{tg} \alpha}{c}.$$

Das letzte Glied ist eine Konstante und hängt von der Lage des Anfangspunktes unseres Koordinatensystems ab.

Wir führen nun die Zeit

$$(1) \quad t' = t - \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{c}$$

und schiefwinklige Koordinaten  $y_1$  und  $x_1$  ein (Fig. 3), und transformieren die Gleichung (4) § 1 in bezug auf die neuen Größen. Die so transformierte Gleichung lautet dann:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t'^2} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial y_1^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x_1 \partial y_1} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \\ &- 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial y_1 \partial t'} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{c \cdot \cos \alpha} - 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x_1 \partial t'} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{c}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist:

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 = \frac{y}{\cos \alpha} \\ x_1 = x + y \operatorname{tg} \alpha = x + y_1 \sin \alpha. \end{cases}$$

Die Lösung der Differentialgleichung (2), die allen Grenzbedingungen genügt, muß innerhalb der Räume  $I$  und  $II$  periodisch sein in bezug auf  $y_1$  mit der Periode  $a$  bei konstantem  $t'$ .

Wir wollen vorläufig die Vorgänge im Raume  $I$  betrachten.

Auf Grund des eben Gesagten haben wir folgende partikuläre Lösungen von (2)

$$(4) \quad e^{i \omega t'} \cdot e^{i \left( -m x_1 + \frac{2 \pi n}{a} y_1 \right)},$$

und

$$(5) \quad e^{i \omega t'} \cdot e^{i \left( -m' x_1 - \frac{2 \pi n}{a} y_1 \right)},$$

wo  $n$  eine ganze positive Zahl inkl. der Null ist.

Aus (4) und (2) folgt

$$(6) \quad \begin{cases} -\frac{\omega^2}{c^2} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = -\frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( m^2 + \frac{4 \pi^2 n^2}{a^2} \right) \\ \quad + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \frac{2 \pi n}{a} \left( m + \frac{\omega}{c} \right) - \frac{2 m \omega}{c} \operatorname{tg}^2 \alpha, \end{cases}$$

und aus (5) und (2)

$$(7) \quad \begin{cases} -\frac{\omega^2}{c^2} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = -\frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( m'^2 + \frac{4 \pi^2 n^2}{a^2} \right) \\ \quad - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{2 \pi n}{a} \left( m' + \frac{\omega}{c} \right) - \frac{2 m \omega}{c} \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich für ein bestimmtes  $n$ :

$$(8) \quad \begin{cases} -m_n = \frac{2 \pi}{\lambda} \sin \alpha \left( \sin \alpha - \frac{n \lambda}{a} \right) \\ \quad - \frac{2 \pi}{\lambda} \cos \alpha \sqrt{1 - \left( \sin \alpha - \frac{n \lambda}{a} \right)^2} \end{cases}$$



und

$$(9) \quad \begin{cases} -m_n' = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \left( \sin \alpha + \frac{n\lambda}{a} \right) \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha \sqrt{1 - \left( \sin \alpha + \frac{n\lambda}{a} \right)^2}. \end{cases}$$

Oder, falls wir die Beziehungen

$$(10) \quad \begin{cases} \sin \alpha + \frac{n\lambda}{a} = \sin \alpha + n p = \beta_n, \\ \sin \alpha - n p = \gamma_n \end{cases}$$

einführen,

$$(11) \quad -m_n = g \gamma_n \sin \alpha - g \cos \alpha \sqrt{1 - \gamma_n^2},$$

$$(12) \quad -m_n' = g \beta_n \sin \alpha - g \cos \alpha \sqrt{1 - \beta_n^2}.$$

Wir werden später beweisen, daß die entsprechenden Ausdrücke (8) und (9) mit + vor der Quadratwurzel nicht vorkommen können.

Deshalb ist der allgemeine Ausdruck für die reflektierte, resp. gebeugte Welle im Raume I, d. h. vor dem Gitter

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_z = \mathfrak{k} e^{i\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (N_n e^{-im_n x_1} + N_n' e^{-im_n' x_1}) \cos \frac{2\pi n y_1}{a} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n e^{-im_n x_1} + D_n' e^{-im_n' x_1}) \sin \frac{2\pi n y_1}{a} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo  $N_n$  und  $D_n$  Konstante sind, die von den Grenzbedingungen abhängen.

Ebenfalls werden wir später beweisen, daß, angefangen von einem bestimmten  $n$ , bei welchem die Wurzeln in (8) und (9) imaginär werden, wir in (13) zu setzen haben:

$$(14) \quad \begin{aligned} &\text{statt } -im_n \\ &-im_n = ig \gamma_n \sin \alpha - g \cos \alpha \sqrt{\gamma_n^2 - 1}, \end{aligned}$$

und statt  $-im_n'$ :

$$(15) \quad -im_n' = ig \beta_n \sin \alpha - g \cos \alpha \sqrt{\beta_n^2 - 1}.$$

Für den Raum II, d. h. hinter dem Gitter, wollen wir  $x_1$  positiv nach links rechnen und durch  $x_0$  bezeichnen. Dann folgt aus der entsprechend geänderten Differentialgleichung (2) statt (8) und (9)

$$(16) \quad -u_n = -g \gamma_n \sin \alpha - g \cos \alpha \sqrt{1 - \gamma_n^2},$$

$$(17) \quad -u'_n = -g\beta_n \sin \alpha - g \cos \alpha \sqrt{1 - \beta_n^2},$$

und der *allgemeine* Ausdruck für die *gebogene* Welle hinter dem Gitter ist:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z' &= \mathfrak{k} e^{i\omega t'} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (V_n e^{-iu_n x_0} + V_n' e^{-iu_n' x_0}) \cos \frac{2\pi n y_1}{a} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (W_n e^{-iu_n x_0} + W_n' e^{-iu_n' x_0}) \sin \frac{2\pi n y_1}{a} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ganz analog haben wir auch, angefangen von einem bestimmten  $n$ , zu setzen:

statt  $-iu_n$

$$(19) \quad -iu_n = -ig\gamma_n \sin \alpha - g \cos \alpha \sqrt{\gamma_n^2 - 1},$$

und statt  $-iu_n'$

$$(20) \quad -iu_n' = -ig\beta_n \sin \alpha - g \cos \alpha \sqrt{\beta_n^2 - 1}.$$

Die Glieder in (13) resp. (18), für welche (14), (15) resp. (19), (20) in Betracht kommen, werden in einiger Entfernung vom Gitter für die Beobachtung unmerklich. Das Hauptinteresse für uns liegt in den Gliedern, für welche die Wurzeln in (8) und (9) resp. (16) und (17) reell sind. In diesem Falle sind  $\gamma_n < 1$  und  $\beta_n < 1$ , und wir können setzen

$$(21) \quad \begin{cases} \gamma_n = \sin \vartheta_n, \\ \beta_n = \sin \vartheta_n'. \end{cases}$$

Wir werden später zeigen, daß

$$(22) \quad \begin{cases} D_n = iN_n, \\ D_n' = -iN_n' \end{cases}$$

und

$$(23) \quad \begin{cases} W_n = iV_n, \\ W_n' = -iV_n' \end{cases}$$

sein muß. Deshalb können wir statt (13) schreiben:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= \mathfrak{k} e^{i\omega t'} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} N_n e^{-im_n x_1 + i \frac{2\pi n}{a} y_1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} N_n' e^{-im_n' x_1 - i \frac{2\pi n y_1}{a}} \right\}, \end{aligned} \right.$$

und statt (18)

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \mathbb{E}'_z = \mathfrak{k} e^{i\omega t'} & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} V_n e^{-iu_n x_0 + i \frac{2\pi n}{a} y_1} \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} V'_n e^{-iu'_n x_0 - i \frac{2\pi n}{a} y_1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Aus (21) folgt weiter:

$$(26) \left\{ \begin{aligned} -m_n &= g \sin \alpha \sin \vartheta_n - g \cos \alpha \cos \vartheta_n = -g \cos(\alpha + \vartheta_n) \\ -m'_n &= -g \cos(\alpha + \vartheta'_n), \end{aligned} \right.$$

$$(27) \quad u_n = g \cos(\alpha - \vartheta_n); \quad u'_n = g \cos(\alpha - \vartheta'_n),$$

$$(28) \left\{ \begin{aligned} \omega t' - m_n x_1 + \frac{2\pi n}{a} y_1 &= \omega t' - m_n x_1 + g \frac{n\lambda}{a} y_1 \\ &= \omega t' - m_n x_1 + g y_1 \sin \alpha - g y_1 \sin \vartheta_n \\ &= \omega t - g \{x \cos(\alpha + \vartheta_n) + y \sin(\alpha + \vartheta_n)\}, \\ \omega t' - m'_n x_1 - \frac{2\pi n}{a} y_1 & \\ &= \omega t - g \{x \cos(\alpha + \vartheta'_n) + y \sin(\alpha + \vartheta'_n)\} \end{aligned} \right.$$

und

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \omega t' - u_n x_0 + \frac{2\pi n}{a} y_1 & \\ &= \omega t - g \{x' \cos(\alpha - \vartheta_n) - y \sin(\alpha - \vartheta_n)\}, \\ \omega t' - u'_n x_0 - \frac{2\pi n}{a} y_1 & \\ &= \omega t - g \{x' \cos(\vartheta'_n - \alpha) + y \sin(\vartheta'_n - \alpha)\}. \end{aligned} \right.$$

Wir denken uns (Fig. 3) die beiden Grenzebenen  $E_1$  und  $E_2$  der Fig. 2 in der  $Y_1, Z$ -Ebene vereinigt.  $b_1' 0 b$  ist die Gitternormale.

Aus (24) bis (29) ersehen wir, daß  $N_n, N'_n$  resp.  $V_n, V'_n$  die Amplituden der elektrischen Kraft der gebeugten, resp. reflektierten ebenen Wellen sind, welche sich unter dem Winkel  $\alpha + \vartheta_n$  resp.  $\alpha + \vartheta'_n$  zur  $X$ -Achse und unter dem Winkel  $\alpha - \vartheta_n$  resp.  $\vartheta'_n - \alpha$  zur  $X'$ -Achse vom Gitter fortpflanzen.

Weiter ist

$$(30) \quad \vartheta_0 = \vartheta'_0 = \alpha.$$

Daraus folgt, daß die direkt reflektierte Welle in der Richtung  $0e$ , wobei  $\angle e 0 x = 2\alpha$  ist, sich fortpflanzen wird, und daß, wegen (29), eine gebeugte Welle sich hinter dem

Gitter in gleicher Richtung mit der einfallenden Welle fort-pflanzen wird.

Die genauere Betrachtung der letzten Formeln ergibt (vgl. Fig. 3)

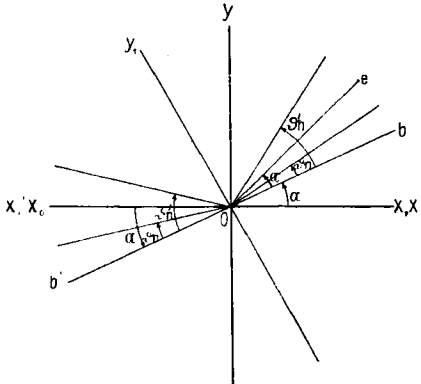


Fig. 3.

In beiden Fällen ist

$$(31) \quad \begin{cases} \alpha \cong \vartheta_n \cong -\alpha - 90^\circ, \\ \alpha \cong \vartheta'_n \cong 90^\circ. \end{cases}$$

Der Winkel  $\alpha$  ist positiv zu rechnen immer im entgegengesetzten Sinne der Drehung des Uhrzeigers.

Nun sind (21) nichts anderes als die bekannten Fraunhoferschen Beziehungen. Wir sehen, daß diese gültig bleiben *unabhängig vom Material des Gitters und der Form der Furchen*, vorausgesetzt, daß das Gitter unendlich breit und unendlich lang ist.

Ist die magnetische Kraft parallel der Z-Achse, so tritt im Vorhergehenden einfach an Stelle von  $\mathfrak{E}_z$  die Größe  $\mathfrak{H}_z$ .

Wir wollen nun die Amplituden  $N$  und  $V$  näher untersuchen, müssen aber zuvor eine Hilfsbetrachtung einschalten, was wir im nächsten Paragraph machen wollen.

### § 3. Einige Hilfsbetrachtungen.

Längs einer Geraden, parallel der Y-Achse, liegen unendlich viel Punkte in gleichem Abstände  $a$  voneinander. Die Numerierung der Punkte geht von 0 bis  $+\infty$  und bis  $-\infty$



Wir wenden uns zuerst zum Ausdruck (1) und denken uns in der Verlängerung von  $A_0 A_1$  einen Punkt  $A_2$ , wobei  $A_1 A_2 = A_0 A_1 = a$  sein soll. Da nun das Dreieck  $A_2 O A_1$  gleich dem Dreieck  $A_1 - 1 A_0$  sein wird, so erhalten wir

$$(6) \int_0^a f_1(r_{-1}) e^{iva} e^{ivy} \cos my \, dy = e^{iva} \int_0^a f_1(r_0) e^{ivy_1} \cos my_1 \, dy_1.$$

Da für Punkte mit negativem Index auch  $s$  negativ ist. Im Integral (6) ist  $y_1$  vom Punkte  $A_1$  zu rechnen. Wollen wir aber von  $A_0$  aus rechnen, so müssen wir  $y_1 = y - 1$  setzen und erhalten dann statt (6) infolge (5)

$$(7) \int_0^a f_1(r_{-1}) e^{iva} e^{ivy} \cos my \, dy = \int_a^{2a} f_1(r_0) e^{ivy} \cos my \, dy.$$

Deshalb ist

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^a f_1(r_0) e^{ivy} \cos my \, dy + \int_0^a f_1(r_{-1}) e^{iva} e^{ivy} \cos my \, dy \\ = \int_0^{2a} f_1(r_0) e^{ivy} \cos my \, dy, \end{array} \right.$$

und durch analoge Überlegungen erhalten wir

$$(9) \int_0^a \left( \sum_0^{+\infty} f_1(r_s) e^{-iva_s} \right) e^{ivy} \cos my \, dy = \int_0^{\infty} f_1(r_0) e^{ivy} \cos my \, dy.$$

Bezeichnen wir weiter durch  $y_2$  die Entfernung von  $A_0$  positiv nach unten gerechnet, und ist  $A_0 A_{-1} = a$ , so folgt ( $y = a - y_2$ )

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^a f_1(r_1) e^{-iva} e^{ivy} \cos my \, dy = - \int_a^0 f_1(r_0) e^{-ivy_2} \cos my_2 \, dy_2 \\ = \int_0^a f_1(r_0) e^{-ivy_2} \cos my_2 \, dy_2. \end{array} \right.$$

Und analog (9)

$$(11) \int_0^a \left( \sum_1^{\infty} f_1(r_s) e^{-iva_s} \right) e^{ivy} \cos my \, dy = \int_0^{\infty} f_1(r_0) e^{-ivy_2} \cos my_2 \, dy_2.$$

Und demnach

$$(12) \quad B_1 = \int_0^{\infty} f_1(r_0) e^{iv y} \cos m y \, dy + \int_0^{\infty} f_1(r_0) e^{-iv y_2} \cos m y_2 \, dy_2.$$

Wir wollen nun in beiden Integralen (12) vom Punkte  $P_1$  rechnen, wobei  $P_1$  gegenüber 0 liegen soll, so daß  $P_1 A_0 = b$  ist. Beide  $y$  bezeichnen wir durch  $y_0$ . Es ist dann für gleiche  $y_0$  auch  $f_1(r_0)$  dasselbe in beiden Integralen.

Es ist deshalb zu setzen  $y = y_0 + b$  und  $y_2 = y_0 - b$  und wir haben statt (12)

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} B_1 &= \int_0^{\infty} f_1(r_0) e^{iv(y_0 + b)} \cos m(y_0 + b) \, dy_0 \\ &\quad + \int_{-b}^0 f_1(r_0) e^{iv(y_0 + b)} \cos m(y_0 + b) \, dy_0 \\ &\quad + \int_0^{\infty} f_1(r_0) e^{-iv(y_0 - b)} \cos m(y_0 - b) \, dy_0 \\ &\quad - \int_0^b f_1(r_0) e^{-iv(y_0 - b)} \cos m(y_0 - b) \, dy_0. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir in den beiden letzten Integralen  $-y_0$  statt  $y_0$ , so heben sich das zweite und vierte Integral auf, und die Summe des ersten und dritten ist

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(r_0) e^{iv(y_0 + b)} \cos m(y_0 + b) \, dy_0 \\ &= e^{ib(m+v)} \int_0^{\infty} f_1(r_0) \cos y_0 (m+v) \, dy_0 \\ &\quad + e^{-ib(m-v)} \int_0^{\infty} f_1(r_0) \cos y_0 (m-v) \, dy_0. \end{aligned} \right.$$

Da

$$(15) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(r_0) \sin y_0 (m \pm v) \, dy_0 = 0$$

ist. Deshalb folgt endgültig

$$(16) \left\{ \begin{aligned} B_1 &= e^{ib(m+v)} \int_0^\infty f_1(r_0) \cos y_0 (m+v) dy_0 \\ &\quad + e^{-ib(m-v)} \int_0^\infty f_1(r_0) \cos y_0 (m-v) dy_0. \end{aligned} \right.$$

Auf ganz analoge Weise erhalten wir

$$(17) \left\{ \begin{aligned} B_2 &= -i e^{ib(m+v)} \int_0^\infty f_2(r_0) \cos y_0 (m+v) dy_0 \\ &\quad + i e^{-ib(m-v)} \int_0^\infty f_2(r_0) \cos y_0 (m-v) dy_0. \end{aligned} \right.$$

Weiter haben wir

$$(18) \quad c_s = sa + b - y,$$

wobei, wie gesagt, für Punkte mit negativem Index auch  $s$  negativ ist. (18), in (3) eingesetzt, ergibt wegen (16)

$$(19) \left\{ \begin{aligned} B_3 &= \int_0^a \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} sa f_3(r_s) e^{-iva_s} \right) e^{ivy} \cos my dy + b B_1 \\ &\quad - \int_0^a \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} f_3(r_s) e^{-iva_s} \right) e^{ivy} \cos my dy, \end{aligned} \right.$$

wo man sich in  $B_1$  statt  $f_1(r_0)$ ,  $f_3(r_0)$  eingesetzt denken muß. Die Summe der beiden Integrale in (19) ist aber nichts anderes als

$$(20) \quad - \frac{1}{i} \frac{\partial k}{\partial v},$$

wo

$$(21) \quad k = B_1 = \int_0^a \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} f_3(r_s) e^{-iva_s} \right) e^{ivy} \cos my dy$$

bedeutet.

Deshalb erhalten wir

$$(22) \left\{ \begin{aligned} B_3 &= -i e^{ib(m+v)} \int_0^\infty f_3(r_0) y_0 \sin y_0 (m+v) dy_0 \\ &\quad + i e^{-ib(m-v)} \int_0^\infty f_3(r_0) y_0 \sin y_0 (m-v) dy_0. \end{aligned} \right.$$



Ans (18), (4) und (17) folgt weiter

$$(23) \left\{ \begin{aligned} B_4 &= \int_0^a \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} s a f_4(r_s) e^{-i v a s} \right) e^{i v y} \sin m y \, d y + b B_2 \\ &- \int_0^a \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} f_4(r_s) e^{-i v a s} \right) e^{i v y} \sin m y \, d y \\ &= b B_2 + i \frac{\partial B_2}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Und demnach

$$(24) \left\{ \begin{aligned} B_4 &= - e^{i b(m+v)} \int_0^\infty f_4(r_0) y_0 \sin y_0 (m+v) \, d y_0 \\ &- e^{-i b(m-v)} \int_0^\infty f_4(r_0) y_0 \sin y_0 (m-v) \, d y_0. \end{aligned} \right.$$

Ist von vornherein  $v = 0$ , so wird der Übergang von  $B_1$  zu  $B_3$  und von  $B_2$  zu  $B_4$  mittels Differentiation nach  $v$  hin-fällig, man kann aber für diesen Fall direkt nachweisen, daß hierbei die Ausdrücke (22) und (24) ihre Gültigkeit behalten.

Wir setzen nun

$$(25) \quad f_1(r_0) = f_2(r_0) = Q_0(g r)$$

und

$$(26) \quad f_3(r_0) = f_4(r_0) = \frac{Q_1(g r)}{r}.$$

Wir schreiben nun wieder  $y$  statt  $y_0$  und es ist in (16), (17), (22) und (24) die Inte-gration längs der  $Y$ -Achse (Fig. 5) von  $y = 0$  bis  $y = \infty$  zu führen, wobei

$$(27) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist. Weiter haben wir

$$(28) \quad Q_1(g r) = - \frac{d Q_0(g r)}{g \, d r},$$

und, wegen (27),

$$(29) \quad \frac{d Q_0(g r)}{d y} = \frac{y}{r} \frac{d Q_0(g r)}{d r} = - \frac{y g}{r} Q_1(g r),$$

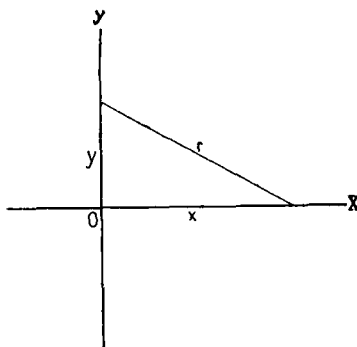


Fig. 5.

und mittels partieller Integration folgt:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{Q_0(g r) y \sin z y}{r} d y &= -\frac{1}{g} \int_0^{\infty} \frac{d Q_0(g r)}{d y} \sin z y d y \\ &= \frac{z}{g} \int_0^{\infty} Q_0(g r) \cos z y d y. \end{aligned} \right.$$

Infolgedessen erhalten wir bei unseren Annahmen (25) und (26)

$$(31) \quad B_1 = e^{i b(m+v)} M_1 + e^{-i b(m-v)} M_2,$$

$$(32) \quad B_2 = -i e^{i b(m+v)} M_1 + i e^{-i b(m-v)} M_2,$$

$$(33) \left\{ \begin{aligned} B_3 &= -\frac{i(m+v)}{g} e^{i b(m+v)} M_1 + \frac{i(m-v)}{g} e^{-i b(m-v)} M_2 \\ &= -\frac{1}{g} \frac{\partial B_1}{\partial b}, \end{aligned} \right.$$

$$(34) \left\{ \begin{aligned} B_4 &= -\frac{(m+v)}{g} e^{i b(m+v)} M_1 - \frac{(m-v)}{g} e^{-i b(m-v)} M_2 \\ &= -\frac{1}{g} \frac{\partial B_2}{\partial b}, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$(35) \quad M_1 = \int_0^{\infty} Q_0(g r) \cos y(m+v) d y$$

und

$$(36) \quad M_2 = \int_0^{\infty} Q_0(g r) \cos y(m-v) d y$$

bedeuten. Diese beiden Integrale können wir in eines zusammenfassen, und zwar

$$(37) \quad M = \int_0^{\infty} Q_0(g r) \cos z y d y,$$

dessen Wert wir nun bestimmen müssen.

Zu dem Zweck denken wir uns in Fig. 1 § 1 den Raum durch die  $Y, Z$ -Ebene in zwei Teile geteilt. Rechts von dieser Ebene (Raum I) ist Vakuum und links (Raum II) z. B. Glas. Von links aus, also innerhalb des Glases, falle eine ebene Welle mit der elektrischen Kraft parallel der  $Z$ -Achse unter einem bestimmten Winkel zur obigen Ebene. In diesem Falle

können wir auf elementarem Wege die Lösung, unter Erfüllung aller Grenzbedingungen, bestimmen. Es werden uns also die elektrische Kraft  $\mathcal{E}_z$  im Raume  $I$  und  $\varphi$  und  $Z$  bekannt sein. Durch Vergleich dieser bekannten Lösung mit (5) § 1 können wir  $M$  bestimmen. Ist keine Totalreflexion vorhanden, so haben wir den Fall, daß  $g > z$  ist, während bei Totalreflexion wir den Wert von  $M$  für  $g < z$  bestimmen können.

Wir erhalten<sup>1)</sup>

$$(38) \quad M = \frac{i \pi e^{-ix} \sqrt{g^2 - z^2}}{2 \sqrt{g^2 - z^2}} \quad g > z$$

und

$$(39) \quad M = - \frac{\pi e^{-x} \sqrt{z^2 - g^2}}{2 \sqrt{x^2 - g^2}} \quad g < z.$$

#### § 4. Berechnung der Amplituden.

Nun können wir zur Untersuchung der Amplituden  $N$  und  $V$  des § 2 übergehen.

Wir führen jetzt die Größe ein

$$(1) \quad S_1 = - \frac{g^2}{\omega^2} S.$$

Es werden dann die Ausdrücke (5) und (10) § 1 der Form nach identisch, nur daß in (10) statt  $\varphi$  und  $Z$  die Größen  $S_1$  und  $\zeta$  eingesetzt werden müssen. Wir brauchen also jetzt nur den Fall, daß die elektrische Kraft parallel der  $Z$ -Achse ist, zu untersuchen.

Es sei  $d\mathfrak{s}$  ein gerichtetes Linienelement der Begrenzungskurve des Gitters, und der Einheitsvektor längs  $d\mathfrak{s}$  sei  $\mathfrak{s}_0$ . Dann ist

$$(2) \quad d\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 ds,$$

und

$$(3) \quad \mathfrak{n} = [\mathfrak{s}_0 \mathfrak{f}].$$

Weiter ist

$$(4) \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{j y_2}{r} - \frac{i x_2}{r},$$

1) Wir haben hier die Ableitung von  $M$  nur skizziert. Genaueres vgl. W. v. Ignatowsky, Archiv der Mathematik und Physik 23. 1914.

und deshalb

$$(5) \quad \Re_0 n = -\frac{i \xi_0 y_2}{r} - \frac{j \xi_0 x_2}{r}.$$

In Fig. 6 ist  $P$  der Aufpunkt, für welchen wir  $\mathfrak{E}_z$  bestimmen wollen, und ist derselbe *vor* dem Gitter liegend angenommen. Wegen (5) können wir statt (5) § 1 schreiben:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= \frac{i \omega e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s Q_0(g r) \varphi ds - \frac{i g e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \frac{Z Q_1(g r) i \xi_0 y_2}{r} ds \\ &\quad - \frac{i g e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \frac{Z Q_1(g r) j \xi_0 x_2}{r} ds. \end{aligned} \right.$$

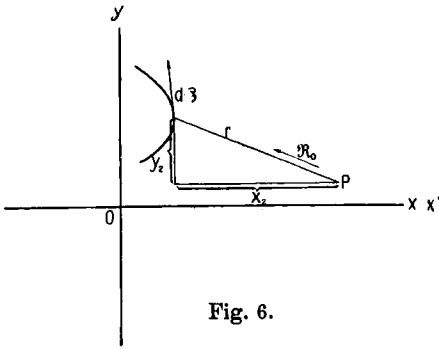


Fig. 6.

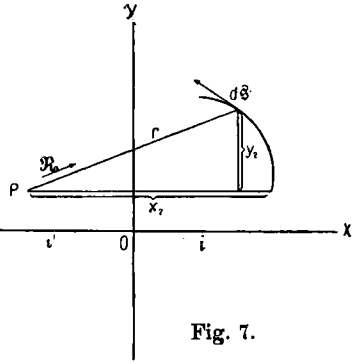


Fig. 7.

Wir nehmen vorläufig an, daß die Gitterebene mit der  $Y, Z$ -Ebene zusammenfällt. Liegt nun der Aufpunkt *hinter* dem Gitter (Fig. 7), so nehmen wir  $x$  positiv nach links. Dann haben wir ein System  $i', j, k$ , wobei  $i' = -i$  ist. Statt (4) müssen wir dann schreiben

$$(7) \quad \Re_0 = \frac{i y_2}{r} - \frac{i' x_2}{r} = \frac{j y_2}{r} + \frac{i x_2}{r},$$

und

$$(8) \quad \Re_0 n = -\frac{i \xi_0 y_2}{r} + \frac{j \xi_0 x_2}{r}.$$

In beiden Fällen ist  $x_2$  positiv. Liegt demnach der Aufpunkt hinter dem Gitter, so müssen wir statt (6) schreiben

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}'_z &= \frac{i \omega e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s Q_0(g r) \varphi ds - \frac{i g e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \frac{Z Q_1(g r) i \xi_0 y_2}{r} ds \\ &\quad + \frac{i g e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \frac{Z Q_1(g r) j \xi_0 x_2}{r} ds. \end{aligned} \right.$$

Aus der Ableitung von (5) § 1 ist ersichtlich, daß es vollkommen gleichgültig sein wird, längs welcher Kurve  $s$  wir die Integration ausführen. Es ist nur notwendig, daß die Kurve das Gitter umschließt. Wir können deshalb in (6) die Integration längs einer beliebigen Kurve  $AB$  (Fig. 8) ausführen, um  $\mathfrak{E}_z$  für den Punkt  $P$  zu bestimmen. Hierbei kann  $AB$  nach Belieben teilweise oder ganz mit der Oberfläche des Gitters zusammenfallen. Besteht das Gitter aus einzelnen Stäben, so können wir die Integration in (6) längs einzelnen Kurven  $D$  zerteilen (Fig. 8), die teilweise oder ganz mit der Oberfläche des Gitters zusammenfallen können. Dies letztere gilt auch für (8). Integrieren wir aber hier längs einer Kurve  $A_1 B_1$  (Fig. 8), so schließen wir dabei die Lichtquelle aus, da hierbei  $A_1 B_1$  zwischen Lichtquelle und Aufpunkt liegt, und es muß dann auf der linken Seite von (8)  $\mathfrak{E}'_z + \mathfrak{E}_0$  statt  $\mathfrak{E}_z$  gesetzt werden. Hieraus ergibt sich folgendes.

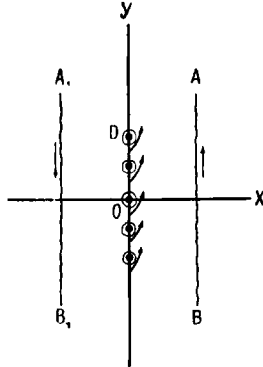


Fig. 8.

Die Integration in (8) längs den Kurven  $D$  ergibt uns den Wert  $\mathfrak{E}'_z$ . Wir denken uns jetzt die Querdimensionen der Stäbe kontinuierlich wachsen, bis der Abstand zwischen ihnen gleich Null geworden ist. Dann fallen gewisse Teile der Kurven  $D$  zusammen, die demnach bei der Integration verschwinden und es bleiben nur zwei Integrationen übrig: eine längs einer Kurve (ähnlich  $A_1 B_1$ ) hinter dem Gitter, und eine  $\mathfrak{S}$  längs einer Kurve (ähnlich  $AB$ ) vor dem Gitter. Die erste ist aber nach dem Vorhergehenden nichts anderes als  $\mathfrak{E}'_z + \mathfrak{E}_0$ .

Deshalb folgt aus (8)

$$(9) \quad \mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}'_z + \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{S},$$

das heißt

$$(10) \quad - \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{S}.$$

Da in diesem Fall ( $x$  positiv nach links und gleich  $-x'$ )

$$(11) \quad \mathfrak{E}_0 = \int A e^{i(\omega t - g x)}$$

ist, so folgt aus (10) und (8)

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} -A e^{-i g x'} &= \frac{i \omega}{2 \pi} \int_s Q_0(g r) \varphi ds - \frac{g}{2 \pi} \int_s Z Q_1(g r) \frac{i \delta_0}{r} y_2 ds \\ &+ \frac{g}{2 \pi} \int_s Z Q_1(g r) \frac{i \delta_0}{r} x_2 ds. \end{aligned} \right.$$

Wo also jetzt  $s$  eine Kurve bedeutet, die (ähnlich  $AB$ , Fig. 8) vor dem Gitter liegt und ganz oder teilweise mit demselben zusammenfallen kann. Der Aufpunkt  $P$  liegt hinter dem Gitter. Diese Überlegung ist für ein beliebiges Gitter anwendbar, also auch für ein Drahtgitter, denn wir brauchen uns nur vorzustellen, daß nicht die Stäbe, sondern die Kurven  $D$  (Fig. 8) sich verbreitern, bis gewisse Teile zusammenfallen. Es folgt dann dasselbe Resultat wie oben. Da die Integration längs der Kurven  $D$  in der Richtung der Pfeile (Fig. 8) zu führen ist, so ist längs  $AB$  von  $B$  zu  $A$  und längs  $A_1 B_1$  von  $A_1$  nach  $B_1$  zu integrieren.

Wir gehen nun zum Fall der schiefen Inzidenz (Fig. 9) über. Die  $Y_1, Z$ -Ebene sei die Gitterebene. Der Allgemeinheit wegen haben wir außerdem ein Drahtgitter angenommen. Durch den Aufpunkt  $P$  ziehen wir eine zur  $Y_1$ -Achse parallele Linie bis  $P_3$  und von da eine senkrechte auf die  $Y_1$ -Achse in  $O_3$ . Dieser Punkt sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems  $(x_3, y_3)$ .

Wir denken uns nun das bis jetzt in diesem Paragraph benutzte Koordinatensystem zusammenfallend mit dem System  $(x_3, y_3)$ , dann ist alles bis jetzt in diesem Paragraph Gesagte auf letzteres System übertragbar, nur muß in (12) statt  $x'$  die Entfernung des Aufpunktes, der für (12) hinter dem Gitter gedacht ist, von der  $Y_1 Z$ -Ebene eingesetzt werden und zwar nach links von dieser Ebene positiv gerechnet.

Wir führen noch die rechtwinkligen Koordinaten  $(x_4, y_4)$  mit dem Anfangspunkt in  $O$  ein (Fig. 9) und haben dann

rechtwinklige Grundkoordinaten	$(x, y)$ ,	Einheitsvektoren	$i, j,$	
schiefwinklige Koordinaten	$(x_1, y_1),$	"	$i_1, j_1,$	
rechtwinklige	"	$(x_3, y_3),$	"	$i_1, j_1,$
"	"	$(x_4, y_4),$	"	$i_1, j_1.$

In dem Ausdruck (13) § 2, welcher uns  $\mathfrak{E}_z$  für den Aufpunkt  $P$  bestimmt, bedeuten  $x_1$  und  $y_1$  die schiefwinkligen Koordinaten des Aufpunktes. Dasselbe  $\mathfrak{E}_z$  bestimmt sich aber

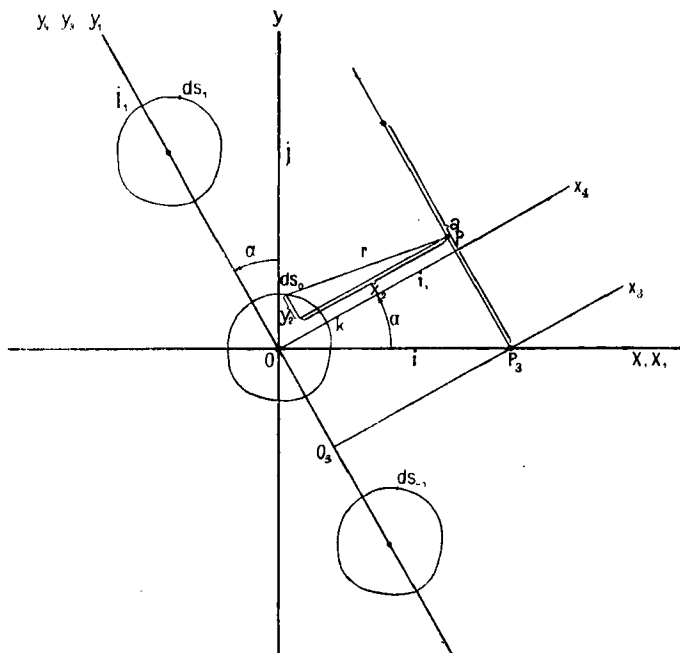


Fig. 9.

auch aus (6). Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhalten wir, nachdem wir in (6)  $t'$  statt  $t$ , entsprechend der Lage des Aufpunktes, und  $i_1, j_1$  statt  $i, j$  eingeführt haben:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & \frac{i \omega e^{i g y_1 \sin \alpha}}{2 \pi} \int_s Q_0(g r) \varphi d s - \frac{g e^{i g y_1 \sin \alpha}}{2 \pi} \int_s \frac{Z Q_1(g r) i_1 \mathfrak{E}_0 \cdot y_2}{r} d s \\ & - \frac{g e^{i g y_1 \sin \alpha}}{2 \pi} \int_s \frac{Z Q_1(g r) i_1 \mathfrak{E}_0 \cdot x_2}{r} d s \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (N_n e^{-i m_n x_1} + N_n' e^{-i m_n' x_1}) \cos \frac{2 \pi n y_1}{a} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n e^{-i m_n x_1} + D_n' e^{-i m_n' x_1}) \sin \frac{2 \pi n y_1}{a} \end{aligned} \right\}.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit

$$\cos \frac{2\pi n y_1}{a} dy_1, \text{ resp. } \sin \frac{2\pi n y_1}{a} dy_1$$

und integrieren von  $y_1 = 0$  bis  $y_1 = a$  und haben nun die folgenden sechs Ausdrücke zu bestimmen:

$$(15) \quad A_{1,n} = \frac{i\omega}{2\pi} \int_{y=0}^a \int_s Q_0(gr) \varphi e^{igy_1 \sin \alpha} \cos \frac{2\pi n y_1}{a} ds dy_1,$$

$$(16) \quad A_{2,n} = \frac{g}{2\pi} \int_{y=0}^a \int_s \frac{Z Q_1(gr) i_1 s_0 \cdot y_1}{r} e^{igy_1 \sin \alpha} \cos \frac{2\pi n y_1}{a} ds dy_1,$$

$$(17) \quad A_{3,n} = \frac{g}{2\pi} \int_{y=0}^a \int_s \frac{Z Q_1(gr) j_1 s_0 \cdot x_2}{r} e^{igy_1 \sin \alpha} \cos \frac{2\pi n y_1}{a} ds dy_1,$$

und die entsprechenden Ausdrücke  $A'_1, A'_2, A'_3$ , die sich von (15) bis (17) nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle von  $\cos 2\pi n y_1/a, \sin 2\pi n y_1/a$  gesetzt ist. Die schiefwinkligen Koordinaten im System  $(x_1, y_1)$  des Elementes  $ds_0$  seien  $x'_1, y'_1$ . Dann ist für dasselbe Element

$$(18) \quad \begin{cases} e^{i\omega t} \varphi = e^{i\omega t'} \varphi e^{igy'_1 \sin \alpha} = e^{i\omega t'} \varphi_1, \\ e^{i\omega t} Z = e^{i\omega t'} Z e^{igy'_1 \sin \alpha} = e^{i\omega t'} Z_1. \end{cases}$$

Die Integration in (15) bis (17) ist bei konstantem  $t'$  gedacht. Ziehen wir durch  $ds_0$  eine zur  $Y_1$ -Achse parallele Linie, so wird diese durch die Elemente  $ds_1, \text{ resp. } ds_{-1}$  gehen, die in einem Abstand von  $a, \text{ resp. } -a$  von  $ds_0$  liegen. Für alle diese Elemente wird  $\varphi_1, \text{ resp. } Z_1$  dasselbe sein und ebenfalls die Werte  $i_1 s_0$  und  $j_1 s_0$ .

Die Koordinaten von  $ds_0$  im System  $(x_3, y_3)$  bezeichnen wir durch  $x_3, y_3$  und im System  $(x_4, y_4)$  durch  $x_4, y_4$ . Dann ist laut Fig. 9:

$$(19) \quad y'_1 = y_4 + x'_1 \sin \alpha = y_4 + x_4 \operatorname{tg} \alpha = y_3 - x_1 \sin \alpha + x_3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Demnach

$$(20) \quad \begin{cases} \varphi e^{igy_1 \sin \alpha} = \varphi_1 e^{ig(y_1 - y'_1) \sin \alpha} \\ = \varphi_1 e^{-igx_4 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + igx_1 \sin^2 \alpha} \cdot e^{-igy_3 \sin \alpha + igy_4 \sin \alpha}. \end{cases}$$

Ein analoger Ausdruck folgt, wo  $Z_1$  statt  $\varphi_1$  steht.



Statt  $e^{-igy_2 \sin \alpha}$  müssen wir für die verschiedenen Elemente  $ds_0, ds_1, ds_{-1}$  usw. setzen:

$$(21) \quad \begin{cases} e^{-igy_2 \sin \alpha - ig a \sin \alpha} & \text{für } ds_1, \\ e^{-igy_2 \sin \alpha + ig a \sin \alpha} & \text{für } ds_{-1} \end{cases}$$

usw.

Wir summieren jetzt (15) und (16) nach  $ds$  und integrieren nach  $y_1$ . Gehen wir nun zur Fig. 4 § 3 zurück, so ersehen wir, daß hier sein wird

$$(22) \quad \begin{cases} b = y_3; & h = x_3; & c_s = y_2, \\ v = g \sin \alpha. \end{cases}$$

Deshalb folgt aus (15) und (16) und (31) und (33) § 3 wegen (20):

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{1,n} &= \frac{i\omega}{2\pi} e^{igx_1 \sin^2 \alpha} \left\{ \int_s \varphi_1 e^{-igx_2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + iy_2 \frac{2\pi n}{a}} M_1 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_s \varphi_1 e^{-igx_2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - iy_2 \frac{2\pi n}{a}} M_2 ds \right\} \end{aligned} \right\}$$

und

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{2,n} &= \frac{g}{2\pi} e^{igx_1 \sin^2 \alpha} \left\{ -i \left( \frac{2\pi n}{ag} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \alpha \right) \int_s Z_1 i_1 \tilde{\varepsilon}_0 e^{-igx_2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + iy_2 \frac{2\pi n}{a}} M_1 ds \right. \\ &\quad \left. + i \left( \frac{2\pi n}{ag} - \sin \alpha \right) \int_s Z_1 i_1 \tilde{\varepsilon}_0 e^{-igx_2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - iy_2 \frac{2\pi n}{a}} M_2 ds \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Hierbei ist die Integration längs der Oberfläche des Gitters nur längs einer Periode zu führen, angefangen von der Achse  $O_3 P_3$ .

Hierbei bedeuten

$$(25) \quad M_1 = \frac{i\pi e^{-ix_2 g \sqrt{1 - \left(\sin \alpha + \frac{n\lambda}{a}\right)^2}}}{2g \sqrt{1 - \left(\sin \alpha + \frac{n\lambda}{a}\right)^2}} \quad \text{für } \left(\sin \alpha + \frac{n\lambda}{a}\right)^2 < 1,$$

$$(26) \quad M_1 = -\frac{\pi e^{-x_2 g \sqrt{\left(\sin \alpha + \frac{n\lambda}{a}\right)^2 - 1}}}{2g \sqrt{\left(\sin \alpha + \frac{n\lambda}{a}\right)^2 - 1}} \quad \text{für } \left(\sin \alpha + \frac{n\lambda}{a}\right)^2 > 1$$

und

$$(27) \quad M_2 = \frac{i \pi e^{-i x_2 g \sqrt{1 - \left(\sin \alpha - \frac{n \lambda}{a}\right)^2}}}{2 g \sqrt{1 - \left(\sin \alpha - \frac{n \lambda}{a}\right)^2}} \quad \text{für } \left(\sin \alpha - \frac{n \lambda}{a}\right)^2 < 1,$$

$$(28) \quad M_2 = -\frac{\pi e^{-x_2 g \sqrt{\left(\sin \alpha - \frac{n \lambda}{a}\right)^2 - 1}}}{2 g \sqrt{\left(\sin \alpha - \frac{n \lambda}{a}\right)^2 - 1}} \quad \text{für } \left(\sin \alpha - \frac{n \lambda}{a}\right)^2 > 1.$$

Wir gehen nun zum System  $(y_4, x_4)$  über. Dann ist

$$(29) \quad y_3 = y_4 + x_1 \sin \alpha; \quad x_3 = x_4,$$

und außerdem ist

$$(30) \quad x_2 = x_1 \cos \alpha - x_4.$$

Setzen wir dieses in (23) und (24) ein und berücksichtigen (11) und (12) § 2, so erhalten wir

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{1,n} &= \frac{-\omega e^{-i x_1 m n'}}{4 g \sqrt{1 - \beta_n^2}} \int_s \varphi_1 e^{-i g x_4 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + i y_4 \frac{2 \pi n}{a} + i x_4 g \sqrt{1 - \beta_n^2}} d s \\ &- \frac{\omega e^{-i x_1 m n}}{4 g \sqrt{1 - \gamma_n^2}} \int_s \varphi_1 e^{-i g x_4 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - i y_4 \frac{2 \pi n}{a} + i x_4 g \sqrt{1 - \gamma_n^2}} d s \end{aligned} \right.$$

und

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{2,n} &= \frac{\beta_n e^{-i x_1 m n'}}{4 \sqrt{1 - \beta_n^2}} \int_s Z_1 \cdot i_1 \xi_0 \cdot e^{-i g x_4 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + i y_4 \frac{2 \pi n}{a} + i x_4 g \sqrt{1 - \beta_n^2}} d s \\ &+ \frac{\gamma_n e^{-i x_1 m n}}{4 \sqrt{1 - \gamma_n^2}} \int_s Z_1 \cdot i_1 \xi_0 \cdot e^{-i g x_4 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - i y_4 \frac{2 \pi n}{a} + i x_4 g \sqrt{1 - \gamma_n^2}} d s. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist die Integration längs einer Periode von der Achse  $O_3 x_3$  auszuführen. Da aber die Ausdrücke unter den Integralen alle in bezug auf die  $Y_1$ -Achse periodisch sind, mit derselben Periode, so soll die Integration von der Achse  $O x_4$ , d. h. vom Punkte  $k$  anfangen. Dies wollen wir im folgenden voraussetzen.

Wir gehen nun wieder zu den Größen  $\varphi$  und  $Z$  zurück. Beachten wir, daß

$$(33) \quad e^{i g y_1' \sin \alpha} = e^{i g y_4 \sin \alpha + i g x_4 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}$$

sein wird, und führen wir die Bezeichnungen

$$(34) \quad P_n(X) = \int_s X e^{i y_4 g \gamma_n + i x_4 g \sqrt{1 - \gamma_n^2}} d s,$$

$$(35) \quad P_n'(X) = \int_s X e^{iy_1 g \beta_n + ix_1 g \sqrt{1-\beta_n^2}} ds$$

ein, so folgt statt (31) und (32)

$$(36) \quad A_{1,n} = \frac{-\omega e^{-ix_1 m_n} P_n(\varphi)}{4g\sqrt{1-\gamma_n^2}} - \frac{\omega e^{-ix_1 m_n'} P_n'(\varphi)}{4g\sqrt{1-\beta_n^2}},$$

$$(37) \quad A_{2,n} = \frac{\gamma_n e^{-ix_1 m_n} P_n(Z \cdot i_1 \xi_0)}{4\sqrt{1-\gamma_n^2}} + \frac{\beta_n e^{-ix_1 m_n'} P_n'(Z i_1 \xi_0)}{4\sqrt{1-\beta_n^2}}.$$

Weiter folgt aus (17)

$$(38) \quad A_{3,n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{y=0}^a \int_s Z i_1 \xi_0 Q_0(gr) e^{igy_1 \sin \alpha} \cos \frac{2\pi n y_1}{a} ds dy_1.$$

Oder wegen (25) und (27)

$$(39) \quad A_{3,n} = -\frac{e^{-ix_1 m_n} \dot{P}_n(Z i_1 \xi_0)}{4} - \frac{e^{-ix_1 m_n'} P_n'(Z i_1 \xi_0)}{4}.$$

Und endlich wegen (32) und (34), § 3:

$$(40) \quad A_{1',n} = -\frac{i\omega e^{-ix_1 m_n} P_n(\varphi)}{4g\sqrt{1-\gamma_n^2}} + \frac{i\omega e^{-ix_1 m_n'} P_n'(\varphi)}{4g\sqrt{1-\beta_n^2}},$$

$$(41) \quad A_{2',n} = \frac{i\gamma_n e^{-ix_1 m_n} P_n(Z i_1 \xi_0)}{4\sqrt{1-\gamma_n^2}} - \frac{i\beta_n e^{-ix_1 m_n'} P_n'(Z i_1 \xi_0)}{4\sqrt{1-\beta_n^2}},$$

$$(42) \quad A_{3',n} = \frac{i}{4} e^{-ix_1 m_n} P_n(Z i_1 \xi_0) + \frac{i}{4} e^{-ix_1 m_n'} P_n'(Z i_1 \xi_0).$$

Deshalb folgt aus (14)

$$(43) \quad A_{1,0} - A_{2,0} - A_{3,0} = (N_0 e^{-im_0 x_1} + N_0' e^{-im_0' x_1}) \alpha,$$

$$(44) \quad A_{1,n} - A_{2,n} - A_{3,n} = (N_n e^{-im_n x_1} + N_n' e^{-im_n' x_1}) \frac{\alpha}{2},$$

$$(45) \quad A_{1',n} - A_{2',n} - A_{3',n} = (D_n e^{-im_n x_1} + D_n' e^{-im_n' x_1}) \frac{\alpha}{2}.$$

Setzen wir hier die Werte der  $A$  ein und beachten, daß (43) bis (45) für beliebige  $x_1$  gültig sein müssen, so folgt

$$(46) \quad N_0 = -\frac{\omega \cdot P_0(\varphi)}{4\alpha g \sqrt{1-\gamma_0^2}} - \frac{\gamma_0 P_0(Z i_1 \xi_0)}{4\alpha \sqrt{1-\gamma_0^2}} + \frac{P_0(Z i_1 \xi_0)}{4\alpha},$$

$$(47) \quad N_0' = -\frac{\omega P_0'(\varphi)}{4\alpha g \sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{\beta_0 P_0'(Z i_1 \xi_0)}{4\alpha \sqrt{1-\beta_0^2}} + \frac{P_0'(Z i_1 \xi_0)}{4\alpha},$$

$$(48) \quad N_n = -\frac{\omega P_n(\varphi)}{2ag\sqrt{1-\gamma_n^2}} - \frac{\gamma_n P_n(Z_{11}\xi_0)}{2a\sqrt{1-\gamma_n^2}} + \frac{P_n(Z_{11}\xi_0)}{2a},$$

$$(49) \quad N_n' = -\frac{\omega P_n'(\varphi)}{2ag\sqrt{1-\beta_n^2}} - \frac{\beta_n P_n'(Z_{11}\xi_0)}{2a\sqrt{1-\beta_n^2}} + \frac{P_n'(Z_{11}\xi_0)}{2a}$$

und

$$(50) \quad D_n = iN_n; \quad D_n' = -iN_n'.$$

Der letzte Ausdruck stimmt mit (22) § 2 überein. Außerdem ersehen wir aus (43) bis (45), daß Ausdrücke wie (8) und (9) § 2 mit dem + - Zeichen vor der Quadratwurzel nicht vorkommen können, da (43) bis (45) für beliebige  $x_1$  gelten müssen.

Ganz analog gestaltet sich die Rechnung, falls (26) und (28) in Betracht kommen. In diesem Fall ersehen wir sofort, daß nur die Werte (14) und (15) § 2 zu gebrauchen sind.

Um die Amplituden  $V_n$  und  $W_n$  hinter dem Gitter zu berechnen, benutzen wir die Ausdrücke (18) § 2 und (8). Wir müssen hierbei berücksichtigen, daß hierbei  $x_2$  in (8) und  $x_0$ , d. h. die Abszisse des Aufpunktes, in (18) § 2 positiv nach links gerechnet werden. Statt (19) müssen wir deshalb schreiben

$$(51) \quad y_1' = y_3 + x_0 \sin \alpha + x_4 \operatorname{tg} \alpha,$$

statt (29)

$$(52) \quad y_3 = y_4 - x_0 \sin \alpha,$$

und statt (30)

$$(53) \quad x_2 = x_0 \cos \alpha + x_4.$$

Wir erhalten dann, falls wir die Bezeichnungen

$$(54) \quad R_n(X) = \int_s X e^{ig\gamma_n y_1 - ix_4 g \sqrt{1-\gamma_n^2}} ds,$$

$$(55) \quad R_n'(X) = \int_s X e^{ig\beta_n y_1 - ix_4 g \sqrt{1-\beta_n^2}} ds$$

eingeführen, dieselben Gleichungen (43) bis (45), nur daß vor den  $A_s$  das + - Zeichen stehen wird und statt der Größen  $m_n, m_n', P_n, P_n', N_n, D_n$  die entsprechenden Größen  $U_n, U_n', R_n, R_n', V_n$  und  $W_n$  gesetzt werden müssen. Deshalb folgt

$$(56) \quad V_0 = -\frac{\omega R_0(\varphi)}{4ag\sqrt{1-\gamma_0^2}} - \frac{\gamma_0 R_0(Z_{11}\xi_0)}{4a\sqrt{1-\gamma_0^2}} - \frac{R_0(Z_{11}\xi_0)}{4a},$$

$$(57) \quad V_0' = -\frac{\omega R_0'(\varphi)}{4ag\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{\beta_0 R_0'(Z_{11}\xi_0)}{4a\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{R_0'(Z_{11}\xi_0)}{4a},$$

$$(58) \quad V_n = -\frac{\omega R_n(\varphi)}{2 a g \sqrt{1-\gamma_n^2}} - \frac{\gamma_n R_n(Z_{i_1} \xi_0)}{2 a \sqrt{1-\gamma_n^2}} - \frac{R_n'(Z_{i_1} \xi_0)}{2 a},$$

$$(59) \quad V_n' = -\frac{\omega R_n'(\varphi)}{2 a g \sqrt{1-\beta_n^2}} - \frac{\beta_n R_n'(Z_{i_1} \xi_0)}{2 a \sqrt{1-\beta_n^2}} - \frac{R_n'(Z_{i_1} \xi_0)}{2 a}$$

und

$$(60) \quad W_n = i V_n; \quad W_n' = -i V_n'.$$

Der Ausdruck (60) stimmt mit (23) § 2 überein, außerdem ist ganz analog dem Vorhergehenden klar, daß in (16) und (17) § 2 vor der Quadratwurzel kein + -Zeichen stehen kann und daß (18) und (19) § 2 richtig sind.

Ist die magnetische Kraft parallel dem Gitter, so erhalten wir die Amplituden derselben *vor* und *hinter* dem Gitter einfach, indem wir in den vorhergehenden Ausdrücken, infolge des am Anfang dieses Paragraph Gesagten, überall statt  $\varphi$  und  $Z$  die Größen  $S_1$  und  $\zeta$  einführen. Haben wir für diesen Fall die Amplitude der magnetischen Kraft für eine Welle bestimmt, so brauchen wir dieselbe, infolge von (2) § 1, nur mit  $-\omega/g$  zu multiplizieren, um die Amplitude der elektrischen Kraft derselben Welle zu erhalten. Hierbei ist die positive Richtung der elektrischen Kraft nach rechts gerechnet, falls wir in die Richtung der Fortpflanzung der Welle blicken und die  $Z$ -Achse dabei nach oben gerichtet ist.

Es folgt weiter:

$$(61) \quad \begin{cases} P_0(X) = P_0'(X), \\ R_0(X) = R_0'(X). \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$(62) \quad N_0 = N_0'; \quad V_0 = V_0'.$$

Deshalb erhalten wir für die direkt reflektierte Welle  $\mathfrak{E}_{z_0}$  den Ausdruck

$$(63) \quad \mathfrak{E}_{z_0} = \mathfrak{f} \cdot 2 N_0 e^{i(\omega t - g x \cos 2\alpha - g y \sin 2\alpha)},$$

und für die gesamte direkt durchgegangene Welle  $\mathfrak{E}'_{z_0}$  den Ausdruck (Fig. 3)

$$(64) \quad \mathfrak{E}'_{z_0} = \mathfrak{f} e^{i(\omega t - g x')} \{A + 2 V_0\}.$$

Dies ist richtig, solange wir längs den Kurven  $D$  (Fig. 8) integrieren. Integrieren wir längs einer Kurve  $A_1 B_1$  (Fig. 8), so müssen wir statt (64) schreiben

$$(64a) \quad \mathfrak{E}'_{z_0} = 2 \mathfrak{f} e^{i(\omega t - g x')} \cdot V_0.$$

Für die imaginären Spektren ( $\gamma^2 > 1$ ;  $\beta^2 > 1$ ) haben wir überall statt  $i\sqrt{1 - \gamma_n^2}$  resp.  $i\sqrt{1 - \beta_n^2}$  zu setzen  $\sqrt{\gamma_n^2 - 1}$  resp.  $\sqrt{\beta_n^2 - 1}$ .

### § 5. Senkrechte Inzidenz.

Dieser Fall wird uns in der Folge hauptsächlich beschäftigen, weshalb wir denselben auch ausführlich untersuchen wollen.

Es ist hierbei  $\alpha = 0$  und demzufolge fällt das System  $(x_4, y_4)$  mit dem System  $(x, y)$  zusammen. Wir wollen deshalb die Koordinaten der Elemente der Integrationskurve nicht durch  $x_4, y_4$ , sondern durch  $x, y$  bezeichnen und die Koordinaten des Aufpunktes durch  $x_1, y_1$  im selben System. Hinter dem Gitter ist  $x_1$  positiv nach links zu rechnen und wir bezeichnen es wie früher durch  $x'$ . Auch ist jetzt  $i_2 = i$ ;  $j_1 = j$ .

Es wird nun sein

$$(1) \quad m_n = m_n' = u_n = u_n'$$

und zwar ist:

$$(2) \quad m_n = g \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{a}\right)^2} \quad \text{für } \frac{\lambda n}{a} < 1,$$

$$(3) \quad m_n = g \sqrt{\left(\frac{\lambda n}{a}\right)^2 - 1} \quad \text{für } \frac{\lambda n}{a} > 1.$$

Wir erhalten dann für die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}_z$  vor dem Gitter

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z = f e^{i\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-i m_n x_1} \cos \frac{2\pi n}{a} y_1 \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} i F_n e^{-i m_n x_1} \sin \frac{2\pi n}{a} y_2 \right\} \end{aligned} \right.$$

und hinter dem Gitter

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z' = f e^{i\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_n' e^{-i m_n x'} \cos \frac{2\pi n}{a} y_2 \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} i F_n' e^{-i m_n x'} \sin \frac{2\pi n}{a} y_1 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Im Falle (3) ist in (4) und (5) statt  $i m_n$ ,  $m_n$  zu setzen.

Es bedeutet ferner

$$(6) \quad C_n = N_n + N'_n; \quad F_n = N_n - N'_n$$

und

$$(7) \quad C'_n = V_n + V'_n; \quad F'_n = V_n - V'_n.$$

Wegen (62) § 4 ist

$$(8) \quad F_0 = F'_0 = 0.$$

Außerdem ist infolge (21) § 2

$$(9) \quad \beta_n = -\gamma_n = \frac{n\lambda}{a} = -\sin \vartheta_n = \sin \vartheta'_n.$$

Wir erhalten deshalb, da

$$(10) \quad m_0 = g; \quad \frac{g n \lambda}{a} = \frac{2\pi n}{a}$$

ist,

$$(11) \quad C_0 = \frac{1}{2a} \int_s \left\{ -\frac{\varphi \omega}{g} + Z i \xi_0 \right\} e^{+ixg} ds,$$

$$(12) \quad N_n = \frac{1}{2a} \int_s \left\{ -\frac{\omega \varphi}{m_n} + \frac{2\pi n}{a m_n} Z i \xi_0 + Z i \xi_0 \right\} e^{+i \left( x m_n - \frac{2\pi n y}{a} \right)} ds,$$

$$(13) \quad N'_n = \frac{1}{2a} \int_s \left\{ -\frac{\omega \varphi}{m_n} - \frac{2\pi n}{a m_n} Z i \xi_0 + Z i \xi_0 \right\} e^{+i \left( x m_n + \frac{2\pi n y}{a} \right)} ds$$

$$\text{für } \frac{n\lambda}{a} < 1$$

und analog

$$(14) \quad C'_0 = -\frac{1}{2a} \int_s \left\{ \frac{\varphi \omega}{g} + Z i \xi_0 \right\} e^{-ixg} ds,$$

$$(15) \quad V_n = \frac{1}{2a} \int_s \left\{ -\frac{\omega \varphi}{m_n} + \frac{2\pi n}{a m_n} Z i \xi_0 - Z i \xi_0 \right\} e^{-i \left( x m_n + \frac{2\pi n y}{a} \right)} ds,$$

$$(16) \quad V'_n = \frac{1}{2a} \int_s \left\{ -\frac{\omega \varphi}{m_n} - \frac{2\pi n}{a m_n} Z i \xi_0 - Z i \xi_0 \right\} e^{-i \left( x m_n - \frac{2\pi n y}{a} \right)} ds$$

$$\text{für } \frac{n\lambda}{a} < 1.$$

Ist das Gitter symmetrisch in bezug auf die X-Achse, so sind alle  $F_n$  und  $F'_n$  gleich Null und wir können statt (11) bis (16) schreiben:

$$(17) \quad \begin{cases} N_n = N'_n = \frac{1}{2a} \int_s \left\{ \left[ -\frac{\omega \varphi}{m_n} + Z i \xi_0 \right] \cos \frac{2\pi n y}{a} \right. \\ \left. - \frac{2\pi n}{a m_n} Z i \xi_0 \sin \frac{2\pi n y}{a} \right\} e^{+ixm_n} ds \end{cases}$$

und

$$(18) \quad \begin{cases} V_n = V'_n = -\frac{1}{2a} \int_s \left\{ \left[ \frac{\omega \varphi}{m_n} + Z i \xi_0 \right] \cos \frac{2\pi n y}{a} \right. \\ \left. + \frac{2\pi n i}{a m_n} Z i \xi_0 \sin \frac{2\pi n y}{a} \right\} e^{-ix m_n} ds \quad \text{für } \frac{n\lambda}{a} < 1. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (11) und (14) bleiben unverändert. Die entsprechenden Ausdrücke für  $(n\lambda/a) > 1$  sind leicht zu erhalten auf Grund des am Schluß des § 4 Gesagten.

### § 6. Stabgitter. Angenäherte Berechnung.

Arbeiten von A. Winkelmann und H. Weisel.

Es sei Fig. 10 ein Stabgitter bestehend aus Stäben resp. Röhren, deren Material und Querschnitt vorläufig belanglos ist.

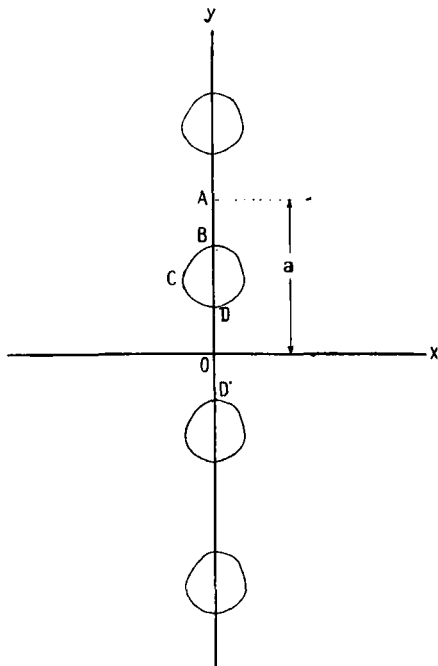


Fig. 10.

Die Gitter- ( $Z, Y$ -Ebene) liege dort, wo der Abstand  $D D'$  ein Minimum ist, d. h.  $D D'$  ist gleich dem Zwischenraum  $b$  zwischen den Drähten.

Wir machen folgende vereinfachte Annahmen:

I. Die Gitterkonstante  $a$ , der Zwischenraum  $b$  und die Breite  $B D$  sollen groß in bezug auf  $\lambda$  sein.

II. Im geometrischen Schatten längs  $B C D$  sollen sowohl die elektrische als auch die magnetische Kraft verschwinden. Theoretisch ist diese Annahme unzulässig<sup>1)</sup>, aber praktisch wegen I. sehr plausibel.

III. Die elektrische und auch die magnetische Kraft sollen längs  $D D'$  dieselben

sein, als ob das Gitter nicht vorhanden wäre.

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 25. p. 99. 1908.



Da wir über das Material und Form des Querschnittes der Drähte keine Annahmen machen, so können wir die Erscheinungen *vor* dem Gitter nicht untersuchen, da diese hier- von abhängen. Den Zustand hinter dem Gitter können wir untersuchen, falls wir längs einer Kurve  $A_1 B_1$  (Fig. 8) integrieren. In unserem Fall besteht diese Kurve aus den Stücken  $AB$ ,  $BCD$  und  $DO$ . Wegen II fällt die Integration längs  $BCD$  weg, und wir brauchen nur noch längs  $AB$  und  $DO$ , oder, was dasselbe ist, längs  $DD'$  zu integrieren *von D nach D'*.

Die  $x$ -Achse soll den Abstand  $b$  halbieren. Infolgedessen ist der Zustand *hinter* dem Gitter symmetrisch in bezug auf die  $x$ -Achse.

Wir erhalten wegen III längs  $DD'$  ( $ds = -dy$ )

$$(1) \quad \begin{cases} Z = A \\ \varphi = -\frac{Ag}{\omega} \end{cases}$$

Demnach ist

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_0' = \frac{A}{a} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy = \frac{Ab}{a} \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_n = V_n' = \frac{A}{2a} \left( \frac{g}{m_n} + 1 \right) \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \cos \frac{2\pi n y}{a} dy \\ = \frac{A}{2\pi} \left( \frac{g}{m_n} + 1 \right) \frac{\sin \frac{\pi n b}{a}}{n} \quad \text{für } \frac{n\lambda}{a} < 1. \end{array} \right.$$

Da längs  $DD'$ ,  $x = 0$ ;  $\xi_0 = -j$ ;  $i\xi_0 = 0$  und  $j\xi_0 = -1$  sind. Alle  $F_n'$  sind Null.

Für die direkt durchgegangene Welle müssen wir hier den Ausdruck (64a) § 4 gebrauchen, weshalb wegen (8) § 1  $C_0'$  uns direkt die Amplitude dieser Welle angibt.  $V_n$  ist die Amplitude der gebeugten Welle.

Aus (2) und (3) folgt

$$(4) \quad \frac{V_n}{C_0'} = \frac{a}{b\pi n} \left( \frac{g}{m_n} + 1 \right) \sin \frac{\pi n b}{a}.$$

Können wir für die ersten Spektren, wegen  $n\lambda/a$  gegen 1 vernachlässigen, so folgt statt (4)

$$(5) \quad \frac{V_n}{C_0'} = \frac{a}{b\pi n} \sin \frac{\pi n b}{a}$$

und

$$(6) \quad \frac{I_n}{A} = \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n b}{a}.$$

Und die Verhältnisse der entsprechenden Intensitäten sind

$$(7) \quad \frac{V_n^2}{C_0'^2} = \frac{a^2}{(b\pi n)^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi n b}{a},$$

$$(8) \quad \frac{I_n^2}{A^2} = \frac{1}{\pi^2 n^2} \sin^2 \frac{\pi n b}{a},$$

$$(9) \quad \frac{C_0'^2}{A^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Diese Ausdrücke stimmen, mit den Formeln von Rayleigh<sup>1)</sup> überein. Wir sehen aber hier klar, unter welchen Annahmen wir zu denselben kommen.

Für die  $m_n = 0$  wird  $V_n = \infty$ . Dies ist aber eine Folge unserer vereinfachten Annahmen. Tatsächlich müssen die Glieder in (5) § 5 ständig abnehmen. Wir begnügen uns deshalb bei der Darstellung der Amplitude  $E'$  der gesamten elektrischen Kraft hinter dem Gitter, bei genügender Entfernung von demselben, mit den ersten  $n_1$  Gliedern der Reihe (5) § 1 und erhalten, da  $C_n' = 2V_n$  und  $I_n' = 0$  sind.

$$(10) \quad E = 2 \sum_{n=0}^{n=n_1} V_n e^{-ix'm_n} \cos \frac{2\pi n y_1}{a},$$

wobei also noch

$$(11) \quad \frac{n_1 \lambda}{a} < 1$$

angenommen ist.

Wir wollen ferner annehmen, daß  $\lambda$  so klein ist, daß  $n_1 \lambda/a$  klein gegen 1 ist. Dann können wir in (3) statt  $m_n$ ,  $g$  setzen und im Exponenten in (10)

$$(12) \quad m_n = g - \frac{\pi \lambda n^2}{a^2}$$

schreiben und erhalten dann statt (10)

1) Vgl. H. Kayser „Handbuch der Spektroskopie“ 1. p. 427 oder Lord Rayleigh, Scientific Papers, 1. p. 213, Art. 30.

$$(13) \quad E = A e^{-ix'g} \left\{ \frac{b}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{n=n_1} \frac{e^{\frac{ix'\pi\lambda n^2}{a^2}} \sin \frac{\pi n b}{a} \cos \frac{2\pi n y_1}{a}}{n} \right\}.$$

Nun haben Winkelmann<sup>1)</sup> und insbesondere Weisel<sup>2)</sup> den Zustand hinter dem Gitter untersucht, ungefähr unter den Bedingungen I—III.

Es war z. B.<sup>3)</sup>  $a = 0,25 \text{ mm}$   $\lambda = 0,461 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ . Demnach ist  $n\lambda/a = n/542$ . Vernachlässigungen wie 0,01 gegen 1, d. h.  $n/542 = \frac{1}{10}$ , so ist  $n_1 = 54$ .

Wir setzen nun

$$(14) \quad x' = \frac{a^2 \nu}{\lambda},$$

wo  $\nu = 1, 2, 3 \dots$  bedeuten soll.

Dann erhalten wir statt (13)

$$(15) \quad E = A e^{-ix'g} f(y_1),$$

wo

$$(16) \quad f(y_1) = \frac{b}{a} + 2 \sum_{n=1}^{n=n_1} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi n b}{a}}{\pi n} \cos \frac{2\pi n y_1}{a}; \text{ für } \nu = \text{un-gerade,}$$

und

$$(17) \quad f(y_1) = \frac{b}{a} + 2 \sum_{n=1}^{n=n_1} \frac{\sin \frac{\pi n b}{a}}{\pi n} \cos \frac{2\pi n y_1}{a}; \text{ für } \nu = \text{gerade.}$$

Setzen wir in (16)  $y_1 = y_2 + a/2$ , so folgt statt (16)

$$(18) \quad f(y_2) = \frac{b}{a} + 2 \sum_{n=1}^{n=n_1} \frac{\sin \frac{\pi n b}{a}}{\pi n} \cos \frac{2\pi n y_2}{a}; \text{ für } \nu = \text{ungerade.}$$

Nun wird eine Funktion  $f_1(y)$ , die den folgenden Bedingungen entspricht:

$$(19) \quad \begin{cases} f_1(y) = 1 & \text{von } y = 0 \text{ bis } y = \frac{b}{2}, \\ f_1(y) = 0 & \text{,, } y = \frac{b}{2} \text{ ,, } y = 0 - \frac{b}{2}, \\ f_1(y) = 1 & \text{,, } y = a - \frac{b}{2} \text{ bis } y = a, \end{cases}$$

dargestellt durch

1) A. Winkelmann, Ann. d. Phys. 27. p. 905. 1908.

2) H. Weisel, Ann. d. Phys. 33. p. 925. 1910 und Gießener Dissertation. 1910.

3) H. Weisel, l. c. p. 1017. Tab. 4.

$$(20) \quad f_1(y) = \frac{b}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n b}{a}}{n} \cos \frac{2 \pi n y}{a},$$

können wir nun annäherungsweise  $f_1 = f$  setzen, so ist  $f(y_1)$  in (17) nichts anderes als eine Abbildung des Gitters. Für ein ungerades  $\nu$  erhalten wir, wie aus (18) ersichtlich, ebenfalls dieselbe Abbildung nur um die Hälfte der Gitterkonstante längs der  $Y$ -Achse verschoben. D. h. im letzteren Fall liegt das Lichtminimum des Bildes gegenüber dem Gitterspalt. Dieses und ebenfalls (14) stimmen mit den Untersuchungen von Weisel überein.<sup>1)</sup>

Wegen den Annahmen I—III können wir auch als hintere Begrenzung des Stabes die Linie  $BD$  betrachten, denn die Form der Stäbe tritt ja bei der Lösung nicht hervor. Machen wir diese Annahme, so folgt aus (5) § 5 ( $x' = 0$ ) und wegen I—III

$$(21) \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n' \cos \frac{2 \pi n y_1}{a} = A f(y_1),$$

wo  $f(y_1)$  die durch (17) und (19) dargestellte Funktion ist. Ein Vergleich von (21), (10) und (3) ergibt uns, daß in (3)  $m_n = 1$  gesetzt werden muß. Hieraus folgern wir, daß die angeführten Lösungen nur für ein sehr kleines  $\lambda/a$  gelten.

Zum Schluß möchten wir noch bemerken, daß falls die magnetische Kraft parallel dem Gitter ist, sich an den Resultaten dieses Paragraphen nichts ändern wird. D. h. die Amplituden bleiben dieselben, wie man sich auf Grund des § 4 leicht überzeugen kann.

### § 7. Durchsichtiges Stufenfilmgitter.

Arbeit von H. Siedentopf.

In Fig. 11 ist  $G$  ein durchsichtiges Gitter, welches einerseits durch die Ebene  $E_1$ , parallel zur  $YZ$ -Ebene, begrenzt ist, andererseits durch Furchen von Dreieckform. Dies entspricht näherungsweise dem Thorpschen Stufenfilmgitter.<sup>2)</sup> Der Brechungsindex des Materials des Gitters sei  $\nu$ .

1) K. Weisel, l. c. p. 1013.

2) Vgl. H. Siedentopf, Berl. Ber. XXXII. p. 711. 1902.

Die auf die Fläche  $OA$  einfallende Welle ist

$$(1) \quad \mathcal{E}_0 = B e^{(i\omega t + g\nu x)},$$

wobei als Gitterebene die  $YZ$ -Ebene angenommen ist.

Es ist

$$(2) \quad B = \frac{2A}{1+\nu} e^{igb(1-\nu)}.$$

Wir machen nun die Annahme, daß sich die Werte der gesamten elektrischen, resp. magnetischen Kraft längs  $OA$  und  $OB$  aus der Brechung an einer unendlich großen Ebene bestimmen. Dies setzt voraus, daß  $OA$  und  $OB$  groß in bezug zu  $\lambda$  sind. Die einfallende Welle trifft die Fläche  $OB$  unter  $90^\circ$ , so daß dort die elektrische und magnetische Kraft verschwinden. Außerdem vernachlässigen wir die von  $OA$  reflektierte und auf  $OB$  auffallende Welle. Wir brauchen also nur längs  $OA$  zu integrieren, und zwar von  $A$  bis  $O$ .

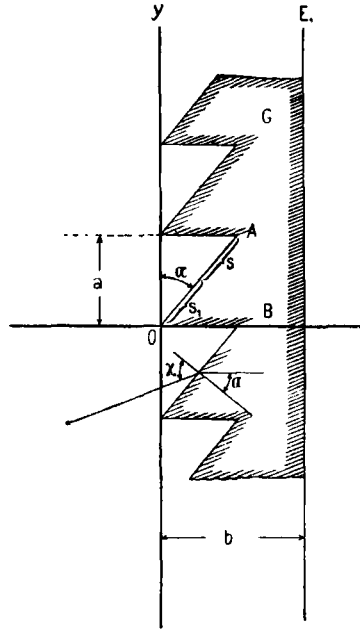


Fig. 11.

Es sei die elektrische Kraft parallel der  $Z$ -Achse. Dann haben wir längs  $OA$ :

$$(3) \quad \varphi = -B \frac{2\nu g \cos \alpha \sqrt{1-\nu^2 \sin^2 \alpha} e^{+i\nu g y t g \alpha}}{\omega \{ \nu \cos \alpha + \sqrt{1-\nu^2 \sin^2 \alpha} \}},$$

$$(4) \quad Z = B \frac{2\nu \cos \alpha}{\nu \cos \alpha + \sqrt{1-\nu^2 \sin^2 \alpha}} e^{+i\nu g y t g \alpha}$$

Weiter ist

$$(5) \quad \mathfrak{s}_0 = -i \sin \alpha - j \cos \alpha,$$

also

$$(6) \quad j \mathfrak{s}_0 = -\cos \alpha; \quad i \mathfrak{s}_0 = -\sin \alpha.$$

Alle Integrale werden von der Form

$$(7) \quad \int_a f ds$$

sein, wo, wie gesagt, von  $A$  bis  $O$  integriert wird. Wir setzen (Fig. 11)

$$(8) \quad s = OA - s_1 = OA - s_1 = \frac{a}{\cos \alpha} - \frac{y}{\cos \alpha}.$$

Dann haben wir statt (7)

$$(9) \quad \int_{s=0}^{s=OA} f ds = -\frac{1}{\cos \alpha} \int_a^0 f dy = \frac{1}{\cos \alpha} \int_0^a f dy.$$

Außerdem ist längs  $OA$ :

$$(10) \quad x = y \operatorname{tg} \alpha.$$

Deshalb erhalten wir

$$(11) \quad C'_0 = -\frac{i B \nu \{ \cos \alpha + \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} \}}{g \alpha \operatorname{tg} \alpha (\nu - 1) \{ \nu \cos \alpha + \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} \}} \left( e^{+i g a \operatorname{tg} \alpha (\nu - 1)} - 1 \right).$$

Für  $\nu = 1$  wird, wegen (2)  $C'_0 = A$ , wie es auch sein muß. Bezeichnen wir den regulären Brechungswinkel durch  $\chi$ , so ist

$$(12) \quad \nu \sin \alpha = \sin \chi.$$

Und statt (11) erhalten wir dann:

$$(13) \quad C'_0 = -\frac{i B \nu \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \chi)}{g \alpha (\nu - 1) \sin (\alpha + \chi)} \left( e^{+i g a \operatorname{tg} \alpha (\nu - 1)} - 1 \right).$$

Die Energie  $E_0$  berechnet sich durch Multiplikation von (13) mit seinem komplex-konjugierten Wert. Wegen (2) erhalten wir:

$$(14) \quad E_0 = \frac{8 A^2 \nu^2 \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \chi)^2}{g^2 \alpha^2 \sin^2 (\alpha + \chi) (\nu^2 - 2)^2} \{ 1 - \cos [g a \operatorname{tg} \alpha (\nu - 1)] \} \\ = \frac{A^2 \sin^2 \chi \sin^2 \alpha}{\sin^4 \left( \frac{\alpha + \chi}{2} \right)} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{\mu_0 \pi}{\lambda} \right)}{\left( \frac{\mu_0 \pi}{\lambda} \right)^2},$$

wo

$$(15) \quad \mu_0 = a \operatorname{tg} \alpha (\nu - 1)$$

bedeutet.

Nun ist

$$(16) \quad \left\{ -\frac{\omega \varphi}{m_n} + \frac{2 \pi n}{a m_n} Z i \hat{s}_0 - Z j \hat{s}_0 = \frac{2 \nu B \cos \alpha}{m_n \{ \nu \cos \alpha + \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} \}} \right. \\ \left. \cdot \left\{ g \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2 \pi n}{a} \sin \alpha + m_n \cos \alpha \right\} e^{+i \nu g y \operatorname{tg} \alpha} \right.$$

und

$$(17) \left\{ \begin{aligned} -\frac{\omega \varphi}{m_n} - \frac{2\pi n}{a m_n} Z i \xi_0 - Z i \xi_0 &= \frac{2\nu B \cos \alpha}{m_n \{ \nu \cos \alpha + \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} \}} \\ \cdot \left\{ g \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2\pi n}{a} \sin \alpha + m_n \cos \alpha \right\} e^{+i\nu g y t g \alpha}. \end{aligned} \right.$$

Deshalb ist

$$(18) \left\{ \begin{aligned} V_n &= -\frac{i B \nu}{a m_n \{ \nu \cos \alpha + \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} \}} \\ &\cdot \left\{ g \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2\pi n}{a} \sin \alpha + m_n \cos \alpha \right\} \\ &\cdot \left\{ e^{i(\nu g a t g \alpha - m_n a t g \alpha - 2\pi n)} - 1 \right\} \\ &\frac{\nu g t g \alpha - m_n t g \alpha - \frac{2\pi n}{a}}{a}. \end{aligned} \right.$$

Oder wegen (9) § 5

$$(19) \quad V_n = -\frac{i B \nu \sin \alpha \{ \cos \chi + \cos(\alpha - \vartheta_n) \} \{ e^{i g \mu_n} - 1 \}}{g \mu_n \cos \vartheta_n \sin(\alpha + \chi)},$$

wobei

$$(20) \quad \mu_n = \frac{a}{\cos \alpha} \left\{ \sin \chi - \sin(\alpha - \vartheta_n) \right\}$$

bedeutet.  $V_n'$  bestimmt sich aus (19) und (20), falls wir dort  $\vartheta_n'$  statt  $\vartheta_n$  setzen.

Infolge (31) § 2 ist aber  $\vartheta_n < 0$  (dort  $\alpha = 0$  gesetzt). Ist also im speziellen Fall  $\alpha - \vartheta_n = \chi$ , d. h.  $\mu_n = 0$ , so ist  $V_n$  ein Maximum<sup>1)</sup> und gleich

$$(21) \quad V_{n_{\alpha - \vartheta_n = \chi}} = +\frac{2 B \nu \sin \alpha \cos \chi}{\cos(\alpha - \chi) \sin(\alpha + \chi)} = \frac{4 A \nu \sin \alpha \cos \chi e^{i g b(1 - \nu)}}{(1 + \nu) \cos(\alpha - \chi) \sin(\alpha + \chi)}.$$

Ist die magnetische Kraft parallel der Z-Achse, so haben wir

$$(22) \quad S_1 = \frac{B g^2 2 \nu \cos \alpha \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} \cdot e^{+i\nu g y t g \alpha}}{\omega^2 \{ \cos \alpha + \nu \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} \}},$$

und

$$(23) \quad \zeta = -\frac{B g 2 \nu \cos \alpha e^{+i\nu g y t g \alpha}}{\omega \{ \cos \alpha + \nu \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} \}}.$$

Weiter ist

$$(24) \quad \cos \alpha + \nu \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \chi) \cos(\alpha - \chi)}{\sin \alpha}.$$

1) H. Siedentopf, l. c. p. 715.

Setzen wir  $S_1$  und  $\zeta$  statt  $\varphi$  und  $Z$  ein, so bekommen wir statt  $V_n$  die magnetischen Amplituden. Diese letzteren, multipliziert mit  $-\omega/g$ , bezeichnen wir mit  $\eta_n$  und  $\eta_n'$ . Auf Grund des am Schluß des § 4 Gesagten sind  $\eta_n$  und  $\eta_n'$  nichts anderes, als die entsprechenden Amplituden der elektrischen Kraft. Wir erhalten demnach

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \eta_0 = \frac{C_0'}{\cos(\alpha - \chi)}, \\ \eta_n = \frac{V_n}{\cos(\alpha - \chi)}; \quad \eta_n' = \frac{V_n'}{\cos(\alpha - \chi)}. \end{array} \right.$$

D. h. die Drehung der Polarisationssebene, beim Durchgang durch das Gitter, ist für *alle* Spektren dieselbe. Dieses letztere Resultat, welches durch unsere vereinfachten Annahmen bedingt ist, scheint mir zweifelhaft zu sein und zwar auf Grund folgender Überlegung.

Wir untersuchen den Fall eines reflektierenden Glasgitters.<sup>1)</sup> Das Gitter ist durch eingeritzte Furchen entstanden. Das hindurchgegangene und eventuell von der Rückseite des Gitters reflektierte Licht soll auf irgend eine Weise für die Beobachtung unschädlich gemacht sein.<sup>2)</sup> Die Furchen sind rau und kann deshalb das von ihnen reflektierte Licht als diffus angenommen werden und kommt deshalb für uns nicht Betracht.<sup>3)</sup> Nur das einfallende Licht kommt bei der Integration längs den Furchen in Betracht. Nun wissen wir, daß wir innerhalb einer Periode längs einer beliebigen Kurve integrieren können. Wir integrieren deshalb nicht längs der unbestimmten Kurve der Furche, sondern längs der Geraden, die die Verlängerung der glatten Oberfläche ist und berücksichtigen dabei nur die einfallende Welle. Diese Annahme und die, daß die Reflexion an den glatten Stellen wie an einer unendlich großen Ebene stattfindet<sup>4)</sup>, führt uns zu dem folgenden Resultat.

1) Vgl. J. Fröhlich: „Polarisation des von Glasgittern gebeugten Lichtes“. Leipzig. B. G. Teubner 1907. p. 203.

2) J. Fröhlich, l. c. p. 203.

3) J. Fröhlich, l. c. p. 191—192.

4) Diese Annahme erscheint um so mehr plausibel, als die Resultate bei J. Fröhlich sich wenig unterscheiden bei  $a = 0,5$  mm und bei  $a = 0,00116$  mm.



Bei senkrechter Inzidenz ist bei keinem der Spektre eine Drehung der Polarisationssebene vorhanden. Dies entspricht vollkommen dem Experiment.<sup>1)</sup>

Bei schiefer Inzidenz weist der regulär reflektierte Strahl dieselbe Drehung der Polarisationssebene auf, wie bei der Reflexion an eine unendlich große Ebene. Auch dies stimmt mit dem Experiment.<sup>2)</sup> Alle anderen Spektren haben aber dieselbe Drehung der Polarisationssebene, und dies widerspricht dem Experiment. Deshalb erschien mir auch das analoge Resultat bei dem Stufenfilmgitter zweifelhaft. Obwohl hier auch nur das Experiment entscheiden kann.

Unsere Resultate unterscheiden sich von denjenigen bei H. Siedentopf, erstens wegen der Art der Berechnung, zweitens wegen der Berücksichtigung der Reflexion wie an der Ebene  $E_1$  so auch an  $OA$  und drittens wegen der Berücksichtigung der Polarisation. Das  $\mu$  bei H. Siedentopf entspricht unserem  $-\mu_n$ .

#### § 8. Drahtgitter. Erste Annäherung.

Arbeit von Cl. Schaefer und F. Reiche.

Die Herren Cl. Schaefer und F. Reiche<sup>3)</sup> haben unlängst die Theorie des Drahtgitters untersucht unter Vernachlässigung der gegenseitigen Beeinflussung der Drähte und bei endlicher Anzahl derselben.

Wir wollen hier ähnliches machen: 1. auch die gegenseitige Beeinflussung der Drähte vernachlässigen, dafür aber im Gegensatz zu Cl. Schaefer und F. Reiche annehmen: 2. Anzahl der Drähte ist unendlich groß, 3. schiefe Inzidenz. Hierbei wird die Summation über die Drähte in *exakter Weise ohne jede Annäherung* auf Grund der §§ 1—4 ausgeführt, weshalb die so berechneten Amplituden der gebeugten Spektren für beliebige Entfernungen vom Gitter gültig sein werden.

Wir begnügen uns im folgenden auf die Erscheinungen *hinter* dem Gitter und auf reelle Beugungsspektre. Es ist

1) J. Fröhlich, l. c. p. 222.

2) J. Fröhlich, l. c. p. 332—333.

3) Cl. Schaefer u. F. Reiche, Ann. d. Phys. 35. p. 817. 1911.

leicht, auf Grund des Vorhergehenden die imaginären Spektren und die Erscheinungen *vor* dem Gitter zu berechnen.

In der Gitterebene  $Y_4 Z$  (Fig. 12) liegen die Achsen der Drähte. Die Integration längs der Oberfläche der Drähte

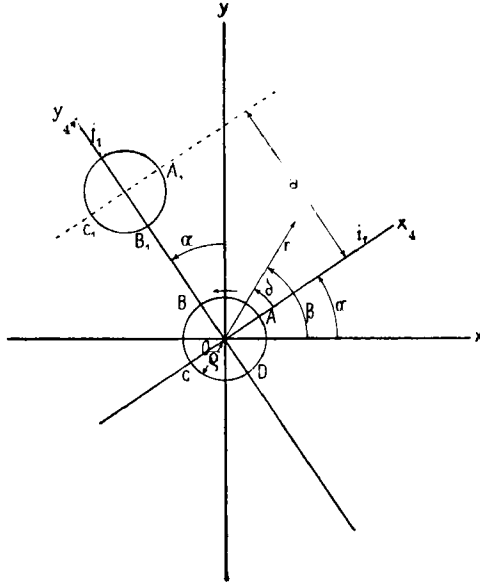


Fig. 12.

innerhalb einer Periode ist zu führen: von  $A$  durch  $B$  nach  $C$  und von  $C_1$  durch  $B_1$  nach  $A_1$ , oder aber, was wir im folgenden auch machen werden, von  $A$  in Richtung des Pfeiles um den ganzen Draht herum.

Fall I. Elektrische Kraft parallel der  $Z$ -Achse. Wegen der Annahme I sind die Größen  $\varphi$  und  $Z$  durch Reihen von Produkten von Zylinderfunktionen mit dem  $\cos$  des Vielfachen des Winkels  $\beta$ <sup>1)</sup> (Fig. 12) dargestellt.

Beachten wir nun, daß

$$(1) \quad x = x_4 \cos \alpha - y_4 \sin \alpha$$

und

$$(2) \quad x_4 = r \cos \delta; \quad y_4 = r \sin \delta$$

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905.

sind und gehen von dem Winkel  $\beta$  zu dem Winkel  $\delta$  über, so erhalten wir ( $\rho$  = Radius des Drahtes)

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} Z &= A e^{i g \rho \cos(\alpha + \delta)} + A \sum_{s=0}^{s=\infty} L_s Q_s(g \rho) \cos s \alpha \cos s \delta \\ &\quad - A \sum_{s=1}^{s=\infty} L_s Q_s(g \rho) \sin s \alpha \sin s \delta \end{aligned} \right.$$

und

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{A g}{\omega} e^{i g \rho \cos(\alpha + \delta)} \cos(\alpha + \delta) \\ &\quad - \frac{i g A}{\omega} \sum_{s=0}^{s=\infty} L_s Q_s'(g \rho) \cos s \alpha \cos s \delta \\ &\quad + \frac{i g A}{\omega} \sum_{s=1}^{s=\infty} L_s Q_s'(g \rho) \sin s \alpha \sin s \delta. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist die Permeabilität = 1 gesetzt und es bedeuten:

$$(5) \quad L_0 = \frac{W_0}{U_0}; \quad L_s = 2 i^s \frac{W_s}{U_s}$$

und

$$(6) \quad W_s = g_1 J_s'(g_1 \rho) J_s(g \rho) - g J_s(g_1 \rho) J_s'(g \rho)$$

$$(7)^1) \quad U_s = g J_s(g_1 \rho) Q_s'(g \rho) - g_1 J_s'(g_1 \rho) Q_s(g \rho).$$

Hierbei bedeutet

$$(8) \quad g_1 = g(\nu - i\kappa).$$

Es ist  $\nu$  der Brechungsexponent und  $\kappa$  der Extinktionskoeffizient, beide Größen auf das Material des Drahtes bezogen.

Weiter ist

$$(9) \quad i_1 \xi_0 = \cos \delta; \quad i_1 \xi_0 = -\sin \delta; \quad ds = \rho d\delta$$

und

$$(10) \quad R_n(X) = \rho \int_{\delta=0}^{2\pi} X e^{i g \gamma_n \rho \sin \delta - i g \rho \cos \delta} \sqrt{1 - \gamma_n^2} d\delta,$$

$$(11) \quad R_n'(X) = \rho \int_{\delta=0}^{2\pi} X e^{i g \beta_n \rho \sin \delta - i g \rho \cos \delta} \sqrt{1 - \beta_n^2} d\delta.$$

1) W. v. Ignatowsky, l. c. p. 501—503.

Außerdem ist für ein bestimmtes  $n$ :

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\omega \varphi}{2 a g \sqrt{1-\gamma_n^2}} - \frac{\gamma_n Z i_1 \xi_0}{2 a \sqrt{1-\gamma_n^2}} - \frac{Z i_1 \xi_0}{2 a} \\ & = -\frac{\omega \varphi}{2 a g \cos \vartheta_n} + \frac{Z \sin \vartheta_n \sin \delta}{2 a \cos \vartheta_n} - \frac{Z \cos \delta}{2 a} \\ & = -\frac{A e^{i g \rho \cos (\alpha+\delta)}\{\cos (\vartheta_n+\delta)+\cos (\alpha+\delta)\}}{2 a \cos \vartheta_n} \\ & + \frac{A}{2 a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} L_s\{i Q_s'(g \rho) \\ & \quad - Q_s(g \rho) \cos (\vartheta_n+\delta)\} \cos s \alpha \cos s \delta \\ & - \frac{A}{2 a \cos \vartheta_n} \sum_{s=1}^{\infty} L_s\{i Q_s'(g \rho) \\ & \quad - Q_s(g \rho) \cos (\vartheta_n+\delta)\} \sin s \alpha \sin s \delta . \end{aligned} \right.$$

Den Ausdruck (12) haben wir nun in (10) einzusetzen, um  $V_n$  zu bestimmen. Setzen wir in (12)  $\vartheta_n'$  statt  $\vartheta_n$  und dann (12) in (11), so erhalten wir  $V_n'$ . Tun wir dies und gehen von der Integration von  $\delta = 0$  bis  $\delta = 2\pi$  zu derjenigen von  $\delta = 0$  bis  $\delta = \pi$  über, so erhalten wir

$$(13) \left\{ \begin{aligned} V_n & = -\frac{A \varrho}{a \cos \vartheta_n}\{F_1(\cos \vartheta_n + \cos \alpha) + F_2 i(\sin \alpha + \sin \vartheta_n)\} \\ & + \frac{\varrho A}{a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} L_s Q_s'(g \rho)\{i \cos s \alpha F_3 + \sin s \alpha F_4\} \\ & - \frac{\varrho A}{a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} L_s Q_s(g \rho)\{\cos \vartheta_n \cos s \alpha F_5 \\ & - i \sin \vartheta_n \cos s \alpha F_6 - i \cos \vartheta_n \sin s \alpha F_7 + \sin \vartheta_n \sin s \alpha F_8\}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei bedeuten:

$$(14) F_1 = \int_0^{\pi} e^{i g \rho (\cos \alpha - \cos \vartheta_n) \cos \delta} \cos [g \rho (\sin \alpha - \sin \vartheta_n) \sin \delta] \cos \delta d \delta,$$

$$(15) F_2 = \int_0^{\pi} e^{i g \rho (\cos \alpha - \cos \vartheta_n) \cos \delta} \sin [g \rho (\sin \alpha - \sin \vartheta_n) \sin \delta] \sin \delta d \delta,$$

$$(16) F_3 = \int_0^{\pi} e^{-i g \rho \cos \vartheta_n \cos \delta} \cos (g \rho \sin \vartheta_n \sin \delta) \cos s \delta d \delta,$$

$$(17) F_4 = \int_0^\pi e^{-ig\varrho \cos \vartheta_n \cos \delta} \sin(g\varrho \sin \vartheta_n \sin \delta) \sin s \delta d\delta,$$

$$(18) F_5 = \int_0^\pi e^{-ig\varrho \cos \vartheta_n \cos \delta} \cos(g\varrho \sin \vartheta_n \sin \delta) \cos \delta \cos s \delta d\delta,$$

$$(19) F_6 = \int_0^\pi e^{-ig\varrho \cos \vartheta_n \cos \delta} \sin(g\varrho \sin \vartheta_n \sin \delta) \sin \delta \cos s \delta d\delta,$$

$$(20) F_7 = \int_0^\pi e^{-ig\varrho \cos \vartheta_n \cos \delta} \sin(g\varrho \sin \vartheta_n \sin \delta) \cos \delta \sin s \delta d\delta,$$

$$(21) F_8 = \int_0^\pi e^{-ig\varrho \cos \vartheta_n \cos \delta} \cos(g\varrho \sin \vartheta_n \sin \delta) \sin \delta \sin s \delta d\delta.$$

Den Ausdruck für  $V_n'$  erhalten wir, falls wir in (13) bis (21)  $\vartheta_n'$  statt  $\vartheta_n$  setzen.

Fall II. Magnetische Kraft parallel der Z-Achse. Hierbei haben wir

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \zeta = & -\frac{A g}{\omega} e^{ig\varrho \cos(\alpha + \delta)} - \frac{g A}{\omega} \sum_{s=0}^{s=\infty} L_s' Q_s(g\varrho) \cos s \alpha \cos s \delta \\ & + \frac{g A}{\omega} \sum_{s=1}^{\infty} L_s' Q_s(g\varrho) \sin s \alpha \sin s \delta \end{aligned} \right.$$

und

$$(23)^1 \left\{ \begin{aligned} S_1 = & -\frac{A g^2}{\omega^2} e^{ig\varrho \cos(\alpha + \delta)} \cos(\alpha + \delta) \\ & + \frac{i g^2 A}{\omega^2} \sum_{s=0}^{\infty} L_s' Q_s'(g\varrho) \cos s \alpha \cos s \delta \\ & - \frac{i g^2 A}{\omega^2} \sum_{s=1}^{\infty} L_s' Q_s'(g\varrho) \sin s \alpha \sin s \delta. \end{aligned} \right.$$

Hierbei bedeuten

$$(24) \quad L_0' = \frac{W_0'}{U_0'}; \quad L_s' = 2i^s \frac{W_s'}{U_s'}$$

1) W. v. Ignatowsky, l. c. p. 503—505. In dieser Arbeit ist für den Fall II  $-A$  statt  $A$  gesetzt worden, während hier überall  $A$  als positiv gesetzt ist. Man vergleiche (2) § 2 mit dem Ausdruck (5) § 1 der zitierten Arbeit.

und

$$(25) \quad W'_s = g J_s(g \varrho) J'_s(g_1 \varrho) - g_1 J'_s(g J \varrho)_s (g_1 \varrho),$$

$$(26) \quad U'_s = g_1 J_s(g_1 \varrho) Q'_s(g \varrho) - g J'_s(g_1 \varrho) Q_s(g \varrho).$$

Die Größen  $S_1$  und  $\zeta$  haben wir in (12) anstatt  $\varphi$  und  $Z$  einzusetzen und erhalten dann mit Hilfe von (10) resp. (11) die Amplituden der magnetischen Kraft. Multiplizieren wir letztere, infolge des am Schluß des § 4 Gesagten, mit  $-\omega/g$ , so erhalten wir die entsprechenden Amplituden der elektrischen Kraft. Diese letzteren bezeichnen wir mit  $\eta_n$  und  $\eta'_n$ . Die  $L'_s$  und die Vorzeichen in (24) bis (26) sind so gewählt, daß wir direkt aus (13) die  $\eta_n$  erhalten, falls wir in (13)  $L_s$  durch  $L'_s$  ersetzen.

Wir wollen nun die Integrale  $F$  bestimmen.

### § 9. Berechnung der Integrale $F$ .

Bedeutet  $\mu$  eine ganze positive oder negative Zahl, so haben wir <sup>1)</sup>

$$(1) \quad J_\mu(\sqrt{h^2 - c^2}) = \frac{1}{\pi} \left( \sqrt{\frac{h-c}{h+c}} \right)^\mu \int_0^\pi e^{c \cos \delta} \cos(h \sin \delta - \mu \delta) d\delta,$$

wobei die Bedingung

$$(2) \quad \text{reeller Teil von } (h+c) > 0$$

erfüllt sein muß.

Durch Addition resp. Subtraktion zu (1) eines Ausdrucks, der aus (1) folgt, nachdem wir  $-\mu$  statt  $\mu$  gesetzt haben, erhalten wir, unter Berücksichtigung der Beziehung

$$(3) \quad J_{-s}(x) = (-1)^s J_s(x)$$

und falls wir hinterher statt  $\mu$ ,  $s$  schreiben

$$(4) \quad \int_0^\pi e^{c \cos \varphi} \cos(h \sin \delta) \cos s \delta \cdot d\delta = \frac{\pi}{2} J_s(\sqrt{h^2 - c^2}) \left\{ \frac{1}{q^s} + \frac{(-1)^s}{q^{-s}} \right\},$$

$$5) \quad \int_0^\pi e^{c \cos \varphi} \sin(h \sin \delta) \sin s \delta d\delta = \frac{\pi}{2} J_s(\sqrt{h^2 - c^2}) \left\{ \frac{1}{q^s} - \frac{(-1)^s}{q^{-s}} \right\},$$

wobei

$$(6) \quad q = \sqrt{\frac{h-c}{h+c}} = \frac{\sqrt{h^2 - c^2}}{h+c}$$

bedeutet.

1) N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, Leipzig, B. G. Teubner, 1904, p. 121, Formel (3).

Wir setzen nun

$$(7) \quad c = i b.$$

Dann folgt

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1 + (-1)^s q^{2s}}{q^s} &= \frac{(h + i b)^{2s} + (-1)^s (h^2 + b^2)^s}{(\sqrt{h^2 + b^2})^s (h + i b)^s} \\ &= \frac{(h + i b)^s + (-1)^s (h - i b)^s}{(\sqrt{h^2 + b^2})^s} \end{aligned} \right.$$

und

$$(9) \quad \frac{1 - (-1)^s q^{2s}}{q^s} = \frac{(h + i b)^s - (-1)^s (h - i b)^s}{(\sqrt{h^2 + b^2})^s}.$$

Deshalb

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi e^{i b \cos \delta} \cos (h \sin \delta) \cos s \delta d \delta &= \frac{\pi J_s(\sqrt{h^2 + b^2})}{2(\sqrt{h^2 + b^2})^s} \\ &\quad \{(h + i b)^s + (-1)^s (h - i b)^s\}, \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi e^{i b \cos \delta} \sin (h \sin \delta) \sin s \delta d \delta &= \frac{\pi J_s(\sqrt{h^2 + b^2})}{2(\sqrt{h^2 + b^2})^s} \\ &\quad \{(h + i b)^s - (-1)^s (h - i b)^s\}. \end{aligned} \right.$$

Durch Differentiation nach  $b$  erhalten wir:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi e^{i b \cos \delta} \cos (h \sin \delta) \cos s \delta \cos \delta d \delta \\ &= -\frac{i \pi b J_s'(\sqrt{h^2 + b^2})}{2(\sqrt{h^2 + b^2})^s + 1} \{(h + i b)^s + (-1)^s (h - i b)^s\} \\ &\quad + \frac{s \pi h J_s(\sqrt{h^2 + b^2})}{2(\sqrt{h^2 + b^2})^s + 2} \{(h + i b)^s - (-1)^s (h - i b)^s\}, \end{aligned} \right.$$

und

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi e^{i b \cos \delta} \sin (h \sin \delta) \sin s \delta \cos \delta d \delta \\ &= -\frac{i \pi b J_s'(\sqrt{h^2 + b^2})}{2(\sqrt{h^2 + b^2})^s + 1} \{(h + i b)^s - (-1)^s (h - i b)^s\} \\ &\quad + \frac{s \pi h J_s(\sqrt{h^2 + b^2})}{2(\sqrt{h^2 + b^2})^s + 2} \{(h + i b)^s + (-1)^s (h - i b)^s\}. \end{aligned} \right.$$

Durch Differentiation nach  $h$  folgt:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi e^{i b \cos \delta} \sin(h \sin \delta) \cos s \delta \sin \delta d \delta = \\ & - \frac{\pi h}{2} \frac{J'_s(\sqrt{h^2 + b^2})}{(\sqrt{h^2 + b^2})^{s+1}} \{(h + i b)^s + (-1)^s (h - i b)^s\} \\ & + \frac{i b \pi s}{2} \frac{J_s(\sqrt{h^2 + b^2})}{(\sqrt{h^2 + b^2})^{s+2}} \{(h + i b)^s - (-1)^s (h - i b)^s\}. \end{aligned} \right.$$

und

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi e^{i b \cos \delta} \cos(h \sin \delta) \sin s \delta \sin \delta d \delta \\ & = \frac{\pi h}{2} \frac{J'_s(\sqrt{h^2 + b^2})}{(\sqrt{h^2 + b^2})^{s+1}} \{(h + i b)^s - (-1)^s (h - i b)^s\} \\ & - \frac{i s \pi b}{2} \frac{J_s(\sqrt{h^2 + b^2})}{(\sqrt{h^2 + b^2})^{s+2}} \{(h + i b)^s + (-1)^s (h - i b)^s\}. \end{aligned} \right.$$

Deshalb erhalten wir:

$$(16) F_1 = \frac{\pi i (\cos \alpha - \cos \vartheta_n)}{2 \sin \frac{(\vartheta_n - \alpha)}{2}} J_1 \left( 2 g \varrho \sin \frac{(\vartheta_n - \alpha)}{2} \right).$$

$$(17) F_2 = \frac{\pi (\sin \alpha - \sin \vartheta_n)}{2 \sin \frac{(\vartheta_n - \alpha)}{2}} J_1 \left( 2 g \varrho \sin \frac{(\vartheta_n - \alpha)}{2} \right).$$

$$(18) F_3 = (-1)^s \pi i^s J_s(g \varrho) \cos s \vartheta_n.$$

$$(19) F_4 = (-1)^s \pi i^{s+1} J_s(g \varrho) \sin s \vartheta_n.$$

$$(20) \left\{ \begin{aligned} F_5 &= (-1)^s i^{s+1} \pi \sin \vartheta_n J'_s(g \varrho) \cos s \vartheta_n \\ &+ (-1)^s \frac{i^{s+1} \pi \sin \vartheta_n}{g \varrho} J_s(g \varrho) \sin s \vartheta_n. \end{aligned} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{aligned} F_6 &= -(-1)^s i^s \pi \sin \vartheta_n J'_s(g \varrho) \cos s \vartheta_n \\ &+ (-1)^s \frac{i^s \pi s \cos \vartheta_n}{g \varrho} J_s(g \varrho) \sin s \vartheta_n. \end{aligned} \right.$$

$$(22) \left\{ \begin{aligned} F_7 &= -(-1)^s i^s \pi \cos \vartheta_n J'_s(g \varrho) \sin s \vartheta_n \\ &+ (-1)^s \frac{i^s s \pi \sin \vartheta_n}{g \varrho} J_s(g \varrho) \cos s \vartheta_n. \end{aligned} \right.$$

$$(23) \left\{ \begin{aligned} F_8 &= (-1)^s i^{s+1} \pi \sin \vartheta_n J'_s(g \varrho) \sin s \vartheta_n \\ &+ (-1)^s \frac{i^{s+1} s \pi \cos \vartheta_n}{g \varrho} J_s(g \varrho) \cos s \vartheta_n. \end{aligned} \right.$$



§ 10. Fortsetzung von § 8.

Auf Grund von (16) bis (23) des vorigen § 9 erhalten wir

$$(1) \left\{ \begin{aligned} V_n &= \frac{\pi \varrho A}{a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s Q_s'(g \varrho) J_s(g \varrho) \cos s(\vartheta_n - \alpha) \\ &- \frac{\pi \varrho A}{a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s Q_s(g \varrho) J_s'(g \varrho) \cos s(\vartheta_n - \alpha), \end{aligned} \right.$$

oder wegen der Beziehung

$$(2) \quad J_s(g \varrho) Q_s'(g \varrho) - J_s'(g \varrho) Q_s(g \varrho) = \frac{1}{g \varrho},$$

$$(3) \quad V_0 = V_0' = \frac{\pi A}{2 g a \cos \alpha} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s$$

und

$$(4) \quad V_n = \frac{\pi A}{g a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s \cos s(\vartheta_n - \alpha),$$

$$(5) \quad V_n' = \frac{\pi A}{g a \cos \vartheta_n'} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s \cos s(\vartheta_n' - \alpha),$$

$$(6) \quad \eta_0 = \eta_0' = \frac{\pi A}{2 g a \cos \alpha} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s',$$

$$(7) \quad \eta_n = \frac{\pi A}{g a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s' \cos s(\vartheta_n - \alpha),$$

$$(8) \quad \eta_n' = \frac{\pi A}{g a \cos \vartheta_n'} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s' \cos s(\vartheta_n' - \alpha).$$

Für einen absoluten Leiter ( $g_1 = \infty$ ) ist

$$(9) \quad L_0 = - \frac{J_0(g \varrho)}{Q_0(g \varrho)}; \quad L_s = - 2 i^s \frac{J_s(g \varrho)}{Q_s(g \varrho)}.$$

$$(10) \quad L_0' = - \frac{J_0'(g \varrho)}{Q_0'(g \varrho)}; \quad L_s' = - 2 i^s \frac{J_s'(g \varrho)}{Q_s'(g \varrho)}.$$

Ist  $\varrho/\lambda$ , d. h. auch  $g \varrho$  klein, dann können wir statt (9) und (10) schreiben<sup>1)</sup>

$$(11) \quad L_0 = - \frac{1}{\lg \frac{g \varrho i \gamma}{2}} = \frac{1}{\lg \frac{\lambda}{\pi \varrho} - \lg \gamma - \frac{i \pi}{2}}; \quad L_s = i^s \frac{4 s}{(s!)^2} \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^{2s}.$$

1) W. v. Ignatowsky, l. c. p. 498-501.

$$(12) \quad L_0' = 2 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2; \quad L_s' = \frac{i^s 8}{(s+1)(s!)^2} \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^{2s+2}.$$

Auf Grund von (64) § 4 für die Amplitude  $E_0$  der direkt durchgegangenen Welle für den Fall I

$$(13) \quad E_0 = A + 2 V_0 = A \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2a \cos \alpha} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s' \right\},$$

und für den Fall II

$$(14) \quad E_0' = A + 2 \eta_0 = A \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2a \cos \alpha} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s L_s' \right\}.$$

Begnügen wir uns ähnlich wie Cl. Schaefer und F. Reiche<sup>1)</sup> mit dem ersten Glied der Summe, d. h. mit  $L_0$ , resp.  $L_0'$ , so erhalten wir

$$(15) \quad E_0 = A \left\{ 1 + \frac{\lambda i}{2a \cos \alpha \left\{ \lg \frac{\lambda}{\pi \varrho} - \lg \gamma - \frac{i \pi}{2} \right\}} \right\}$$

und

$$(16) \quad E_0' = A \left\{ 1 + \frac{i(\pi \varrho)^2}{\lambda a \cos \alpha} \right\}.$$

Und die entsprechenden Intensitäten sind:

$$(17) \quad J_{\parallel} = A^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda \pi}{2a \cos \alpha M} + \frac{\lambda^2 \pi^2}{16 a^2 \cos^2 \alpha M^2} + \frac{\lambda^2 N^2}{4 a^2 \cos^2 \alpha M^2} \right\},$$

wobei

$$(18) \quad M = \left( \lg \frac{\lambda}{\pi \varrho} - \lg \gamma \right)^2 + \frac{\pi^2}{4}; \quad N = \lg \frac{\lambda}{\pi \varrho} - \lg \gamma$$

bedeuten. Wie wir später sehen werden, ist diese Lösung nur gültig für  $\lambda/a$  klein. Infolgedessen können wir schreiben

$$(19) \quad J_{\parallel} = A^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda \pi}{2a \cos \alpha M} \right\}.$$

Man vergleiche diesen Ausdruck mit dem entsprechenden von Cl. Schaefer und F. Reiche.<sup>2)</sup> Aus (16) folgt für die Intensität  $J_{\perp}$ :

$$(20) \quad J_{\perp} = A^2 \left\{ 1 + \frac{(\pi \varrho)^4}{\lambda^2 a^2 \cos^2 \alpha} \right\}.$$

Hieraus folgt:

$$(21) \quad \frac{J_{\parallel}}{J_{\perp}} = \frac{1 - \frac{\lambda \pi}{2a \cos \alpha M}}{1 + \frac{(\pi \varrho)^4}{\lambda^2 a^2 \cos^2 \alpha}} = q < 1,$$

d. h. wir haben Hertzeffekt.

1) Cl. Schaefer u. F. Reiche, l. c. p. 835.

2) Cl. Schaefer u. F. Reiche, l. c. p. 836, Formel (47).

Ist der Draht ein reines Dielektrikum, so haben wir unter der Voraussetzung

$$(22) \quad g \varrho \quad \text{und} \quad g \varrho \sqrt{\varepsilon} \quad \text{klein gegen } 1$$

$$(23) \quad L_0 = -2 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 (\varepsilon - 1)$$

und

$$(24) \quad L_0' = 0; \quad L_1' = -i 4 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

Und deshalb für diesen Fall

$$(25) \quad J_{\parallel} = A^2 \left\{ 1 + \frac{(\pi \varrho)^4 (\varepsilon - 1)^2}{(\lambda \alpha \cos \alpha)^2} \right\}$$

und

$$(26) \quad J_{\perp} = A^2 \left\{ 1 + \frac{4 (\pi \varrho)^4 (\varepsilon - 1)^2}{(\lambda \alpha \cos \alpha)^2 (\varepsilon + 1)^2} \right\},$$

und demnach

$$(27) \quad q = \frac{1 + \frac{(\lambda \alpha \cos \alpha)^2}{(\pi \varrho)^4 (\varepsilon - 1)^2}}{1 + \frac{(\lambda \alpha \cos \alpha)^2 (\varepsilon + 1)^2}{4 (\pi \varrho)^4 (\varepsilon - 1)^2}} > 1,$$

denn es ist

$$(28) \quad \frac{4}{(\varepsilon + 1)^2} < 1,$$

d. h. wir haben Du Boisefekt ähnlich wie bei Cl. Schaefer und F. Reiche<sup>1)</sup>, nur die Werte sind andere.

Ist der Draht ein Halbleiter, so haben wir, wenn wieder

$$(29) \quad g \varrho \quad \text{und} \quad g_1 \varrho \quad \text{klein gegen } 1$$

vorausgesetzt wird

$$(30) \quad L_0 = \frac{\varrho^2 (g^2 - g_1^2)}{2} = -2 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \{ v^2 - 1 - 2 v \kappa i - \kappa^2 \}$$

und

$$(31) \quad L_0' = 0; \quad L_1' = \frac{i g^2 \varrho^2 (g^2 - g_1^2)}{(g^2 + g_1^2)} = -i 4 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{v^2 - 1 - \kappa^2 - 2 v \kappa i}{v^2 + 1 - \kappa^2 - 2 v \kappa i}.$$

Speziell für ultrarote Strahlung können wir setzen

$$(32) \quad g_1 = g v (1 - i) \quad (v = \kappa),$$

wo

$$(33) \quad v = \sqrt{\sigma c^2 T} = \sqrt{\sigma \lambda c}$$

ist und den Extinktionskoeffizienten bedeutet.

Dann ist

$$(34) \quad L_0 = 2 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 (1 + 2 i v^2),$$

1) Cl. Schaefer u. F. Reiche, l. c. p. 840.

und

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} L_1' &= i 4 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{(1 + 2 i \nu^2)}{(1 - 2 i \nu^2)} = -16 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{\nu^2}{(1 + 4 \nu^4)} \\ &\quad + i 4 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 \frac{(1 - 4 \nu^4)}{(1 + 4 \nu^4)}, \end{aligned} \right.$$

oder angenähert

$$(35a) \quad L_1' = -\frac{4}{\nu^2} \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2 - i 4 \left( \frac{\pi \varrho}{\lambda} \right)^2.$$

Da gewöhnlich  $\nu^2$  sehr groß ist. Z. B. für Kupfer ist  $\sigma = 64 \cdot 10^{-5}$ . Dann folgt für  $\lambda = 1 \mu$ ,  $\nu^2 = 1920$ .

Aus (34) und (35a) folgt

$$(36) \quad E_0 = A \left\{ 1 - \frac{2 \nu^2 (\pi \varrho)^2}{\lambda a \cos \alpha} + \frac{i (\pi \varrho)^2}{\lambda a \cos \alpha} \right\}$$

und

$$(37) \quad E_0' = A \left\{ 1 + \frac{2 (\pi \varrho)^2}{\lambda a \cos \alpha \xi^2} + \frac{2 i (\pi \varrho)^2}{\lambda a \cos \alpha} \right\},$$

und hieraus folgt  $q < 1$ , d. h. wir haben hier Hertzefekt.

### § 11. Drahtgitter. Exakte Lösung.

Wir gehen jetzt zur exakten Lösung der Beugung an einem Drahtgitter über, wobei wir senkrechte Inzidenz, d. h.  $\alpha = 0$  annehmen. Auch hier beschränken wir uns auf die Erscheinungen hinter dem Gitter und auf reelle Spektren. Die imaginären Spektren und die Erscheinungen vor dem Gitter lassen sich leicht aus dem Folgenden berechnen.

Fall I. Elektrische Kraft parallel der  $Z$ -Achse.

Wie wir sofort zeigen werden, lassen sich  $\varphi$  und  $Z$  darstellen durch folgende Reihen:

$$(1) \quad Z = A e^{i g \varrho \cos \delta} + A \sum_{s=0}^{\infty} \{ D_s Q_s(g \varrho) + G_s J_s(g \varrho) \} \cos s \delta$$

und

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{A g}{\omega} e^{i g \varrho \cos \delta} \cos \delta - \frac{i g A}{\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \{ D_s Q_s'(g \varrho) \\ &\quad + G_s J_s'(g \varrho) \} \cos s \delta. \end{aligned} \right.$$

Fall II. Magnetische Kraft parallel der  $Z$ -Achse.

Hierbei wird sein:

$$(3) \quad \zeta = -\frac{A g}{\omega} e^{i g \varrho \cos \delta} - \frac{g A}{\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \{ D_s' Q_s(g \varrho) + G_s' J_s(g \varrho) \} \cos s \delta$$

und

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} S_1 = -\frac{A g^2}{\omega^2} e^{i g \varrho \cos \delta} \cos \delta + \frac{i g^2 A}{\omega^2} \sum_{s=0}^{\infty} \{ D_s' Q_s'(g \varrho) \\ + G_s' J_s'(g \varrho) \} \cos s \delta. \end{aligned} \right.$$

Ein Vergleich mit § 10 und § 8 ergibt uns, daß wir, um die  $\mathcal{V}$  und  $\eta$  zu berechnen, in (1) § 10 zu setzen haben ( $\alpha = 0$ ):

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} D_s Q_s(g \varrho) + G_s J_s(g \varrho) &\text{ statt } L_s Q_s(g \varrho) \\ D_s Q_s'(g \varrho) + G_s J_s'(g \varrho) &\text{ statt } L_s Q_s'(g \varrho) \\ D_s' Q_s(g \varrho) + G_s' J_s(g \varrho) &\text{ statt } L_s' Q_s(g \varrho) \\ D_s' Q_s'(g \varrho) + G_s' J_s'(g \varrho) &\text{ statt } L_s' Q_s'(g \varrho). \end{aligned} \right.$$

Infolge von (5) erhalten wir dann ( $\alpha = 0$ ) aus (1) § 10:

$$(6) \quad V_0 = V_0' = \frac{\pi A}{2 g a} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s D_s,$$

$$(7) \quad V_n = \frac{\pi A}{g a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s D_s \cos s(\vartheta_n - \alpha),$$

$$(8) \quad V_n' = \frac{\pi A}{g a \cos \vartheta_n'} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s D_s \cos s(\vartheta_n' - \alpha),$$

$$(9) \quad \eta_0 = \eta_0' = \frac{\pi A}{2 g a} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s D_s',$$

$$(10) \quad \eta_n = \frac{\pi A}{g a \cos \vartheta_n} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s D_s' \cos s(\vartheta_n - \alpha),$$

$$(11) \quad \eta_n' = \frac{\pi A}{g a \cos \vartheta_n'} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s D_s' \cos s(\vartheta_n' - \alpha),$$

d. h. der Form nach dieselben Gleichungen wie (3) bis (8) § 10. Die  $G_s$  sind herausgefallen. Wie wir aber sehen werden, hängen die  $G_s$  von den  $D_s$  ab, wir brauchen deshalb nur die  $D_s$  zu bestimmen.

Die Amplitude  $E_0$  der elektrischen Kraft der direkt durchgegangenen Welle ist im Falle I wegen (64) § 4

$$(12) \quad E_0 = A + 2 V_0 = A \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2 a} \sum_{s=0}^{\infty} i^{s+1} (-1)^s D_s \right\}$$

und für Fall II

$$(13) \quad E_0' = A + 2\eta_0 = A \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2a} \sum_{s=0}^{\infty} \iota^{s+1} (-s)^s D_s' \right\}.$$

§ 12. Bestimmung der Koeffizienten  $D_s$  und  $D_s'$ .

Fall I. Elektrische Kraft parallel der  $Z$ -Achse.

In diesem Fall erhalten wir für  $\varphi$  und  $Z$  innerhalb des Drahtes an der Oberfläche desselben die Ausdrücke

$$(1) \quad Z = A \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s J_s(g_1 \varrho) \cos s \delta,$$

$$(2) \quad \varphi = -\frac{i g_1 A}{\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s J_s'(g_1 \varrho) \cos s \delta.$$

Fall II. Magnetische Kraft parallel der  $Z$ -Achse.

Hierbei haben wir

$$(3) \quad \zeta = -\frac{g_1 A}{\omega} \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s' J_s(g_1 \varrho) \cos s \delta$$

und

$$(4) \quad \mathcal{S}_1 = \frac{i g^2 A}{\omega^2} \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s' J_s'(g_1 \varrho) \cos s \delta.$$

Hieraus und aus den Ausdrücken (1) bis (4) § 11 erhalten wir wegen der Grenzbedingung und unter Berücksichtigung, daß

$$(5) \quad e^{i g \varrho \cos \delta} = J_0(g \varrho) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \iota^s J_s(g \varrho) \cos s \delta,$$

und

$$(6) \quad e^{i g \varrho \cos \delta} \cos \delta = -i \{ J_0'(g \varrho) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \iota^s J_0'(g \varrho) \cos s \delta \}$$

sind, nach Elimination von  $\xi_s$  resp.  $\xi_s'$ :

$$(7) \quad G_0 = \left\{ \frac{D_0}{L_0} - 1 \right\},$$

$$(8) \quad G_s = 2 \iota^s \left\{ \frac{D_s}{L_s} - 1 \right\}$$

und

$$(9) \quad G_0' = \left\{ \frac{D_0'}{L_0'} - 1 \right\},$$

$$(10) \quad G_s' = 2 \iota^s \left\{ \frac{D_s'}{L_s'} - 1 \right\},$$

wobei die Größen  $L_s$  und  $L'_s$  dieselben wie in den §§ 8 und 10 sind. Sind die  $G_s$  resp.  $G'_s$  gleich Null, beeinflussen sich also die Drähte nicht, so gehen die  $D_s$  in  $L_s$  über und wir haben den Fall des § 8.

Die Nummer des Drahtes bezeichnen wir durch  $\mu$ .  $\mu$  kann die Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  inkl. der Null annehmen (Fig. 13). Unter  $r_\mu$  verstehen wir die Entfernung von der Achse

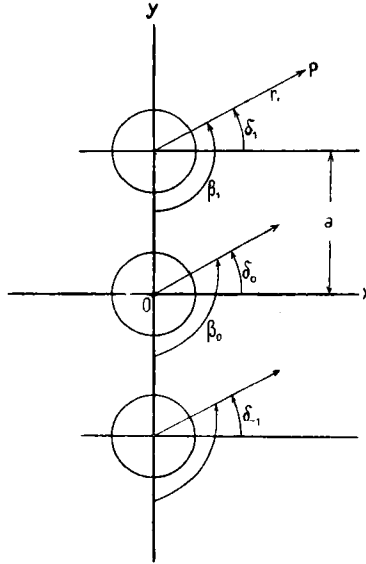


Fig. 13.

des  $\mu^{\text{ten}}$  Drahtes bis zu einem Punkt  $P$ . Alle anderen Größen sind aus der Figur ersichtlich.

Wir setzen

$$(11) \quad T_\mu = \sum_{\tau=0}^{\tau=\infty} E_\tau Q_\tau (g r_\mu) \cos \tau \delta_\mu$$

und

$$(12) \quad \Psi = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} T_\mu.$$

Es ist dann, abgesehen von dem Faktor  $e^{i\omega t}$ , im Falle I  $\Psi$  die von dem Drahtgitter reflektierte elektrische Kraft, und im Falle II die von dem Drahtgitter reflektierte magnetische Kraft. Infolgedessen ist das Folgende für beide Fälle gültig.

Wir zerlegen nun  $T_\mu$  in eine Reihe nach Vielfachen des Winkels  $\delta_0$  um die Achse des 0<sup>ten</sup> Drahtes, längs seiner Oberfläche.

Wir setzen z. B.  $\mu = 1$ . Dann haben wir:<sup>1)</sup>

$$(13) \left\{ \begin{aligned} T_1 &= \sum_{\tau=0}^{\infty} E_\tau Q_\tau(g r_1) \cos \tau \delta_1 = \sum_{\tau=0}^{\infty} E_\tau Q_\tau(g r_1) \cos \frac{\tau \pi}{2} \cos \tau \beta_1 \\ &+ \sum_{\tau=0}^{\infty} E_\tau Q_\tau(g r_1) \sin \frac{\tau \pi}{2} \sin \tau \beta_1 \\ &= H_0 J_0(g \varrho) + \sum_{s=1}^{\infty} H_s J_s(g \varrho) \cos s \beta_0 \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} K_s J_s(g \varrho) \sin s \beta_0 = H_0 J_0(g \varrho) \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ H_s \cos \frac{s \pi}{2} + K_s \sin \frac{s \pi}{2} \right\} J_s(g \varrho) \cos s \delta \\ &- \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ H_s \sin \frac{s \pi}{2} - K_s \cos \frac{s \pi}{2} \right\} J_s(g \varrho) \sin s \delta, \end{aligned} \right.$$

wo wir statt  $\delta_0$ ,  $\delta$  geschrieben haben. Es bedeuten ferner

$$(14) \quad H_0 = \sum_{\tau=0}^{\infty} E_\tau \cos \frac{\tau \pi}{2} Q_\tau(g a),$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} H_s &= (-1)^s \sum_{\tau=0}^{\infty} E_\tau (-1)^\tau \cos \frac{\tau \pi}{2} \left\{ Q_{s-\tau}(g a) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^\tau Q_{s+\tau}(g a) \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} K_s &= (-1)^s \sum_{\tau=1}^{\infty} E_\tau (-1)^\tau \sin \frac{\tau \pi}{2} \left\{ Q_{s-\tau}(g a) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^\tau Q_{s+\tau}(g a) \right\}. \end{aligned} \right.$$

1) W. v. Ignatowsky, Archiv d. Mathematik und Phys. 18. p. 323. 1911. Diese Formel hat noch einmal, wie in der Einleitung bemerkt, Hr. Závřiska abgeleitet. Am Schluß meiner Arbeit habe ich ausdrücklich auf die Anwendung derselben für die Gittertheorie aufmerksam gemacht.



Ganz analog erhalten wir für den  $-1^{\text{ten}}$  Draht:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} T_{-1} &= H_0 J_0(g \varrho) + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ H_s \cos \frac{s\pi}{2} + K_s \sin \frac{s\pi}{2} \right\} J_s(g \varrho) \cos s \delta \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ H_s \sin \frac{s\pi}{2} - K_s \cos \frac{s\pi}{2} \right\} J_s(g \varrho) \sin s \delta, \end{aligned} \right.$$

und deshalb

$$(18) \left\{ \begin{aligned} T_1 + T_{-1} &= 2 H_0 J_0(g \varrho) \\ &+ 2 \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ H_s \cos \frac{s\pi}{2} + K_s \sin \frac{s\pi}{2} \right\} J_s(g \varrho) \cos s \delta. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt

$$(19) \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} T_{\mu} + \sum_{\mu=-1}^{\infty} T_{\mu} = \sum_{s=0}^{\infty} M_s J_s(g \varrho) \cos s \delta.$$

Und demnach

$$(20) \quad \Psi = \sum_{s=0}^{\infty} \{ E_s Q_s(g \varrho) + M_s J_s(g \varrho) \} \cos s \delta.$$

Wir führen jetzt die Bezeichnung

$$(21) \quad S_{2s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} Q_{2s}(g \varrho \mu)$$

ein. Dann folgt aus (18), (19) und (14) bis (16)

$$(22) \quad M_0 = 2 \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^{\tau} E_{2\tau} S_{2\tau},$$

$$(23) \quad M_{2s} = 2 (-1)^s \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^{\tau} E_{2\tau} \{ S_{2(s-\tau)} + S_{2(s+\tau)} \}$$

und

$$(24) \quad M_{2s-1} = 2 (-1)^s \sum_{\tau=1}^{\infty} (-1)^{\tau} E_{2\tau-1} \{ S_{2(s-\tau)} + S_{2(s+\tau-1)} \}.$$

Ein Vergleich von (20) mit (1) bis (4) ergibt uns sofort, daß die Gleichungen (7) bis (10) übergehen in folgende:

$$(25) \quad \left\{ \frac{D_0}{L_0} - 1 \right\} = 2 \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^{\tau} D_{2\tau} S_{2\tau},$$

$$(26) \quad \iota^{2s} \left\{ \frac{D_{2s}}{L_{2s}} - 1 \right\} = (-1)^s \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^{\tau} D_{2\tau} \{ S_{2(s-\tau)} + S_{2(s+\tau)} \},$$

$$(27) \quad \iota^{2s-1} \left\{ \frac{D_{2s-1}}{L_{2s-1}} - 1 \right\} = (-1)^s \sum_{\tau=1}^{\infty} (-1)^{\tau} D_{2\tau-1} \{ S_{2(s-\tau)} + S_{2(s+\tau-1)} \}$$

und analoge Gleichungen für  $D'_s$ .

Aus den Gleichungen (25) bis (27) bestimmen sich die  $D$  und hinterher aus (6) bis (11) die  $V$  und  $\eta$ .

Hierzu müssen aber die Summen (21) bekannt sein. Diese Summen lassen sich tatsächlich bestimmen<sup>1)</sup>, und zwar ist

$$(28) \left\{ \begin{aligned} S_{2s} &= \frac{ip}{4} + \frac{1}{4s} + \frac{ip}{2} \sum_{n=1}^{n=n_1} \frac{e^{2is\vartheta_n'}}{\cos \vartheta_n'} \\ &- \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{\mu=s} \frac{2^{2\mu} p^{2\mu} (s+\mu-1)! B_{2\mu}}{2^{\mu!} (s-\mu)!} \\ &- \frac{(-1)^s p}{2} \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p^2 n^2 - 1}} \{pn - \sqrt{p^2 n^2 - 1}\}^{2s} \end{aligned} \right.$$

und

$$(29) \left\{ \begin{aligned} S_0 &= \frac{i(p-\pi)}{4} + \frac{1}{2} \lg \frac{2p}{\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=n_1} \frac{1}{n} \\ &+ \frac{ip}{2} \sum_{n=1}^{n=n_1} \frac{1}{\cos \vartheta_n'} - \frac{1}{2} \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{pn}{\sqrt{p^2 n^2 - 1}} - 1 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei bedeuten

$$(30) \quad p = \frac{\lambda}{a},$$

$$(31) \quad \sin \vartheta_n' = \frac{n\lambda}{a} = np = -\sin \vartheta_n; \quad \cos \vartheta_n' = \sqrt{1 - n^2 p^2}.$$

$\gamma$  hat dieselbe Bedeutung wie in § 1,  $n_1$  ist derjenige größte Wert von  $n$ , für welchen noch  $n_1 p < 1$  ist (demnach ist  $(n_1 + 1)p > 1$ ) und  $B_{2\mu}$  sind die Bernoullischen Zahlen:

$$(32) \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = \frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42}; \quad B_8 = \frac{1}{30}; \quad B_{10} = \frac{5}{66} \text{ usw.};$$

in (28) muß  $s \geq 1$  sein. Ist

$$(33) \quad p > 1, \quad \text{d. h.} \quad \lambda > a,$$

so erhalten wir statt (28) und (29)

$$(34) \quad S_0 = \frac{i(p-\pi)}{4} + \frac{1}{2} \lg \frac{2p}{\gamma} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{pn}{\sqrt{p^2 n^2 - 1}} - 1 \right\}$$

1) W. v. Ignatowsky, Archiv der Mathematik und Physik. 23. 1914.

und

$$(35) \left\{ \begin{aligned} S_{2s} &= \frac{ip}{4} + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{\mu=s} \frac{2^{2\mu} p^{2\mu} (s + \mu - 1)!}{2^{\mu!} (s - \mu)!} B_{2\mu} \\ &\quad - \frac{(-1)^s p}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p^2 n^2 - 1}} \{pn - \sqrt{p^2 n^2 - 1}\}^{2s}. \end{aligned} \right.$$

Außerdem ist aus (21) ersichtlich, daß

$$(36) \quad S_{2s} = S_{-2s}$$

sein wird. Ebenfalls ist aus (21) ersichtlich, da  $ag = 2\pi/p$  ist, daß für  $p = 0$ , d. h.  $a$  unendlich groß in bezug auf  $\lambda$ ,

$$(37) \quad S_{2s} = 0; \quad p = 0; \quad a = \infty$$

wird. In diesem Fall gehen aber, wegen (25) bis (28), die  $D$  in die  $L$  über. Deshalb ist auch die Vernachlässigung der gegenseitigen Beeinflussung der Drähte bei kleinem  $\lambda/a$ , wie es Cl. Schaefer und F. Reiche<sup>1)</sup> annahmen, gestattet. Einen Aufschluß darüber, bis zu welchem Grade diese Annahme berechtigt ist, können uns nur die Werte  $S_{2s}$ , mit Hilfe der Gleichungen (25) bis (28) geben.

Für einigermaßen große  $p$  können wir statt (34) und (35) schreiben

$$(38) \quad S_0 = \frac{i(p - \pi)}{4} + \frac{1}{2} \lg \frac{2p}{\gamma}$$

und

$$(39) \quad S_{2s} = \frac{ip}{4} + \frac{1}{4s} - \frac{2^{2s} p^{2s} B_{2s}}{8s} \left. \vphantom{\frac{ip}{4}} \right\} p \text{ groß,}$$

und speziell für große  $s$ , da dann bekanntlich  $B_{2s}$  groß wird,

$$(39a) \quad S_{2s} = - \frac{2^{2s} p^{2s} B_{2s}}{8s} \quad s \text{ groß.}$$

Ist

$$(40) \quad \frac{1}{2} < p < 1,$$

so ist

$$(41) \quad \begin{cases} n_1 = 1; & \cos \vartheta_1' = \sqrt{1 - p^2}; & \sin \vartheta_1' = p; \\ \cos 2 \vartheta_1' = 1 - 2p^2; & \sin 2 \vartheta_1' = 2p \sqrt{1 - p^2}. \end{cases}$$

1) Cl. Schaefer u. F. Reiche l. c. p. 819.

Und wir erhalten statt (28) und (29)

$$(42) \left\{ \begin{aligned} S_0 &= \frac{i(p-\pi)}{4} + \frac{1}{2} \lg \frac{2p}{\gamma} + \frac{1}{2} + \frac{ip}{2\sqrt{1-p^2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{pn}{\sqrt{p^2 n^2 - 1}} - 1 \right\} \end{aligned} \right.$$

und

$$(43) \left\{ \begin{aligned} S_{2s} &= \frac{ip}{4} + \frac{1}{4s} + \frac{ip \cos 2s \vartheta_1'}{2 \cos \vartheta_1'} - \frac{p \sin 2s \vartheta_1'}{2 \cos \vartheta_1'} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{\mu=s} \frac{2^{2\mu} p^{2\mu} (s+\mu-1)! B_{2\mu}}{2^{\mu!} (s-\mu)!} \\ &\quad - \frac{(-1)^s p}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p^2 n^2 - 1}} \{pn - \sqrt{p^2 n^2 - 1}\}^{2s}. \end{aligned} \right.$$

§ 13. Umformung der Resultate zwecks Ausrechnung.  
Absolute Leiter. Sehr große Wellenlänge.

Wir werden im folgenden nur die direkt durchgegangene Welle zu berechnen versuchen, weshalb für uns die Formeln (12) und (13) § 11 in Betracht kommen. Nun sind, wie aus (25) bis (27) § 12 ersichtlich, die  $D_s$  mit dem geraden Index vollkommen unabhängig von denjenigen mit ungeradem Index.

Deshalb setzen wir als *erste Annäherung* statt (12) und (13) § 11:

$$(1) \quad E_0 = A \left\{ 1 + \frac{p}{2} (i D_0 + D_1) \right\}$$

und

$$(2) \quad E_0' = A \left\{ 1 + \frac{p}{2} (i D_0' + D_1') \right\},$$

und berechnen  $D_0, D_1$  resp.  $D_0', D_1'$  aus (25) und (27), indem wir nur die ersten Glieder rechterseits berücksichtigen, d. h. aus den Formeln

$$(3) \quad \frac{D_0}{L_0} - 1 = 2 D_0 S_0$$

und

$$(4) \quad i \left\{ \frac{D_1}{L_1} - 1 \right\} = D_1 \{S_0 + S_2\}.$$

Hieraus folgt

$$(5) \quad D_0 = \frac{L_0}{1 - 2 L_0 S_0}; \quad D_1 = \frac{i L_1}{i - L_1 (S_0 + S_2)}$$

und demnach

$$(6) \quad i D_0 - D_1 = \frac{i \{i L_0 + L_1 - L_0 L_1 (3 S_0 + S)\}}{(1 - 2 L_0 S_0) \{i - L_1 (S_0 + S_2)\}}$$

und für absolute Leiter, wegen (9) § 10;

$$(7) \quad i D_0 + D_1 = \frac{-i \{J_0(g \varrho) Q_1(g \varrho) + 2 J_1(g \varrho) Q_0(g \varrho) + 2 J_0(g \varrho) J_1(g \varrho) (3 S_0 + S_2)\}}{\{Q_0(g \varrho) + 2 J_0(g \varrho) S_0\} \{Q_1(g \varrho) + 2 J_1(g \varrho) (S_0 + S_2)\}}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für  $i D_0' + D_1'$  erhalten wir aus (6), wenn wir dort statt  $L$   $L'$  setzen, resp. aus (7), falls wir dort die Derivierten der Zylinderfunktionen setzen. Dies wollen wir im folgenden beachten und deshalb nur die  $D$  berechnen.

Als zweite Annäherung setzen wir:

$$(8) \quad E_0 = A \left\{ 1 + \frac{p}{2} [i(D_0 - D_2) + D_1 - D_3] \right\}$$

und berechnen die  $D$  aus den Gleichungen (25) bis (27) § 12, indem wir nur die ersten zwei Glieder rechterseits beibehalten, d. h. aus den Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{D_0}{L_0} - 1 = 2 D_0 S_0 - 2 D_2 S_2 \\ \frac{D_2}{L_2} - 1 = 2 D_0 S_2 - D_2 \{S_0 + S_4\} \end{cases}$$

und

$$(10) \quad \begin{cases} i \left\{ \frac{D_1}{L_1} - 1 \right\} = D_1 \{S_0 + S_2\} - D_3 \{S_2 + S_4\}. \\ i_3 \left\{ \frac{D_3}{L_3} - 1 \right\} = -D_1 \{S_2 + S_4\} + D_3 \{S_0 + S_6\}. \end{cases}$$

Aus (9) ergibt sich

$$(11) \quad D_0 = \frac{L_0 \{1 + L_2 (S_0 - 2 S_2 + S_4)\}}{M},$$

$$(12) \quad D_2 = \frac{L_2 \{1 + 2 L_0 (S_2 - S_0)\}}{M}$$

und

$$(13) \quad D_0 - D_2 = \frac{L_0 - L_2 + L_0 L_2 (3 S_0 - 4 S_2 + S_4)}{M},$$

wo

$$(14) \quad M = \{1 + L_2 (S_0 + S_4)\} \{1 - 2 L_0 S_0\} + 4 J_0 J_2 S_2^2$$

bedeutet.

Für absolute Leiter ist:

$$(15) \quad D_0 - D_2 = - \frac{J_0 Q_2 + 2 J_2 Q_0 + 2 J_0 J_2 (3 S_0 - 4 S_2 + S_4)}{\{Q_2 + 2 J_2 (S_0 + S_4)\} \{Q_0 + 2 J_0 S_0\} - 8 J_0 J_2 S_2^2},$$

wobei zur Vereinfachung z. B. statt  $J_0(g \varrho)$ ,  $J_0$  geschrieben ist.

Aus (10) folgt:

$$(16) \quad D_3 = \frac{-L_3 + i L_1 L_3 (S_4 - S_0)}{M_1},$$

$$(17) \quad D_1 = \frac{-L_1 + i L_1 L_3 (S_0 - S_2 - S_4 + S_6)}{M_1}$$

und

$$(18) \quad D_1 - D_3 = \frac{L_3 - L_1 + i L_1 L_3 \{2 S_0 - S_2 - 2 S_4 + S_6\}}{M_1},$$

wo

$$(19) \quad M_1 = \{i - L_1 (S_0 + S_2)\} \{i + L_3 (S_0 + S_6)\} + L_1 L_3 (S_2 + S_4)^2$$

bedeutet. Für absolute Leiter ist

$$(20) \quad D_1 - D_3 = \frac{i \{2 J_3 Q_1 + 2 J_1 Q_3 + 4 J_1 J_3 (2 S_0 - S_2 - 2 S_4 + S_6)\}}{-\{Q_1 + 2 J_1 (S_0 + S_2)\} \{Q_3 + 2 J_3 (S_0 + S_6)\} + 4 J_1 J_3 (S_2 + S_4)^2}.$$

Ist die Wellenlänge, d. h. aus  $p$ , sehr groß, so können wir wegen (38) und (39) § 12 setzen

$$(21) \quad \begin{cases} S_0 = \frac{i(p - \pi)}{4} + \frac{1}{2} \lg \frac{2p}{\gamma}, \\ S_2 = -\frac{p^2}{12}; \quad S_4 = -\frac{p^4}{30}; \quad S_6 = -\frac{4p^6}{63}. \end{cases}$$

Machen wir noch die Vernachlässigung, daß wir in den Summen aus  $S_s$  nur das  $S_s$  mit dem größten  $s$  beibehalten, z. B. statt  $S_0 + S_2$  einfach  $S_2$  setzen, so erhalten wir statt (13) wegen (11) § 12, und da  $i\pi/2 = \lg i$  ist,

$$(22) \quad D_0 - D_2 = \frac{-1 + \left(\frac{\pi \varrho}{\lambda}\right)^4 \left\{2 \lg \frac{\varrho \varrho i \gamma}{2} - \frac{p^4}{15}\right\}}{\left\{1 + \frac{1}{15} \left(\frac{\pi \varrho}{a}\right)^4\right\} \left\{\frac{i p}{2} + \lg \frac{2\pi \varrho}{a}\right\} + \frac{1}{18} \left(\frac{\pi \varrho}{a}\right)^4}$$

und

$$(23) \quad D_1 - D_3 = \eta \left(\frac{\pi \varrho}{\lambda}\right)^2 \frac{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi \varrho}{\lambda}\right)^4 + \frac{4}{3 \cdot 63} \cdot \left(\frac{\pi \varrho}{a}\right)^6}{\left\{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \varrho}{a}\right)^2\right\} \left\{1 + \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 63} \left(\frac{\pi \varrho}{a}\right)^6\right\} - \frac{4}{3 \cdot 900} \left(\frac{\pi \varrho}{a}\right)^8}.$$

Aus (22) und (23) ersehen wir, daß

$$(24) \quad D_0 - D_2 = D_1 - D_3 = 0 \text{ für } \varrho = 0$$

sein wird.

Für  $\varrho \neq 0$  können wir schreiben

$$(25) \quad D_0 - D_2 = -\frac{2}{i p},$$

da sich dann  $1 + \left(\frac{\pi \rho}{a}\right)^4 \frac{1}{15}$  im Zähler und Nenner gerade weghebt. Wir erhalten demnach

$$(26) \quad E_0 = A \cdot \frac{p}{2} (D_1 - D_3),$$

wofür wir, falls  $\rho < a/\pi$  ist, auch schreiben können

$$(27) \quad E_0 = A \cdot \frac{2}{a\lambda} (\pi \rho)^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \rho}{a}\right)^2},$$

was praktisch bei sehr langen Wellen mit vollkommener Polarisation gleichbedeutend ist.

Für  $E_0'$  erhalten wir einen Ausdruck, der annähernd gleich  $A$  ist und der die Durchlässigkeit der Wellen im Falle II beweist. Im allgemeinen sind die hier erhaltenen Ausdrücke anwendbar nur für  $\rho$  klein in bezug auf  $a$ , was schon aus (24) ersichtlich ist.

#### § 14. Arbeit von Du Bois und H. Rubens.<sup>1)</sup>

Es ist nun von Interesse, die gewonnenen Resultate auf den Fall anzuwenden, wo  $p$  nicht groß ist. Hierzu bietet sich die Gelegenheit auf Grund der Untersuchungen von Du Bois und H. Rubens. Dort schwankt  $p$  gerade um 1 herum.

Von den dort benutzten Wellenlängen wollen wir diejenigen von  $\lambda = 24\mu$  bis  $\lambda = 100\mu$  berücksichtigen. Es ist (33) § 10 für ultrarote Strahlung

$$(1) \quad g\nu = g\sqrt{\sigma\lambda c} = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma c}{\lambda}}.$$

Die Gitter waren aus verschiedenem Material. Für das am schlechtesten leitende Pt setzen wir  $\sigma = 6.10^{-5}$ . Dann haben wir bei der größten Wellenlänge  $\lambda = 100\mu$  und kleinsten  $a = 50\mu$  für den kleinsten Wert von  $g\nu\rho$  ca. 100. Dieser Wert ist aber immer noch groß genug, daß wir für  $J_s$  ( $g_1\rho$ ) seinen Näherungswert setzen können, und zwar

1) H. Du Bois u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 35. p. 243.

$$(2) \quad J_s(g_1 \varrho) = \sqrt{\frac{1}{2\pi g_1 \varrho}} \left\{ e^{i\left(g_1 e - \frac{(2s+1)\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(g_1 e - \frac{(2s+1)\pi}{4}\right)} \right\}.$$

Da nun  $g_1 \varrho = g \nu \varrho (1 - i)$  ist, so wird  $e^{g \nu \varrho} = e^{100}$  sehr groß sein und wir können einfach statt (2) schreiben

$$(3) \quad J_s(g_1 \varrho) = i^{-s} \sqrt{\frac{1}{2\pi g_1 \varrho}} e^{i\left(g_1 e - \frac{\pi}{4}\right)}$$

und statt  $J'_s(g_1 \varrho)$

$$(4) \quad \begin{cases} J'_s(g_1 \varrho) = \frac{s}{g_1 \varrho} \cdot J_s(g_1 \varrho) - J_{s+1}(g_1 \varrho) \\ \qquad \qquad \qquad = -i^{-s-1} \sqrt{\frac{1}{2\pi \varrho g_1}} e^{i\left(g_1 e - \frac{\pi}{4}\right)}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in (6) und (7) § 8 ein, so erhalten wir

$$(5) \quad L_s = 2i^s \cdot \frac{-g_1 J_s(g \varrho) - i g J'_s(g \varrho)}{i g Q'_s(g \varrho) + g_1 Q_s(g \varrho)}.$$

Nun ist

$$(6) \quad \frac{g_1}{g} = \nu(1 - i).$$

Für die kleinste Wellenlänge,  $\lambda = 24 \mu$  und Pt, ist der kleinste Wert von  $\nu$  ca. 65. Wir können deshalb als erste Annäherung statt (5) schreiben

$$(7) \quad L_s = -\frac{2i^s J_s(g \varrho)}{Q_s(g \varrho)}.$$

Aus den Gleichungen (25) bis (27) folgt, daß die  $D$  Funktionen von den  $S$  und  $L$  sein werden. Sind die  $L$  unabhängig vom Material, so sind es auch die  $D$ . Wegen (7) können wir nun schließen, daß die Versuche von Du Bois und H. Rubens in erster Annäherung *unabhängig vom Material* sind. Tatsächlich ersehen wir aus den Daten für die Gitter Pt<sub>1</sub> und Cu<sub>1</sub>, daß die entsprechenden beobachteten Werte annähernd parallel laufen.

Wir wollen deshalb im folgenden die Wirkung des Materials vernachlässigen und für  $L$  und  $L'$  die Werte (9) und (10) § 10 benutzen. Für die nächstfolgende zahlenmäßige Berechnung benötigen wir die Werte der  $S$ , die wir für einige Werte von  $p$  berechnet und in der Tab. I zusammengestellt haben.



Tabelle I.

$p = \frac{\lambda}{a}$	$S_0$	$S_2$	$S_4$	$S_6$
$\frac{24}{50} = 0,48$	0,3253 + $i$ 0,4653	-0,3954 - $i$ 0,3922	0,6053 + $i$ 0,3699	-0,9123 - $i$ 0,0382
$\frac{52}{50} = 1,04$	-1,2956 - $i$ 0,5254	+1,1164 + $i$ 0,2600	-0,5693 + $i$ 0,2600	-0,1817 + $i$ 0,2600
$\frac{100}{105} = 0,95238$	0,8048 + $i$ 1,0142	-0,7024 - $i$ 1,0332	1,4252 + $i$ 0,7407	-1,7023 + $i$ 0,6681
$\frac{100}{50} = 2$	0,3151 - $i$ 0,2854	-0,0360 + $i$ 0,5000	-0,9781 + $i$ 0,5000	-4,0657 + $i$ 0,5000

Hierbei wurden folgende Anzahl der Glieder in der letzten Summe in (28) resp. (29) § 12 benutzt:

Tabelle II.

$p$	$S_0$	$S_2$	$S_4$	$S_6$
$\frac{24}{50}$	$n = 3$ bis $n = 15$	$n = 3$ bis $n = 9$	$n = 3$ bis $n = 4$	$n = 3$
$\frac{52}{50}$	$n = 1$ bis $n = 10$	$n = 1$ bis $n = 8$	$n = 1$ bis $n = 3$	$n = 2$
$\frac{100}{105}$	$n = 2$ bis $n = 11$	$n = 2$ bis $n = 9$	$n = 2$ bis $n = 3$	$n = 2$
$\frac{100}{50}$	$n = 1$ bis $n = 6$	$n = 1$ bis $n = 4$	$n = 1$ bis $n = 2$	$n = 1$

Die Werte von  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $Q_0(x)$  entnahm ich aus den Tabellen.<sup>1)</sup> Die Werte der Zylinderfunktionen mit höherem Index als 1 resp. die Derivierten bestimmen sich aus den entsprechenden Rekursionsformeln.

1) Die Werte von  $J_0(x)$  und  $J_1(x)$  wurden entnommen aus „Funktionstafeln“ von E. Jahnke und F. Grude. Leipzig, B. G. Teubner. 1909. Weiter wurde benutzt die Tafel von J. R. Airey, Archiv der Mathematik und Physik 22. p. 30. 1913. Dort sind die Werte von  $\pi/2 Y_0(x)$  und  $\pi/2 Y_1(x)$  mit dem *negativen* Vorzeichen angegeben. Aus (12) § 1 berechnet sich dann  $Q_0(x)$  und  $Q_1(x)$ .

Wir wollen jetzt aus der Arbeit von Du Bois und H. Rubens diejenigen Resultate in eine Tabelle III zusammenfassen, welche wir diskutieren wollen.

Tabelle III.

Gitter	Cu <sub>1</sub>		Cu <sub>2</sub>	
a	50 μ		105 μ	
λ	J <sub>  </sub>	J <sub>⊥</sub>	J <sub>  </sub>	J <sub>⊥</sub>
24 μ	0,270	0,373		
52 μ	0,285	0,750	0,290	0,362
100 μ	0,038	0,731	0,263	0,587

Nun wollen wir zur zahlenmäßigen Berechnung übergehen. Es wurde gerechnet nach den Formeln (1) und (7) § 13 (*erste Annäherung*) und nach den Formeln (8), (15) und (20) § 13 (*zweite Annäherung*). Die Rechnung ist ziemlich mühsam und wir wollen nur das Endresultat angeben.

Tabelle IV.

$$\text{Cu}_1 \lambda = 24 \mu, a = 50 \mu, p = 0,48.$$

	J <sub>  </sub>	J <sub>⊥</sub>
Erste Annäherung . .	0,639	0,557
Zweite Annäherung . .	0,296	0,426

Die letzten Werte stimmen ziemlich gut mit den entsprechenden Werten der Tabelle III überein.

Aus den Ausdrücken für die  $S$  ersehen wir, daß diese Funktionen unstetig sind und zwar für  $p = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  usw. Bei diesen Werten von  $p$  müssen wir gewisse extreme Beobachtungswerte erwarten. Andererseits ist klar, daß falls  $\rho, \lambda$  und  $a$  sich im gleichen Verhältnis ändern, die Werte für  $J_{||}$  und  $J_{\perp}$  ungeändert bleiben.

Nun haben wir für Cu<sub>1</sub> ( $\lambda = 24 \mu$ ) und Cu<sub>2</sub> ( $\lambda = 52 \mu$ )  $p$  ca.  $\frac{1}{2}$ , aber in beiden Fällen ist  $p$  kleiner  $\frac{1}{2}$ . Die entsprechen-

den Werte, wie aus Tabelle III ersichtlich, stimmen gut überein.

Nehmen wir nun  $Cu_1$  ( $\lambda = 52 \mu$ ) und  $Cu_2$  ( $\lambda = 100 \mu$ ), so ist in beiden Fällen  $p$  ca. 1, aber für  $Cu_1$  ist  $p$  größer und für  $Cu_2$  kleiner als 1. Dieser Übergang über die extreme Stelle  $p = 1$  bedingt eine starke Änderung von  $\mathcal{S}$ , wie dies aus Tab. I zu ersehen ist. Deshalb kann man auch keine Übereinstimmung der entsprechenden Werte von  $J_{\parallel}$  und  $J_{\perp}$  erwarten. Aus Tab. III ersehen wir, daß hauptsächlich die Werte von  $J_{\perp}$  stark differieren.

Die Rechnung ergibt nun folgendes.

Tabelle V.

$Cu_1$   $\lambda = 52 \mu$ ,  $\alpha = 50 \mu$ ,  $p = 1.04$ .

	$J_{\parallel}$	$J_{\perp}$
Erste Annäherung . . .	0,938	0,922
Zweite Annäherung . . .	0,673	0,906

Tabelle VI.

$Cu_2$   $\lambda = 100 \mu$ ,  $\alpha = 105 \mu$ ,  $p = 0,95238$ .

	$J_{\parallel}$	$J_{\perp}$
Erste Annäherung . . .	0,188	0,717
Zweite Annäherung . . .	0,249	0,482

Eine zahlenmäßige Übereinstimmung mit den experimentellen Daten kann man hier nicht erwarten, da bei dieser extremen Stelle die angewandte Annäherung wahrscheinlich unzureichend ist, was man hauptsächlich bei  $Cu_1$  bemerkt. Aber man ersieht, daß die beiden  $J_{\perp}$  in demselben Sinne differieren wie die beobachteten in Tab. III. Außerdem, um bei einer solchen extremen Stelle eine gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten zu erzielen, muß die Strahlung genau monochromatisch sein, während bei Du Bois und H. Rubens nur eine gewisse mittlere Wellenlänge vorherrschte.

Tabelle VII.

Cu,  $\lambda = 100 \mu$ ,  $a = 50 \mu$ ,  $p = 2$ .

	$J_{\parallel}$	$J_{\perp}$
Erste Annäherung . . .	0,005	0,654

Auch hier wird wahrscheinlich die Nichtübereinstimmung teilweise von der Unreinheit der Strahlung herrühren und zwar muß man annehmen, daß noch Strahlung von *kurzer* Wellenlänge beigemischt war, denn wie ein Vergleich der Tab. VII mit V zeigt, erhöht sich die Durchlässigkeit beim Übergange von  $p = 2$  zu  $p = 1$ .

(Eingegangen 19. Februar 1914.)