

**4. Über das Prinzip der kleinsten Wirkung in  
der Elektrodynamik bewegter ponderabler Körper;  
von Jun Ishiwara.**

---

§ 1. Einleitung.

Die Einordnung aller bekannten reversiblen Prozesse unter ein einziges Prinzip, welches ihren Verlauf eindeutig bestimmt, ist seither eine der Hauptaufgaben der theoretischen Physik geworden, und man sieht jetzt als ein solches Prinzip bekanntlich das Prinzip der kleinsten Wirkung an.

In der Elektrodynamik hat schon Helmholtz<sup>1)</sup> eine Form des Prinzips der kleinsten Wirkung aufgestellt und daraus die Hertzschen Grundgleichungen sowie den Maxwell'schen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft abgeleitet. Da man aber gegenwärtig statt der Hertzschen Elektrodynamik ein auf Grund des Einsteinschen Relativitätsprinzips aufgebautes System annimmt, so folgt daraus unter anderem, daß die ponderomotorische Kraft nicht bloß durch den Maxwell'schen Spannungstensor bestimmt wird, sondern auch noch durch die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Bewegungsgröße. Einen Versuch, die elektromagnetischen Grundgleichungen sowie einen neuen, dem Relativitätsprinzip entsprechenden Ausdruck für die ponderomotorische Kraft aus einem Variationsprinzip herzuleiten, stellt die kürzlich erschienene Dissertation des Hrn. Henschke<sup>2)</sup> dar.

Ihm ist dies durch Annahme eines vierdimensionalen Skalars für die Wirkungsgröße in bezug auf die Vorgänge im Vakuum auch gelungen. Doch hat er bei der Verallgemeinerung seiner für das Vakuum erhaltenen Resultate auf den Fall be-

---

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 47. p. 1. 1892. Wiss. Abh. III p. 476 u. p. 597. Leipzig 1895.

2) E. Henschke, Berliner Dissertation, 1912; Ann. d. Phys. 40. p. 887. 1913.

wegter ponderabler Körper nur die Minkowskischen Grundgleichungen, dagegen keinen für die ponderomotorische Kraft plausiblen Ausdruck ermitteln können. Mir scheint jedoch der Grund für diese Unzulänglichkeit nicht etwa in einer unzureichenden Verallgemeinerung der Wirkungsgröße zu liegen, sondern in erster Linie darin, daß Henschke die Variation der Wirkungsgröße nicht richtig ausgeführt hat.

Er hat in dieser Arbeit aber weiter gezeigt, daß man durch Einfügung eines neuen Gliedes in das Variationsprinzip den Kraftausdruck, der seinerzeit von Abraham<sup>1)</sup> aufgestellt wurde, ableiten kann, daß man alsdann jedoch leider darauf verzichten muß, dem so abgeänderten Prinzip eine bestimmte Wirkungsgröße zuzuordnen.

Die große Bedeutung des genannten Prinzips läßt eine erneute Analyse der von Henschke berührten Frage als wünschenswert erscheinen. In der vorliegenden Mitteilung möchte ich nun beweisen, daß die Annahme einer Form der Wirkungsgröße, wie sie uns in der ersten unmodifizierten Fassung Henschkes vorliegt, die zweifellos auch die nahe-  
liegendste und zutreffendste sein dürfte,<sup>2)</sup> den schon früher von mir<sup>3)</sup> aufgestellten Ausdruck für die ponderomotorische Kraft ergibt. Hierbei bediene ich mich einmal der von Lorentz<sup>4)</sup> vorgeschlagenen Methode, nach der man die Variationen der von einem bestimmten substantiellen Punkte übertragenen Größen in Betracht zieht, ein anderes Mal der Helmholtz-  
schen Methode, bei der demgegenüber die Variationen der Größen in einem festen Raumpunkte betrachtet werden. Beide Methoden ergeben natürlich konkordante Resultate.

Die so für den elektromagnetischen Spannungstensor und die elektromagnetische Bewegungsgröße abgeleiteten Ausdrücke

---

1) M. Abraham, Rendiconti Circ. math. Palermo 28. p. 1. 1909; 30. p. 33. 1910.

2) Daß der hier für die Wirkungsgröße angenommene Ausdruck auch aus der Elektronentheorie eindeutig folgt, soll in meiner demnächst erscheinenden Arbeit über „die elektronentheoretische Begründung der Elektrodynamik bewegter Körper“ gezeigt werden.

3) J. Ishiwara, Proc. Tōkyō math.-phys. Soc. (2) 5. p. 310. 1910; Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 9. p. 560. 1912.

4) H. A. Lorentz, Enzyklopädie d. math. Wiss. V, 2. Art. 13, p. 130.

sind identisch mit denjenigen Minkowskis.<sup>1)</sup> Was die hierbei bestehende Abweichung der elektromagnetischen Impulsdichte von dem durch das Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit dividierten Energiestrom betrifft, so glaube ich, daß dieselbe sich weder mit der Theorie noch mit den bisherigen Erfahrungen im Widerspruch befindet.

§ 2. Die Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung.

Wir betrachten einen Raum  $\Sigma$  der vierdimensionalen Welt (im Minkowskischen Sinne), dessen dreidimensionale Begrenzung  $S$  genannt werde. Auf jede Volumeinheit des Bereiches  $\Sigma$  wirke eine ponderomotorische Viererkräft  $K$ , und auf jede Flächeneinheit der Begrenzung  $S$  ein Spannungstensor  $T$ . Beim mechanischen Gleichgewicht des gesamten Systems muß die Beziehung zwischen diesen beiden Größen bestehen:

$$(1) \quad \int_{\Sigma} K d\Sigma + \int_S (Tn) dS = 0,$$

wo  $n$  der Einheitsvierervektor nach der Richtung der äußeren Normale von  $dS$  ist. Nach dem Gauss'schen Satz transformierend, können wir aus (1) auch die für jedes Volumenelement geltende Gleichung

$$(2) \quad K = - \text{Div } T$$

erhalten.<sup>2)</sup>

Wir bezeichnen nun mit  $r$  den vom Koordinatenursprung nach einem in Betracht zu nehmenden Punkt gezogenen Radiusvektor. Dann ist jeder Volumeinheit die mechanische Wirkungsgröße im Betrag von  $(Kr)$ , jeder Flächeneinheit die im Betrag von  $((Tn), r)$  zuzuordnen. Die gesamte mechanische Wirkungsgröße beträgt also

$$(3) \quad W^{(m)} = \int_{\Sigma} (Kr) d\Sigma + \int_S ((Tn), r) dS.$$

1) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908. p. 53; zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik (Leipzig 1910), p. 42.

2) Alle im vorliegenden für mathematische Operationen verwendeten Bezeichnungen decken sich mit jenen in meinem Bericht „über die Relativitätstheorie“ im Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik, I. c.

Es seien ferner  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{H}$  die beiden Sechservektoren des elektromagnetischen Feldes,  $\mathbf{P}$  der elektrische Viererstrom. Der Vektor  $\mathbf{F}$  soll sich aus dem elektromagnetischen Viererpotential  $\Phi$  durch

$$(4) \quad \mathbf{F} = \text{Curl } \Phi$$

ergeben. Als elektromagnetische Wirkungsgröße wählen wir einen Skalar:

$$(5) \quad W^{(e)} = \int_{\Sigma} \{ -U + (\mathbf{P} \Phi) \} d\Sigma,$$

wo

$$(6) \quad U = \frac{1}{4} (\mathbf{F} \mathbf{H})$$

der Überschuß der magnetischen über die elektrische Energiedichte ist.

Die gesamte Wirkungsgröße läßt sich aus den beiden Größen (3) und (5) zusammensetzen:

$$(7) \quad W = W^{(m)} + W^{(e)}.$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung soll nun in seiner Allgemeinheit heißen:

Die erste Variation der gesamten Wirkungsgröße  $W$  verschwindet für ein abgeschlossenes physikalisches System; also

$$(8) \quad \delta W = 0.$$

### § 3. Die Ableitung der Grundgleichungen.

Es soll zunächst aus dem oben formulierten Prinzip eine einfache Ableitung der elektromagnetischen Grundgleichungen gegeben werden.

Wir sehen für diesen Zweck die Lage der Materie, die materiellen Konstanten, den elektrischen Viererstrom und die mechanischen Kräfte sämtlich als bekannte Funktionen der Koordinaten gegeben an. Dagegen lassen wir das elektromagnetische Viererpotential  $\Phi$  variieren und suchen die Bedingungen, die die Wirkungsgröße  $W$  zu einem Extremum machen sollen.

Hierbei verschwindet also die Variation der mechanischen Wirkungsgröße  $W^{(m)}$  und ist

$$(9) \quad \delta \int (\mathbf{P} \Phi) d\Sigma = \int (\mathbf{P} \delta \Phi) d\Sigma.$$

Bei der Berechnung der Variation von  $U$  beachte man zunächst, daß  $U$  ein vierdimensionaler Skalar, d. h. eine Invariante gegenüber Raumzeittransformationen ist. Wenn man also die entsprechenden Größen im mit den ponderablen Körpern bewegten Bezugssystem durch einen Strich kennzeichnet, so besteht die Beziehung:

$$(10) \quad \frac{1}{2}(\mathbf{F} \mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}' \mathbf{H}') = \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mu} - \varepsilon \mathfrak{E}'^2.$$

Darin bedeutet  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante,  $\mu$  die magnetische Permeabilität,  $\mathfrak{E}'$  die elektrische Feldstärke und  $\mathfrak{B}'$  die magnetische Induktion. Diese beiden letzten Vektoren bilden in bekannter Weise den Sechservektor  $\mathbf{F}'$  und stehen in engem Zusammenhang mit  $\Phi$ .<sup>1)</sup>

Die Variation von  $U$ , die eintritt, wenn man bei konstantem  $\varepsilon$  und  $\mu$  den Wert von  $\Phi$  variiert, ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{\mathfrak{B}'}{\mu} \delta \mathfrak{B}' - \varepsilon \mathfrak{E} \delta \mathfrak{E}' = \frac{1}{2}(\mathbf{H}' \delta \mathbf{F}') \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{H} \delta \mathbf{F}), \end{aligned}$$

und folglich hat man

$$\delta \int_{\Sigma} U d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{H} \delta \mathbf{F}) d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{H}, \text{Curl} \delta \Phi) d\Sigma.$$

Dieses Integral verwandelt sich aber noch durch partielle Integration in

$$\int_{\Sigma} (\text{Div} \mathbf{H}, \delta \Phi) d\Sigma + \int_s (\mathbf{H} \mathbf{n}) \delta \Phi dS.$$

Das Wirkungsprinzip (8) liefert daher die für jedes Volumenelement geltende Gleichung:

$$(11) \quad \text{Div} \mathbf{H} = P,$$

und die für jedes Flächenelement geltende

$$(12) \quad (\mathbf{H} \mathbf{n}) = 0.$$

Die Gleichung (11) und die bereits aus (4) nach der vektoranalytischen Formel:

$$\text{Div}(\text{Curl}^* \Phi) = 0$$

zu folgernde Gleichung:

1) Vgl. z. B. Minkowski, l. c.

$$(13) \quad \text{Div } \mathbf{F}^* = 0$$

bilden zusammen das System der Grundgleichungen.

Aus (11) folgt noch nach der Identität:

$$\text{div } (\text{Div } \mathbf{H}) = 0,$$

die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität:

$$(14) \quad \text{div } \mathbf{P} = 0.$$

Wir wollen hier noch die Formeln hinschreiben, die sich aus (11) und (13) durch Integration über ein beliebiges dreidimensionales Volumen  $S$ , dessen Begrenzung  $\sigma$  ist, ergeben:

$$\int_{\sigma} \mathbf{H}_{\sigma}^* d\sigma = \int_S \mathbf{P}_n dS, \quad 1)$$

$$\int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} d\sigma = 0,$$

und diejenige, die aus (4) durch Integration über eine beliebige zweidimensionale Fläche  $\sigma$ , deren Randkurve  $\lambda$  sei, geliefert wird:

$$\int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} d\sigma = \int_{\lambda} \Phi_{\lambda} d\lambda.$$

Nach diesen Integralformeln ersieht man, daß den Größen  $(\mathbf{P}_n dS)$ ,  $(\mathbf{H}_{\sigma}^* d\sigma)$ ,  $(\mathbf{F}_{\sigma} d\sigma)$ ,  $(\Phi_{\lambda} d\lambda)$  für ein substantielles Teilchen bestimmte physikalische Bedeutungen zukommen.

#### § 4. Die erste Methode der Ableitung der Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte.

Um die Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte aus dem Variationsprinzip abzuleiten, haben wir nun die Variation der Koordinaten  $r$  auszuführen. Wir denken uns nämlich eine virtuelle Verschiebung  $\delta r$  der substantiellen Punkte, und wir bezeichnen mit dem Zeichen  $\delta$ , welches vor eine andere Größe gesetzt wird, diejenige Variation, die der einem und demselben substantiellen Punkte zugehörige Wert der betreffenden Größe durch die genannte virtuelle Verschiebung erleidet.

---

1) Es bedeutet  $\mathbf{H}_{\sigma}^*$  die Komponente von  $\mathbf{H}^*$  nach dem Flächenelement  $d\sigma$ ,  $\mathbf{P}_n$  die Komponente von  $\mathbf{P}$  nach der äußeren Normale  $n$  von  $dS$ .

Wir wollen nun annehmen, daß sämtliche für einen substantiellen Punkt charakteristischen physikalischen Größen bei der virtuellen Verschiebung des Punktes unverändert bleiben. Unter solchen Größen verstehen wir die oben hervorgehobenen elektromagnetischen Größen  $(\mathbf{P}_n dS)$ ,  $(\mathbf{H}_\sigma^* d\sigma)$ ,  $(\mathbf{F}_\sigma d\sigma)$ ,  $(\Phi_\lambda d\lambda)$ , und außerdem die auf substantielles Element wirkenden, mechanischen Kräfte  $(\mathbf{K} d\Sigma)$ ,  $((\mathbf{T}\mathbf{n}) dS)$  sowie die materiellen Konstanten  $\epsilon$  und  $\mu$ . Es lauten also die Bedingungen:<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} (15a) \quad & \delta(\mathbf{H}_\sigma^* d\sigma) = 0, & \delta(\mathbf{F}_\sigma d\sigma) = 0, \\ (15b) \quad & \delta(\mathbf{P}_n dS) = 0, & \delta(\Phi_\lambda d\lambda) = 0, \\ (15c) \quad & \delta(\mathbf{K} d\Sigma) = 0, & \delta((\mathbf{T}\mathbf{n}) dS) = 0, \\ (15d) \quad & \delta\epsilon = 0, & \delta\mu = 0. \end{aligned}$$

Unter diesen Bedingungen haben wir die Variation der Wirkungsgröße auszurechnen.

Zunächst die mechanische Wirkungsgröße betreffend, haben wir wegen (15c)

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W^{(m)} &= \int(\mathbf{r}, \delta(\mathbf{K} d\Sigma)) + \int(\mathbf{K} \delta \mathbf{r}) d\Sigma = \int(\mathbf{r}, \delta(\mathbf{T}, \mathbf{n}) dS) \\ &+ \int((\mathbf{T}\mathbf{n}) \delta \mathbf{r}) dS = \int(\mathbf{K} \delta \mathbf{r}) d\Sigma + \int((\mathbf{T}\mathbf{n}) \delta \mathbf{r}) dS. \end{aligned} \right.$$

Versteht man nun für einen Augenblick unter  $dn$  ein Linienelement, welches auf die Richtung von  $\Phi$  fällt, und unter  $dS$  ein zu  $dn$  senkrechtes Volumelement, so wird

$$\delta \int_{\Sigma} (\mathbf{P} \Phi) d\Sigma = \int_{\Sigma} ((\mathbf{P}_n dS) \delta(\Phi_n dn)) + \int_{\Sigma} ((\Phi_n dn) \delta(\mathbf{P}_n dS)),$$

welches aber wegen (15b) verschwindet.

Für die Variation des Integrals von  $U$  setze man zuerst

$$(17) \quad \delta \int_{\Sigma} U d\Sigma = \int_{\Sigma} \delta U d\Sigma + \int_{\Sigma} U \delta(d\Sigma).$$

Den Wert von  $\delta U$  berechnet man, indem man nunmehr die Größe  $(\mathbf{F}\mathbf{H})$  statt (10) ausdrückt in der Form:

$$(18) \quad \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}'\mathbf{H}') = \mu \mathfrak{G}'^2 - \frac{\mathfrak{D}'^2}{\epsilon},$$

<sup>1)</sup> Es sind freilich nicht alle diese Bedingungen voneinander unabhängig.

wo  $\mathfrak{H}'$  die magnetische Feldstärke,  $\mathfrak{D}'$  die dielektrische Verschiebung ist, folgendermaßen:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta U &= \mu \mathfrak{H}' \delta \mathfrak{H}' - \frac{\mathfrak{D}'}{\epsilon} \delta \mathfrak{D}' = \frac{1}{2}(\mathbf{F}' \delta \mathbf{H}') \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{F} \delta \mathbf{H}). \end{aligned} \right.$$

Wir müssen noch  $\delta \mathbf{H}$  in seiner Abhängigkeit von  $\delta \mathbf{r}$  ausdrücken. Dazu verwenden wir die allgemeine Beziehung:

$$\delta(\mathbf{H}_\sigma^* d\sigma) = \delta \mathbf{H}_\sigma^* \cdot d\sigma + \mathbf{H}_\sigma^* \delta(d\sigma),$$

und

$$\mathbf{H}_\sigma^* \delta(d\sigma) = -\{(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}^* + [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}]^* + \text{Curl}(\mathbf{H}^*, \delta \mathbf{r})\}_\sigma d\sigma^1,$$

woraus sich ergibt:

$$\delta(\mathbf{H}_\sigma^* d\sigma) = \{\delta \mathbf{H}^* - (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}^* - [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}]^* - \text{Curl}(\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r})\}_\sigma d\sigma^2$$

Da die linke Seite dieser Identität nach (15a) gleich Null zu setzen ist, kann man daraus schließen:

$$\delta \mathbf{H}^* = (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}^* + [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}]^* + \text{Curl}(\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r}),$$

oder

$$(20) \quad \delta \mathbf{H} = (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H} + [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}] + \text{Curl}^*(\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r}).$$

Setzt man diesen Wert in den Ausdruck (19) von  $\delta U$  ein, und integriert über den Bereich  $\Sigma$ , so bekommt man nach einer partiellen Integration und weiterer Umordnung

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Sigma} \delta U d\Sigma &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{F}(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}) d\Sigma + \int_{\Sigma} (\mathbf{F}, \text{Div } \mathbf{H}) \delta \mathbf{r} d\Sigma \\ &- \int_{\Sigma} (\mathbf{H}^*, \text{Div } \mathbf{F}^*) \delta \mathbf{r} d\Sigma - \int_{\Sigma} ((\mathbf{F}^* \mathbf{n})(\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r})) dS. \end{aligned} \right.$$

Das andere Integral in (17) kann man, mit Rücksicht auf (6) und

$$(22) \quad \delta(d\Sigma) = \text{div}(\delta \mathbf{r}) d\Sigma,$$

so berechnen:

$$(23) \quad \int_{\Sigma} U \delta(d\Sigma) = -\frac{1}{4} \int_{\Sigma} (\delta \mathbf{r}, \diamond)(\mathbf{F} \mathbf{H}) d\Sigma + \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (\mathbf{F} \mathbf{H})(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS.$$

Die Summe der beiden Integrale (21) und (23) beträgt also

1) Vgl. z. B. E. Henschke, Berliner Diss. I. c. p. 42.

2) I. c. p. 41, Gleichung (80), u. p. 42, Gleichung (79).



$$(24) \left\{ \begin{aligned} \delta \int_{\Sigma} U d \Sigma &= \int_{\Sigma} (\mathbf{F}, \text{Div } \mathbf{H}) \delta \mathbf{r} d \Sigma - \int_{\Sigma} (\mathbf{H}^*, \text{Div } \mathbf{F}^*) \delta \mathbf{r} d \Sigma \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{F}(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}) d \Sigma - \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (\delta \mathbf{r}, \diamond) (\mathbf{F} \mathbf{H}) d \Sigma \\ &- \int_{\mathcal{S}} ((\mathbf{F}^* \mathbf{n})(\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r})) d \mathcal{S} + \frac{1}{4} \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \mathbf{H})(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) d \mathcal{S}. \end{aligned} \right.$$

Eine Rücksicht auf die Grundgleichungen (11) sowie (13) und einige Umformungen führen diese Gleichung noch zu

$$(24) \left\{ \begin{aligned} \delta \int_{\Sigma} U d \Sigma &= \int_{\Sigma} (\mathbf{F} \mathbf{P}) \delta \mathbf{r} d \Sigma + \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (\mathbf{F}(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}) d \Sigma \\ &- \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (\mathbf{H}(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{F}) d \Sigma + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} ([[ \mathbf{F} \mathbf{H} ]], \mathbf{n}) \delta \mathbf{r} d \mathcal{S} \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} ([[ \mathbf{H}^* \mathbf{F}^* ]], \mathbf{n}) \delta \mathbf{r} d \mathcal{S}. \end{aligned} \right.$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung ergibt daher die Forderung:

$$(25) \quad \mathbf{K} = (\mathbf{F} \mathbf{P}) + \frac{1}{4} (\mathbf{F} \diamond \mathbf{H}) - \frac{1}{4} (\mathbf{H} \diamond \mathbf{F})^1,$$

und

$$(26) \quad \mathbf{T} = -\frac{1}{2} \{ [[ \mathbf{H}^* \mathbf{F}^* ]] - [[ \mathbf{F} \mathbf{H} ]] \}.$$

Man kann leicht verifizieren, daß diese beiden Ausdrücke (25) und (26) gerade der Gleichung (2) genügen.

#### § 5. Die zweite Methode der Ableitung der Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte.

Es sei noch in Kürze erörtert, daß die Ableitung des Kraftausdruckes nach Helmholtz in der Weise erzielt werden kann, daß man nicht wie im vorigen Paragraphen die Variation der einem bestimmten substantiellen Punkte zugehörigen Werte der physikalischen Größen, sondern im Gegenteil die Variation der Größen in einem festgehaltenen Raumpunkte betrachtet. Diese Variation wollen wir nach Henschke lokale Variation nennen und mit dem Zeichen  $\delta_0$  bezeichnen.

Hier muß man beachten, daß man bei dem Wirkungsprinzip immer die gesamte Variation der Wirkungsgröße des

1) Es ist  $(\mathbf{F} \diamond \mathbf{H})_j = \sum_{h=1}^4 \sum_{k=1}^4 (\mathbf{F}_{hk} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} \mathbf{H}_{hk})$  für  $j, = 1, 2, 3, 4$ .

ganzen abgeschlossenen physikalischen Systems zu berücksichtigen hat, daß man also außer der gesamten lokalen Variation der Wirkungsgröße im festgehaltenen Raum  $\Sigma$  noch dem Umstande Rechnung zu tragen hat, daß durch die Verschiebung  $\delta \mathbf{r}$  der substantiellen Punkte ein Teil der dem genannten physikalischen System zugehörigen Wirkungsgröße außerhalb des Raumes  $\Sigma$  übertragen wird.

Für die gesamte Variation von  $W$  ist daher zu setzen:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W &= \int_{\Sigma} \delta_0(\mathbf{K}\mathbf{r}) d\Sigma + \int_s (\mathbf{K}\mathbf{r})(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS + \int_s ((\mathbf{T}\mathbf{n}), \delta \mathbf{r}) dS \\ &+ \int_{\Sigma} \delta_0 \{ -U + (\mathbf{P}\Phi) \} d\Sigma + \int \{ -U + (\mathbf{P}\Phi) \} (\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen zuerst die zwei ersten Integrale behandeln. Da allgemein

$$\delta(\mathbf{K} d\Sigma) = \delta \mathbf{K} \cdot d\Sigma + \mathbf{K} \delta(d\Sigma)$$

und

$$\delta \mathbf{K} = \delta_0 \mathbf{K} + (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{K}$$

ist, so erhält man noch mit Rücksicht auf (22)

$$\delta(\mathbf{K} d\Sigma) = \{ \delta_0 \mathbf{K} + (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{K} + \mathbf{K} \operatorname{div}(\delta \mathbf{r}) \} d\Sigma.$$

Die Bedingung (15c) ergibt demnach

$$\delta_0 \mathbf{K} = -(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{K} - \mathbf{K} \operatorname{div}(\delta \mathbf{r}),$$

mit dessen Hilfe man das fragliche Integral so berechnen kann:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \delta_0(\mathbf{K}\mathbf{r}) d\Sigma &= \int_{\Sigma} (\mathbf{r} \delta_0 \mathbf{K}) d\Sigma = - \int_{\Sigma} (\mathbf{r}, (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{K}) d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma} (\delta \mathbf{r}, \diamond) (\mathbf{r} \mathbf{K}) d\Sigma - \int_s (\mathbf{r} \mathbf{K})(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS; \end{aligned}$$

und man bekommt daraus

$$(28) \quad \int_{\Sigma} \delta_0(\mathbf{K}\mathbf{r}) d\Sigma + \int_{\Sigma} (\mathbf{r}, \mathbf{K})(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = \int_{\Sigma} (\mathbf{K}, \delta \mathbf{r}) d\Sigma.$$

Zur Berechnung der zwei letzten Integrale in (27) schicken wir die Kenntnis der Beziehungen voraus:

$$\delta_0 \mathbf{P} = \operatorname{div} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r} - \operatorname{Div} [\mathbf{P}, \delta \mathbf{r}],$$

$$\delta_0 \Phi = (\operatorname{Curl} \Phi, \delta \mathbf{r}) - \operatorname{Grad}(\Phi, \delta \mathbf{r}),$$

welche aus dem Verschwinden der beiden Ausdrücke (15b):

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{P}_n dS) &= \{\delta_0 \mathbf{P} - (\operatorname{div} \mathbf{P}, \delta \mathbf{r}) + \operatorname{Div} [\mathbf{P}, \delta \mathbf{r}]\}_n dS, \\ \delta(\Phi_\lambda d\lambda) &= \{\delta_0 \Phi - (\operatorname{Curl} \Phi, \delta \mathbf{r}) + \operatorname{Grad} (\Phi, \delta \mathbf{r})\}_\lambda d\lambda^1 \end{aligned}$$

entstehen. Dadurch findet man nach partiellen Integrationen

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\Phi \delta_0 \mathbf{P}) d\Sigma &= \int_{\Sigma} \operatorname{div} \mathbf{P}, (\Phi, \delta \mathbf{r}) d\Sigma + \int_{\Sigma} ((\mathbf{P}, \operatorname{Curl} \Phi), \delta \mathbf{r}) d\Sigma \\ &\quad + \int_s (\mathbf{P} \mathbf{n})(\Phi, \delta \mathbf{r}) dS - \int_s (\mathbf{P} \Phi)(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS, \\ \int_{\Sigma} (\mathbf{P} \delta_0 \Phi) d\Sigma &= \int_{\Sigma} (\mathbf{P}, (\operatorname{Curl} \Phi, \delta \mathbf{r})) d\Sigma - \int_{\Sigma} \operatorname{div} \mathbf{P} (\Phi, \delta \mathbf{r}) d\Sigma \\ &\quad - \int_s (\mathbf{P} \mathbf{n})(\Phi, \delta \mathbf{r}) dS \end{aligned}$$

und noch durch Addierung dieser beiden Gleichungen

$$(29) \int_{\Sigma} \delta_0 (\mathbf{P} \Phi) d\Sigma + \int_s (\mathbf{P} \Phi) \delta \mathbf{r}, \mathbf{n} dS = 2 \int_{\Sigma} \operatorname{div} \mathbf{P} (\Phi, \delta \mathbf{r}) d\Sigma,$$

das infolge von (14) verschwindet.

Was nun  $\delta_0 U$  betrifft, so muß man beachten, daß man im Gegensatz zur Variation  $\delta U$  hier die Änderung der materiellen Konstanten  $\epsilon$  und  $\mu$  in Betracht zu ziehen hat, weil nach der Verschiebung der substantiellen Punkte ein anderer Teil der Substanz (mit anderem  $\epsilon$  und  $\mu$ ) in den betrachteten Raumpunkt eintreten wird. Man hat deswegen jetzt statt (19) folgendermaßen zu verfahren:

$$\begin{aligned} (30) \quad \delta_0 U &= \frac{1}{2} \delta_0 \left( \mu \mathfrak{H}'^2 - \frac{\mathfrak{D}'^2}{\epsilon} \right) \\ &= \mu \mathfrak{H}' \delta_0 \mathfrak{H}' - \frac{\mathfrak{D}'}{\epsilon} \delta_0 \mathfrak{D}' + \frac{1}{2} \left( \mathfrak{H}'^2 \delta_0 \mu + \frac{\mathfrak{D}'^2}{\epsilon^2} \delta_0 \epsilon \right). \end{aligned}$$

Den Ausdruck für  $\delta_0 \epsilon$  und  $\delta_0 \mu$  erhält man aber aus dem Verschwinden der Variationen:

$$\begin{aligned} \delta \epsilon &= \delta_0 \epsilon + (\delta \mathbf{r}, \diamond) \epsilon, \\ \delta \mu &= \delta_0 \mu + (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mu, \end{aligned}$$

(vgl. (15d)), und zwar in der Form:

$$\delta_0 \epsilon = -(\delta \mathbf{r}, \diamond) \epsilon, \quad \delta_0 \mu = -(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mu.$$

Setzt man diese Werte in (30) ein, so wird der Ausdruck in der Klammer

1) Vgl. z. B. E. Henschke, Berl. Diss. I. c. p. 41, Gleichung (77) u. p. 43, Gleichung (82).

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}'^2 \delta_0 \mu + \frac{\mathfrak{D}'^2}{\epsilon^2} \delta_0 \epsilon &= - \mathfrak{H}'^2 (\delta \mathbf{r}, \diamond) \left( \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{H}'} \right) - \mathfrak{E}'^2 (\delta \mathbf{r}, \diamond) \left( \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{E}'} \right) \\ &= \mathfrak{B}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathfrak{H}' - \mathfrak{H}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathfrak{B}' + \mathfrak{D}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathfrak{E}' - \mathfrak{E}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathfrak{D}', \end{aligned}$$

und daher geht  $\delta_0 U$  über in

$$(31) \quad \begin{cases} \delta_0 U = \frac{1}{2} \mathbf{F}' \delta_0 \mathbf{H}' + \frac{1}{4} \{ \mathbf{F}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}' - \mathbf{H}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{F}' \} \\ \quad = \frac{1}{2} \mathbf{F} \delta_0 \mathbf{H} + \frac{1}{4} \{ \mathbf{F} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H} - \mathbf{H} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{F} \}. \end{cases}$$

Die lokale Variation  $\delta_0 \mathbf{H}$  verbindet sich mit  $\delta \mathbf{H}$  in der Weise:

$$\delta_0 \mathbf{H} = \delta \mathbf{H} - (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}$$

und wird also nach (20)

$$(32) \quad \delta_0 \mathbf{H} = [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}] + \text{Curl}^* (\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r}).$$

Wir erhalten also aus (31) und (32)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \delta_0 U d\Sigma &= \int_{\Sigma} (\mathbf{F} \text{Div } \mathbf{H}) \delta \mathbf{r} d\Sigma - \int_{\Sigma} (\mathbf{H}^*, \text{Div } \mathbf{F}^*) \delta \mathbf{r} d\Sigma \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (\mathbf{F} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H} - \mathbf{H} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{F}) d\Sigma - \int_S ((\mathbf{F}^* \mathbf{n}) (\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r})) dS, \end{aligned}$$

und daher für

$$\int_{\Sigma} \delta_0 U d\Sigma + \int_{\Sigma} U (\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS$$

genau denselben Ausdruck wie (24) oder (24').

Wir gelangen somit aus dem Wirkungsprinzip auf Grund der Formel (27) zu denselben Forderungen wie (25) und (26), was zu erwarten ist.

### § 6. Weitere Betrachtungen der Resultate.

Die vierdimensionale Vektorgleichung (25) umfaßt die gewöhnliche Energiegleichung:

$$(33) \quad \mathfrak{R}_t = - \text{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] - \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B})$$

und die Impulsgleichung:

$$(34) \quad \begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{E} \rho + \frac{1}{c} [\mathfrak{H} + v \rho, \mathfrak{B}] + \frac{1}{2} (\mathfrak{D} \nabla \mathfrak{E}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \nabla \mathfrak{D}) \\ \quad + \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \nabla \mathfrak{H}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{H} \nabla \mathfrak{B}). \end{cases}$$

Hier bedeutet  $\rho$  die elektrische Ladungsdichte,  $\mathfrak{J}$  den elektrischen Leitungsstrom,  $v$  die Geschwindigkeit der Körper,  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Es ist wohl bemerkenswert, daß der aus dem Wirkungsprinzip so abgeleitete Ausdruck für die ponderomotorische Kraft  $\mathfrak{R}$  vollkommen derjenigen entspricht, die ich früher durch Transformation der Energiegleichung des mitbewegten Systems auf ein relativ zur Materie bewegtes Bezugssystem erhalten habe.<sup>1)</sup> Daß dieser Ausdruck allen bisherigen Erfahrungen entspricht, ist auch schon gezeigt.

Der vierdimensionale Tensor  $T$  enthält in bekannter Weise den Spannungstensor  $\mathfrak{X}$ , die Impulsdichte  $g$ , den Energiestrom  $\mathfrak{S}$  und die Energiedichte  $u$  des elektromagnetischen Feldes. Diese Größen sind nach der Formel (26) so bestimmt:

$$(35) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = [[\mathfrak{E} \mathfrak{D}]] + [[\mathfrak{H} \mathfrak{B}]] - \frac{1}{2} t \{ (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \mathfrak{B}) \}, \\ g = \frac{1}{c} [\mathfrak{D} \mathfrak{B}], \\ \mathfrak{S} = c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}], \\ u = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B}). \end{cases}$$

Der Ausdruck (26) für  $T$  ist zuerst von Minkowski<sup>3)</sup> abgeleitet und dann von mir, verknüpft mit dem oben angegebenen Ausdruck für  $\mathfrak{R}$ .<sup>4)</sup> Er ist unsymmetrisch, selbst für ruhende Körper. Die bekannte Beziehung:

$$(36) \quad g = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}$$

muß danach lediglich auf das Vakuum beschränkt werden.

Im Gegensatz zu dieser Behauptung fordern einige andere theoretische Physiker die allgemeine Gültigkeit der Gleichung (36).

1) J. Ishiwara, l. c.

2)  $t$  sei ein derartiger Tensor, dessen drei diagonale Komponenten gleich 1 sind, dessen sechs Schubkomponenten aber sämtlich verschwinden.

3) Minkowski, l. c.

4) Bei Minkowski ist für die ponderomotorische Viererkraft nicht die Größe  $K$ , sondern der zum Bewegungsvektor  $v$  normale Vektor  $K + (v K) v$  angenommen. Daß die Annahme dieses letzten Kraftausdruckes allerdings zu physikalisch unwahrscheinlichem Ausdruck für die Joulesche Wärme führt, hat Abraham (Phys. Zeitschr. 10. p. 737. 1909) diskutiert. (Vgl. J. Ishiwara, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron. I. c. p. 606).

So hat Abraham<sup>1)</sup> sich bemüht, unter Festhalten an dieser Gleichung den Ausdruck für den Welttensor aufzufinden. Grammel<sup>2)</sup> hat sich auch kürzlich mit der Aufstellung verschiedener möglichen Ausdrücke für  $T$ , welche im Falle der Ruhe symmetrisch werden soll, beschäftigt.<sup>3)</sup> Laue<sup>4)</sup> hat im Anschluß an Planck<sup>5)</sup> die Gleichung (36) als den Satz von der Trägheit der Energie bezeichnet und als einen Grundsatz der allgemeinen Dynamik hervorgehoben. Es scheint mir allerdings für die Behauptung, daß (36) die universelle Gültigkeit haben soll, kein tieferer Grund vorzuliegen als der, daß dadurch die betreffenden Komponenten des Weltensors  $T$  symmetrisch werden.

Man hat zwar die Existenz der Trägheit der strahlenden Energie einmal im Anschluß an die Gleichung (36) nachweisen können. Das Wesen der Trägheit besteht indessen nicht in der Gültigkeit der genannten Gleichung selbst, sondern überhaupt in dem Begriffe des Impulses, der sich mit der ihn tragenden Energie in einem anderen quantitativen Zusammenhang als (36) befinden dürfte.

Man wäre übrigens wegen der Einfachheit dieser Relation auch dazu geneigt, ihr eine prinzipielle Bedeutung zuzuschreiben. Mit ihr aber sind andererseits, wie Grammel in der oben zitierten Arbeit gezeigt hat, leider nur sehr komplizierte Ausdrücke für den Welttensor vereinbar, welche also immer mit den die Geschwindigkeit der Körper explizite enthaltenden Gliedern versehen werden müßten. Nach der Untersuchung von Henschke erscheint es auch sehr wahrscheinlich, daß, wenn man den Abrahamschen Kraftausdruck als

---

1) M. Abraham, l. c.

2) R. Grammel, Ann. d. Phys. 41. p. 570. 1913.

3) Es ist der Vollständigkeit halber zu erwähnen, daß G. Nordström bei der Behandlung der Lorentz'schen Elektrodynamik der Impulsdichte einen Ausdruck  $1/c$  [E B] zugeschrieben hat, wodurch die Symmetrie des Weltensors für ruhende Körper schon aufgegeben ist. (Die Energiegleichung für das elektromagnetische Feld bewegter Körper, Helsingfors 1908, p. 49. Gleichung (103)).

4) M. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl. (Braunschweig 1913) p. 164.

5) M. Planck, Phys. Zeitschr. 9. p. 828. 1909; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 6. p. 728. 1908.]

berechtigt annimmt, in dem Variationsprinzip von einer bestimmten Wirkungsgröße kaum mehr die Rede sein kann.

Unser Ausdruck hat demgegenüber den Vorzug, erstens, daß er die Geschwindigkeit der Körper vollständig nur implizite enthält und genau dieselbe Form wie im mitbewegten System hat, was eben dem von Minkowski an der Spitze seiner grundlegenden Abhandlung aufgestellten „Postulat der Relativität“ entspricht, und zweitens, daß er aus dem als die naheliegendste Verallgemeinerung des Variationsprinzips für das Vakuum anzusehenden Prinzip hergeleitet werden kann.

Ich habe übrigens bereits vor drei Jahren in einer Mitteilung<sup>1)</sup> gezeigt, daß bei der Berechnung des Strahlungsdruckes auf einen vollkommenen Spiegel, der in einem durchsichtigen materiellen Lichtmedium aufgestellt ist, der Energiesatz einerseits und der Impulssatz andererseits in bezug auf ein relativ bewegtes Bezugssystem nur dann ein übereinstimmendes Resultat ergeben, wenn man für  $g$  und  $\mathcal{C}$  die Ausdrücke in (35) annimmt. Dagegen würde man durch die Annahme von (36) zu einem Widerspruch gelangen.

An diese Frage anknüpfend, dürfte es von Interesse sein, zu erwähnen, daß in der Optik bewegter isotroper Körper die Impulsstrahlung, als  $1/c$  [ $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ ] definiert, sich in der Richtung der Wellennormale befindet, während man die Energiestrahlung durch den nicht immer auf die Wellennormale fallenden Vektor  $c$  [ $\mathfrak{C}\mathfrak{H}$ ] ausdrückt.<sup>2)</sup>

Schließlich möchte ich noch darauf hinweisen, daß ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit die Ausdrücke (25) und (26) für die ponderomotorischen Kräfte auch direkt elektronen-theoretisch begründet zu haben glaube, was mir als eine weitere Stütze für ihre Richtigkeit erscheint.

Zürich, 15. Juli 1913.

1) J. Ishiwara, Proc. Tôkyô math.-phys. Soc. I. c. p. 324.

2) J. Ishiwara, I. c. Vgl. noch Proc. Tôkyô math.-phys. Soc. (2) 5. p. 327. 1910.

(Eingegangen 24. Juli 1913.)