2. *Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips;*

von Gunnar Nordström.

In der vorliegenden Mitteilung will ich die Gravitationstheorie, deren Grundzüge ich in zwei früheren Aufsätzen veröffentlicht habe,[1]) in einigen Beziehungen näher entwickeln und diskutieren. Die in dem letzteren Aufsatz gegebene Theorie ist nicht vollkommen eindeutig. Erstens ist — wie p. 867 hervorgehoben wird — die Ruhdichte der Masse in ziemlich willkürlicher Weise definiert; eine andere Festsetzung des Massenbegriffs würde zwar nicht die allgemeinen Gesetze der Mechanik verändern, wohl aber die Gesetze der Gravitation modifizieren. Zweitens ist in der Gravitationstheorie die Möglichkeit offen gelassen, daß der Gravitationsfaktor g nicht eine Konstante, sondern von verschiedenen Umständen abhängig sein könnte. Diese skalare Größe kann man sich sowohl von dem inneren Zustand des Körpers als auch vom Gravitationspotential am betreffenden Ort abhängig denken. Eine Abhängigkeit des Gravitationsfaktors von dem Spannungszustande des Körpers ist einer Veränderung der Massendefinition gleichwertig, eine Abhängigkeit von dem Gravitationspotential wird aber eine tiefere Bedeutung für die Theorie haben.

§ 1. Eindeutige Festlegung der Theorie.

Alle die erwähnten Unbestimmtheiten der Theorie lassen sich durch eine sehr plausible Festsetzung aufheben, die ich den Herren Laue und Einstein verdanke. Herr Laue hat gezeigt, daß man den Einsteinschen Äquivalenzsatz — obwohl nicht in seinem vollen Umfang — dadurch aufrechterhalten

1) G. Nordström, Physik. Zeitschr. **13**. p. 1126. 1912; Ann. d. Phys. **40**. p. 856. 1913. Der vorliegende Aufsatz schließt sich dem letzteren an, und das Zeichen l. c. in dem Text bezieht sich auf denselben.

kann, daß man die Ruhdichte der Materie in passender Weise definiert,[1]) nämlich mittels der Summe

$$(1) \qquad T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{uu} = -D$$

der Diagonalkomponenten des Tensors T, der den Zustand der Materie darstellt. T ist der von Laue eingeführte dynaminische Tensor[2]) und gleich der Summe der beiden Tensoren, die ich früher als elastischen Spannungstensor und materiellen Tensor bezeichnet habe.[3]) Die durch Gleichung (1) definierte Invariante D wollen wir mit Einstein den Laueschen Skalar nennen, und werden finden, daß sie durch c^2 dividiert die Ruhdichte darstellt.

Es wird sich weiter zeigen, daß der Einsteinsche Äquivalenzsatz eine ganz bestimmte Abhängigkeit des Gravitationsfaktors g vom Gravitationspotential Φ fordert; wir setzen

$$g = g(\Phi).$$

Wenn wir weiter die Ruhdichte der Materie mit ν bezeichnen, lauten die Grundgleichungen für das Gravitationsfeld[4])

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = g(\Phi)\nu,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_x^g = -g(\Phi)\nu\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, & \mathfrak{K}_y^g = -g(\Phi)\nu\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \mathfrak{K}_z^g = -g(\Phi)\nu\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}, & \mathfrak{K}_u^g = -g(\Phi)\nu\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}. \end{cases}$$

Die Gleichung (2) bestimmt das Gravitationsfeld, das von Massen gegebener Verteilung erzeugt wird. Das Gleichungssystem (3) bestimmt die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}^g$, die das Feld auf die Materie ausübt.

Es gilt nun die Ruhdichte ν so zu definieren und die Funktion $g(\Phi)$ so zu bestimmen, daß der Äquivalenzsatz in möglichst weitem Umfang Gültigkeit hat.

Zu dem Zweck betrachten wir ein solches System von endlichen Körpern, daß es ein berechtigtes Bezugssystem gibt,

---

1) Siehe A. Einstein, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 62. p. 21. 1913.

2) M. Laue, Das Relativitätsprinzip. II. Aufl. p. 182.

3) G. Nordström, Ann. d. Phys. l. c. p. 858.

4) G. Nordström, l. c. Gleichungen (48) und (49).

in dem das Gravitationsfeld statisch ist, so daß überall $\partial \Phi / \partial t = 0$ ist. Um ihre Symmetrieachse rotierende Rotationskörper und stationär strömende Flüssigkeiten dürfen aber vorkommen. Jedenfalls ist in dem betrachteten Bezugssysteme der Gesamtimpuls gleich Null,[1])

$$\mathfrak{G} = \int \mathfrak{g}\, d v = 0,$$

und das System als ein Ganzes befindet sich in Ruhe. Ein System, das die erwähnten Bedingungen erfüllt, sei ein vollständiges, stationäres genannt.

Da der Zustand sich mit der Zeit nicht ändert, gibt Gleichung (2) nach dem gewöhnlichen Potentialsatz

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d v}{r} g(\Phi)\, \nu + \Phi_a \tag{4}$$

integriert über den ganzen xyz-Raum. Φ_a ist der Wert von Φ im Unendlichen, und rührt von anderen Massensystemen her, die wir weit entfernt annehmen. In großen Entfernungen r gilt

$$|\nabla \Phi| = \frac{1}{4\pi r^2}\int g(\Phi)\, \nu\, d v, \tag{5}$$

und die Richtung von $\nabla \Phi$ ist die vom Massensystem weg.

Im allgemeinsten Falle haben wir in dem System drei verschiedene Welttensoren, welche räumliche Spannungen, Energiestrom, Impuls- und Energiedichte angeben: den elastisch-materiellen Tensor $\boldsymbol{T}$, den Gravitationstensor $\boldsymbol{G}$ und den elektromagnetischen Tensor $\boldsymbol{L}$. Für die Komponenten des Gravitationstensors gelten die Gleichungen (57) l. c.

$$\left\{\begin{aligned} G_{xx} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2\right\}, \\ G_{xy} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{usw.,} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

und es ist

$$\mathfrak{K}_x^g = -\left\{\frac{\partial G_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial G_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial G_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial G_{xu}}{\partial u}\right\} \quad \text{usw.} \tag{7}$$

---

1) Wärmeleitung müssen wir ausschließen, sonst ist der Gesamtimpuls nicht Null. Übrigens würde ja die Wärmeleitung die Energie- und also auch die Massenverteilung zeitlich verändern, und also das Gravitationsfeld veränderlich machen.

Wir wollen die Summe der Diagonalkomponenten für den *Gesamttensor* $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{L}$ bilden und über den ganzen dreidimensionalen Raum in unserem Bezugssystem integrieren. Weil $\partial \Phi / \partial t = 0$, ist die Diagonalsumme des Gravitationstensors gleich $-(\nabla \Phi)^2$; die Diagonalsumme von $\boldsymbol{T}$ haben wir mit $-D$ bezeichnet, die Diagonalsumme des elektromagnetischen Tensors ist gleich Null. Wir bilden also das Integral

$$-\int \{ D + (\nabla \Phi)^2 \} \, d v$$

erstreckt über den ganzen Raum. Da aber nach einem Satz von Laue[1])

$$\int \{ \boldsymbol{T}_{xx} + \boldsymbol{G}_{xx} + \boldsymbol{L}_{xx} \} \, d v = 0$$

und zwei entsprechende Gleichungen für die yy- und zz-Komponenten gelten, erhält man

$$-\int \{ D + (\nabla \Phi)^2 \} \, d v = \int \{ \boldsymbol{T}_{uu} + \boldsymbol{G}_{uu} + \boldsymbol{L}_{uu} \} \, d v = -E_0 ,$$

wo E_0 die Energie des ganzen Systems im benutzten Bezugssystem (die Ruhenergie) bedeutet.

Da $\partial^2 \Phi / \partial u^2 = 0$, gibt Gleichung (2)

$$\operatorname{div} \nabla \Phi = g(\Phi) \nu ,$$

$$\operatorname{div} \Phi \nabla \Phi = \Phi g(\Phi) \nu + (\nabla \Phi)^2 .$$

Die Integration von $(\nabla \Phi)^2$ über einen Kugelraum von unendlich großem Radius gibt hiermit beim Beachten von (5)

$$\int (\nabla \Phi)^2 \, d v = -\int (\Phi - \Phi_a) g(\Phi) \nu \, d v .$$

Für E_0 erhält man also

$$E_0 = \int D \, d v - \int (\Phi - \Phi_0) g(\Phi) \nu \, d v. \tag{8}$$

Da der Gesamtimpuls im betrachteten Bezugssystem Null ist, hat man in einem anderen Bezugssystem, in dem unser Massensystem sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, für die Energie E und den Impuls $\mathfrak{G}$ folgende Ausdrücke,[1])

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \mathfrak{q}^2}} , \qquad \mathfrak{G} = \frac{E_0 \cdot \mathfrak{v}}{c^2 \sqrt{1 - \mathfrak{q}^2}} ,$$

wo $\mathfrak{q} = \mathfrak{v}/c$ gesetzt ist. Die träge Masse des Systems ist also:

$$m = \frac{E_0}{c^2} = \frac{1}{c^2} \int \{ D - (\Phi - \Phi_a) g(\Phi) \nu \} \, d v. \tag{9}$$

Aus den Gleichungen (4), (5) und (3) sieht man, daß die Größe

---

1) M. Laue, l. c. p. 209.

(10) $$M_g = \int g(\Phi)\, \nu\, d\, v$$

für die Gravitationswirkungen maßgebend ist, die das System ausübt und erfährt. M_g sei die *gravitierende Masse* des Systems genannt. Der Einsteinsche Äquivalenzsatz besagt, daß für verschiedene Systeme M_g und m miteinander proportional sind. Dann kann M_g/m nur eine Funktion von Φ_a sein, und diese Funktion kann keine andere als $g(\Phi_a)$ sein, so daß man hat

(11) $$g(\Phi_a)\, m = \int g(\Phi)\, \nu\, d\, v\, .$$

Durch diese Festsetzung gilt es die Ruhdichte ν zu definieren und die Funktion $g(\Phi)$ zu bestimmen. Wir setzen die aus (9) und (11) erhaltenen Ausdrücke für m einander gleich und bekommen

$$\frac{1}{c^2}\int D\, d\, v = \frac{1}{c^2}\int g(\Phi)\, \nu \left\{\Phi - \Phi_a + \frac{c^2}{g(\Phi_a)}\right\} d\, v\cdot$$

Um diese Gleichung identisch zu erfüllen, setzen wir

(12) $$D = g(\Phi)\, \nu \left\{\Phi - \Phi_a + \frac{c^2}{g(\Phi_a)}\right\}\cdot$$

Da weiter das Potential Φ_a des äußeren Feldes wegfallen muß, haben wir noch zu setzen

(13) $$\frac{c^2}{g(\Phi)} - \Phi = A\, , \quad g(\Phi) = \frac{c^2}{A + \Phi}\, ,$$

wo A eine universelle Konstante bedeutet.

Aus (12) erhält man nun

(14) $$\nu = \frac{1}{c^2}\, D = -\frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{T}_{xx} + \boldsymbol{T}_{yy} + \boldsymbol{T}_{zz} + \boldsymbol{T}_{uu}\right),$$

wodurch die Ruhdichte der Materie definiert ist.[1])

Es ist zu bemerken, daß der Wert der Konstanten A unbekannt ist, da wir den Absolutwert des Potentials Φ in keinem Punkte berechnen können. Wenn mir mit Φ das Gravitationspotential in einem der Untersuchung zugänglichen Punkt

1) Es sei nebenbei bemerkt, daß man ν auch durch die relativen Spannungen t und die Ruhenergiedichte Ψ der Materie ausdrücken kann. Man findet

$$\nu = \frac{1}{c^2}\left\{\Psi - t_{xx} - t_{yy} - t_{zz}\right\}.$$

bezeichnen, mit Φ_0 der Anteil von Φ, der von Massen außerhalb unseres Sonnensystems herrührt, so ist von den Größen Φ und Φ_0 nur die Differenz $\Phi - \Phi_0$ durch irgendwelche Beobachtungen bestimmbar. Es sei $g(\Phi_0)$ mit g_0 bezeichnet. Wenn wir zwischen den Gleichungen

$$g(\Phi) = \frac{c^2}{A + \Phi} \quad \text{und} \quad g_0 = \frac{c^2}{A + \Phi_0}$$

die Größe A eliminieren, erhalten wir für die Funktion $g(\Phi)$

$$g(\Phi) = \frac{g_0}{1 + \frac{g_0}{c^2}(\Phi - \Phi_0)}. \tag{15}$$

In dieser Gleichung kommen nur der Untersuchung zugängliche Größen vor. Man kann natürlich das Ausgangspotential Φ_0 auch in anderer Weise feststellen, denn man hat ja für zwei beliebige Werte von Φ

$$g(\Phi_2) = \frac{g(\Phi_1)}{1 + \frac{g(\Phi_1)}{c^2}(\Phi_2 - \Phi_1)}. \tag{15a}$$

Durch die Gleichungen (14) und (15) für ν und g ist die Gravitationstheorie eindeutig präzisiert.

Wenn wir

$$\Phi' = \Phi + A = \frac{c^2}{g_0} + \Phi - \Phi_0 \tag{16}$$

setzen, so ist das neue Gravitationspotential Φ' nicht mit der Unbestimmtheit von Φ behaftet. Wir erhalten aus (13) und (11)

$$g(\Phi) = \frac{c^2}{\Phi'}, \tag{17}$$

$$M_g = \frac{m c^2}{\Phi_a'} = \frac{E_0}{\Phi_a'}, \tag{18}$$

und die Grundgleichungen (2), (3) lauten, wenn man in dieselben Φ' einführt,

$$\Phi' \left\{ \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial u^2} \right\} = c^2 \nu, \tag{19}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{K}_x^g = -c^2 \nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi', & \mathfrak{K}_y^g = -c^2 \nu \frac{\partial}{\partial y} \ln \Phi', \\ \mathfrak{K}_z^g = -c^2 \nu \frac{\partial}{\partial z} \ln \Phi', & \mathfrak{K}_u^g = -c^2 \nu \frac{\partial}{\partial u} \ln \Phi'. \end{cases} \tag{20}$$

In den so geschriebenen Grundgleichungen kommt keine der Gravitationskonstante entsprechende universelle Konstante vor.[1]) In Gleichung (19) kann man mit einer gewissen Annäherung Φ' vor der Klammer als konstant und gleich c^2/g_0 annehmen. Man erhält dann durch Integration die gewöhnliche Formel für das retardierte Potential.

§ 2. Abhängigkeit der Masse eines Körpers vom Gravitationspotential.

Wir wollen beweisen, daß die träge Masse eines Systems von den in § 1 angegebenen Eigenschaften von dem Gravitationspotential Φ_a des äußeren Feldes abhängt. Wir betrachten die Verhältnisse von dem Bezugssysteme aus, in welchem die Körper ein statisches Gravitationsfeld geben, und konstruieren um die Körper eine Kugelfläche von sehr großem Radius r. In den Punkten dieser Fläche ist $\nabla\,\Phi$ senkrecht nach außen gerichtet und nach (5) von der Größe

$$|\nabla\,\Phi| = \frac{M_g}{4\pi r^2}.$$

Das Gravitationspotential Φ_a des äußeren Feldes denken wir uns von Massen erzeugt, die sehr weit von unserem Körpersystem, außerhalb der Kugelfläche liegen. Φ_a sei zunächst innerhalb der genannten Fläche örtlich und zeitlich konstant. Dann denken wir uns Φ_a durch langsames Verschieben der fernliegenden Massen um $d\,\Phi_a$ verändert. Diese Veränderung bedingt eine gewisse Energieströmung durch die Kugelfläche, welche wir berechnen wollen. Der Energiestrom $\mathfrak{S}^g$ im Gravitationsfelde ist ja nach Gleichung (58) l. c. sowie nach (6)

$$\mathfrak{S}^g = -\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t}\,\nabla\,\Phi\,.$$

Durch Integration über die Kugeloberfläche finden wir, daß die Veränderung des äußeren Potentials um $d\,\Phi_a$ einen Energietransport nach innen durch die Kugelfläche vom Betrage

$$4\pi r^2\,|\nabla\,\Phi|\,d\,\Phi_a = M_g\,d\,\Phi_a$$

bewirkt. Um so viel hat sich also die Ruhenergie E_0 unseres Systems vergrößert;

$$d\,E_0 = M_g\,d\,\Phi_a.$$

---

1) In § 6 soll aber gezeigt werden, daß eine solche universelle Konstante bei der Festsetzung der Grundeinheiten eine Rolle spielt.

Wenn wir hier nach (9) und (11) $E_0 = c^2 m$, $M_g = g(\Phi_a) m$ einführen, erhalten wir die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{m} d m = \frac{g(\Phi_a)}{c^2} d \Phi_a ,$$

die mit der auf anderem Wege gefundenen Gleichung (52) l. c. übereinstimmt. Nach (17) haben wir weiter

$$d \ln m = d \ln \Phi_a' ,$$

und bekommen schließlich durch Integration

$$\text{(21)} \qquad \frac{m}{\Phi_a'} = \text{konst.}$$

Die träge Masse eines Körpers ist also direkt proportional mit dem Gravitationspotential Φ_a' des äußeren Feldes. Diese Abhängigkeit können wir nach (16) auch in folgender Form schreiben

$$\text{(21 a)} \qquad m = m_0 \left\{1 + \frac{g_0}{c_2} (\Phi_a - \Phi_0)\right\} ,$$

wo m_0 die träge Masse beim Gravitationspotential Φ_0.[1])

Nach (21) und (18) haben wir

$$\text{(22)} \qquad M_g = \int g(\Phi) \nu \, d v = \text{konst.}$$

Die gravitierende Masse ist also im Gegensatz zur trägen Masse eine für jeden Körper charakteristische Konstante, die nicht von dem äußeren Gravitationspotential abhängt.

§ 3. Träge und gravitierende Masse eines kugelförmigen Elektrons.

Als Beispiel der Theorie wollen wir Formeln für die träge und gravitierende Masse eines kugelförmigen Elektrons mit gleichförmiger Oberflächenladung aufstellen. Die elektrische Ladung des Elektrons, in rationellen Einheiten ausgedrückt, sei e, der Radius a. Um die unbegrenzte Ausdehnung des Elektrons infolge der Repulsionskraft zwischen gleichnamiger Elektrizität zu verhindern, müssen im Elektron gewisse elastische Spannungen wirken. Am zweckmäßigsten nehmen wir auch diese Spannungen auf die Oberfläche des Elektrons konzentriert

---

1) Die Gleichungen (21) und (21 a) treten an Stelle von (53) l. c., welche konstantes g voraussetzt und deswegen ihre Gültigkeit jetzt verloren hat.

an. Die elastischen Spannungen geben gemäß Gleichung (14) dem Elektron eine Masse, die auch Gravitationswirkungen ausübt. Das Gravitationsfeld überlagert sich dem elektrischen Felde, und beide Felder wirken auf das Elektron zurück. Das Elektron befinde sich in Ruhe. Die Oberfläche desselben haben wir als eine unendlich dünne Schicht zu betrachten, in der der elastisch-materielle Tensor $\boldsymbol{T}$ von Null verschieden ist. Wir nehmen an, daß die Komponente $\boldsymbol{T}_{uu}{}^0$ gleich Null ist, daß also der Tensor $\boldsymbol{T}$ im Falle der Ruhe keinen Beitrag zur Energie des Elektrons liefert. Der Tensor $\boldsymbol{T}$ reduziert sich also (bei Ruhe) auf einen räumlichen Spannungstensor, der aus Symmetriegründen eine Hauptachse in der Richtung des Radius haben muß. Da wir nur eine Zugspannung parallel der Schicht haben sollen, ist die Hauptkomponente von $\boldsymbol{T}$ in der Richtung des Radius gleich Null; die beiden übrigen Hauptkomponenten sind einander gleich und seien mit p bezeichnet. Die Diagonalsumme von $\boldsymbol{T}$ ist also $2p$ und die Ruhdichte ν wird

$$\nu = -\frac{1}{c^2} 2p .$$

Die Zugspannung S in der Oberfläche ist gleich dem Linienintegral

$$S = -\int p\, d s$$

integriert quer über die Schicht.

Wir bilden nun das Integral $\int \nu\, d v$ erstreckt über die ganze Schicht und erhalten

$$\int \nu\, d v = -\frac{2}{c^2} 4\pi a^2 \int p\, d s = \frac{1}{c^2} 8\pi a^2 S .$$

Da aus Symmetriegründen $g(\Phi)$ in allen Punkten der Oberfläche denselben Wert hat, erhalten wir für die gravitierende Masse M_g des Elektrons

$$M_g = \int g(\Phi)\, \nu\, d v = \frac{g(\Phi)}{c^2} 8\pi a^2 S .$$

Auf der Elektronenoberfläche hat das Gravitationspotential den Wert

$$-\frac{M_g}{4\pi a} + \Phi_a ,$$

wo Φ_a das Potential des äußeren (vom Elektron nicht herrührenden) Feldes. Wir können also nach (15a) für $g(\Phi)$ den Ausdruck

$$g(\Phi) = \frac{g_a}{1 - \frac{g_a}{c^2} \frac{M_g}{4 \pi a}}$$

einsetzen und erhalten so die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad M_g = \frac{g_a}{c^2} \frac{8 \pi a^2 S}{1 - \frac{g_a}{c^2} \frac{M_g}{4 \pi a}}.$$

Es gilt nun S aus den Kräften, die das elektrische und Gravitationsfeld auf die Elektronenoberfläche ausüben, zu berechnen. Das elektrische Feld übt auf jedes Element der Elektronenoberfläche eine senkrecht nach außen gerichtete Kraft aus, deren Größe pro Flächeneinheit durch die Maxwellschen Spannungen gegeben ist. Man findet für diese nach außen gerichtete Kraft pro Flächeneinheit den Ausdruck

$$\frac{e^2}{32 \pi^2 a^4}.$$

In ähnlicher Weise übt das Gravitationsfeld auf jede Flächeneinheit der Elektronenoberfläche eine Kraft aus, die aber senkrecht nach innen gerichtet ist. Außerhalb des Elektrons hat man ja

$$\Phi = - \frac{M_g}{4 \pi r} + \Phi_a, \quad \frac{d \Phi}{d r} = \frac{M_g}{4 \pi r^2}.$$

Die fiktive Gravitationsspannung an der Oberfläche ist senkrecht auf derselben und nach (6) von der Größe

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d \Phi}{d r} \right)^2 = \frac{M_g^2}{32 \pi^2 a^4}.$$

Diese Kraft übt das Gravitationsfeld auf jede Flächeneinheit der Elektronenoberfläche aus. Die Gesamtkraft, die die beiden Felder auf die Flächeneinheit ausüben, ist also

$$\text{(b)} \qquad P = \frac{e^2 - M_g^2}{32 \pi^2 a^4},$$

positiv nach außen gerechnet. Die Kraft P und die elastische Spannung S in der Elektronenoberfläche sollen nun einander das Gleichgewicht halten. Man findet leicht, daß die Gleichgewichtsbedingung

$$\text{(c)} \qquad 2 S = a P$$

lautet. Um diese Beziehung abzuleiten, kann man sich z. B. die Elektronenoberfläche in zwei Halbkugelflächen geteilt denken. Die Normalkraft P sucht die beiden Hälften mit einer Gesamtkraft $\pi a^2 P$ auseinander zu treiben, die Spannung S dagegen hält die beiden Hälften mit einer Gesamtkraft $2\pi a S$ zusammen. Durch Gleichsetzen der beiden Kraftausdrücke erhält man die Beziehung (c).

Die Gleichungen (a), (b), (c) geben

$$M_g = \frac{g_a}{c^2}\frac{e^2 - M_g^2}{8\pi a}\cdot\frac{1}{1-\frac{g_a}{c^2}\frac{M_g}{4\pi a}},$$

wir haben also eine quadratische Gleichung für M_g:

$$M_g - \frac{g_a}{c^2}\frac{M_g^2}{8\pi a} = \frac{g_a}{c^2}\frac{e^2}{8\pi a}.$$

Hieraus erhalten wir

$$M_g = \frac{g_a}{c^2}\frac{e^2 + M_g^2}{8\pi a}, \tag{23}$$

und weil nach (11) $M_g = g_a \cdot m$, bekommen wir für die träge Masse m des Elektrons den Ausdruck

$$m = \frac{e^2 + M_g^2}{8\pi c^2 a} = \frac{E_0}{c^2}. \tag{24}$$

Die Ruhenergie E_0 setzt sich aus zwei Teilen zusammen: der Energie des elektrischen Feldes und der des Gravitationsfeldes. Diese beiden Anteile von E_0 sind

$$\frac{e^2}{8\pi a} \quad \text{und} \quad \frac{M_g^2}{8\pi a}.$$

Der gefundene Ausdruck für m enthält somit eine Verifikation der Theorie.

§ 4. Abhängigkeit der Längendimensionen vom Gravitationspotential.

Aus dem Ausdruck (24) für die träge Masse eines Elektrons können wir weiter eine wichtige Folgerung ziehen. Wenn das Gravitationspotential Φ_a des äußeren (nicht vom Elektron herrührenden) Feldes verändert wird, so verändert sich m gemäß Gleichung (21). M_g bleibt hierbei nach (22) konstant, und dasselbe gilt nach den Grundgleichungen der Elektrodynamik für e. Es muß also der Radius a sich umgekehrt wie m verändern, und man erhält nach (21)

$$a\,\Phi_a' = \text{konst.} \tag{25}$$

Weil in der Elektronenoberfläche

$$\Phi' = \Phi_a' - \frac{M_g}{4\pi a} = \Phi_a' \cdot \text{konst.},$$

hat man auch

(25a) $$a\,\Phi' = \text{konst.}$$

Die elastische Spannung S in der Elektronenoberfläche verändert sich auch mit Φ_a. Das Gesetz hierfür finden wir aus (a), p. 542, wenn wir beachten, daß nach (17) und (25) g_a/a konstant bleibt. Wir sehen, daß $a^3 S$ konstant sein muß, daß also

$$\frac{S}{\Phi_a'^3} = \text{konst.}$$

Daß nach der hier entwickelten Theorie die Abhängigkeit der Längendimensionen eines Körpers vom Gravitationspotential eine allgemeine Eigenschaft der Materie sein muß, hat Hr. Einstein bewiesen, indem er gezeigt hat, daß sich sonst eine Einrichtung konstruieren ließe, womit man aus dem Gravitationsfelde Energie auspumpen könnte. In dem Einsteinschen Beispiel betrachtet man einen nicht deformierbaren Stab, der zwischen zwei vertikalen Schienen beweglich eingespannt werden kann. Man könnte den Stab gespannt fallen lassen, ihn dann entspannen und wieder heben. Gespannt hat der Stab ein größeres Gewicht als ungespannt, und er würde also beim Fallen eine größere Arbeit leisten, als beim Heben des ungespannten Stabes verbraucht wird. Wegen der Verlängerung des Stabes beim Fallen müssen aber die Schienen divergent stehen, und der Überschuß an Arbeit beim Fallen wird durch die Arbeit der spannenden Kräfte an den Enden des Stabes wieder verbraucht.

Es sei S die Gesamtspannung (Spannung mal Querschnitt) des Stabes, l die Länge desselben. Wegen der Spannung ist die gravitierende Masse das Stabes um

$$\frac{g(\Phi)}{c^2} S\,l = \frac{1}{\Phi'} S\,l$$

vergrößert. Beim Fallen leistet diese gravitierende Masse die Mehrarbeit

$$-\frac{1}{\Phi'} S\,l\,d\,\Phi'.$$

An den Enden des Stabes wird aber gleichzeitig die Arbeit

$$S\,d\,l$$

abgegeben. Das Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert

$$-\frac{1}{\Phi'}\,d\,\Phi' = \frac{1}{l}\,d\,l$$

oder integriert

$$l\,\Phi' = \text{konst.},$$

was aber eben Gleichung (25a) entspricht.[1])

Das für den gespannten Stab gefundene Resultat sowie andere Beispiele zeigen, daß den Gleichungen (25) und (25a) eine allgemeine Gültigkeit für die Längendimensionen der materiellen Körper zukommt. Natürlich ist es das in einem Punkte wirklich vorhandene Gravitationspotential Φ', und nicht dasjenige des äußeren Feldes, das die Längen beeinflußt; wir können aber leicht einsehen, daß wir allgemein beim Berechnen der Längenveränderung auch das Potential Φ_a' des äußeren Feldes anwenden dürfen, weil Φ' und Φ_a' miteinander proportional sind. Für ein ruhendes System der in § 1 betrachteten Art haben wir ja nach (4) und (17)

$$\text{(a)} \qquad \Phi' = \Phi_a' - \frac{c^2}{4\pi}\int\frac{\nu\,d\,v}{\Phi'\,r}.$$

Nach dem früher Gefundenen verändert sich die gravitierende Masse des Systems nicht, wenn das Gravitationspotential Φ_a' des äußeren Feldes verändert wird. Wir haben also bei einer solchen Veränderung

$$c^2\int\frac{\nu\,d\,v}{\Phi'} = \text{konst.}$$

Die Größen ν und $d\,v$ verändern sich wohl in gewisser Weise mit Φ', aber so, daß $\nu\,d\,v/\Phi'$ für jedes bestimmte Element des Systems konstant bleibt. Wenn links in Gleichung (a) Φ' das Potential in einem bestimmten Punkt des materiellen Systems

---

1) Wenn der Stab deformierbar ist, wird beim Spannen desselben eine Arbeit aufgewandt, und die Ruhenergie des Stabes dementsprechend vergrößert. Auch hierdurch erfährt das Gewicht eine Zunahme, die beim Fallen eine Mehrarbeit $d\,A$ ergibt. Da aber beim Fallen die Ruhenergie abnimmt, ist die Arbeit, die beim Entspannen des Stabes gewonnen wird, kleiner als die beim Spannen verbrauchte, und der Unterschied beträgt eben $d\,A$.

bedeutet, verändert sich also das Integral rechts umgekehrt wie die Längen r. Wir erhalten

$$\Phi_a' = \Phi'(1 + \text{konst.}),$$

das heißt, in jedem Punkt des Systems verändert sich Φ' proportional mit Φ_a'.

Für die Abhängigkeit der Längendimensionen l (der Ruhe) eines Körpers vom Gravitationspotential hat man aus diesen Gründen ganz allgemein die beiden gleichwertigen Gleichungen

$$l\,\Phi' = \text{konst.}, \quad l\,\Phi_a' = \text{konst.} \tag{26}$$

und noch entsprechend (21a)

$$l = \frac{l_0}{1 + \frac{g_0}{c^2}(\Phi_a - \Phi_0)}. \tag{26a}$$

Für das Volumen $d v$ eines Teilchens eines auf Ruhe transformierten Körpers hat man natürlich nach (26)

$$d v\,\Phi'^3 = \text{konst.}$$

Da wir oben $\nu\, d v / \Phi' = \text{konst.}$ fanden, folgt

$$\frac{\nu}{\Phi'^4} = \text{konst.} \tag{27}$$

Weil nach (14) $-c^2\nu$ die Summe der Diagonalkomponenten des Tensors $\boldsymbol{T}$ ist, hängen die Komponenten von $\boldsymbol{T}$ und also speziell auch die elastistischen Spannungen $\boldsymbol{p}_{ab}$ in derselben Weise wie ν von Φ' ab:

$$\frac{\boldsymbol{p}_{ab}}{\Phi'^4} = \text{konst.} \tag{28}$$

Das früher (p. 544) für die Oberflächenspannung S eines Elektrons gefundene Resultat steht hiermit in Übereinstimmung, denn es ist ja S eine Spannung mal eine Länge.

§ 5. Abhängigkeit des zeitlichen Verlaufs eines Vorganges vom Gravitationspotential.

Die Abhängigkeit der Längendimensionen der Körper von Φ' veranlaßt die Frage, ob nicht auch der zeitliche Verlauf der physikalischen Vorgänge vom Gravitationspotential beeinflußt wird. Für einen einfachen Fall können wir die Frage ohne weiteres beantworten. Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist es nämlich klar, daß die Zeit, in der sich ein Lichtsignal von dem einen Ende eines Stabes zum anderen fortpflanzt, in derselben Proportion wächst, wie der Stab sich verlängert. Diese Zeit ist also dem Gravitationspotential umgekehrt proportional.

Ein anderer Vorgang, der sich ohne Schwierigkeit behandeln läßt, ist die Kreisbewegung unter Einfluß der Gravitation eines Zentralkörpers. Um einen Massenpunkt von der gravitierenden Masse M_1 bewege sich in kreisförmiger Bahn ein anderer Massenpunkt mit der viel kleineren gravitierenden Masse M_2. Es sei M_1 so groß im Verhältnis zu M_2, daß wir die erstere Masse als ruhende betrachten dürfen. In § 7 werden wir näher untersuchen, wann ein Körper als ein Massenpunkt angesehen werden darf, und die Gesetze für seine Bewegung ableiten. Hier brauchen wir nur so viel zu wissen, daß für einen Massenpunkt die Bewegungsgleichungen (51) l. c. gelten, wo Φ das Gravitationspotential des vom Massenpunkt selbst nicht herrührenden Feldes bedeutet. Dieses Potential ist

$$\Phi = \Phi_a - \frac{M_1}{4\pi r},$$

wo Φ_a das konstante äußere Potential und r der Abstand von M_1 sind. Weil Φ in allen Punkten der kreisförmigen Bahn denselben Wert hat, bleibt die träge Masse des bewegten Punktes unverändert, und die Bewegungsgleichungen (51) l. c. geben

$$-g(\Phi)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d\mathfrak{B}_x}{d\tau}, \text{ usw.}$$

Nach (17) können wir die Gleichungen auch

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi'}{c_2} \frac{d\mathfrak{B}_x}{d\tau}$$

usw. schreiben. Es ist ja

$$|\nabla \Phi| = \frac{M_1}{4\pi r^2}.$$

Weil weiter der bewegte Massenpunkt keine Tangentialbeschleunigung hat, ist

$$\frac{d\mathfrak{B}_x}{d\tau} = \frac{1}{1-\mathfrak{q}^2}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt}$$

usw. (vgl. z. B. Gleichung (62) l. c.). Für den Absolutwert der Beschleunigung gilt

$$\left|\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right| = \frac{\mathfrak{v}^2}{r},$$

wo r der Radius der kreisförmigen Bahn. Durch Gebrauch von allen diesen Gleichungen erhalten wir die folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{M_1}{4\pi r^2} = \frac{\Phi_a' - \frac{M_1}{4\pi r}}{c^2(1-\mathfrak{q}^2)} \frac{\mathfrak{v}^2}{r}.$$

Eine Umformung gibt

$$\frac{M_1}{4\pi r} = \Phi_a' \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}$$

oder, wenn wir die Umlaufszeit T einführen,

$$\text{(a)} \qquad \frac{M_1 c^2}{4\pi r \Phi_a'} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}.$$

Diese Gleichung verknüpft die drei Größen r, T und Φ_a' miteinander. Wenn wir nach (17) $c^2/\Phi' = g$ setzen, bekommen wir genau diejenige Gleichung, die die klassische Mechanik geben würde.

Wir denken uns die beiden Massenpunkte M_1 und M_2 und auch die Maßstäbe, womit wir die Längen messen, an einen anderen Ort gebracht, wo ein anderes äußeres Gravitationspotential Φ_a' herrscht. Dann haben sich alle Längen umgekehrt proportional mit Φ_a' verändert, und wenn wir den früheren Vorgang wiederherstellen wollen, messen wir den Abstand r so, daß $r \cdot \Phi_a'$ in den beiden Fällen denselben Wert hat. Es hat also nach (a) auch r/T in den beiden Fällen denselben Wert, das heißt die Umlaufszeit verändert sich proportional mit den Längendimensionen der Körper. Nach (26) hat man also

$$\text{(29)} \qquad T\Phi_a' = \text{konst.}$$

Wir wollen noch untersuchen, wie sich die Schwingungsdauer eines materiellen Punktes verhält, der durch eine elastische (oder „quasielastische“) Kraft an eine feste Gleichgewichtslage gebunden um diese Lage schwingt. Bei genügend kleiner Schwingungsamplitude können wir die gewöhnliche Schwingungsgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax$$

benutzen; m ist die träge Masse des materiellen Punktes, x die

Verschiebung von der Gleichgewichtslage, a eine elastische Konstante. Für die Schwingungsdauer T' erhält man bekanntlich (am einfachsten durch Einsetzen von $x = C e^{2\pi i (t/T)}$)

$$T'^2 = 4\pi^2 \frac{m}{a}.$$

Bei einer Veränderung des Gravitationspotentials hat man nach (21)

$$\frac{m}{\Phi'} = \text{konst.}$$

Es ist ja $a x$ die elastische Kraft, die wie ein Zug in einem gespannten Faden zu behandeln ist. Bei Veränderung von Φ' verhält sich also $a x$ wie eine Spannung mal eine Fläche (der Querschnitte des Fadens) und es ist nach (28) und (26)

$$\frac{a x}{\Phi'^2} = \text{konst.}$$

Weil x eine Länge ist, hat man

$$\frac{a}{\Phi'^3} = \text{konst.},$$

und also für die Schwingungsdauer

$$T \Phi' = \text{konst.}$$

genau in Übereinstimmung mit den beiden früheren Resultaten. — Es ist zu vermuten, daß der Verlauf aller physikalischen Vorgänge in entsprechender Weise beeinflußt wird.

Aus dem zuletzt behandelten Beispiel folgt, daß die Wellenlänge einer Spektrallinie vom Gravitationspotential abhängt. Eine numerische Ausrechnung zeigt, daß die Wellenlängen auf der Sonnenoberfläche um rund zwei Millionstel größer sein müßten als bei irdischen Lichtquellen. Dieselbe — vielleicht eben beobachtbare — Verschiebung geben auch einige andere neuere Theorien der Gravitation.

§ 6. Bemerkungen über die Definition der Grundeinheiten.

Aus der Abhängigkeit der Längendimensionen und Massen der Körper sowie des zeitlichen Verlaufs der Erscheinungen vom Gravitationspotential folgt, daß wir bei Festsetzung der Grundeinheiten das Gravitationspotential in Betracht nehmen müssen. Unter einem Zentimeter verstehen wir also die Länge eines Normalmaßstabes bei einer bestimmten Temperatur und einem bestimmten Gravitationspotential. Als das letztere nimmt man natürlich das auf der Erde herrschende. Ähnliches gilt bei der Festsetzung der Zeiteinheit und der Einheit der trägen Masse.

Wenn die Längen- und Zeiteinheit auf einem Orte von bestimmtem Gravitationspotential festgestellt sind, kann man prinzipiell aus diesem Orte alle Längen und Zeiten in der Welt mittels Fernrohren und Austausch von Lichtsignalen messen, denn die Lichtstrahlen pflanzen sich geradlinig und mit der konstanten Geschwindigkeit c fort. Es ist also kein Transport von Maßstäben und Uhren von einem Ort zu anderen notwendig, um Längen und Zeiten an verschiedenen Orten zu vergleichen.

Das Gravitationspotential Φ_0, bei welchem die Grundeinheiten festgestellt sind, ist als eine universelle Konstante anzusehen, und dasselbe gilt von $g(\Phi_0)$. Die universelle Konstante der hier entwickelten Gravitationstheorie tritt also nicht in den Feldgleichungen (19), (20), wohl aber bei der Festsetzung der Grundeinheiten auf.

§ 7. Die Bewegungsgleichungen eines Körpers, der als Massenpunkt betrachtet werden darf.

Um die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes zu erhalten und auch deutlich einzusehen, wann ein Körper als ein materieller Punkt angesehen werden darf, betrachten wir einen Körper, der die Eigenschaften des in § 1 behandelten vollständigen, stationären Systems besitzt, und der sich in einem homogenen äußeren Gravitationsfelde frei bewegt. Wir haben

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

wo

$$\Phi_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{d v}{r}\left\{g(\Phi)\nu\right\}_{t-\frac{r}{c}}.$$

Das Gravitationspotential Φ_2 des äußeren Feldes braucht nicht zeitlich konstant zu sein, wenn nur $\partial\Phi_2/\partial t$ konstant ist.

Wir haben also

$$\Phi_2 = a\,x + b\,y + f\,z + h\,u.$$

wo die Koeffizienten $a \ldots h$ örtlich und zeitlich konstant sind.

Nach den allgemeinen Grundlagen der Relativitätsmechanik hat man (vgl. § 1)

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(G_{xx} + T_{xx} + L_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(G_{xy} + T_{xy} + L_{xy}) \\ & + \frac{\partial}{\partial z}(G_{xz} + T_{xz} + L_{xz}) + \frac{\partial}{\partial u}(G_{xu} + T_{xu} + L_{xu}) = 0 \end{aligned} \right.$$

und noch drei andere Gleichungen, die durch Austausch des ersteren Index x gegen y, z, u erhalten werden. Wir integrieren den Ausdruck (a) über den gangen $x\,y\,z$-Raum, und behandeln zunächst den Gravitationstensor G gesondert. Nach (7) und (3) haben wir:

$$\text{(b)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \left\{ \frac{\partial G_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial G_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial G_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial G_{xu}}{\partial u} \right\} d\,v = \\ & = \int g(\Phi)\,v\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\,d\,v + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \int g(\Phi)\,v\,d\,v. \end{aligned} \right.$$

Das erste Integral rechts wollen wir umformen. Da die zweiten Ableitungen von Φ_2 alle Null sind, können wir in der Gleichung (2) links Φ_1 anstatt Φ setzen, und wenn wir den so erhaltenen Ausdruck für $g(\Phi)\,v$ einführen, erhalten wir nach einer Umformung ähnlich der, die von Gleichung (3) zu Gleichung (7) führt,

$$\begin{aligned} \int g(\Phi)\,v\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\,d\,v = & \int \left\{ \frac{\partial G_{xx}^1}{\partial x} + \frac{\partial G_{xy}^1}{\partial y} + \frac{\partial G_{xz}^1}{\partial z} \right\} d\,v \\ & + \int \frac{\partial G_{xu}^1}{\partial u}\,d\,v. \end{aligned}$$

Es sind hier G_{xx}^1 usw. die Ausdrücke, die man erhält, wenn man in den Gleichungen (6) Φ_1 anstatt Φ schreibt. Das erste Integral rechts in der letzten Gleichung können wir nach dem Gaussschen Satz in ein Oberflächenintegral über eine unendlich große Kugelfläche verwandeln, und dieses Integral wird gleich Null, weil für die ersten Ableitungen von Φ_1 Gleichung (5) entsprechende Ausdrücke gelten. Wir erhalten also

$$\text{(c)} \qquad \int g(\Phi)\,v\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\,d\,v = \frac{d}{d\,u} \int \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\,d\,v.$$

Die beiden übrigen Welttensoren T und L geben bei der Integration von (a) als Resultat

$$\frac{d}{d u}\int\left\{T_{xu}+L_{xu}\right\} d v,$$

denn die übrigen Glieder lassen sich auch hier in ein Oberflächenintegral verwandeln, das gleich Null wird. Die Integration von (a) über den ganzen Raum gibt also bei Beachtung von (b) und (c) das Resultat

$$\text{(d)}\qquad -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\int g(\Phi) \nu\, d v=\frac{d}{d u}\int\left\{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}+T_{xu}+L_{xu}\right\} d v .$$

Es ist ja

$$\mathfrak{G}_x=-\frac{i}{c}\int\left\{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}+T_{xu}+L_{xu}\right\} d v$$

die x-Komponente des Gesamtimpulses des bewegten Körpers. Wenn die Bewegung *quasistationär* ist,[1]) was wir jetzt annehmen müssen, können wir $\mathfrak{G}_x$ nach derselben Formel berechnen, die für gleichförmige Bewegung des Körpers gilt und die lautet (vgl. p. 536)

$$\mathfrak{G}_x=\frac{m\, \mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}=m\, \mathfrak{V}_x .$$

m ist die träge Masse des Körpers. Wenn der Körper rotiert oder in ihm innere stationäre Bewegungen vorkommen, beziehen sich nach § 1 die dreidimensionale Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der vierdimensionale Bewegungsvektor $\mathfrak{V}$ auf den Körper als ein Ganzes und geben also die Lagenveränderung des Schwerpunktes an. Weiter müssen wir annehmen, daß der Körper von so mässigen Dimensionen ist, daß man $g(\Phi_2)$ innerhalb des Körpers als örtlich konstant ansehen kann, was praktisch immer der Fall ist. Wir haben dann nach (11)

$$g(\Phi_2)\, m=\int g(\Phi) \nu\, d v_0=\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{q}^2}}\int g(\Phi) \nu\, d v,$$

denn Gleichung (11) bezieht sich ja auf ein Bezugssystem, in welchem die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ augenblicklich Null ist, und für

1) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität II. — Leipzig 1905. p. 183.

ein Volumenelement $d v_o$ in diesem Bezugssysteme haben wir

$$d v_o = \frac{d v}{\sqrt{1 - \mathfrak{q}^2}}.$$

Weil weiter

$$d \tau = d t \sqrt{1 - \mathfrak{q}^2} = \frac{d u}{i c} \sqrt{1 - \mathfrak{q}^2},$$

wo τ die Eigenzeit des Körpers bedeutet, erhalten wir schließlich aus (d)

$$- g(\Phi_2) m \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{d}{d \tau} m \mathfrak{B}_x.$$

Das ist die erste der Bewegungsgleichungen für den Körper; die drei übrigen erhält man natürlich durch Austausch von x, gegen y, z, u.

Wir haben das äußere Feld als homogen vorausgesetzt. Ist dies nicht der Fall, so gelten die Gleichungen nur mit der Genauigkeit, womit innerhalb des Körpers $\nabla \Phi_2$ und $\partial \Phi_2 / \partial t$ örtlich konstant sind. (Das Feld außerhalb des Körpers kann ja nicht auf denselben wirken.) Mit dieser Genauigkeit können wir den Körper als einen materiellen Punkt betrachten, und für einen solchen gelten also nach den obigen Betrachtungen folgende Bewegungsgleichungen,

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} - g(\Phi_a) m \dfrac{\partial \Phi_a}{\partial x} = \dfrac{d}{d \tau} m \mathfrak{B}_x, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ - g(\Phi_a) m \dfrac{\partial \Phi_a}{\partial u} = \dfrac{d}{d \tau} m \mathfrak{B}_u, \end{array} \right.$$

wo das Gravitationspotential des äußeren Feldes mit Φ_a bezeichnet ist. Das Gleichungssystem stimmt mit den Gleichungen (51) l. c. überein.

Wenn wir die Gleichungen (30) mit $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$, $\mathfrak{B}_u$ multiplizieren und addieren, finden wir genau in derselben Weise wie p. 873 l. c. das Gesetz für die Veränderung der trägen Masse, und wir gelangen zu den schon in § 2 abgeleiteten Formeln. Durch Benutzen dieser Formeln können wir die Bewegungsgleichungen (30) auch in folgende Form bringen:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} -c^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi_a' &= \frac{d\mathfrak{B}_x}{d\tau} + \mathfrak{B}_x \frac{d}{d\tau} \ln \Phi_a', \\ -c^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln \Phi_a' &= \frac{d\mathfrak{B}_y}{d\tau} + \mathfrak{B}_y \frac{d}{d\tau} \ln \Phi_a', \\ -c^2 \frac{\partial}{\partial z} \ln \Phi_a' &= \frac{d\mathfrak{B}_z}{d\tau} + \mathfrak{B}_z \frac{d}{d\tau} \ln \Phi_a', \\ -c^2 \frac{\partial}{\partial u} \ln \Phi_a' &= \frac{d\mathfrak{B}_u}{d\tau} + \mathfrak{B}_u \frac{d}{d\tau} \ln \Phi_a'. \end{aligned}\right.$$

Man sieht hieraus, daß die Bewegung eines Körpers in einem Gravitationsfeld vollständig unabhängig von der Beschaffenheit des Körpers ist, wenn derselbe nur als ein materieller Punkt behandelt werden darf.

In einem statischen, homogenen Felde speziell darf ja jeder quasistationär bewegte Körper, der die Bedingungen in § 1 erfüllt, als materieller Punkt betrachtet werden, und alle solchen Körper fallen also in derselben Weise. Für die Fallbewegung gelten die Gleichungen (64) l. c.; es ist nur zu beachten, daß g von Φ abhängt, und daß natürlich Φ das Potential des äußeren Feldes bedeutet. Da ein um seine Symmetrieachse rotierender Rotationskörper die Bedingungen in § 1 erfüllt, muß er genau so fallen, wie ein nicht rotierender Körper. Die p. 878 l. c. über rotierende Körper gemachte Behauptung gilt also nicht in unserer jetzigen Theorie; auch haben die Molekularbewegungen keinen Einfluß auf die Fallbewegung. Dagegen wird ein in horizontaler Richtung ausgeworfener Körper langsamer fallen als einer, der keine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, wie die Gleichungen (64) l. c. fordern.

Systeme, die die Bedingungen in § 1 nicht erfüllen, bewegen sich wohl im allgemeinen in einem äußeren Felde annähernd nach den Bewegungsgleichungen (30), (31). Hr. Einstein hat z. B. gezeigt, daß die Fallbeschleunigung eines elastisch schwingenden Systems nach der hier entwickelten Theorie sich zwar mit der Schwingungsphase verändern muß, die mittlere Beschleunigung aber die durch (64) l. c. gegebene ist.

Zürich, Juli 1913.

(Eingegangen 24. Juli 1913.)