

**4. Zur Theorie
des Versuches von Trouton und Noble;
von M. Laue.**

I.

Vielfach wird der Michelsonsche Interferenzversuch als die einzige Stütze betrachtet, welche die Relativitätstheorie gegenüber der „Absoluttheorie“ besitzt. Dies ist aber keineswegs der Fall. Auch der Trouton-Noblesche Versuch¹⁾ entscheidet im gleichen Sinne; und wenn er trotz der Wertschätzung, welche ihm H. A. Lorentz²⁾ 1904 entgegenbrachte, einigermaßen in Vergessenheit geraten ist, so dürfte dies im wesentlichen daran liegen, daß seine Theorie jener Anschaulichkeit entbehrt, welche die des Michelsonversuches so sehr auszeichnet. Diesem Mangel möchte die folgende Darstellung abhelfen.

Gegenstand des Versuches ist die Frage, ob ein geladener Plattenkondensator infolge seiner Bewegung mit der Erde ein Drehmoment erfährt. Relativ- und Absoluttheorie bejahen dies übereinstimmend; die Relativtheorie natürlich nur bei Benutzung eines *nicht* mitbewegten Bezugssystems K ; im „Ruhsystem“ K^0 ist kein Drehmoment vorhanden. Die Absoluttheorie läßt nun, da ihre Dynamik die Newtonsche ist, eine Drehung als Folge des Momentes erwarten; der Kondensator sucht sich nach ihr so zu stellen, daß die Richtung der Ge-

1) Fr. P. Trouton u. H. R. Noble, Proc. Roy. Soc. 72. p. 132. 1903. Die größte beobachtete Drehung betrug 5 Proz. der nach der Absoluttheorie berechneten. Leider erstreckten sich die Versuche nur über den Zeitraum von 10 Tagen, so daß einem Verfechter der Absoluttheorie der Einwand offen bleibt, daß in dieser Zeit vielleicht die Geschwindigkeit der Erde gegen die Sonne gerade durch die unbekannte Bewegung der Sonne gegen den Äther aufgehoben wurde (vgl. E. Budde, Physik. Zeitschr. 12. p. 973. 1911.)

2) H. A. Lorentz, Proc. Amsterdam 1904. p. 809.

schwindigkeit tangential zu den Platten liegt. Daß nach der Relativtheorie dagegen dies Moment keine Änderung der Bewegung hervorruft, weil die materiellen Teile des Kondensators wie alle elastisch gespannten Körper zur gleichförmigen translatorischen Bewegung ein Drehmoment benötigen, ist vom Verfasser¹⁾ mehrfach an anderen Stellen ausgeführt worden. Hier soll nur das Verfahren betrachtet werden, nach welchem beide Theorien jenes Drehmoment berechnen.

Bisher geschah dies wie folgt²⁾: Bedeutet E^0 die elektrostatische Energie des Kondensatorfeldes im Fall der Ruhe, q die Geschwindigkeit, ϑ^0 den Winkel zwischen der Geschwindigkeit und der Plattennormale, bezogen auf das System K^0 , in welchem der Kondensator ruht, so läßt sich zeigen, daß der elektromagnetische Impuls des Feldes eine zur Geschwindigkeit senkrechte Komponente von der Größe $q \sin 2 \vartheta^0 E^0/c^2$ besitzt. Daraus folgt nach dem Satz von der Erhaltung des Drehimpulses, daß jenes Drehmoment, welches nach Größe und Richtung durch das Vektorprodukt $[\mathcal{G} q]$ gegeben ist, der Betrag

$$N = \frac{q^2}{c^2} E^0 \sin 2 \vartheta^0$$

hat.

Diese Überlegung ist zwar unbedingt zwingend. Aber man kann noch fragen: welches sind die Kräftepaare, die dies Drehmoment hervorbringen, und wo greifen sie an? Und dies soll im folgenden beantwortet werden. Der Unterschied beider Betrachtungsarten hat sein Analogon in der Theorie des Strahlungsdruckes. Dort kann man völlig mit dem Satz von der Erhaltung des Impulses auskommen. Wenn man letzteren für den einfallenden und den reflektierten Strahl berechnet, so gibt die (vektorielle) Differenz unmittelbar den dem Spiegel zugeführten Impuls an.³⁾ Der hier einzuschlagende Weg dagegen entspricht dem anderen Verfahren von Abraham⁴⁾,

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip. Braunschweig. p. 168 u. f. Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 13. p. 513. 1911 und Ann. d. Phys. 35. p. 524. 1911. Vgl. auch P. Epstein, Ann. d. Phys. 36. p. 779. 1911.

2) H. A. Lorentz, l. c. M. Laue, Relativitätsprinzip. p. 99.

3) M. Abraham, Ann. d. Phys. (4) 14. p. 236. 1904. § 3. Theorie der Elektrizität II. p. 329 u. f. 1908. Vgl. auch M. Laue, Relativitätsprinzip. § 23.

4) M. Abraham, Ann. d. Phys. 14. p. 236. 1904. § 5.

welche den Druck als Ergebnis der am Spiegel auftretenden Maxwell'schen Spannungen auffaßt, oder auch dem von Planck¹⁾, der das elektromagnetische Feld im Spiegel ermittelt und die auf seine Ladungen und Ströme ausgeübte Kraft ausrechnet.

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Kondensatorplatten Rechtecke sind, deren Seiten a und b groß sind gegen den Plattenabstand d , daß ferner die Plattendicke auch gegen d klein ist und geradezu als unendlich klein betrachtet werden kann.²⁾ Der Raum zwischen den Platten sei frei von Materie und auch die Stützen, welche zwischen den Platten angebracht werden müssen, um sie in ihrem Abstand voneinander zu erhalten, sollen die Dielektrizitätskonstante und Permeabilität 1 haben, so daß sie sich elektromagnetisch vom leeren Raum nicht unterscheiden. Die Geschwindigkeit q sei senkrecht auf den Seiten von der Länge b .

II.

Wir berechnen zuerst die auf den ruhenden Kondensator ausgeübten Kräfte. Weitaus die stärkste Kraftwirkung ist die Anziehung, welche die Platten aufeinander ausüben; sie hat, soweit das Feld im Innern als homogen betrachtet werden darf, pro Flächeneinheit die Stärke $\frac{1}{2} \mathfrak{E}^0$, wenn \mathfrak{E}^0 die Feldstärke ist. Vernachlässigen wir die Randwirkungen, so ergeben diese Kräfte resultierende $\pm \mathfrak{R}_1^0$ von der Stärke

$$(1) \quad |\mathfrak{R}_1^0| = \frac{1}{2} a b \mathfrak{E}^0 = \frac{E^0}{d},$$

deren Angriffspunkte die Mittelpunkte der Platten sind. Weit weniger stark, aber dennoch für unsere Zwecke in Betracht kommend sind die Zugkräfte, welche am Rande auf die Platten wirken.

1) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1906. § 53 bis 58. W. Meissner, Dissert. Berlin 1907.

2) Von der letzteren Bedingung könnte man sich befreien, indem man im Abschnitt II zwei Niveaulinien $\pm \varphi = \text{const} < V$ als Querschnitt der Platten nimmt. Gleichung (1) und (7) bleibt unverändert. Ebenso kann man ohne wesentliche Änderung die Form der Kondensatorplatten beliebig variieren, wenn man nur alle ihre Abmessungen gegen d groß annimmt.

Betrachten wir z. B. den Kraftlinienverlauf in der Nähe des Randes (Fig. 1). Wir entnehmen diese Figur aus der bekannten Helmholtzschen Lösung¹⁾ des elektrostatischen Problems für den Rand eines Kondensators, welche zwar die Platten als unendlich große Halbebenen voraussetzt, die wir aber dennoch wegen unserer Annahme über das Verhältnis von a und b zu d hier unbedenklich verwenden dürfen. Wir sehen an ihr, daß alle Kraftlinien senkrecht auf den Linien endigen, die den Durchschnitt der Platten mit der Zeichenebene angeben.

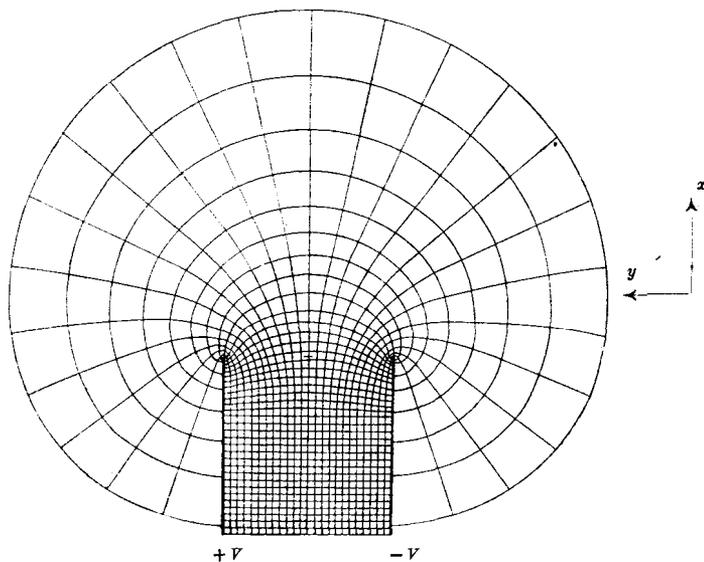


Fig. 1.

Nur die an den Plattenkanten ansetzende Kraftlinie macht eine Ausnahme. Sie übt einen Zug nach außen aus, und zwar hat dieser trotz der unendlich geringen Dicke der Platten einen endlichen Betrag, weil die Flächendichte der elektrischen Belegung dort unendlich groß ist. Zur Berechnung dieser Kraft müssen wir freilich wegen der in der Kante stattfindenden Singularitäten einen Umweg einschlagen. Wir denken uns statt der einen Platte irgendeine andere Niveaulinie als leitende

1) H. v. Helmholtz, Berliner Ber. 1868. p. 215. Ges. Abh. I. p. 146. Vgl. auch Vorlesungen über theoretische Physik IV. p. 236. 1907.

Begrenzung des Feldes, und berechnen die Kraftwirkung welche sie erfährt. Die Lösung unseres eigentlichen Problems geschieht dann durch einen Grenzübergang.

Legen wir die x -Achse in die Symmetrielinie der Fig. 1 und wählen wir den Koordinatenursprung so, daß die Platten denjenigen Teil der Linien $y = \pm \frac{1}{2} d$ bilden, der von $x = -\infty$ bis $x = -d/2\pi$ reicht, bezeichnen wir ferner mit φ die Potentialfunktion und mit $2V$ die Potentialdifferenz der Platten (der Platte vom Potential $+V$ entspreche die Linie $y = +\frac{1}{2}d$), so ist die zitierte Helmholtzsche Lösung enthalten in der Gleichung:

$$(2) \quad x + iy = \frac{d}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{V} (\psi + i\varphi) + e^{\frac{\pi}{V}(\psi + i\varphi)} \right\}$$

oder in den gleichbedeutenden Beziehungen:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{d}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{V} \psi + e^{\frac{\pi}{V}\psi} \cos\left(\frac{\pi}{V}\varphi\right) \right\}, \\ y = \frac{d}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{V} \varphi + e^{\frac{\pi}{V}\psi} \sin\left(\frac{\pi}{V}\varphi\right) \right\}. \end{cases}$$

Die Kurven $\psi = \text{const.}$ sind die Kraftlinien. Die Kraft, welche auf das Linienelement dl einer leitend gedachten Niveaulinie $\varphi = \varphi_0$ ($0 < \varphi_0 < V$) wirkt, hat den Betrag

$$\frac{1}{2} \mathfrak{E}^0 dl = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 dl$$

und die Richtung n , wenn n die nach außen weisende Normale von dl ist. Die x -Komponente dieser Kraft ist infolgedessen:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \cos nx dl,$$

und die Integralwirkung auf die ganze Niveaulinie ist

$$(4) \quad \mathfrak{R}_x^0 = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \cos nx dl.$$

Wählen wir die Integrationsrichtung so, daß wir im Innern des Kondensators (in unendlicher Entfernung) vom Rande beginnen, so liegen dl und dn zueinander wie x und $-y$. Infolgedessen ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \psi}{\partial l};$$

da $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ ist, so können wir $\frac{\partial \psi}{\partial l} dl = d\psi$ setzen, und haben in der Gleichung

$$\mathfrak{R}_x^0 = - \frac{1}{2} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos nx d\psi,$$

die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken, da dem Innern $\psi = -\infty$ entspricht. Andererseits ist, da φ nur in der Richtung n variiert

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos nx = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Also wird

$$(5) \quad \mathfrak{R}_x^0 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\psi.$$

Nun folgt der aus (2) oder (3) vermittels einfacher Rechnungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2V}{d} \frac{e^{\frac{\pi}{V}\psi} \sin\left(\frac{\pi}{V}\varphi\right)}{1 + 2e^{\frac{\pi}{V}\psi} \cos\left(\frac{\pi}{V}\varphi\right) + e^{\frac{2\pi}{V}\psi}}.$$

Führen wir als Integrationsvariable

$$u = e^{\frac{\pi}{V}\psi}$$

ein, so finden wir somit, da längs der Linie $\varphi = \varphi_0$ zu integrieren ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x^0 &= \frac{V^2}{\pi d} \sin\left(\frac{\pi}{V}\varphi_0\right) \int_0^\infty \frac{du}{1 + 2u \cos\left(\frac{\pi}{V}\varphi_0\right) + u^2} \\ &= \frac{V^2}{\pi d} \left[\operatorname{arctg} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{V}\varphi_0\right) + u}{\sin\left(\frac{\pi}{V}\varphi_0\right)} \right]_0^\infty = \frac{V\varphi_0}{d}; \end{aligned}$$

und im Grenzfall $\varphi_0 = V$, in welchem die Niveaufäche mit der Kondensatorplatte zusammenfällt:

$$(6) \quad \mathfrak{R}_x = \frac{V^2}{d}.$$

Hier ist zunächst so gerechnet, als hätte der Kondensator die Ausdehnung 1 senkrecht zur Zeichenebene. Tatsächlich wirkt aber auf jede der Kanten von der Länge b eine in ihrem Mittelpunkte angreifende, nach außen ziehende Kraft $\pm \mathfrak{R}_2^0$ vom Betrage

$$(7) \quad |\mathfrak{R}_2^0| = \frac{bV^2}{d} = \frac{1}{2} \frac{E^0}{a},$$

da die elektrostatische Energie in der obigen Annäherung

$$E^0 = \frac{1}{2} a b d \cdot \left(\frac{2V}{d} \right)^2 = 2 \frac{a b}{d} V^2$$

gesetzt werden kann. Das entsprechende gilt für die vier Kanten von der Länge a ; doch kommen die hierauf wirkenden Kräfte in folgendem nicht in Betracht, weil sie sowie die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte nach den obigen Voraussetzungen auf der Geschwindigkeit q senkrecht stehen.

III.

Das Ergebnis des Abschnittes II ist in Fig. 2 veranschaulicht, die einen zu den Kanten b senkrechten Querschnitt durch die Mitte des Kondensators darstellt. Als Bezugssystem ist das Ruhssystem K^0 gewählt. In den Plattenmittelpunkten M und M' greifen die Kräfte $\pm \mathfrak{R}_1^0$, in den Mittelpunkten A, B, A', B' der Kanten von der Länge b die Kräfte $\pm \mathfrak{R}_2^0$ an; deren Beträge sind durch (1) und (7) gegeben. Die Längen der diese Kräfte darstellenden Strecken sind nicht entsprechend (1) und (7) gezeichnet. Wohl aber gibt diese und alle folgenden Figuren die Richtungen der Kräfte richtig wieder. Der Augenschein lehrt, daß ein Drehmoment nicht ausgeübt wird.

Das Achsenkreuz x^0, y^0, z^0 wählen wir jetzt so, daß die z^0 -Achse zu den Kanten b parallel, also zur Zeichenebene senkrecht wird; die x^0 -Achse soll mit der Plattennormale den Winkel ϑ^0 bilden. Für die Koordinaten der Punkte M, M', A, B, A', B' gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$8) \quad y_M^0 - y_{M'}^0 = d \sin \vartheta^0, \quad y_A^0 - y_B^0 = y_{A'}^0 - y_{B'}^0 = a \cos \vartheta^0.$$

Ferner ist:

$$(9) \quad \mathfrak{R}_{1x}^0 = -\frac{E^0}{d} \cos \vartheta^0, \quad \mathfrak{R}_{2x}^0 = -\frac{1}{2} \frac{E^0}{a} \sin \vartheta^0.$$

Nun transformieren wir auf ein System K , gegen welches K^0 die Geschwindigkeit q in der x -Richtung hat. Die Lorentztransformation lautet:

$$(10) \quad x^0 = \frac{x - q t}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad y^0 = y, \quad z^0 = z, \quad t^0 = \frac{t - \frac{q}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

Die Umrechnungsformeln für die Kräfte heißen¹⁾:

$$(11) \quad \mathfrak{R}_x = \mathfrak{R}_x^0, \quad \mathfrak{R}_y = \mathfrak{R}_y^0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}, \quad \mathfrak{R}_z = \mathfrak{R}_z^0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}.$$

Fig. 3 stellt die infolge der Lorentzkontraktion eintretende Deformation des Kondensators und die Richtung der Kräfte nach (11) dar. (Es ist in den Figuren

$$\vartheta^0 = \frac{\pi}{4}, \quad \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \text{ d. h. } q = 0,866 c$$

gewählt; Figg. 2, 3, 4 u. 5 sind im gleichen Maßstab gezeichnet.) Man erkennt ohne weiteres, daß ein Drehmoment um die

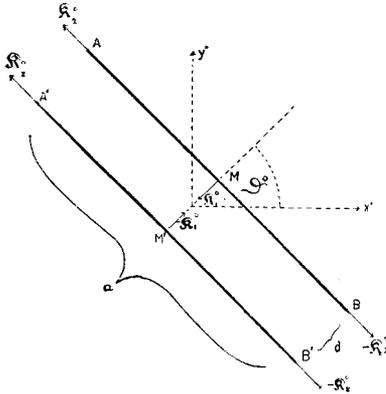


Fig. 2.

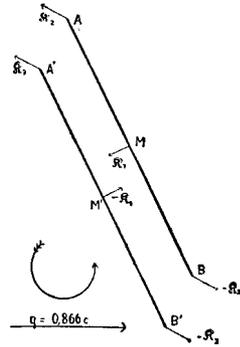


Fig. 3.

z -Achse in dem in der Figur angegebenen Sinne ausgeübt wird. Seine Größe berechnen wir nach der Formel:

$$N = \sum (x \mathfrak{R}_y - y \mathfrak{R}_x).$$

Nun ist im Ruhssystem das Drehmoment

$$(11a) \quad N^0 = \sum (x^0 \mathfrak{R}_y^0 - y^0 \mathfrak{R}_x^0) = 0.$$

Zur Auswertung der entsprechenden Summe für das System K ist zu beachten, daß stets entgegengesetzt gleiche Kräfte paarweise auftreten, so daß es nicht auf die absoluten Werte von

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip, Gleichung (87a). Man setze in ihr $q' = 0$, $v = q$.

x und y ankommt, sondern nur auf Differenzen $x_a - x_b$, $y_a - y_b$, die bei gleichem t zu bilden und infolgedessen nach (10) gleich

$$(x_a^0 - x_b^0) \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}, y_a^0 - y_b^0$$

zu setzen sind (Lorentzkontraktion). Somit wird nach (11) und (11a)

$$(12) \quad \begin{cases} N = \sum (x \mathfrak{R}_y - y \mathfrak{R}_x) = \sum \left(x^0 \mathfrak{R}_y^0 \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) - y^0 \mathfrak{R}_x^0 \right) \\ = - \frac{q^2}{c^2} \sum y^0 \mathfrak{R}_x^0. \end{cases}$$

Für das Kräftepaar $\pm \mathfrak{R}^1$ hat nach (8) und (9) das Moment den Betrag

$$- \frac{q^2}{c^2} (y_M^0 - y_{M'}^0) \mathfrak{R}_{1x}^0 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2} E^0 \sin 2 \vartheta^0,$$

für jedes der beiden Kräftepaare $\pm \mathfrak{R}_2$ aber

$$- \frac{q^2}{c^2} (y_A^0 - y_B^0) \mathfrak{R}_{2x}^0 = \frac{1}{4} \frac{q^2}{c^2} E^0 \sin 2 \vartheta^0.$$

Im ganzen finden wir also ein Drehmoment

$$(13) \quad N = \frac{q^2}{c^2} E^0 \sin 2 \vartheta^0$$

in Übereinstimmung mit der bisherigen Berechnungsart.

Die am Schluß des Abschnittes II erwähnten Kräfte, welche auf die Mitte der Seiten von der Länge a wirken, sind parallel zu z^0 und bleiben bei der Transformation parallel zu z , ebenso wie die Verbindungslinien ihrer Angriffspunkte. Sie ergeben daher kein Drehmoment.

Da nach Voraussetzung $a \gg d$, so ist nach (1) und (7) $|\mathfrak{R}_2^0| \ll |\mathfrak{R}_1^0|$. Wenn trotzdem die beiden Kräftepaare $\pm \mathfrak{R}_2$ die Hälfte zum Drehmoment N beitragen, so liegt dies nach (8) daran, daß sie an einem zu a proportionalen, die Kräfte $\pm \mathfrak{R}_1$ aber nur an einem zu d proportionalen Hebelarm angreifen.

IV.

Die Stellung unserer Betrachtung zur Absoluttheorie ist die folgende. Die Absoluttheorie stimmt hinsichtlich der Transformation der hier auftretenden Kräfte, da diese elektromagnetischen Ursprungs sind, mit der Relativitätstheorie überein. Sie kennt aber die Lorentzkontraktion nicht, so daß nach ihr der Kondensator in der Bewegung dieselbe Form hat, wie in

Fig. 2. Dennoch läßt sich die obige Schlußweise übertragen; denn auch die Absoluttheorie kennt ein Abbildungsverfahren, durch welches das Problem des elektromagnetischen Feldes gleichförmig bewegter Ladungsträger auf eine elektrostatische

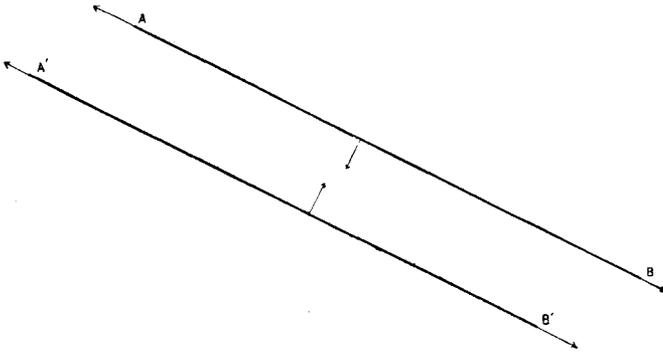


Fig. 4.

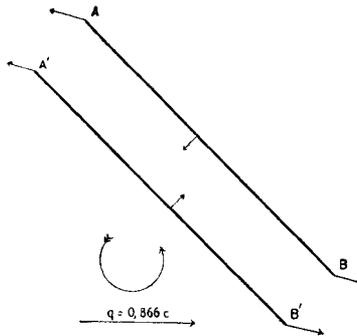


Fig. 5.

Aufgabe zurückgeführt wird. Wir müssen dazu nur von einem ruhenden Kondensator ausgehen, der bei gleicher Gesamtladung der Platten eine Form hat, welche aus der in Fig. 2 gezeichneten durch eine Dehnung in der x -Richtung um den Faktor $1 / \sqrt{1 - q^2/c^2}$ hervorgeht (Fig. 4). Wenn wir jetzt genau wie oben von dem Ruhssystem K^0 zu K übergehen (Fig. 5), so wird diese Dehnung durch die Verkürzung aller zu x parallelen Abmessungen um den Faktor $\sqrt{1 - q^2/c^2}$ gerade aufgehoben. So mußte auch Abraham, als er das Feld des starren, kugelförmigen Elektrons in der Bewegung untersuchen wollte, von

dem statischen Felde eines verlängerten Rotationsellipsoides ausgehen.¹⁾

Was nun die Kräfte anbelangt, die auf den Kondensator von Fig. 4 wirken, so sind diese natürlich von anderem Betrage, wie die zu Fig. 2 berechneten. Z. B. sind wohl noch die Kräfte in A und B' , sowie die in A' und B einander gleich. Aber die Kraft in A ist stärker als die in A' . Das positive Drehmoment, welches diese vier Kräfte um die z -Achse ausüben, wird dadurch kompensiert, daß die auf den Platten senkrecht stehenden Kräfte nicht mehr wie in Fig. 2 in einer Linie liegen. Trotzdem ihre Angriffspunkte (wie eine leichte Überlegung zeigt) näher an A und B liegen als an A' und B , müssen diese ein negatives Drehmoment hervorbringen. Denn die Summe aller Drehmomente ist natürlich wie bei jedem statischen Felde, Null. Fig. 5 entsteht nun aus Fig. 4 durch genau dieselbe Konstruktion wie Fig. 3 aus Fig. 2. Sie stellt die Kräfte auf den bewegten Kondensator nach der Absoluttheorie dar. Man sieht ohne weiteres, daß in Fig. 5 ein Drehmoment ausgeübt wird, das denselben Sinn hat, wie in Fig. 3. Dessen Betrag wäre im allgemeinen freilich nicht so einfach zu berechnen. Bedenkt man aber, daß beim Trouton-Noble'schen Versuch die Geschwindigkeit q klein ist gegen c , so sieht man, daß durch die Dehnung, die von Fig. 2 zu Fig. 4 führt, die Punkte des Kondensators Verrückungen erleiden, die klein von der zweiten Ordnung, d. h. zu q^2/c^2 proportional sind. Infolgedessen wird man die in Fig. 4 gezeichneten Kräfte durch Reihenentwickelungen nach steigenden Potenzen von q^2/c^2 darstellen können, deren erste, von q^2 unabhängige Glieder durch die oben berechneten Kräfte \mathfrak{K}_1^0 und \mathfrak{K}_2^0 dargestellt werden. Dies bewirkt, daß sich das Drehmoment, welches in Fig. 5 auf den Kondensator ausgeübt wird, von den oben angegebenen nur um Glieder vierter und höherer Ordnung unterscheidet. Denn in dem Ausdruck (12)

$$N = - \frac{q^2}{c^2} \sum y^0 \mathfrak{K}_x^0$$

unterscheiden sich sowohl die y^0 als die \mathfrak{K}_x^0 nur um Glieder zweiter Ordnung von den Werten in (8) und (9). Ebenso wird

¹⁾ M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. p. 105. 1903.

sich die elektrostatische Energie E^0 in Form einer derartigen Reihe darstellen lassen. Somit bleibt bis auf Glieder vierter und höherer Ordnung die Beziehung (13)

$$N = \frac{q^2}{c^2} E^0 \sin 2 \vartheta^0$$

bestehen.

V.

Bisher setzten wir voraus, daß die Platten des Kondensators vollständig in ein Dielektrikum von der Dielektrizitätskonstanten 1 eingebettet sind. Diese Voraussetzung war bei dem Versuche nicht erfüllt. Wir wollen die Abänderungen diskutieren, die infolgedessen an den bisherigen Betrachtungen vorzunehmen sind.

a) Nehmen wir an, ein Mittel von der Dielektrizitätskonstante ϵ erfüllt außer dem Raum zwischen den Platten auch noch die ganze Umgebung des Kondensators soweit, als sein Feld merkliche Intensität besitzt. Dann haben alle ponderomotorische Kräfte den ϵ -fachen Betrag wie oben, vorausgesetzt, daß die Spannungsdifferenz zwischen den Platten nach wie vor $2V$ beträgt; z. B. ist nach (7) jetzt

$$(14) \quad |\mathfrak{R}_2^0| = \frac{\epsilon b V}{d}.$$

Das Gleiche gilt daher nach (12) für das Drehmoment N ; andererseits aber auch für die elektrostatische Energie E^0 . Die Beziehung (13) zwischen N und E^0 bleibt also erhalten, sowohl für die Absolut- wie für die Relativitätstheorie.

b) Besser als die Annahme a) paßt zu den tatsächlichen Verhältnissen die Voraussetzung, daß das Dielektrikum nur den Innenraum erfüllt, und daß seine Begrenzung nach außen durch eine Zylinderfläche gebildet wird, welche durch elektrische Kraftlinien gebildet wird, also in der Bezeichnungswiese von II die Gleichung $\psi = \text{const.}$ hat. An dem Aussehen des Feldes wird dadurch nichts geändert. Denn sowohl im Dielektrikum als im Außenraum sind nach Gleichung (2) und (3) die Bedingungen des elektrostatischen Feldes erfüllt; an der Grenze aber sind nicht nur die tangentiellen Komponenten der Feldstärke stetig, da diese selbst tangential liegt, sondern auch die normale Komponente der elektrischen Verschiebung, da diese beiderseits Null ist; somit ist auch den Grenzbedingungen genügt.

In diesem Falle tritt nun zu den Kräften \mathfrak{R}_2^0 in A und A' noch eine Kraft \mathfrak{R}_3^0 , welche ebenfalls die materiellen Teile des Kondensators tangentiell zu den Platten spannt. Sie wirkt auf die Begrenzung des Dielektrikums. Liegt die Begrenzung des Dielektrikums in der Nähe des Plattenrandes, so spielt jetzt für die Berechnung des Drehmomentes N die Summe $2|\mathfrak{R}_2^0| + |\mathfrak{R}_3^0|$ dieselbe Rolle, wie früher die beiden Kräfte \mathfrak{R}_2 . Im Dielektrikum herrscht nämlich senkrecht zu den Kraftlinien der Druck $(\varepsilon/2)\mathfrak{E}^2$, außerhalb der Druck $\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2$. Aus der Differenz dieser Drucke ergibt sich die aus Symmetriegründen zu den Platten parallele Kraft

$$(15) \quad |\mathfrak{R}_3^0| = \frac{1}{2} b (\varepsilon - 1) \int \mathfrak{E}^2 \cos n x \, dl,$$

wobei die Integration über die ganze Kraftlinie ψ von der Platte auf dem Potential $-V$ bis zu den vom Potential $+V$ auszudehnen ist. n ist die äußere Normale der Grenzfläche. Somit liegen (vgl. Fig. 1) n und dl zueinander wie x zur y -Richtung, so daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

ist. Da aber $\mathfrak{E}^2 = (\partial \varphi / \partial l)^2$ und wegen der Unveränderlichkeit des φ in der n -Richtung und des ψ in der l -Richtung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} \, dl = d\varphi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \cos n x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

gesetzt werden kann, so folgt aus (15):

$$(16) \quad |\mathfrak{R}_3^0| = \frac{\varepsilon - 1}{2} b \int_{-V}^{+V} \frac{\partial \psi}{\partial x} \, d\varphi.$$

Nach (2) oder (3) ist aber

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{2V}{d} \frac{1 + e^{\frac{\pi}{V}\psi} \cos \frac{\pi}{V}\varphi}{1 + e^{2\frac{\pi}{V}\psi} + e^{\frac{\pi}{V}\psi} \cos \frac{\pi}{V}\varphi}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\pi}{V} \varphi = u, \quad e^{\frac{\pi}{V}\psi} = s,$$

so wird

$$|\mathfrak{R}_3^0| = (\varepsilon - 1) \frac{b V^2}{\pi d} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + s \cos u}{1 + s^2 + 2 s \cos u} \, du.$$

Ferner ist bekannt¹⁾, daß

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + s \cos u}{1 + s^2 + 2s \cos u} du = \begin{matrix} 2\pi & \text{wenn } s^2 < 1, \\ \pi & \text{,, } s^2 = 1, \\ 0 & \text{,, } s^2 > 1; \end{matrix}$$

also wird

$$(17) \quad |\mathfrak{R}_3^0| = \begin{matrix} 2(\varepsilon - 1) \frac{bV^2}{d} & \text{wenn } \psi < 0, \\ (\varepsilon - 1) \frac{bV^2}{a} & \text{,, } \psi = 0, \\ 0 & \text{,, } \psi > 0. \end{matrix}$$

Die Kraftlinien, für welche $\psi < 0$, verlaufen nun zwischen den Platten, während die mit positivem ψ an der Außenseite der Platten ansetzen. Die Grenze bildet die von der Plattenkante ausgehende Linie $\psi = 0$. Liegt also die Begrenzung des Dielektrikums im Innern des Kondensators ($\psi < 0$), so liegen die Ränder der Platten im leeren Raum, so daß nach (7)

$$|\mathfrak{R}_2^0| = \frac{bV^2}{d}$$

und nach (17)

$$2|\mathfrak{R}_2^0| + |\mathfrak{R}_3^0| = 2\varepsilon \frac{bV^2}{d}$$

ist. Begrenzt hingegen eine der Kraftlinien $\psi > 0$ das Dielektrikum, so liegen die Kanten völlig im Dielektrikum eingebettet, so daß nach (14)

$$|\mathfrak{R}_2^0| = \varepsilon \frac{bV^2}{d},$$

und nach (17) wiederum

$$2|\mathfrak{R}_2^0| + |\mathfrak{R}_3^0| = 2\varepsilon \frac{bV^2}{d}$$

ist. Die einfache Betrachtung, welche im Anschluß an II zeigt, daß auch im Falle $\psi = 0$ $2|\mathfrak{R}_2^0| + |\mathfrak{R}_3^0|$ diesen Wert hat, wollen wir nicht durchführen. Die den Kondensator tangential zu den Platten spannenden Kräfte, sind also in Summa stets dieselben, wie unter der Annahme a), und da das Entsprechende für die elektrostatische Energie E^0 gilt (innerhalb der hier durchgeführten Annäherung, welche alle Randwirkungen bei der Berechnung von E^0 vernachlässigt), so bleibt wie unter der

1) Vgl. z. B. J. A. Serret, Differential- und Integralrechnung 2. p. 344. Leipzig 1899.

Annahme a) auch hier die Beziehung (13) zwischen N und E^0 bestehen.

Daß die Absoluttheorie ihr nur Glieder vierter und höherer Ordnung hinzufügt, läßt sich ebenso wie unter IV zeigen.

Tatsächlich hat nun die Begrenzung des Dielektrikums nicht die Form einer Kraftlinie. Unsere Untersuchung auf diesen Fall auszudehnen, stieße aber auf große mathematische Schwierigkeiten, da man für die Potentialfunktion am Rande des Kondensators die Helmholtzsche Lösung (Abschnitt III) nicht mehr brauchen könnte. Nur qualitativ wird man unser Ergebnis übertragen können, daß neben der Anziehung der Platten am Rande der Platten und an der Begrenzung des Dielektrikums Kräfte angreifen, welche im Ruhezustand die Platten tangential spannen, und daß die Gesamtheit dieser Kräfte im Fall der Bewegung das Drehmoment hervorbringt. Zudem zeigten unsere Untersuchungen eine so weit gehende Unabhängigkeit des Ergebnisses von den besonderen Voraussetzungen, daß unser Ziel, die Veranschaulichung der Lorentz'schen Theorie des Trouton-Nobleschen Versuches, erreicht sein dürfte.

München, Institut für theoretische Physik, März 1912.

(Eingegangen 9. März 1912.)