

3. Über totale Reflexion; von W. von Ignatowsky.

§ 1. Einleitung.

Hr. W. Voigt gibt in seiner Arbeit¹⁾ eine sehr interessante Anordnung an, welche es ermöglicht, das bei der Totalreflexion in das zweite Medium eintretende Licht nachzuweisen. Da das Folgende gewissermaßen als Fortsetzung der Untersuchungen des Hrn. Voigt betrachtet werden muß, so wollen wir in Kürze einige Stellen der Arbeit von Hrn. Voigt wiederholen, und zwar diejenigen, die für das Folgende maßgebend sind.

Gegeben sei ein Prisma $abcd$ mit einer stumpfen Kante in c . Das Licht falle in Richtung des Pfeiles so ein, daß auf den Seiten bc und cd Totalreflexion stattfindet. Die Beobachtung ergibt, daß die Kante c leuchtet, und zwar maximal ungefähr in der Richtung cl .²⁾ Weiter bemerkt Hr. Voigt³⁾: „Am nächsten läge wohl die Auffassung des Problems als eines Falles von Beugung, insofern die letzte ungestörte ebene inhomogene Welle im zweiten Medium, die in der Fig. 1 durch die Gerade cm angedeutet ist, als Lichtquelle für den Raum zwischen ihr und der Prismenfläche cd angesehen werden darf.“ Nun bemerkt Hr. Voigt, daß die Rolle, welche die Grenzfläche cd bei diesem Vorgang spielt, ziemlich unklar ist. Nehmen wir aber ein Prisma von der Form $abce$ bzw. ein rechtwinkliges Prisma $abca$, so würde die Wirkung der

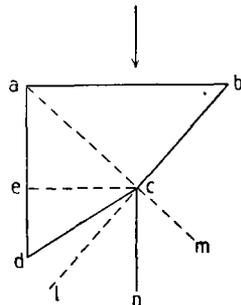


Fig. 1.

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 67. p. 185. 1899.

2) l. c. p. 188—189.

3) l. c. p. 193—194.

zweiten Grenzfläche ce bzw. ca des Prismas dabei auf das äußerste reduziert, wahrscheinlich vollständig eliminiert sein.¹⁾

Wir wollen deshalb für das Folgende ein Prisma von der Form $abcea$ bzw. $abca$ annehmen, die inhomogene Welle cm als Lichtquelle für den Raum ecm bzw. unterhalb acm betrachten und die Wirkung der Fläche ec bzw. ac vernachlässigen. Berücksichtigen wir noch die Untersuchung von Hrn. Voigt über das durch die Kante, die doch schließlich eine Zylinderfläche von sehr kleinem Radius ist, durch gewöhnliche Brechung durchgegangene Licht²⁾, so müssen wir annehmen, daß die Beobachtungen am besten in dem Winkelraum ecl bzw. acl ausgeführt werden, eventuell auch über cl hinaus, aber nicht zu nahe an die Richtung cn , die parallel dem einfallenden Lichte ist.

Daß diese Annahmen eine Annäherung an die wirklich eintretenden Verhältnisse darstellen, folgt schon daraus, daß an der Kante selbst eine Störung der oben erwähnten inhomogenen Welle eintritt, weil wir dort eben, in strengem Sinne, keine totale Reflexion haben werden.³⁾ Die Berechtigung für unsere Annahmen kann nur durch das Experiment bewiesen werden und diesbezüglich verweisen wir auf die an diese Arbeit anschließende experimentelle Untersuchung.

§ 2. Theorie.

Wir denken uns die Z -Achse eines Koordinatensystems (Fig. 2) zusammenfallend mit der Kante c des Prismas. Die X -Achse soll normal zur Fläche cb des Prismas und nach außen hin gerichtet sein. Dann fällt die Fläche cb mit der ZY -Ebene zusammen. Innerhalb des Prismas falle eine ebene Welle in Richtung des Pfeiles unter dem Winkel φ auf die ZY -Ebene.

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden.

I. Fall. Die elektrische Kraft \mathcal{E} ist parallel der Z -Achse.

1) l. c. p. 198.

2) l. c. p. 197—198.

3) Cl. Schaefer u. G. Gross, Ann. d. Phys. 32. p. 648. 1910.

Es ist dann

$$(1) \quad \mathcal{E} = f \cdot A_1 e^{i(\omega t + p_1 a_1)},$$

$$(2) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad p_1 = \frac{2\pi n}{\lambda} = p n,$$

wobei T die Periode, λ die Wellenlänge und n den Brechungs-
exponenten bedeuten.

$$(3) \quad a_1 = y \sin \varphi - x \cos \varphi.$$

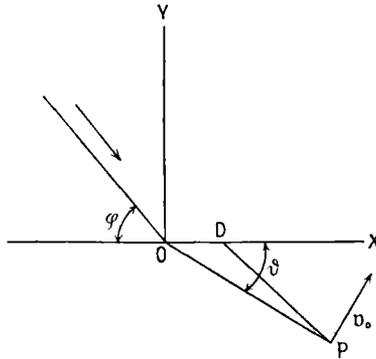


Fig. 2.

Für die reflektierte elektrische Kraft erhalten wir

$$(4) \quad \mathcal{E}' = f A_2 e^{i(\omega t - p_1 a_1)}$$

und

$$(5) \quad a_2 = -y \sin \varphi - x \cos \varphi,$$

und für die gebrochene

$$(6) \quad \mathcal{E}'' = f A_3 e^{i(\omega t + y m + \alpha x)}.$$

Es ist allgemein

$$(7) \quad \frac{s}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2}.$$

Aus (6) und (7) folgt dann, da $n = \sqrt{\epsilon}$ ist,

$$(8) \quad \alpha^2 = p^2 - m^2.$$

Aus der Grenzbedingung für die elektrische Kraft ergibt
sich (für $x = 0$)

$$(9) \quad A_1 e^{i p_1 y \sin \varphi} + A_2 e^{i p_1 y \sin \varphi} = A_3 e^{i y m},$$

und da dies für beliebige y gelten muß, so folgt

$$(10) \quad p_1 \sin \varphi = m$$

und

$$(11) \quad A_1 + A_2 = A_3.$$

Aus (10) und (8) ergibt sich

$$(12) \quad \alpha^2 = p^2(1 - n^2 \sin^2 \varphi).$$

Ist $n^2 \sin^2 \varphi > 1$, haben wir also Totalreflexion, so muß sein

$$(13) \quad \alpha = + i p \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}.$$

Aus den Grenzbedingungen für die magnetische Kraft ergibt sich:

$$(14) \quad n p (A_2 - A_1) \cos \psi = A_3 \alpha.$$

Es folgt dann aus (14) und (11)

$$(15) \quad \begin{cases} A_2 = A_1 \frac{n p \cos \varphi + \alpha}{n p \cos \varphi - \alpha} = A_1 \frac{n \cos \varphi + i \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}}{n \cos \varphi - i \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}}, \\ A_3 = A_1 \frac{2 n p \cos \alpha}{n p \cos \varphi - \alpha} = A_1 \frac{2 n \cos \varphi}{n \cos \varphi - i \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}}, \end{cases}$$

und demnach

$$(16) \quad \mathfrak{E}'' = \mathfrak{f} A_3 e^{-x p \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}} e^{i(\omega t + y n p \sin \varphi)}.$$

Für die Komponente der magnetischen Kraft der gebrochenen Welle längs der X -Achse ist

$$(17) \quad \mathfrak{H}_1'' = -i \frac{A_3}{\omega} n p \sin \varphi e^{-x p \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}} e^{i(\omega t + y n p \sin \varphi)}.$$

II. Fall. Die magnetische Kraft ist parallel zur Z -Achse. Die magnetische Kraft der einfallenden Welle ist:

$$(18) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{f} \cdot \frac{A_1' p_1}{\omega} e^{i(\omega t + p_1 a_1)}$$

und der reflektierten

$$(19) \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{f} \cdot \frac{A_2' p_1}{\omega} e^{i(\omega t - p_1 a_2)},$$

wobei A_1' die Amplitude der einfallenden elektrischen Kraft bedeutet. Für die gebrochene Welle erhalten wir

$$(20) \quad \mathfrak{H}'' = \mathfrak{f} \cdot \frac{A_3' p}{\omega} e^{i(\omega t + y m + x \alpha)}.$$

Die Größen a_1 , a_2 und α bestimmen sich wie früher, und aus den Grenzbedingungen erhalten wir

$$(21) \quad (A_1' + A_2')n = A_3'$$

und

$$(22) \quad (A_1' - A_2') \cos \varphi = - \frac{A_3' \alpha}{p}.$$

Hieraus folgt

$$(23) \quad A_2' = A_1' \frac{p \cos \varphi + n \alpha}{p \cos \varphi - n \alpha} = A_1' \frac{\cos \varphi + n i \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}}{\cos \varphi - n i \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}}$$

und

$$(24) \quad A_3' = A_1' \frac{2 p n \cos \varphi}{p \cos \varphi - n \alpha} = A_1' \frac{2 n \cos \varphi}{\cos \varphi - i n \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}}.$$

Aus (20) ergibt sich für die gebrochene elektrische Kraft

$$(25) \quad \mathcal{E}_1'' = -i \frac{A_3' \alpha}{p} e^{i(\omega t + y m + x \alpha)} + i \frac{A_3' m}{p} e^{i(\omega t + y m + x \alpha)}.$$

Den Annahmen von § 1 zufolge wollen wir als Lichtquelle diejenigen Werte für die magnetische bzw. elektrische Kraft annehmen, die sich aus den Werten der gebrochenen Welle für $y = 0$ ergeben.

Ein Punkt P , welcher unterhalb der X -Achse liegt, habe die Entfernung $R = OP$ vom Koordinatenanfang. Der entsprechende Einheitsvektor \mathfrak{R}_0 ist von P nach O gerechnet.

Um die Licherregung im Punkte P tatsächlich zu berechnen, benutzen wir die von mir früher abgeleiteten Integrale (31) und (33), § 10 meiner Arbeit¹⁾, in welchen wir ds statt dx und \mathfrak{s}_0 statt i setzen können. Da nun die Amplituden mit wachsendem x sehr rasch abnehmen, so brauchen wir nur ein sehr kleines Stück der X -Achse zu betrachten und können deshalb schreiben (Fig. 2)

$$(26) \quad r = PD = R - x \cos \vartheta,$$

$$(27) \quad \mathfrak{R}_0 i = \cos(\mathfrak{R}_0 i) = \sin \vartheta,$$

$$(28) \quad \sin(\mathfrak{R}_0 j) = \cos \vartheta.$$

Bezeichnen wir für den ersten Fall die Komponente der magnetischen Kraft längs der X -Achse mit φ' , und diejenige

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 25. p. 116. 1908; 26. p. 1031. 1908.

der elektrischen Kraft längs der Z -Achse durch Z' , so erhalten wir (der Faktor $e^{i\omega t}$ ist weggelassen) aus (17) und (16): ($y = 0$)

$$(29) \quad \varphi' = - \frac{A_3 n p \sin \varphi}{\omega} e^{-x p \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}} = e^{-x p \gamma} C$$

und

$$(30) \quad Z' = A_3 e^{-x p \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}} = e^{-x p \gamma} D,$$

hierbei ist

$$(31) \quad A_3 = A_1 \frac{2 n \cos \varphi}{n \cos \varphi - i \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi - 1}}.$$

Die Funktionen Q_0 , Q_1 und Q_1' , die in den zitierten Integralen vorkommen, reduzieren sich für große Argumente zu:

$$(32) \quad \begin{cases} Q_0 = i \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} e^{-i \left(p R - \frac{\pi}{4} \right)} \\ Q_1 = - \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} e^{-i \left(p R - \frac{\pi}{4} \right)} \end{cases}$$

und

$$(33) \quad Q_1' = - Q_2 = + i \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} e^{-i \left(p R - \frac{\pi}{4} \right)},$$

wobei jetzt R dem r in (26) entspricht. Da wir nur längs einem sehr kurzen Stück der X -Achse zu integrieren haben, so können wir in den Nennern von (32) und (33) $r = R$ setzen und in den Exponenten von e den Ausdruck (26) für R und erhalten deshalb statt (32) und (33)

$$(32a) \quad \begin{cases} Q_0 = i \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} e^{-i \left(p R - \frac{\pi}{4} \right)} e^{i p x \cos \vartheta}, \\ Q_1 = i Q_0 \end{cases}$$

und

$$(33a) \quad Q_1' = - Q_2 = Q_0,$$

wo nun $R = OP$ ist.

Aus den Integralen (31) § 10 meiner Arbeit und (29) und (30) erhalten wir dann, unter Berücksichtigung, daß $n = j$ ist:

$$\mathcal{E}_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} e^{i \left(\omega t + \frac{\pi}{4} - p R \right)} \{ p D \sin \vartheta - \omega C \} \\ \cdot \int_Q^{X_1} e^{i x p \cos \vartheta - x p \gamma} \cdot dx$$

oder

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{f} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - pR)} \frac{1}{2\pi p} \sqrt{\frac{\pi}{2pR}} \frac{pD \sin \vartheta - C\omega}{i \cos \vartheta - \gamma} \{ e^{i x_1 p \cos \vartheta - x_1 p \gamma} - 1 \}.$$

Und endlich, da $e^{-x_1 p \gamma}$ sehr klein ist:

$$(34) \quad \mathfrak{E}_z = \mathfrak{f} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - pR)} \frac{1}{2\pi p} \sqrt{\frac{\pi}{2pR}} \frac{C\omega - pD \sin \vartheta}{i \cos \vartheta - \gamma}.$$

Ganz analog erhalten wir aus dem zweiten Integral (31) § 10:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_m &= - e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - pR)} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2pR}} \\ &\cdot \frac{1}{i \cos \vartheta - \gamma} \left\{ C[\mathfrak{H}_0 \mathfrak{f}] - \frac{pD \sin \vartheta}{\omega} [\mathfrak{H}_0 \mathfrak{f}] - \frac{iD \cos^2 \vartheta}{\omega R} i \right\}. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnen wir durch v_0 einen Einheitsvektor senkrecht zu \mathfrak{H}_0 (Fig. 2), so wird sein

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} j &= v_0 \cos \vartheta + \mathfrak{H}_0 \sin \vartheta, \\ i &= -\mathfrak{H}_0 \cos \vartheta + v_0 \sin \vartheta. \end{aligned} \right.$$

Hieraus und aus (31) erhalten wir statt (34) und (35)

$$(37) \quad \mathfrak{E}_z = - \mathfrak{f} e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - pR)} \frac{A_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2pR}} \cdot \frac{2n \cos \varphi (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}{(i \cos \vartheta - \gamma) (n \cos \varphi - i \gamma)}$$

und

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_m &= e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - pR)} \frac{A_1 p}{2\pi \omega} \sqrt{\frac{\pi}{2pR}} \left\{ v_0 (n \sin \varphi + \sin \vartheta \right. \\ &\left. - \frac{i \cos \vartheta \sin \vartheta}{pR}) - \frac{\mathfrak{H}_0 i \cos^2 \vartheta}{pR} \right\} \cdot \frac{2n \cos \varphi}{(i \cos \vartheta - \gamma) (n \cos \varphi - i \gamma)}. \end{aligned} \right.$$

Wir erhalten dann laut § 5¹⁾ für den zeitlichen Mittelwert des Poyntingschen Strahlungsvektors

$$(39) \quad \mathfrak{H}_1 = - \frac{\mathfrak{H}_0 A_1^2 n^2 \cos^2 \varphi (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}{16 \pi^3 R \omega (n^2 - 1) (n \sin \varphi - \sin \vartheta)}$$

und für den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der elektrischen Kraft

$$(40) \quad E_2 = A_1^2 \frac{n^2 \cos^2 \varphi (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}{4 \pi p R (n^2 - 1) (n \sin \varphi - \sin \vartheta)}.$$

Wir gehen jetzt zu dem Fall II über und erhalten aus den Integralen (33) § 10, falls wir setzen:

1) Ann. d. Phys. 23. p. 891. 1907.

$$(41) \quad \begin{cases} n \mathfrak{E}_m' = -\frac{A_1' \alpha}{p} e^{i x \alpha} = C' e^{-x p \gamma} \\ \zeta = \frac{A_1' p}{\omega} e^{i x \alpha} = D' e^{-x p \gamma} \\ S = \frac{A_1' m}{p} e^{i x \alpha} = M e^{-x p \gamma}, \end{cases}$$

wie leicht aus (20) und (25) folgt,

$$(42) \quad \mathfrak{E}_m = -e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - p R)} \frac{1}{2 \pi p} \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} \frac{C' p \Re_0 + D' \omega i + M p [\Re_0 t]}{i \cos \vartheta - \gamma}$$

und

$$(43) \quad \mathfrak{S}_z = e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - p R)} \frac{1}{2 \pi \omega} \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} \frac{D' \omega [\Re_0 i] - M p t}{i \cos \vartheta - \gamma},$$

wobei wir das letzte Glied in (33) § 10 vernachlässigt haben wegen $p R$ im Nenner.

Wegen (24) und (36) folgt statt (42) und (43)

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_m &= -e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - p R)} \frac{A_1'}{2 \pi} \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} \\ &\cdot \frac{2 n \cos \varphi \{v_0 (n \sin \varphi + \sin \vartheta) + \Re_0 (i \gamma - \cos \vartheta)\}}{(i \cos \vartheta - \gamma) (\cos \varphi - i n \gamma)}, \end{aligned} \right.$$

$$(45) \quad \mathfrak{S}_z = -t e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4} - p R)} \frac{A_1' p}{2 \pi \omega} \sqrt{\frac{\pi}{2 p R}} \frac{2 n \cos \varphi (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}{(i \cos \vartheta - \gamma) (\cos \varphi - i n \gamma)}.$$

Für den Mittelwert des Poyntingschen Strahlungsvektors folgt dann:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \Re_2 &= -\Re_0 A_1'^2 \frac{n^2 \cos^2 \varphi (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}{16 \pi^2 R \omega (n^2 - 1) (n^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) (n \sin \varphi - \sin \vartheta)} \\ &- v_0 \frac{A_1'^2 n^2 \cos^2 \varphi \cos \vartheta}{16 \pi^2 R \omega (n^2 - 1) (n^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) (n \sin \varphi - \sin \vartheta)} \end{aligned} \right.$$

und für den Mittelwert des elektrischen Kraft

$$(47) \quad E_2 = \frac{A_1'^2 n^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{2 p n R (n^2 - 1) (n^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) (n \sin \varphi - \sin \vartheta)}.$$

Wir berechnen noch für beide Fälle den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der magnetischen Kraft und erhalten für den ersten Fall aus (38) unter Vernachlässigung der imaginären Glieder in der Klammer, wegen $p R$ im Nenner

$$(48) \quad H_1 = A_1'^2 \frac{n^2 \cos^2 \varphi (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}{4 \pi p R c^2 (n^2 - 1) (n \sin \varphi - \sin \vartheta)}.$$

Und für den zweiten Fall

$$(49) \quad H_2 = A_1'^2 \frac{n^2 \cos^2 \varphi (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}{4 \pi p R c^2 (n^2 - 1) (n \sin \varphi - \sin \vartheta) (n^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}.$$

§ 3. Zusammenfassung.

Wir nehmen an, das Licht falle senkrecht zur Fläche ab (Fig. 1) in das Prisma ein. Bevor es in das Prisma eintritt, habe die elektrische Kraft die Amplitude:

Für den ersten Fall B_1 ,
 „ „ zweiten „ B_2 .

Dann ist bei senkrechtem Einfall

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{2 B_1}{1 + n}, \\ A_1' = \frac{2 B_2}{1 + n}. \end{cases}$$

Berechnen wir die Energie der Strahlung mit Hilfe des Poyntingschen Vektors, so ist die Intensität der einfallenden Strahlung:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Für den ersten Fall: } J_1 = \frac{B_1^2}{8 \pi c} = \frac{(1 + n)^2 A_1^2}{32 \pi c}, \\ \text{„ „ zweiten „ : } J_2 = \frac{B_2^2}{8 \pi c} = \frac{(1 + n)^2 A_1'^2}{32 \pi c}, \end{cases}$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Berechnen wir anderseits die Energie aus dem Mittelwerte des Quadrates der elektrischen Kraft, so erhalten wir für die einfallende Strahlung

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Für den ersten Fall: } J_1 = \frac{B_1^2}{2} = \frac{(1 + n)^2 A_1^2}{8}, \\ \text{„ „ zweiten „ : } J_2 = \frac{B_2^2}{2} = \frac{(1 + n)^2 A_1'^2}{8}. \end{cases}$$

Wir denken uns das aus dem Prisma austretende Licht mit einem Polarisationsphotometer, z. B. nach Martens, beobachtet. Die Achse des Instrumentes falle mit der Richtung von OP zusammen. Wir haben dann die Möglichkeit, das Verhältnis der Intensitäten des in der Hauptebene und senkrecht dazu polarisierten Lichtes zu bestimmen.

Nehmen wir als Maß der Intensität den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der elektrischen Kraft, wie man dies

eventuell nach den Versuchen von O. Wiener vermuten könnte¹⁾, so erhalten wir aus (40) und (47) § 2:

$$(4) \quad K_1 = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{2 n \sin \varphi}{(n^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}.$$

Falls wir den Poyntingschen Vektor zugrunde legen, erhalten wir aus (39) und (46) § 2, wobei wir in (46) das zweite Glied nicht berücksichtigen dürfen, da dasselbe eine zur Blickrichtung senkrechte Strahlung darstellt:

$$(5) \quad K_2 = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{1}{n^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}.$$

Wir können endlich zugrunde legen den zeitlichen Mittelwert e der gesamten in einem Volumenelement enthaltenen Energie.

Nun ist

$$(6) \quad e = \frac{E}{8\pi c^2} + \frac{H}{8\pi}.$$

Aus (40), (47), (48) und (49) erhalten wir deshalb

$$(7) \quad K_3 = \frac{e_2}{e_1} = \frac{J_2}{J_1} \frac{3 n \sin \varphi + \sin \vartheta}{2 (n^2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) (n \sin \varphi + \sin \vartheta)}.$$

Die Formeln (4) und (7) ergeben uns eine Abhängigkeit vom Winkel ϑ . Hierdurch sind wir in den Stand gesetzt, eine experimentelle Entscheidung zwischen (4) und (7) einerseits und (5) andererseits zu treffen. Wir verweisen diesbezüglich auf die folgende Arbeit.

‘Berlin, Januar 1912.

1) O. Wiener, Wied. Ann. 40. p. 203. 1890.

(Eingegangen 22. Januar 1912.)