7. *Zur Dynamik der Relativitätstheorie;*
von M. Laue.

Die Dynamik des Massenpunktes hat A. Einstein[1]) schon in seiner ersten grundlegenden Arbeit über das Relativitätsprinzip, kurz darauf auch M. Planck[2]) behandelt. Das wesentlichste Ergebnis ihrer Untersuchung waren die bekannten, seither am Elektron verschiedentlich experimentell bestätigten Formeln für die Abhängigkeit der longitudinalen und der transversalen Masse von der Geschwindigkeit. Als Ausgangspunkt diente die Annahme, daß im Grenzfall unendlich kleiner Geschwindigkeit die Newtonsche Dynamik bestehen bleibt. Später hat Planck[3]) die Theorie nach der thermodynamischen Seite hin erweitert, und hat dabei die mechanische Trägheit völlig auf Energie (und Druck) zurückgeführt. Dabei legte er das Prinzip der kleinsten Wirkung der Betrachtung zugrunde, mußte aber nebenbei noch eine Annahme über die Transformation der Kräfte einführen.

Dennoch gibt es in der Dynamik noch ungelöste Probleme. Z. B. fragt P. Ehrenfest[4]), ob die Dynamik des Massenpunktes auch dann noch für ein Elektron gilt, wenn man diesem nicht — wie üblich — radiale Symmetrie sondern etwa elliptische Gestalt zuschreibt. Einstein[5]) bejaht dies, weil im Grenzfall unendlich kleiner Geschwindigkeit unter allen Umständen die Newtonsche Mechanik gelten müsse. Diese Annahme ist aber in dieser Allgemeinheit sicherlich nicht zutreffend, wie wir später sehen werden. Auch M. Born[6]) glaubt dem Elektron Kugelsymmetrie zuschreiben zu müssen,

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17.** p. 891. 1905.

2) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. **4.** p. 136. 1906.

3) M. Planck, Berliner Ber. 1907. p. 542; Ann. d. Phys. **26.** p. 1. 1908.

4) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. **23.** p. 204. 1907.

5) A. Einstein, Ann. d. Phys. **23.** p. 206. 1907.

6) M. Born, Ann. d. Phys. **30.** p. 1. 1909.

weil sonst — im Widerspruch mit der Erfahrung — zu einer longitudinalen Beschleunigung auch eine transversale Komponente der Kraft gehörte.

Eng damit zusammen hängt die Theorie des Trouton-Nobleschen Versuches. Nach der Elektronentheorie erfährt ein gleichförmig bewegter, geladener Kondensator von den elektromagnetischen Kräften ein Drehmoment. Trouton und Noble[1]) versuchten dies an einem bifilar aufgehängten Kondensator als Folge der Erdbewegung nachzuweisen, konnten aber keine Drehung desselben aus der Ruhelage finden. Die Relativitätstheorie vermag dies Ergebnis natürlich sehr einfach dadurch zu erklären, daß die Erde, relativ zu welcher der Kondensator ruht, ein berechtigtes Bezugssystem ist. Wie aber gestaltet sich die Theorie, wenn man ein anderes Bezugssystem wählt? Das elektromagnetische Drehmoment ist auch nach der Relativitätstheorie vorhanden. Warum tritt dennoch keine Drehung auf?

Eine Antwort darauf gibt H. A. Lorentz.[2]) Im mitbewegten System werden die elektrostatischen Kräfte aufgehoben durch die molekulare Kohäsion, sonst wäre ja der Kondensator nicht im Gleichgewicht. An jedem Punkt ist also die Resultante aus der elektrischen und den Molekularkräften Null. Transformieren sich beide Arten von Kräften in der gleichen Weise auf andere Bezugssysteme, so bleibt diese Resultante in allen Systemen Null und zu einer Drehung liegt keine Ursache vor. So unzweifelhaft diese Antwort das Richtige trifft, so befriedigt sie doch insofern nicht ganz, als sie auf die Molekulartheorie Bezug nimmt, mit der das Problem an sich nichts zu tun hat.

Schon bei der Newtonschen Mechanik ist oft dargelegt worden[3]), daß es folgerichtiger ist, die Dynamik der Kontinua der des Massenpunktes voranzustellen. Mir scheint in den beiden genannten Problemen ein Hinweis darauf zu liegen, daß in der Relativitätstheorie die Vorzüge des genannten Weges vor dem umgekehrten, die Dynamik der Kontinua

1) Fr. T. Trouton u. H. R. Noble, Proc. Roy. Soc. **72.** p. 132. 1903.
2) H. A. Lorentz, Proc. Amsterdam 1904. p. 805.
3) Vgl. z. B. G. Hamel, Mathem. Ann. **66.** p. 350. 1908.

aus der des Massenpunktes abzuleiten, noch weit größer sind, als in der alten Theorie. Wir wollen deshalb im folgenden den Begriff der elastischen Spannungen in seinem Zusammenhang mit dem Impuls und der Energie untersuchen.[1])

Vorbemerkungen.

In der klassischen Elastizitätstheorie bilden die Spannungen einen Tensor symmetrischen $\mathfrak{p}$, d. h. die Größen

$$\begin{array}{lll} p_{xx}, & p_{xy}, & p_{xz}, \\ p_{yx}, & p_{yy}, & p_{yz}, \\ p_{zx}, & p_{zy}, & p_{zz}, \end{array}$$

zwischen denen die drei Beziehungen $p_{jk} = p_{kj}$ bestehen, rechnen sich bei einer Drehung des Achsenkreuzes x, y, z um, wie die Quadrate (x^2 usw.) und die Produkte (xy usw.) aus den Koordinaten. In der Relativitätstheorie fällt zunächst die Symmetrieeigenschaft fort. Wir gelangen so zum Begriff des unsymmetrischen Tensors, für welchen bei der durch das Schema

	x'	y'	z'
x	$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)}$	$a_3^{(1)}$
y	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$a_3^{(2)}$
z	$a_1^{(3)}$	$a_3^{(3)}$	$a_3^{(3)}$

ausgedrückten Drehung die folgenden Transformationsformeln gelten sollen:

$$\begin{aligned} t_{xx} = {} & a_1^{(1)^2} t_{x'x'} + a_1^{(2)^2} t_{y'y'} + a_1^{(3)^2} t_{z'z'} \\ & + a_1^{(2)} a_1^{(3)} (t_{y'z'} + t_{z'y'}) + a_1^{(3)} a_1^{(1)} (t_{z'x'} + t_{x'z'}) \\ & + a_1^{(1)} a_1^{(2)} (t_{x'y'} + t_{y'x'}), \\ t_{yz} = {} & a_2^{(1)} a_3^{(1)} t_{x'x'} + a_2^{(2)} a_3^{(2)} t_{y'y'} + a_2^{(3)} a_3^{(3)} t_{z'z'} \\ & + a_2^{(2)} a_3^{(3)} t_{y'z'} + a_2^{(3)} a_3^{(2)} t_{z'y'} + a_2^{(3)} a_3^{(1)} t_{z'x'} \\ & + a_2^{(1)} a_3^{(3)} t_{x'z'} + a_2^{(1)} a_3^{(2)} t_{x'y'} + a_2^{(2)} a_3^{(1)} t_{y'x'}, \text{ usw.} \end{aligned}$$

---

1) Die gleichen Betrachtungen finden sich in etwas anderer Form in meiner demnächst erscheinenden Schrift „Das Relativitätsprinzip" Braunschweig 1911.

Man bestätigt daran, daß man aus $\mathfrak{t}$ und einem beliebigen Vektor $\mathfrak{A}$ ein Vektorprodukt $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{t}]$ bilden kann, dessen Definition lautet: [1])

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{t}]_k = \mathfrak{A}_x \mathfrak{t}_{kx} + \mathfrak{A}_y \mathfrak{t}_{ky} + \mathfrak{A}_z \mathfrak{t}_{kz}, \qquad k = x, y, z.$$

Bekanntlich kann man die Operationen

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

als Komponenten eines symbolischen Vektors auffassen, dessen Vektorprodukt mit $\mathfrak{t}$ wir als die Divergenz von $\mathfrak{t}$ ($\mathfrak{div}\,\mathfrak{t}$) bezeichnen; seine Komponenten sind nach dem Schema

$$\mathfrak{div}_k\,\mathfrak{t} = \frac{\partial \mathfrak{t}_{kx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{ky}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{kz}}{\partial x}, \qquad k = x, y, z$$

zu bilden.

Ein unsymmetrischer Tensor ist z. B. das Tensorprodukt $[[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]]$ aus zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Seine Komponenten sind

$$[[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]]_{jk} = \mathfrak{A}_j \mathfrak{B}_k, \qquad j, k = x, y, z, l.$$

Ein nach dem Relativitätsprinzip berechtigtes Raum–Zeit-System nennen wir K; mehrere derartige unterscheiden wir durch angehängte Indizes (K', K^0). Der Übergang von K zu K' (Lorentztransformation) stellen wir nach Minkowski[2]) als imaginäre Drehung des vierdimensionalen Achsenkreuzes x, y, z, l dar ($l = i\,c\,t$); d. h. durch das Schema:

	x'	y'	z'	l'
x	$\alpha_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\alpha_3^{(1)}$	$\alpha_4^{(1)}$
y	$\alpha_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\alpha_3^{(2)}$	$\alpha_4^{(2)}$
z	$\alpha_1^{(3)}$	$\alpha_2^{(3)}$	$\alpha_3^{(3)}$	$\alpha_4^{(3)}$
l	$\alpha_1^{(4)}$	$\alpha_2^{(4)}$	$\alpha_3^{(4)}$	$\alpha_4^{(4)}$

Dabei genügen die Koeffizienten $\alpha_m^{(n)}$ den bekannten Realitäts- und Orthogonalitätsbedingungen.

---

1) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1904. p. 495.

2) H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908. p. 1.

Ferner ist bekannt[1]), daß sich die Begriffe des Vektors und Tensors auf das Vierdimensionale übertragen lassen. Ein Viererverktor F — den Sechservektor brauchen wir im folgenden nicht — hat den Richtungssinn einer gerichteten Strecke; d. h. seine vier Komponenten F_x, F_y, F_z, F_l transformieren sich bei der Lorentztransformation wie die entsprechenden Koordinaten. Unter einem Welttensor aber verstehen wir die Gesamtheit der 16 Komponenten T_{jk} $(j, k = x, y, z, l)$, welche sich dabei umrechnen, wie die Quadrate und Produkte aus x, y, z, l. Zwischen ihnen bestehen stets die sechs Symmetriebeziehungen $T_{jk} = T_{kj}$. Analog wie beim Tensor $\mathfrak{p}$ in drei Dimensionen die Divergenz $\mathfrak{div}\,\mathfrak{p}$ ein Raumvektor, so ist hier die Divergenz $\varDelta iv\, T$ ein Vierervektor mit den Komponenten

$$\varDelta iv_k\, T = \frac{\partial T_{kx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{ky}}{\partial y} + \frac{\partial T_{kz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial l}, \quad k = x, y, z, l.$$

§ 1. Die Transformation der Kraft; Energie- und Impulssatz.

Aus den Untersuchungen von Minkowski, Sommerfeld und Abraham[2]) entnehmen wir, daß sich die auf die Volumeinheit bezogene ponderomotorische Kraft (Kraftdichte) der Elektrodynamik $\mathfrak{F}$ zu einem Vierervektor F ergänzen läßt, wenn man zu den drei räumlichen Komponenten $F_x = \mathfrak{F}_x$ usw. als vierte Komponente $F_l = i/c\,(\mathfrak{q}\,\mathfrak{F})$ hinzunimmt, wo $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit des Angriffspunktes von $\mathfrak{F}$, somit $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{F})$ die Arbeit pro Volumen- und Zeiteinheit bedeutet.[3]) Ferner ist von denselben Autoren ausgeführt worden, daß die so definierte Viererkraft F mit einem Welttensor T in der Beziehung

$$F = -\varDelta iv\, T \tag{1}$$

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **32**. p. 749; **33**. p. 649. 1910.

2) M. Abraham, Rendicenti del Circolo Matematica di Palermo **30**. p. 1910.

3) In der Elektrodynamik der ponderablen Körper ist

$$F = \frac{i}{c}\left((\mathfrak{q}\,\mathfrak{F}) + Q\right),$$

wo Q die pro Volumen- und Zeiteinheit erzeugte Joulesche Wärme bedeutet.

steht, wobei die Komponenten von T einfache physikalische Bedeutungen haben. Die neun Komponenten nämlich, bei denen l nicht als Index auftritt, geben den dreidimensionalen Tensor $\mathfrak{p}$ der Maxwellschen Spannungen an ($T_{jk} = \mathfrak{p}_{jk}$, $j, k = x, y, z$); $-T_{ll}$ ist die Dichte W der elektromagnetischen Energie und die sechs übrigen Komponenten stehen mit der Impulsdichte $\mathfrak{g}$ und dem Energiestrom (Poyntingschen Vektor) $\mathfrak{S}$ in dem Zusammenhang

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad T_{lx} = \frac{i}{c}\mathfrak{S}_x, \quad T_{xl} - i c\, \mathfrak{g}_x \text{ usw.}$$

In der Tat enthält bei dieser Deutung von T Gleichung (1), angewandt auf die räumlichen Komponenten, den Impulssatz:

$$(2) \qquad \mathfrak{F} = -\,\mathfrak{div}\,\mathfrak{p} - \dot{\mathfrak{g}},$$

angewandt auf die zeitliche Komponente aber den Energiesatz:

$$(3) \qquad (\mathfrak{q}\,\mathfrak{F}) = -\operatorname{div}\mathfrak{S} - \dot{W}.$$

Sie verbindet beide in einer gegen die Lorentztransformation invarianten Form.

Planck und Einstein haben nun schon ausgesprochen, daß sich alle ponderomotorischen Kräfte bei der Lorentztransformation in der gleichen Weise umrechnen müssen, wie in der Elektrodynamik. Es muß somit in allen Gebieten der Physik möglich sein, die Kraftdichte mit ihrer Leistung zu einer Viererkraft zusammenzufassen. Es gibt nun zu jeder als Funktion der Weltpunkte vorgeschriebenen Viererkraft F unendlich viele Welttensoren, die mit ihr in der Beziehung (1)

$$F = -\,\varDelta i v\, T$$

stehen. Wir nehmen an, daß es in jedem Gebiete der Physik einen unter diesen Welttensoren gibt, dessen Komponenten die entsprechende Bedeutung haben, wie die Komponenten des erwähnten elektromagnetischen Tensors; d. h. daß zum Beispiel auch in der Dynamik die Energiedichte durch $-T_{ll}$, die Impulsdichte und der Energiestrom nach (1a) durch die $T_{xl} - T_{lx}$ usw. angesehen wird, während die T_{xx} mit den elastischen Spannungen in Zusammenhang stehen. Willkürlich kann dabei scheinen, daß wir den Tensor T als symmetrisch voraussetzen; denn auch die Divergenz eines unsymmetrischen Welttensors wäre ein Vierervektor. Doch läßt sich gerade dieser Teil der Annahme später begründen (vgl. § 4). Die wichtigste physikalische Folgerung aus den Symmetriebeziehungen

$$T_{xl} = T_{lx}, \quad T_{yl} = T_{ly}, \quad T_{zl} = T_{lz}$$

ist das Gesetz von der Trägheit der Energie, welches wir aus (1a) sogleich in seiner allgemeinsten Fassung[1])

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} \tag{3a}$$

finden.

Zwecks Deutung der Viererkraft ist zu beachten, daß bei *rein* elektromagnetischen Vorgängen keine ponderomotorische Kraft $\mathfrak{F}$ auftritt, weil ja sonst notwendigerweise andersartige Vorgänge als Folge davon auftreten müssen. Es ist also auch die Viererkraft

$$F = -\varDelta i v\, T = 0\,.$$

Gleichung (2) sagt dann aus, daß sich die elektromagnetische Spannkraft $-\mathfrak{div}\, \mathfrak{p}$ und die elektromagnetische Trägheitskraft $-\dot{\mathfrak{g}}$ im Gleichgewicht halten. Ebenso werden wir bei rein dynamischen Vorgängen die dynamische Viererkraft Null zu setzen haben. Sagt doch auch die Newtonsche Dynamik — am deutlichsten vielleicht im d'Alembertschen Prinzip — aus, daß die Trägheitskraft, die sich der Vergrößerung des mechanischen Impulses widersetzt, die von den elastischen Spannungen ausgeübte Kraft — andere Kräfte gibt es in der *reinen* Dynamik überhaupt nicht — gerade kompensiert. Man hat so als die, den Impuls- und Energiesatz umfassende, gegen die Lorentztransformation invariante Grundgleichung der Dynamik die Beziehung

$$F = -\varDelta i v\, T = 0\,, \tag{4}$$

wo die Komponenten von T die angegebene physikalische Bedeutung haben.

1) M. Planck, Physik. Zeitschr. 9. p. 828. 1908; Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 6. p. 728. 1908.

Treten dynamische, elektrodynamische und sonstige Vorgänge in Wechselwirkung, so tritt an die Stelle von (4), wie man leicht sieht, die Beziehung

$$\Sigma F = - \varDelta i v (\Sigma T) = 0 . \tag{5}$$

Die Summation ist über alle Viererkräfte, die dynamische, elektrodynamische usw., bzw. über alle Welttensoren auszuführen.

§ 2. Die Transformation von Impuls, Energie und Spannungen.

Die Transformationsformeln für den Impuls, die Energiedichte und die Spannungen $\mathfrak{p}$ beim Übergang von einem berechtigten Bezugssystem K zu einem anderen K' ist durch die Zurückführung auf die Komponenten des Welttensors T eindeutig bestimmt. Wir wollen sie aber nicht für die allgemeinste Lorentztransformation hinschreiben, sondern voraussetzen, daß die räumlichen Achsenkreuze x, y, z in K und x', y', z' in K' einander parallel sind, und daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, welche K' gegen K hat, in der Richtung der x-Achse liegt. In diesem Fall lautet die Lorentztransformation:

$$x = \frac{x' + i\beta l'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad l = \frac{l' + i\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$\beta = \frac{v}{c} \cdot$$

Transformiert man die Komponenten von T wie x^2 usw., so findet man, indem man an ihrer Stelle nach § 1 (vgl. (1a) und (3a)) W, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{p}$ einführt, die folgenden Formeln

$$\tag{6} \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{g}_x &= \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}_x = \frac{(c^2+v^2)\,\mathfrak{g}_x' + v\,(\mathfrak{p}_{x'x}' + W')}{c^2 - v^2}, \\ \mathfrak{g}_y &= \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}_y = \frac{c^2\,\mathfrak{g}_y' + v\,\mathfrak{p}_{x'y}'}{c\sqrt{c^2-v^2}}, \\ W &= \frac{W' + \beta^2\,\mathfrak{p}_{x'x}' + 2v\,\mathfrak{g}_x'}{1-\beta^2}, \\ \mathfrak{p}_{yy} &= \mathfrak{p}_{yy}', \quad \mathfrak{p}_{yz} = \mathfrak{p}_{yz}', \\ \mathfrak{p}_{xx} &= \frac{\mathfrak{p}_{x'x}' + 2v\,\mathfrak{g}_x' + \beta^2 W'}{1-\beta^2}, \\ \mathfrak{p}_{xy} &= \frac{\mathfrak{p}_{x'y}' + v\,\mathfrak{g}_y'}{\sqrt{1-\beta^2}} . \end{aligned} \right.$$

Die hier nicht hingeschriebenen Formeln für $\mathfrak{g}_z$, $\mathfrak{p}_{xz}$, $\mathfrak{p}_{zz}$, $\mathfrak{p}_{zx}$ und $\mathfrak{p}_{zy}$ findet man durch Vertauschung der Index y mit z an den passenden Stellen.

Die wichtigste Frage ist nun, welche Energiearten wir hier zur Dichte W zusammenfassen wollen. Die Antwort lautet: Alle diejenigen, welche in einem berechtigten System, dem Ruhsystem K^0 [1]), keine Strömung zeigen, daher auch keinen Impuls ergeben. Dazu gehören Wärme [2]), chemische, elastische Energie, innere Energie der Atome und vielleicht noch neue, unbekannte Energiearten. Elektromagnetische Energie ist im allgemeinen auszuschließen, weil sie auch im Ruhsystem K^0 strömen kann. Tut sie dies in einem speziellen Fall nicht, so kann sie auch durchaus in W mit einbezogen werden; der Tensor $\mathfrak{p}$ umfaßt dann neben den elastischen auch die Maxwellschen Spannungen, der Vektor $\mathfrak{g}$ neben dem mechanischen den elektromagnetischen Impuls.

Setzen wir nun an die Stelle des Systems K' das Ruhsystem, so vereinfachen sich die Formeln (6) wegen $\mathfrak{g}^0 = 0$ in der folgenden Art:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\mathfrak{g}_x = \dfrac{q}{c^2-q^2}(\mathfrak{p}^0_{xx} + W^0), & \mathfrak{g}_y = \dfrac{q}{c\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{p}^0_{xy},\\[2ex]
W = \dfrac{c^2 W^0 + q^2 \mathfrak{p}^0_{xx}}{c^2-q^2}, & \mathfrak{p}_{yy} = \mathfrak{p}^0_{yy}, \quad \mathfrak{p}_{yx} = \mathfrak{p}^0_{yx},\\[2ex]
\mathfrak{p}_{xx} = \dfrac{c^2 \mathfrak{p}^0_{xx} + q^2 W^0}{c^2-q^2}, & \mathfrak{p}_{xy} = \dfrac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{p}^0_{xy}.
\end{cases}
$$

Hier ist v durch q ersetzt, da $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit des Körpers im System K bedeutet. Wir können die Gleichungen für W und $\mathfrak{g}$ auch vektoriell schreiben wie folgt:

$$
(8)\quad \begin{cases}
W = \dfrac{c^2}{c^2-q^2}\left(W^0 + \dfrac{1}{c^2}(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{p}^0])\right),\\[2ex]
\mathfrak{g} = \dfrac{\mathfrak{q}}{c^2-q^2}\left\{W^0 + \dfrac{1}{q^2}(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{p}^0])\right\}\\[2ex]
\qquad + \dfrac{1}{c\sqrt{c^2-q^2}}\left\{[\mathfrak{q}\mathfrak{p}_0] - \dfrac{\mathfrak{q}}{q^2}(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{p}^0])\right\}.
\end{cases}
$$

---

1) Es wird hier nur vorausgesetzt, daß die unmittelbarste Umgebung des betrachteten materiellen Punktes in K^0 ruht. Erst später, bei der Integration, welche zu den Formeln (8a) bzw. (10) führt, muß der *ganze* Körper als in K^0 ruhend angesehen werden.

2) Wir denken stets an gleichförmig temperierte Körper, sehen infolgedessen von der Wärmeleitung ab.

Man beweist dies leicht, indem man die x-Achse als parallel zu $\mathfrak{q}$ annimmt; das Vektorprodukt $[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0]$ erhält dann die Komponenten

$$[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0]_x = q\,\boldsymbol{p}^0_{x\,x}, \quad [\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}_0]_y = q\,\boldsymbol{p}^0_{x\,y},$$

so daß man die Formeln unter (7) wieder erhält. Die Gleichungen (8) enthalten in der allgemeinsten Weise die Zurückführung der Energie und des Impulses auf die Geschwindigkeit und den durch W^0 und $\boldsymbol{p}^0$ bestimmten inneren Zustand des Körpers. Besonders muß hervorgehoben werden, daß der zweite Summand in der Gleichung für $\mathfrak{g}$ einen zu $\mathfrak{q}$ senkrechten Vektor darstellt; sein skalares Produkt mit $\mathfrak{q}$ ist nämlich Null. Die Impulsdichte setzt sich somit aus einer zu $\mathfrak{q}$ parallelen, zu q/c^2-q^2 proportionalen, und aus einer zu $\mathfrak{q}$ senkrechten, zu $q/c\sqrt{c^2-q^2}$ proportionalen Komponente zusammen. Die letztere veschwindet nur dann, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ in einer der Achsenrichtungen des Ellipsoids der Ruhspannungen $\boldsymbol{p}^0$ liegt; denn wählen wir eine davon als x-Achse und ist $\mathfrak{q}$ parallel zu x, so wird $[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0] = \mathfrak{q}_x\,\boldsymbol{p}^0_{x\,x}$, also parallel zu $\mathfrak{q}$.

Integrieren wir die Gleichungen (8) über das Volumen

$$V = V^0 \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}$$

eines Körpers, in welchem die Geschwindigkeit räumlich konstant ist, so finden wir für seine Energie

$$E = \int W\,d\,V = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \int W\,d\,V^0,$$

und seinen Impuls

$$\mathfrak{G} = \int \mathfrak{g}\,d\,V = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \int \mathfrak{g}\,d\,V^0$$

die Beziehungen

$$\text{(8a)} \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left\{ E^0 + \frac{1}{c^2} \left(\mathfrak{q} \left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0 \right] \right) \right\}, \\ \mathfrak{G} &= \frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \left\{ E^0 + \frac{1}{q^2} \left(\mathfrak{q} \left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0 \right] \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \left\{ \left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0 \right] - \frac{\mathfrak{q}}{q^2} \left(\mathfrak{q} \left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0 \right] \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

E^0 ist dabei die Ruhenergie, $\int \boldsymbol{p}^0\,d\,V^0$ wie $\boldsymbol{p}^0$ selbst ein symmetrischer Tensor.

Wird der Körper adiabatisch isopieistisch (d. h. bei konstantem E^0 und $\mathfrak{p}^0$) beschleunigt, und zwar in longitudinaler Richtung, so liegt nach (8a) die Impulszunahme im allgemeinen keineswegs in der gemeinsamen Richtung von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Vielmehr ist ihre transversale Komponente gleich

$$\frac{1}{c^2}\left\{[\dot{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{p}^0\, d V^0] - \frac{\dot{\mathfrak{q}}}{q^2}\left(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q} \int \mathfrak{p}_0\, d V^0]\right)\right\},$$

und verschwindet durchaus nicht im Grenzfall $q = 0$. Schon an diesem Beispiel erkennt man, daß in diesem Grenzfall keineswegs allgemein die Newtonsche Dynamik gilt.

Dies zunächst vielleicht verwunderliche Verhalten wird im Sinne des Satzes von der Trägheit der Energie (3a) leicht verständlich. Der erste Summand in der Gleichung (8) für $\mathfrak{g}$, $\frac{\mathfrak{q}}{c^2 - q^2} W^0$, stellt den Konvektionsstrom der Energie dar, die anderen den auch in der klassischen Elastizitätstheorie bekannten Energiestrom bei der Bewegung gespannter Körper. Daß der letztere keineswegs die Richtung der Geschwindigkeit zu haben braucht, sondern auch senkrecht auf ihr stehen kann, zeigt besonders anschaulich das Beispiel einer rotierenden, tordierten Welle, bei welcher die Energieübertragung in einer zur Rotationsachse parallelen Richtung erfolgt.

Wesentlich vereinfachen sich die Gleichungen, wenn die Spannungen $\mathfrak{p}^0$ einen allseitig gleichen Druck p^0 bilden. Dann wird nach (8)

$$W = \frac{c^2 W^0 + q^2 p^0}{c^2 - q^2}, \quad \mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{q}}{c^2 - q^2}(W^0 + p^0). \tag{9}$$

Ist außer q auch der Druck p^0 räumlich konstant, so folgen aus (8a) die Planckschen Gleichungen[1]):

$$E = \frac{c^2 E^0 + q^2 p^0 V^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}}(E^0 + p^0 V^0). \tag{10}$$

§ 3. Die absoluten und die relativen (elastischen) Spannungen.

Die Grundgleichung (4) sagt, auf die räumlichen Komponenten angewendet, aus, daß

$$\dot{\mathfrak{g}} = -\,\mathfrak{div}\,\mathfrak{p} \tag{11}$$

---

1) M. Planck, Ann. d. Phys. **26**. p. 1. 1908, Gleichung (43) u. (46).

ist. $\dot{\mathfrak{g}}$ ist der Differentialquotient von $\mathfrak{g}$ nach t, gebildet für einen im Raume festen Punkt, d. h. bei konstanten x, y, z. Deswegen ist $\boldsymbol{p}$ nicht der Tensor der elastischen Spannungen, denn diese müssen wie in der bisherigen Theorie mit der Veränderung des Impulses eines bestimmten Körperelementes δV in Zusammenhang stehen. Bezeichnen wir diese Veränderung für das Zeitintervall dt mit $\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}}\,\delta V dt$, so gelten bekanntlich die Beziehungen

$$\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}}_x = \dot{\mathfrak{g}}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_z)$$

usw., oder vektoriell geschrieben (vgl. die „Vorbemerkungen“)

$$\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}} = \dot{\mathfrak{g}} + \mathfrak{div}\,[[\mathfrak{g}\,\mathfrak{q}]]. \tag{11a}$$

Führen wir nun den unsymmetrischen Tensor

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p} - [[\mathfrak{g}\,\mathfrak{q}]] \tag{12}$$

ein, so findet man aus (11) und (11a)

$$\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}} = -\,\mathfrak{div}\,\boldsymbol{t}. \tag{13}$$

Durch diese Gleichung erweist sich der Tensor $\boldsymbol{t}$ als der Tensor der elastischen Spannungen. Denn integriert man (13) über einen endlichen Körper, so folgt für dessen Impulsänderung

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \int \mathfrak{t}_n\, d\sigma \tag{13a}$$

($d\sigma$ Oberflächenelement, n dessen Normale), wo die Komponenten des Vektors $\mathfrak{t}_n$ nach dem Schema

$$\mathfrak{t}_{nx} = \boldsymbol{t}_{xx} \cos nx + \boldsymbol{t}_{xy} \cos ny + \boldsymbol{t}_{zz} \cos nz \tag{14}$$

zu bilden sind. Links steht in (13a) die Impulszunahme des Körpers, also ist das Oberflächenintegral rechts die Kraft, welche die Spannungen auf ihn ausüben, d. h. $\mathfrak{t}_n\, d\sigma$ die auf $d\sigma$ wirkende Kraft.

Aus (12) und den unter (7) angegebenen Transformationsformeln für $\boldsymbol{p}$ und $\mathfrak{g}$ findet man leicht die folgenden für $\boldsymbol{t}$:

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{t}_{xx} = \boldsymbol{p}^{0}_{xx}, \quad \boldsymbol{t}_{yy} = \boldsymbol{p}^{0}_{yy}, \quad \boldsymbol{t}_{yz} = \boldsymbol{p}^{0}_{yz}, \\ &\boldsymbol{t}_{xy} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\, \boldsymbol{p}^{0}_{xy}, \quad \boldsymbol{t}_{yx} = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}\, \boldsymbol{p}^{0}_{yx}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Dabei ist aber, im Gegensatz zu (8), $\mathfrak{q}$ als zu x parallel vorausgesetzt. Ist der innere Spannungszustand ein allseitig gleicher Druck p^0, so wird

$$\boldsymbol{p}^0_{xx} = \boldsymbol{p}^0_{yy} = \boldsymbol{p}^0_{zz} = p^0, \quad \boldsymbol{p}^0_{xy} = \boldsymbol{p}^0_{yz} = \boldsymbol{p}^0_{zx} = 0 .$$

Nach (15) gelten dann genau dieselben Beziehungen für den Tensor $\boldsymbol{t}$. Der allseitig gleiche relative Druck

$$p = p^0$$

ist somit eine Invariante der Lorentztransformation (Planck).

Daß nicht die absoluten Spannungen $\boldsymbol{p}$, sondern die relativen $\boldsymbol{t}$ als elastische Spannungen zu bezeichnen sind, zeigt sich auch in den Transformationsformeln (15) und (7). Die $\boldsymbol{t}_{jk}$ hängen nämlich außer mit $\mathfrak{q}$ nur mit den Ruhspannungen $\boldsymbol{p}^0_{jk}$, die $\boldsymbol{p}_{jk}$ dagegen außerdem noch mit W^0 zusammen. Die letzteren änderten also ihren Wert und ihre Bedeutung, wenn man von W^0 etwa die Wärme absonderte, wie das bei Berücksichtigung der Wärmeleitung notwendig würde, die ersteren dagegen nicht.

§ 4. Der Flächensatz.

In der bisherigen Elastizitätstheorie steht die Symmetrie des Spannungstensors in engstem Zusammenhang mit dem sogenannten Flächensatz, welcher die Erhaltung des Drehimpulses ausspricht. Wollen wir hier für die Unsymmetrie des Tensors $\boldsymbol{t}$ den tieferen Grund suchen, so müssen wir infolgedessen zunächst diesen Satz in die Relativitätstheorie übertragen.

Wie in der bisherigen Theorie definieren wir als den Drehimpuls, welcher in einem bestimmten räumlichen Bereich enthalten ist, das Integral

$$\mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\, dS, \tag{16}$$

erstreckt über diesen Bereich; $\mathfrak{r}$ ist der Radiusvektor, der von einem beliebigen festen Punkte nach dS weist. Fragen wir nach der Veränderung von $\mathfrak{L}$ mit der Zeit, so ist bei der Differentiation die Oberfläche des Bereichs als unveränderlich zu betrachten. Infolgedessen ist nach (11)

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \int [\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{g}}]\, dS = -\int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{div}\,\boldsymbol{p}]\, dS = \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{p}_n]\, d\sigma, \tag{17}$$

wo $\mathfrak{p}_n$ der Vektor mit den Komponenten

(17a) $\mathfrak{p}_{nx} = p_{xx} \cos(nx) + p_{xy} \cos(ny) + p_{xz} \cos(nz)$ usw.

ist.

Nun aber fragen wir nach dem Drehimpuls eines materiellen Volumelementes dV; er ist

$$[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\,dV = [\mathfrak{r},\ \mathfrak{g}\,dV];$$

berechnen wir aber hier den Differentialquotienten nach der Zeit, so ist zu berücksichtigen, daß sich nicht nur $\mathfrak{g}$, sondern auch dV nach Größe und Lage, also auch der Vektor $\mathfrak{r}$ ändert. Nehmen wir den Impuls $\mathfrak{g}\,dV$ als konstant an, so ist dieser Differentialquotient offenbar gleich

$$[\dot{\mathfrak{r}},\ \mathfrak{g}\,dV] = [\mathfrak{q},\ \mathfrak{g}\,dV],$$

da $\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{q}$ ist. Im allgemeinen aber tritt noch als Summand hinzu

$$\left[\mathfrak{r},\ \frac{d}{dt}(\mathfrak{g}\,dV)\right] = [\mathfrak{r}\,\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}}]\,dV.$$

Bei einem bewegten Körper ist infolgedessen nach (13)

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \int \{[\mathfrak{r}\,\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}}] + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]\}\,dV = \int \{-[\mathfrak{r},\ \operatorname{div} \boldsymbol{t}] + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]\}\,dV. \tag{18}$$

Den ersten Teil des rechts stehenden Raumintegrales kann man nun durch partielle Integration umformen und findet so:

$$-\int [\mathfrak{r},\ \operatorname{div} \boldsymbol{t}]_x\,dV = \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]_x\,d\sigma + \int (\boldsymbol{t}_{zy} - \boldsymbol{t}_{yz})\,dV,$$

daher unter Berücksichtigung von (12), wonach

$$\boldsymbol{t}_{zy} - \boldsymbol{t}_{yz} = \mathfrak{g}_y \mathfrak{q}_z - \mathfrak{g}_z \mathfrak{q}_y = -[\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]$$

ist

$$-\int [\mathfrak{r}\,\operatorname{div} \boldsymbol{t}]\,dV = \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]\,d\sigma - \int [\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]\,dV.$$

Setzt man nun diesen Wert ein, so folgt aus (18)

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]\,d\sigma. \tag{19}$$

Das rechts stehende Flächenintegral ist das von der Umgebung auf den Körper ausgeübte Drehmoment, da $\mathfrak{t}_n\,d\sigma$ auf $d\sigma$ wirkende Kraft ist. Berechnen wir umgekehrt das Drehmoment, welches der Körper auf seine Umgebung ausübt, so finden wir wiederum $\int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]\, d\sigma$, nur hat jetzt die Normale n die entgegengesetzte Richtung wie früher, infolgedessen ist $\mathfrak{t}_n$ und ebenso $\int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]\, d\sigma_n$ den früheren Werten entgegengesetzt gleich. Wirkt auf die Umgebung nicht noch ein anderes Drehmoment als das berechnete, so gilt für die Änderung ihres Drehimpulses $\mathfrak{L}^a$ die Beziehung

$$\frac{d\,\mathfrak{L}^a}{d\,t} = - \frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,t},$$

also

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^a = \text{const.} \tag{20}$$

Der Flächensatz gilt somit auch in der Relativitätstheorie. Dies läßt sich natürlich auch aus (17) schließen.

Wenden wir Gleichung (19) auf ein infinitesimales materielles Parallelepiped an, zu dessen Kanten parallel wir die Koordinatenachsen legen, so schließt die bisherige Theorie wie folgt: $\mathfrak{g}$ ist parallel zu $\mathfrak{q}$, also $[\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}] = 0$ und nach (18)

$$\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,t} = [\mathfrak{r}, \dot{\underline{\underline{\mathfrak{g}}}}]\, d\,V.$$

Da wir den Anfangspunkt von $\mathfrak{r}$ ins Volumen $d\,V$ hinein verlegen dürfen, so wird $[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{g}}]\, d\,V$ (16) beim Grenzübergang von höherer Ordnung klein wie $d\,V$. Das Drehmoment $\int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]\, d\sigma$ wird aber in seiner x-Komponente gleich $(\boldsymbol{t}_{yz} - \boldsymbol{t}_{zy})\, d\,V$. Infolgedessen muß $\boldsymbol{t}_{zy} = \boldsymbol{t}_{yz}$ usw. sein. In der Relativitätstheorie ist zwar auch $[\mathfrak{r}\,\dot{\underline{\underline{\mathfrak{g}}}}]\, d\,V$ im Limes zu vernachlässigen, aber deswegen wird nach (18)

$$\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,t} = [\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]\, d\,V,$$

also

$$\boldsymbol{t}_{yz} - \boldsymbol{t}_{zy} = [\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]_x$$

in Übereinstimmung mit (12). *Der Spannungstensor $\boldsymbol{t}$ ist aus dem Grunde unsymmetrisch, daß ein gespanntes Körperelement eines Drehmomentes zur Aufrechterhaltung seiner Geschwindigkeit bedarf.*

Im Ruhsystem K^0 muß wegen des Flächensatzes der Tensor $\boldsymbol{p}^0$ symmetrisch sein; zugleich ist in K^0 die Impulsdichte $\mathfrak{g}^0$ und der Energiestrom $\mathfrak{S}^0$ Null. Infolgedessen gelten in K^0 (vgl. (1a)) die Symmetriegleichungen

$$T_{jk} = T_{kj} \quad (k = x^0, y^0, z^0, l^0).$$

Damit aber ist die Symmetrie des Welttensors T überhaupt bewiesen; es müssen in jedem System die entsprechenden Symmetriegleichungen bestehen.

Bei nicht rein dynamischen Vorgängen, bei welchen an die Stelle von Gleichung (4) die Gleichung (5)

$$\Sigma F = - \Delta i v (\Sigma T) = 0$$

tritt, schließen wir in Analogie zu (11), daß

$$\Sigma \dot{\mathfrak{g}} = - \mathfrak{div}\, \Sigma p$$

die den Impulssatz enthaltende Gleichung ist. Definieren wir dann den gesamten Drehimpuls

$$\Sigma \mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}, \Sigma \mathfrak{g}]\, d S,$$

so wird in Analogie zu (17)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}, \Sigma \mathfrak{p}_n]\, d\sigma .$$

Daraus folgt wie oben der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses $\Sigma(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^a) = \text{const.}$ Die Summationen sind hier wie über alle Impulsarten (der mechanischen, elektromagnetischen usw.), so auch über alle Arten von Spannungen (mechanische, Maxwellsche) und über alle Drehimpulse zu erstrecken. Der Flächensatz erhält so eine über die Dynamik hinausreichende, für die gesamte Physik gültige Bedeutung.

§ 5. Vollständiges statisches System.

Wie in § 2 aus Gleichung (8) und (8a) hervorging, ist die Dynamik der Relativitätstheorie im allgemeinen ziemlich verwickelt. Die Verhältnisse gestalten sich aber wieder einfach bei einem vollständigen statischen System. Wir verstehen darunter ein solches, welches in irgend einem berechtigten Bezugssystem K^0 im statischen Gleichgewicht ist, ohne mit anderen Körpern in Wechselwirkung zu stehen[1]; also etwa

---

1) Statt dieser Bedingung könnte man ohne wesentliche Änderung auch die einführen, daß die Umgebung einen allseitig gleichen Druck ausüben soll. Dann müßten an die Stelle von (22) die Gleichungen (10) treten, während (21) abzuändern wäre in

$$\int p^0\, d V^0 = p^0\, V^0 .$$

ein elektrostatisches Feld mit Einschluß aller Ladungsträger.[1]) In ihm ist die Impulsdichte, bezogen auf das Ruhsystem, überall Null und seine Energie haftet fest an ihrem Ort. In jedem anderen Bezugssystem K macht die gesamte Energie, einschließlich der etwa vorhandenen elektromagnetischen, die Bewegung mit. Infolgedessen können wir in den Formeln (8a) unter E^0 die gesamte Energie, unter $\mathfrak{G}$ den gesamten Impuls und unter p^0 die Summe aus den elastischen und den Maxwellschen Spannungen verstehen.

Wir betrachten zunächst den Zustand in K^0. Da $\mathfrak{g}^0 = 0$, folgt aus (11) für einen beliebig begrenzten Raum

$$(20\text{a}) \qquad -\int \mathfrak{div}\, p^0\, dS^0 = \int \mathfrak{p}_n{}^0\, d\sigma^0 = 0.$$

Wir wählen jetzt die Begrenzung so, daß sie aus einem beliebigen Querschnitt des Systems und aus einer Fläche besteht, welche vollständig außerhalb des Systems verläuft. Da nach Voraussetzung das System mit anderen Körpern nicht in Wechselwirkung steht, also im Vakuum befindlich gedacht werden kann, so ist für den zweiten Teil $\mathfrak{p}_n{}^0 = 0$, somit auch allein für den Querschnitt

$$(20\text{b}) \qquad \int \mathfrak{p}_n{}^0\, d\sigma^0 = 0.$$

Nun wählen wir als Querschnitt eine Ebene $x^0 = \text{const.}$ Dann folgt, indem wir die Vektorgleichung (20b) auf die drei Koordinatenrichtungen anwenden und nach (17a) die Komponenten von $\mathfrak{p}_n{}^0$ durch $p_{x^0 x^0}$, $p_{x^0 y^0}$ usw. ausdrücken:

$$\int \mathfrak{p}^0_{n x^0}\, d\sigma^0 = \int p^0_{x^0 x^0}\, dy^0\, dz^0 = 0,$$

$$\int \mathfrak{p}^0_{n y^0}\, d\sigma^0 = \int p^0_{x^0 y^0}\, dy^0\, dz^0 = 0,$$

$$\int \mathfrak{p}^0_{n z^0}\, d\sigma^0 = \int p^0_{x^0 z^0}\, dy^0\, dz^0 = 0.$$

1) Man könnte sogar noch elektrostatisch-magnetostatische Felder annehmen, trotzdem dann $\mathfrak{G}^0$ von Null verschieden ist. Das hätte zwar den Erfolg, daß in (7) und (8) noch gewisse zu $\mathfrak{g}^0$ proportionale Summanden auftreten. Doch würden diese bei der Integration über den Körper wieder verschwinden, da

$$\int \mathfrak{g}^0\, d\,V^0 = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{G}^0\, d\,V^0 = 0$$

ist. (8a) bliebe somit ungeändert; desgleichen (20a), weil $\dot{\mathfrak{g}}^0 = 0$ ist.

Multiplizieren wir hier mit dx^0 und integrieren wir über das ganze Volumen V^0 des Systems, so finden wir

$$\int \mathfrak{p}^0_{x^0 x^0}\, d V^0 = \int \mathfrak{p}^0_{x^0 y^0}\, d V^0 = \int \mathfrak{p}^0_{x^0 z^0}\, d V^0 = 0.$$

Sechs weitere Gleichungen erhalten wir, wenn wir eine Ebene $y^0 =$ const. oder $z^0 =$ const. als Querschnitt wählen. Sie alle lassen sich in die Tensorgleichung

$$\int \mathfrak{p}^0\, d V^0 = 0 \tag{21}$$

zusammenfassen.

Für ein vollständiges statisches System gehen somit die Gleichungen (8a) über in:

$$E = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} E^0, \quad \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}} E^0, \tag{22}$$

d. h. ein vollständiges statisches System verhält sich bei gleichförmiger Bewegung wie ein Massenpunkt von der Ruhmasse

$$m^0 = \frac{E^0}{c^2} \, .$$

Dasselbe gilt aber auch für quasistationäre (adiabatisch isopizistische) Beschleunigung; denn als quasistationär bezeichnet man sie, wenn der innere Zustand ($E^0, \mathfrak{p}^0$) dabei nicht merklich geändert wird. Wie das System also auch beschaffen sein mag, immer ist seine longitudinale Masse

$$m_l = \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{c^3 m^0}{\sqrt{c^2 - q^2}^3},$$

seine transversale

$$m_t = \frac{G}{q} = \frac{c\, m^0}{\sqrt{c^2 - q^2}};$$

im Grenzfall $q = 0$ gehorcht es der Newtonschen Mechanik.

Ein solches System bildet z. B. das Elektron mit seinem Felde; wie es auch geformt sein mag, es muß bei quasistationärer Bewegung der Dynamik des Massenpunktes gehorchen, so daß man aus Versuchen dieser Art nie einen Rückschluß ziehen kann auf seine Form, seine Ladungsverteilung und auch nicht darauf, ob es neben seinem elektromagnetischen Impuls noch einen anderen hat. So hatte Einstein die Ehrenfestsche Frage tatsächlich richtig beantwortet. Daß Born sich gezwungen sah, Kugelsymmetrie anzunehmen, liegt daran, daß er nicht an den mechanischen Impuls des Elektrons dachte, welcher nur bei bestimmten Annahmen über die Form und Ladungsverteilung Null gesetzt werden kann, z. B. wenn man Kugelsymmetrie voraussetzt; aber nicht allgemein. Denn im Elektron herrschen neben den elektromagnetischen Spannungen notwendigerweise andersartige[1]) (die man vorläufig ruhig als elastische bezeichnen darf), und diese werden nach (8a) dem mechanischen Impuls im allgemeinen eine transversale Komponente verschaffen, welche nicht wie die longitudinale Komponente durch eine passende Wahl von E^0 zu Null gemacht werden kann. Bei Kugelsymmetrie fällt die transversale Komponente natürlich fort.

Ein vollständiges statisches System ist ferner der Kondensator des Trouton-Nobleschen Versuches mit seinem Feld. Ebensowenig wie ein Massenpunkt bedarf das ganze System bei gleichförmiger Geschwindigkeit eines Drehmomentes. Das Drehmoment, welches die elektromagnetischen Kräfte auf den Kondensator selbst ausüben, ist gerade dasjenige, dessen dieser als elastisch gespannter Körper nach § 4 bedarf. Weder der elektromagnetische Impuls des Feldes, noch der mechanische Impuls des Körpers haben in diesem Fall die Richtung der Geschwindigkeit, wohl aber der aus beiden zusammengesetzte Gesamtimpuls, wie aus (22) hervorgeht.

1) H. Poincaré, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **21.** p. 125. 1906.

(Eingegangen 30. April 1911.)