

**2. Das Maxwellsche Gesetz
der Geschwindigkeitsverteilung in der
Relativtheorie;
von Ferencz Jüttner.**

Um die Entropie S eines idealen einatomigen Gases in einem gegebenen Zustande mittels ihrer allgemeinen Definition

$$(1) \quad S = k \log W,$$

worin W die Wahrscheinlichkeit des Zustandes ist, zu berechnen und daraus die thermodynamischen Eigenschaften des Gases abzuleiten, muß man eine bestimmte Mechanik zugrunde legen. Man wählte nun bisher stets die Newtonsche Mechanik. Vom Standpunkte des Relativprinzips von A. Einstein ist diese aber bekanntlich nur ein Grenzfall einer allgemeineren Mechanik, und es dürfte von Interesse sein, die Entropie eines solchen ruhenden Gases, sowie mit ihrer Hilfe das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewichtszustand unter Annahme der Relativitätsmechanik zu ermitteln; daran mögen sich dann die Folgerungen über die Zustandsgleichung und die Abhängigkeit der Energie, Entropie und freien Energie von der Temperatur (spezifische Wärmen, adiabatische Gleichungen) anschließen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Geheimrat Planck für die freundliche Anregung zu dieser Arbeit und seine wohlwollenden Ratschläge meinen wärmsten Dank auszusprechen.

§ 1. Die Entropie eines ruhenden idealen einatomigen Gases
in einem beliebigen Zustande.

Von den Begriffen der Relativitätsmechanik¹⁾ kommen für die kinetische Gastheorie erstlich in Betracht die Impulskomponenten ξ , η , ζ eines mit der Geschwindigkeit

$$q = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

1) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 8. p. 136—141. 1906.

bewegten materiellen Punktes von der (Ruh-)Masse m

$$(2a) \quad \xi = m \dot{x}, \quad \eta = m \dot{y}, \quad \zeta = m \dot{z},$$

worin

$$(2b) \quad \dot{x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad \dot{y} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad \dot{z} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

die auf die Masseneinheit reduzierten Komponenten des Impulses sind. c bedeutet die Lichtgeschwindigkeit.

Ferner ist der Ausdruck für die lebendige Kraft L des Massenpunktes m von Bedeutung:

$$(3) \quad L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

Um nun die Wahrscheinlichkeit W eines beliebigen Zustandes eines ruhenden idealen einatomigen Gases zu berechnen, wählt man zweckmäßig als Zustandsvariablen die drei Koordinaten x, y, z und die drei reduzierten Impulskomponenten ξ, η, ζ der einzelnen Moleküle, die als Massenpunkte von der (Ruh-)Masse m und der variablen Geschwindigkeit q aufzufassen sind. Wendet man nämlich die Hamiltonschen Gleichungen der Relativtheorie¹⁾ auf die Bewegung der einzelnen Massenpunkte an, so folgt der Satz von Liouville, daß in dem durch die Koordinaten $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ dargestellten sechsdimensionalen Raum die Größe eines beliebigen elementaren Zustandsgebietes

$$(4) \quad d\omega = dx dy dz d\xi d\eta d\zeta$$

sich zeitlich nicht ändert, wenn jeder Punkt des Gebietes seinen Ort entsprechend den Gesetzen der Relativitätsmechanik ändert. Daher kann man die Wahrscheinlichkeit dW dafür, daß ein Zustandspunkt $x/y/z/\xi/\eta/\zeta$ in ein bestimmtes Elementargebiet $d\omega$ fällt, einfach gleich $d\omega$ setzen. Hierbei ist $d\omega$ als „Makrodifferential“ (nach einem Ausdruck von Planck) zu wählen, d. h. so, daß es trotz seiner Kleinheit im allgemeinen noch sehr viele Zustandspunkte enthält. Würde man wie in der gewöhnlichen Mechanik

$$(5) \quad d\sigma = dx dy dz d\xi d\eta d\zeta$$

1) M. Planck, l. c. p. 140 u. 141.

als Elementargebiet nehmen, so würde dieses sich bei Zugrundelegung der Relativmechanik für die Bewegung der bestimmten in ihm gelegenen Zustandspunkte $x/y/z/x'/y'/z'$ zeitlich ändern. Also ist die Wahrscheinlichkeit dW dafür, daß ein solcher Punkt in $d\sigma$ liegt, hier nicht durch die Größe von $d\sigma$ zu messen; sie wird vielmehr eben durch die Größe des zu $d\sigma$ gehörigen $d\omega$ angegeben¹⁾ (vgl. unten § 3).

Der Zustand des Gases, das nicht im Gleichgewicht zu sein braucht, ist gegeben, wenn man die Zahl der in jedem Elementargebiet $d\omega$ gelegenen Zustandspunkte $x/y/z/x'/y'/z'$ kennt. Diese Anzahl sei nun dargestellt durch den Ausdruck

$$(6) \quad dN = F(x, y, z, x', y', z') \cdot dx dy dz dx' dy' dz' \equiv F d\omega,$$

worin F die gegebene Verteilungsfunktion ist. dN ist dabei wieder als eine große Zahl, als ein Makrodifferential, aufzufassen. Die Gesamtzahl N der Moleküle des Gases ist dann:

$$(7) \quad N = \int F d\omega.$$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit W des Zustandes F teilt man das ganze sechsdimensionale Zustandsgebiet des Gases in lauter Elementargebiete gleicher Wahrscheinlichkeit, also nach dem Obigen in lauter gleich große Gebiete $d\omega$. Dann ergibt sich in bekannter Weise²⁾ die Wahrscheinlichkeit W des Zustandes F der N Moleküle:

$$(8) \quad W = \frac{N!}{\Pi \{(F d\omega)\}} = \frac{\{ \int F d\omega \}!}{\Pi \{(F d\omega)\}}$$

Somit erhält man aus Gleichung (1) bei Anwendung der Formel von Stirling folgenden Ausdruck für die Entropie S des Zustandes F :

$$(9) \quad S = \text{const.} - k \int F \log F d\omega.$$

1) Vgl. M. Planck, Acht Vorlesungen über theoretische Physik p. 55—57. Leipzig 1910.

2) Vgl. M. Planck, Acht Vorlesungen p. 60—62. Überhaupt möge für die genauere Ausführung aller Überlegungen und Rechnungen, die in der relativtheoretischen Behandlung der Gastheorie nicht geändert werden, auf die vierte Vorlesung des Buches verwiesen werden.

Für gegen die Lichtgeschwindigkeit c kleine Geschwindigkeiten q der Gasmoleküle wird angenähert

$$\begin{aligned} \xi &= \dot{x}, \quad \eta = \dot{y}, \quad \zeta = \dot{z}, \quad d\omega = d\sigma, \\ F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv \varphi. \end{aligned}$$

Daher geht S dann in den bekannten Näherungsausdruck S_0 der gewöhnlichen Gastheorie über:

$$(9^*) \quad S_0 = \text{const.} - k \int \varphi \log \varphi \, d\sigma.$$

Entsprechend stellt der Ausdruck

$$H = \int F \log F \, d\omega$$

die relativtheoretische Verallgemeinerung der H -Funktion von L. Boltzmann, nämlich von

$$\int \varphi \log \varphi \, d\sigma,$$

dar.

§ 2. Das Gesetz der Raum- und Geschwindigkeitsverteilung im thermodynamischen Gleichgewicht.

Betrachten wir jetzt das thermodynamische Gleichgewicht eines ruhenden Gases, dessen Molekülzahl

$$(7) \quad N = \int F \, d\omega,$$

sowie Volumen

$$(10) \quad V = \int dx \, dy \, dz$$

und Gesamtenergie (vgl. (3))

$$(11) \quad E = \int L F \, d\omega = m c^2 \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot F \, d\omega$$

gegebene Werte haben. Die Verteilungsfunktion F kann nun im Gleichgewicht nicht mehr beliebig sein, da dieses die Bedingung erfüllen muß, daß die durch (9) bestimmte Entropie S des aus N Molekülen bestehenden Gases bei Konstanz von V und E ein Maximum sein muß:

$$\delta S = 0.$$

Gemäß (9) muß also F der Gleichung

$$\int (\log F + 1) \cdot \delta F \cdot d\omega = 0$$

mit den aus (7) und (11) folgenden Nebenbedingungen

$$\int \delta F \cdot d\omega = 0, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \delta F \cdot d\omega = 0$$

genügen. Die Lösung

$$(12) \quad F = \alpha e^{-\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}}$$

ist die gesuchte *Verteilungsfunktion des Gleichgewichts*; die Konstanten α und β sollen später (in § 4) aus den Werten N , V und E bestimmt werden.

Da F hier von x , y , z unabhängig ist, ist die räumliche Verteilung der Moleküle im Gleichgewicht gleichmäßig.

Für gegen c kleine Werte von q , für die $d\omega$ angenähert in $d\sigma$ übergeht, erhält man durch Reihenentwicklung aus F den Näherungswert φ des stationären Zustandes:

$$\varphi = \alpha e^{-\beta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2}\right)}$$

oder auch:

$$(12^*) \quad \varphi = \alpha' e^{-\beta' (x^2 + y^2 + z^2)},$$

d. i. das gewöhnliche Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung. Die Funktion F in (12) stellt seine relativ-theoretische Verallgemeinerung dar. In ihr erhält man für $q = c$ bereits $F = 0$, und für $q > c$ wird F imaginär, während der Näherungsausdruck φ in (12*) erst für $q = \infty$ auf $\varphi = 0$ führen würde, also Überlichtgeschwindigkeit der Moleküle zuließe.

Während der gewöhnliche Ausdruck φ sich in drei Faktoren zerlegen läßt, deren jeder nur von einer Geschwindigkeitskomponente abhängt:

$$\varphi = \alpha' e^{-\beta' x^2} \cdot e^{-\beta' y^2} \cdot e^{-\beta' z^2},$$

eine Eigenschaft, die in der Theorie eine erhebliche Rolle gespielt hat, ist die analoge Zerlegung der allgemeinen Funktion

$$(12a) \quad F = \alpha e^{-\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}}}$$

nicht möglich. Eine ziemlich verwickelte Faktorenerfällung kann man allerdings bei Einführung anderer Zustandsgrößen für die transformierte Funktion vornehmen; hierauf soll unten in anderem Zusammenhange (in § 6) hingewiesen werden.

Die *einfachste* Form von F gewinnt man mittels (3), nämlich:

$$(13) \quad F = \alpha e^{-\frac{\beta}{m c^2} L}.$$

Führt man durch die Gleichung

$$(2c) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{m^2} = p^2$$

den reduzierten Impuls p ein, so besteht zwischen diesem und der Geschwindigkeit q des Massenpunktes die leicht zu bestätigende Identität:

$$(2d) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}.$$

Demgemäß erhält man als eine weitere einfache Form von F :

$$(14) \quad F = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}}.$$

Die Schreibweise derselben:

$$(14a) \quad F = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{c^2}}}$$

zeigt, daß F auch nicht in drei Funktionen von ξ , η und ζ einzeln zerlegbar ist. Sie ist die Form, die dem zugrunde gelegten Elementargebiet $d\omega$ *am meisten angemessen* ist; hier ist nämlich

$$dN = F d\omega = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{c^2}}} \cdot dx dy dz d\xi d\eta d\zeta.$$

Im Bereich der gewöhnlichen Mechanik fallen die Unterschiede der hier so verschiedenen Gestalten (12), (13) und (14) von F fast gänzlich fort.

§ 3. Die zu dem gewöhnlichen Elementargebiet $d\sigma$ gehörige Verteilungsfunktion f .

Es ist nun auch möglich, den Zustand des Gases durch die Zustandsvariablen $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ statt durch $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$

zu bestimmen, d. h. ihn auf das gewöhnliche Elementargebiet

$$(5) \quad d\sigma = dx dy dz d\hat{x} d\hat{y} d\hat{z}$$

zu beziehen und demgemäß die der gewöhnlichen Gastheorie entsprechende Verteilungsfunktion $f(x, y, z, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, die durch die Gleichung

$$(15) \quad dN = f \cdot d\sigma$$

definiert ist, jetzt nachträglich zu berechnen. Unter Benutzung der Funktionaldeterminante der ursprünglichen Variabeln in bezug auf die neuen gilt nämlich gemäß der Theorie der Transformation vielfacher Integrale die Beziehung zwischen den zueinander gehörenden Elementargebieten, wobei vom Vorzeichen abgesehen wird:

$$d\omega = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} \cdot d\sigma.$$

Zur Berechnung der Determinante sind die Gleichungen (2b) zu verwenden:

$$\xi = \frac{\hat{x}}{w}, \quad \eta = \frac{\hat{y}}{w}, \quad \zeta = \frac{\hat{z}}{w},$$

wo zur Abkürzung

$$w = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$$

gesetzt ist; man erhält aus ihnen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{c^2 w^3} (\hat{x}^2 + c^2 w^2), \quad \frac{\partial \xi}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{c^2 w^3} \cdot \hat{x} \hat{y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{c^2 w^3} \cdot \hat{x} \hat{z} \text{ usw.}$$

Daher wird die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} = \frac{1}{c^6 w^6} \cdot \begin{vmatrix} \hat{x}^2 + c^2 w^2, & \hat{x} \hat{y}, & \hat{x} \hat{z}, \\ \hat{x} \hat{y}, & \hat{y}^2 + c^2 w^2, & \hat{y} \hat{z}, \\ \hat{x} \hat{z}, & \hat{y} \hat{z}, & \hat{z}^2 + c^2 w^2 \end{vmatrix}.$$

Die rechts stehende symmetrische Determinante ergibt beim Ausrechnen $c^4 w^4 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 + c^2 w^2)$ oder mit Rücksicht auf die Definition von w einfacher $c^6 w^4$; daher wird

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} = \frac{1}{w^6} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^6}.$$

Die Beziehung zwischen den einander entsprechenden Elementargebieten lautet demnach:

$$(16) \quad d\omega = \frac{d\sigma}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}.$$

Der Vergleich von (6) mit (15) gibt sodann für die neue Verteilungsfunktion:

$$(17) \quad f = \frac{F}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}.$$

Speziell im Gleichgewicht ist gemäß (12):

$$(18) \quad f = \frac{\alpha e^{-\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}}}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}.$$

Für gegen c kleine Werte von q geht f in (18) in die gewöhnliche Maxwell'sche Funktion φ von Gleichung (12*) über, wie man erkennt, wenn man das starke Wachstum einer Exponentialfunktion gegenüber demjenigen einer Potenz berücksichtigt.

§ 4. Bestimmung der in dem Verteilungsgesetze F auftretenden Konstanten α und β .

Die in der verallgemeinerten Maxwell'schen Verteilungsfunktion F des Gleichgewichtes auftretenden Konstanten α und β lassen sich mittels der gegebenen Werte N , V und E des Gases bestimmen. Für F sei die Form

$$(13) \quad F = \alpha e^{-\frac{\beta}{m c^2} L}$$

zugrunde gelegt, da sie (freilich unter Änderung der Bedeutung der Konstanten) auch in der gewöhnlichen Theorie gilt, wenn man nur für L den Ausdruck $(m/2)q^2$ statt desjenigen der Relativtheorie einsetzt. Da also ihre Gestalt bei diesem Übergange invariant bleibt, wird dasselbe auch noch für einen Teil der folgenden Formeln gelten. Auch die Herleitung von (13) ließe sich leicht völlig invariant gestalten.

Aus (7), (10) und (11) folgt, da sich F hier auf das Gleichgewicht bezieht und also von x, y, z unabhängig ist:

$$N = V \int F d\xi d\eta d\zeta, \quad E = V \int L F d\xi d\eta d\zeta.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man α und β berechnen. Die zweite derselben lautet, da nach (13)

$$L F = -m c^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

ist, einfacher auch so:

$$E = -m c^2 V \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \int F d\xi d\eta d\zeta.$$

Definiert man dann eine Funktion $M(\beta)$ durch das über das ganze Gebiet der ξ, η, ζ erstreckte bestimmte Integral

$$(19) \quad M(\beta) = \int e^{-\frac{\beta}{m c^2} L} d\xi d\eta d\zeta,$$

so ist gemäß (13)

$$\int F d\xi d\eta d\zeta = \alpha \cdot M(\beta).$$

Damit nehmen die beiden Bestimmungsgleichungen für α und β die Form an:

$$N = V \cdot \alpha M(\beta), \quad E = -m c^2 V \cdot \alpha M'(\beta),$$

wo der Strich bei M die Ableitung nach dem Argument bedeutet. Somit hat man zuerst β aus der Gleichung

$$(20) \quad \frac{M'(\beta)}{M(\beta)} = -\frac{E}{N m c^2}$$

und hierauf α explizit aus

$$(21) \quad \alpha = \frac{N}{V \cdot M(\beta)}$$

zu berechnen.

Die Erörterungen und Formeln dieses Paragraphen sind sämtlich in dem oben angegebenen Sinne invariant. In der gewöhnlichen Theorie ist jedoch das Integral $M(\beta)$ elementar auswertbar und ergibt bis auf einen konstanten Faktor die sehr einfache algebraische Funktion $(\pi/\beta)^{3/2}$; somit wird (20) in β linear, womit α und β explizit bekannt sind. In der Relativtheorie dagegen stellt das Integral $M(\beta)$ eine höhere transzendente Funktion und (20) eine *transzendente Gleichung* für β dar. Daher sind α und β hier nicht explizit angebar.

Nunmehr gestattet F wegen (21) die Darstellung durch β allein:

$$(22) \quad F = \frac{N}{V \cdot M(\beta)} \cdot e^{-\frac{\beta}{m c^2} L}.$$

§ 5. Die Entropie im thermodynamischen Gleichgewicht: Zustandsgleichung eines ruhenden idealen einatomigen Gases und Temperaturabhängigkeit seiner Gesamtenergie und Entropie (spezifische Wärmen und adiabatische Gleichungen), sowie seiner freien Energie.

Man kann jetzt leicht die Entropie S des ruhenden Gases im Gleichgewicht ermitteln und zu thermodynamischen Folgerungen benutzen. Aus der für einen beliebigen Zustand F gültigen Gleichung

$$(9) \quad S = \text{const.} - k \int F \log F d\omega$$

folgt für das Gleichgewicht wegen (13) bei Beachtung von (7) und (11):

$$(23) \quad S = \text{const.} + k \left\{ \frac{\beta}{m c^2} \cdot E - N \log \alpha \right\}.$$

Mittels (21) kann man S auch durch β allein, ohne α , ausdrücken; vereinigt man noch den Ausdruck $-k N \log N$ mit der Konstanten, so folgt:

$$(24) \quad S = \text{const.} + k N \cdot \left\{ \frac{\beta}{N m c^2} \cdot E + \log M(\beta) + \log V \right\}.$$

In der gewöhnlichen Gastheorie, in der β unmittelbar berechenbar ist, erhält man bekanntlich den ähnlich gebauten, aber expliziten Ausdruck:

$$(24^*) \quad S_0 = \text{const.} + k N \cdot \left\{ \frac{3}{2} \log E + \log V \right\}.$$

Nun folgen aus der rein thermodynamischen Definition der Entropie

$$dS = \frac{dE + P dV}{T}$$

die wichtigen Beziehungen

$$(25) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E = \frac{P}{T}.$$

Diese sollen auf den abgeleiteten Ausdruck (24) von S angewandt werden, und zwar zuerst die zweite Formel.

Da nach (20) β nur von E und nicht von V abhängt, folgt aus (24):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E = \frac{k N}{V},$$

also wegen (25):

$$(26) \quad P V = k N T'.$$

Weil bei der Differentiation die Größe β wegfällt, die den Unterschied der Theorien bedingt, gilt somit auch in der verallgemeinerten Gastheorie das Gesetz von Boyle und Gay-Lussac. Ferner ist die Gaskonstante von der Natur des Gases unabhängig, da m in (26) nicht vorkommt; also behält auch das Gesetz von Avogadro seine Gültigkeit. Die Zustandsgleichung eines ruhenden idealen einatomigen Gases bleibt also in der Relativtheorie völlig erhalten.

Daher bestimmt sich hier in bekannter Weise die universelle Konstante k , indem man (26) für die N_1 Moleküle eines Moles (Loschmidsche Konstante) vom Volumen V_1 ansetzt und mit der auch auf das Molvolumen bezogenen gewöhnlichen Form

$$(26a) \quad P V_1 = R T$$

vergleicht:

$$(26b) \quad k N_1 = R.$$

Jetzt soll die zweite Formel von (25) benutzt werden. Aus (24) erhält man mit Rücksicht auf (21)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = k N \cdot \left\{ \frac{\beta}{N m c^2} + \left(\frac{M'(\beta)}{M(\beta)} + \frac{E}{N m c^2} \right) \frac{d\beta}{dE} \right\},$$

oder vereinfacht:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{k \beta}{m c^2},$$

daher wegen (25):

$$(27) \quad \beta = \frac{m c^2}{k T'}.$$

Also besteht die sehr anschauliche Bedeutung der Größe β darin, daß sie die absolute Temperatur des Gases mißt. Nun gibt (20):

$$(28) \quad E = - N m c^2 \cdot \frac{M' \left(\frac{m c^2}{k T'} \right)}{M \left(\frac{m c^2}{k T'} \right)}.$$

In der gewöhnlichen Gastheorie gilt (27) auch; da aber dort (20) in β linear wird, wie oben bemerkt, wird auch E

von T linear abhängig, und man erhält folgenden sehr einfachen Ausdruck:

$$(28^*) \quad E_0 = \frac{3}{2} N k T.$$

In Gleichung (28) ist also dieses merkwürdige Ergebnis enthalten:

In der Relativtheorie ist die Energie eines ruhenden idealen einatomigen Gases nicht mehr proportional der Temperatur, sondern eine transzendente Funktion der Temperatur.

Demgemäß ist eine Vollkommenheit des Gases nach der Definition von Clausius¹⁾, welche außer zwei anderen (unten erwähnten) Eigenschaften jene Proportionalität verlangt, in der Relativtheorie im strengen Sinne nicht möglich. Es lassen sich leicht die Gesetzmäßigkeiten aufstellen, welchen die in Kalorien gemessenen Molwärmen bei konstantem Volumen C_v und bei konstantem Druck C_p für ein einatomiges Gas hier gehorchen müssen. Bedeutet E_1 die Energie der N_1 Moleküle eines Mols und a das mechanische Wärmeäquivalent, so erhält man mittels der Definitionsgleichung

$$a C_v = \left(\frac{\partial E_1}{\partial T} \right)_v = \frac{dE_1}{dT}$$

sofort aus (28):

$$C_v = \frac{N_1 m^2 c^4}{a k} \cdot \frac{1}{T^3} \cdot \left\{ \frac{d^2 \log M(\beta)}{d\beta^2} \right\}_{\beta = \frac{m c^2}{k T}},$$

oder ausgeschrieben:

$$(29) \quad C_v = \frac{N_1 m^2 c^4}{a k} \cdot \frac{1}{T^3} \cdot \left\{ \frac{M'' \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)} - \left[\frac{M' \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)} \right]^2 \right\}.$$

Diese Temperaturfunktion tritt an Stelle des konstanten Wertes C_{v0} der gewöhnlichen Theorie der einatomigen Gase, den man auf analogem Wege aus (28*) erhält:

$$(29^*) \quad C_{v0} = \frac{1}{a} \frac{dE_{10}}{dT} = \frac{3}{2} \frac{N_1 k}{a} = \frac{3}{2} \frac{R}{a} = 3,0.$$

Weiter folgt nun aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, allein unter den beiden auch in der Relativtheorie gültigen Voraussetzungen für die Idealität eines Gases, daß

1) Vgl. G. H. Bryan, Enzyklop. d. Math. Wiss. V, 1. p. 119.

es nämlich dem Boyle-Gay-Lussac-Avogadro'schen Gesetz gehorcht und seine innere Energie E nur von der Temperatur, nicht vom Volumen abhängt:

$$(30) \quad C_p - C_v = \frac{R}{a}.$$

Wegen (29) ist also auch C_p sowie C_p/C_v in der Relativtheorie von der Temperatur abhängig, während man bekanntlich sonst aus (29*) für einatomige Gase die konstanten Werte erhält:

$$(30^*) \quad C_{p0} = \frac{5}{2} \frac{R}{a} = 5,0; \quad \frac{C_{p0}}{C_{v0}} = \frac{5}{3}.$$

Da sich C_v mit der Temperatur ändert, können auch die einfachen Formeln für adiabatische Vorgänge nicht mehr gelten. Zur Ableitung der hier gültigen Gleichungen stellt man am besten mittels (24), (27) und (28) die Entropie als Temperaturfunktion dar:

$$(31) \quad S = \text{const.} + k N \cdot \left\{ \log M \left(\frac{m c^2}{k T} \right) - \frac{m c^2}{k T} \frac{M' \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)} + \log V \right\};$$

diese Formel ist die Verallgemeinerung der gewöhnlichen aus (24*) und (28*) zu erhaltenden:

$$(31^*) \quad S_0 = \text{const.} + k N \cdot \left\{ \frac{3}{2} \log T + \log V \right\}.$$

Setzt man $S = \text{const.}$, so hat man damit die Gleichung für eine adiabatische Zustandsänderung eines einatomigen idealen Gases:

$$\log M \left(\frac{m c^2}{k T} \right) - \frac{m c^2}{k T} \cdot \frac{M' \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)} + \log V = \text{const.},$$

oder:

$$(32) \quad \frac{M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}{\frac{m c^2}{k T} \cdot \frac{M' \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}} \cdot V = \text{const.}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der aus (31*) folgenden Formel:

$$(32^*) \quad T^{3/2} \cdot V = \text{const.}$$

Durch Kombination von (32) mit der gewöhnlichen Zustandsgleichung (26) erhält man noch die beiden anderen Beziehungen für die adiabatische Zustandsänderung:

$$(33) \quad \frac{T \cdot M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}{P \cdot e^{\frac{m c^2}{k T} \cdot \frac{M' \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)}}} = \text{const.},$$

$$(34) \quad \frac{M \left(\frac{N m c^2}{P V} \right)}{e^{\frac{N m c^2}{P V} \cdot \frac{M' \left(\frac{N m c^2}{P V} \right)}{M \left(\frac{N m c^2}{P V} \right)}}} \cdot V = \text{const.},$$

während (32*) die entsprechenden gewöhnlichen Formeln ergibt:

$$(33^*) \quad \frac{T^{3/2}}{p} = \text{const.},$$

$$(34^*) \quad (P V)^{1/2} \cdot V = \text{const.} \quad \text{oder} \quad P \cdot V^{3/2} = \text{const.}$$

Auch die freie Energie A des ruhenden idealen einatomigen Gases muß zufolge ihrer Definition

$$(35) \quad A = E - T S$$

in der Relativtheorie eine veränderte Gestalt annehmen. Da wegen (23) und (27) die Gleichung gilt:

$$S = \text{const.} + \frac{E}{T} - k N \log \alpha,$$

so erhält man:

$$(36) \quad A = k N T \log \alpha - \text{const.} \cdot T.$$

Hiermit hat auch der Koeffizient α eine anschauliche Bedeutung gewonnen¹⁾, indem $\log \alpha$, wenn man von der willkürlichen Funktion $\text{const.} \cdot T$ absieht, der freien Energie des Gases proportional ist. Da der Koeffizient β der Temperatur umgekehrt proportional ist, kann man auch schreiben:

$$(36a) \quad A = N m c^2 \cdot \frac{\log \alpha}{\beta} - \text{const.} \cdot T;$$

wie man erkennt, hängt A unmittelbar von α und β ab.

Aus (36), (21) und (27) bekommt man dann, wenn man für $k N \log N \cdot T - \text{const.} \cdot T$ wieder $\text{const.} \cdot T$ setzt:

1) Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. 33. p. 453 u. 454. 1910.

$$(37) \quad A = \text{const.} \cdot T - k N T \cdot \left\{ \log M \left(\frac{m c^2}{k T} \right) + \log V \right\},$$

d. i. die Verallgemeinerung der aus (28*) und (31*) hervorgehenden gewöhnlichen Formel, in der für $\frac{3}{2} N k \cdot T - \text{const.} \cdot T$ entsprechend $\text{const.} \cdot T$ gesetzt wurde:

$$(37^*) \quad A_0 = \text{const.} \cdot T - k N T \cdot \left\{ \frac{3}{2} \log T + \log V \right\}.$$

Endlich möge auch noch in das Verteilungsgesetz (22) die Temperatur mittels (27) eingeführt werden:

$$(38) \quad F = \frac{N e^{-\frac{L}{k T}}}{V \cdot M \left(\frac{m c^2}{k T} \right)};$$

diese Formel entspricht der gewöhnlichen Gleichung:

$$(38^*) \quad \varphi = \frac{N}{V} \cdot \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m \sigma^2}{2 k T}}.$$

§ 6. Die Auswertung des bestimmten Integrals $M(\beta)$.

Um nun zu einer genaueren Diskussion der aufgestellten Gleichungen für die thermodynamischen Größen des ruhenden idealen einatomigen Gases in der Relativtheorie überzugehen, soll jetzt versucht werden, die Funktion $M(\beta)$, die in den Formeln auftritt, auf bekannte Funktionen zurückzuführen.

Auf Grund von

$$(19) \quad M(\beta) = \int e^{-\frac{\beta}{m c^2} L} \cdot d\xi d\eta d\zeta$$

ist $M(\beta)$ durch ein über alle möglichen Werte der reduzierten Impulscomponenten ξ, η, ζ zu erstreckendes bestimmtes Integral definiert, in dem β als Parameter auftritt. Nun ist nach (2b) für die Geschwindigkeit $q = 0$ auch $\xi = \eta = \zeta = 0$, so daß der (reduzierte) Impuls $p = 0$ ist; für Lichtgeschwindigkeit $q = c$ ist dagegen je nach ihrer Richtung zu den Koordinatenachsen wenigstens eine der Componenten ξ, η, ζ gleich $\pm \infty$, so daß immer der Impuls $p = \infty$ ist (im Einklang mit (2d)); somit ist in $M(\beta)$ nach jeder der Variablen ξ, η, ζ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren. Beachtet man ferner, daß aus (3) und (2d) folgt:

$$(3a) \quad \frac{L}{m c^2} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}},$$

so kann man deutlicher schreiben:

$$(39) \quad M(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{c^2}}} \cdot d\xi d\eta d\zeta.$$

Hierin faßt man einfach ξ, η, ζ als rechtwinklige Koordinaten eines Zustandspunktes P in einem gewöhnlichen dreidimensionalen Raume auf und führt in diesem räumliche Polarkoordinaten mit dem Anfangspunkte O als Pol ein. Der Radiusvektor OP ist offenbar gemäß (2c) durch den absoluten Betrag des reduzierten Impulses gegeben

$$(40a) \quad p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

während das Raumelement sofort zweckmäßig in der zusammengezogenen Form angesetzt wird:

$$(40b) \quad d\xi d\eta d\zeta = d\tau = p^2 dp d\omega,$$

wo $d\omega$ einen unendlich kleinen räumlichen Winkel mit O als Spitze bedeutet.

Dann geht (39) in ein zweifaches Integral über:

$$(41) \quad M(\beta) = \int_{(\omega)} \int_0^\infty e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}} \cdot p^2 dp d\omega.$$

In dieser Formel ist übrigens implizit auch eine Umformung der Verteilungsfunktion F in eine solche enthalten, die nur von einer einzigen der unabhängigen Variablen des Elementargebietes abhängt (siehe oben § 2).

Integriert man jetzt in (41) bei festem p über die ganze Einheitskugel und beachtet, daß

$$\int_{(\omega)} d\omega = 4\pi$$

ist, so hat man eine Darstellung durch ein einfaches Integral gewonnen:

$$(42) \quad M(\beta) = 4\pi \int_0^\infty e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}} \cdot p^2 dp.$$

Endlich setze man noch

$$(43) \quad p = c \cdot \sin \varrho,$$

wo der reelle hyperbolische Winkel ϱ (genauer: Sektor) für $p = 0$ bis $p = \infty$ auch von 0 bis ∞ variiert. Dann erhält man:

$$(44) \quad M(\beta) = 4\pi c^3 \int_0^{\infty} e^{-\beta \mathcal{C} \operatorname{of} e} \cdot \mathcal{S} \operatorname{in}^2 \varrho \mathcal{C} \operatorname{of} \varrho d\varrho.$$

Bevor nunmehr der letzte Schritt der Rechnung getan wird, möge kurz die Deutung der vorgenommenen Transformation nach H. Minkowskis Betrachtungsweise in dem vierdimensionalen Raum der x, y, z, l , wo $l = ct$ ist, gegeben werden. Dabei soll trotz der Verwendung hyperbolischer Funktionen die Euklidische Ausdrucksweise benutzt werden. Während zu Anfang dieses Paragraphen $d\tau$ ein Volumenelement im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume, sowie $d\omega$ die Kegelöffnung in der Richtung von O nach P und p die Entfernung OP bedeutete, tritt man mit (43) in den vierdimensionalen Raum ein. Hier ist

$$(45) \quad \frac{d\tau}{c^3} = \mathcal{S} \operatorname{in}^2 \varrho \mathcal{C} \operatorname{of} \varrho d\varrho d\omega = d\Omega$$

als dreidimensionaler elementarer räumlicher Winkel mit O als Scheitel aufzufassen; derselbe zeigt im vierdimensionalen Raum der x, y, z, l von O nach dem Punkte P' mit den Koordinaten $\xi, \eta, \zeta, L/mc$, die die rechtwinkligen Komponenten des „Bewegungsvektors“ \mathfrak{B} sind. Der Betrag desselben setzt sich aus seinen Komponenten so zusammen:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}^2 = \left(\frac{L}{mc}\right)^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = c^2, \\ |\mathfrak{B}| = c. \end{array} \right.$$

Insbesondere ist weiter ϱ der Winkel, den \mathfrak{B} oder auch die Richtung $d\Omega$ mit der Zeitachse, der Polarachse, bildet. Bei dieser Auffassung ist dann gemäß (3a)

$$(47) \quad \frac{L}{mc} = c \mathcal{C} \operatorname{of} \varrho$$

die zeitliche Komponente \mathfrak{B}_t des Bewegungsvektors und

$$(48) \quad p = c \mathcal{S} \operatorname{in} \varrho$$

die komplementäre Komponente \mathfrak{B}_{xyz} desselben, d. h. die Projektion von \mathfrak{B} auf den gewöhnlichen Raum. In der einfach-

sten physikalischen Beziehung steht ϱ zu der Geschwindigkeit q entsprechend der Gleichung (vgl. (3)):

$$(48) \quad \frac{q}{c} = \mathfrak{I}g \varrho;$$

auf Grund der Formeln $\mathfrak{I}g 0 = 0$, $\mathfrak{I}g \infty = 1$ erkennt man, daß der Ruhe $q = 0$ auch $\varrho = 0$ entspricht, daß aber die Lichtgeschwindigkeit $q = c$ hier in den Wert $\varrho = \infty$ des „Geschwindigkeitswinkels“ transformiert wird.¹⁾

Zusammenfassend kann man sagen, daß wir in dem Integral (19) mittels (40b) und (43) den Bewegungsvektor

$$\mathfrak{B} \equiv \left(\mathfrak{x} | \mathfrak{y} | \mathfrak{z} | \frac{L}{mc} \right)$$

durch seine vierdimensionalen Polarkomponenten in bezug auf die Zeitachse als Polarachse ausgedrückt haben.²⁾ Die dreifache Integration, die in (44) schon auf eine einfache reduziert worden ist, bezieht sich ferner bis auf den Faktor c^3 auf $d\Omega$, d. h. auf die dreidimensionale Oberfläche einer vierdimensionalen Einheitskugel (oder mit Berücksichtigung von c^3 auf die Oberfläche einer Kugel vom Radius $|\mathfrak{B}| = c$). Übrigens ist hier, da unsere Formeln hyperbolisch gestaltet sind, die Oberfläche $\int d\Omega = \infty$, wie aus der ursprünglichen Deutung von $d\Omega$ als durch c^3 dividiertes Euklidisches Raumelement $d\tau$ sofort klar ist.

1) Vgl. A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 10. p. 826—829. 1909.

2) Die ausführlichen Gleichungen zur Einführung der (hyperbolischen) vierdimensionalen Polarkomponenten oder Polarkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= c \cdot \mathfrak{S}in \varrho \cdot \sin \lambda \cos \mu, \\ \mathfrak{y} &= c \cdot \mathfrak{S}in \varrho \cdot \sin \lambda \sin \mu, \\ \mathfrak{z} &= c \cdot \mathfrak{S}in \varrho \cdot \cos \lambda, \\ \frac{L}{mc} &= c \cdot \mathfrak{C}os \varrho, \end{aligned}$$

wozu noch tritt:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z} &= c^3 \cdot d\Omega, \\ d\Omega &= \mathfrak{S}in^2 \varrho \mathfrak{C}os \varrho \sin \lambda d\varrho d\lambda d\mu \\ &= \mathfrak{S}in^2 \varrho \mathfrak{C}os \varrho d\varrho \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Diese Formeln würden auf dem kürzesten Wege von (19) zu (44) überleiten, falls man von vornherein den vierdimensionalen Raum als mathematisches Hilfsmittel verwenden will.

Nach dieser Zwischenbetrachtung soll jetzt die Reduktion des Integrals (44) beendet werden. Auf Grund der Formeln

$$\mathfrak{S}\sin^2 \varrho = \mathfrak{C}\cos^2 \varrho - 1, \quad 4\mathfrak{C}\cos^3 \varrho = \mathfrak{C}\cos 3\varrho + 3\mathfrak{C}\cos \varrho$$

erhält man:

$$\mathfrak{S}\sin^2 \varrho \mathfrak{C}\cos \varrho = \frac{1}{4}(\mathfrak{C}\cos 3\varrho - \mathfrak{C}\cos \varrho)$$

und somit:

$$M(\beta) = \pi c^3 \cdot \left\{ \int_0^\infty e^{-\beta \mathfrak{C}\cos \varrho} \cdot \mathfrak{C}\cos 3\varrho d\varrho - \int_0^\infty e^{-\beta \mathfrak{C}\cos \varrho} \cdot \mathfrak{C}\cos \varrho d\varrho \right\}.$$

Nun ist für *reelles positives* β

$$\int_0^\infty e^{-\beta \mathfrak{C}\cos \varrho} \cdot \mathfrak{C}\cos n\varrho d\varrho = \frac{\pi}{2} \cdot i^{n+1} \cdot H_n^{(1)}(i\beta),$$

wo die $H_n^{(1)}$ eine Gattung der Besselschen oder Zylinderfunktionen bedeuten, nämlich die Hankelschen *Zylinderfunktionen erster Art* von der n . Ordnung.¹⁾ Während diese für jedes reelle Argument komplex sind, sind für ein positiv imaginäres Argument $i\beta$ die Funktionen ungerader Ordnung reell, diejenigen gerader Ordnung rein imaginär, so daß also die rechte Seite der letzten Gleichung, wie nötig, stets reell (genauer: positiv) ist. Für unendliches positives β verschwindet $H_n^{(1)}(i\beta)$.

Die β betreffende Bedingung ist wegen der physikalisch notwendigen Konvergenz von $M(\beta)$ erfüllt. Daher erhält man:

$$(49) \quad M(\beta) = \frac{\pi^2}{2} c^3 \cdot \{H_3^{(1)}(i\beta) + H_1^{(1)}(i\beta)\}.$$

1) Vgl. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909. Dort findet sich p. 170 die von Heine herrührende Formel (hier in einer unserem Fall angepaßten Schreibweise)

$$(1) \quad H_n^{(2)}(-i\beta) = i^{n+1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\beta \mathfrak{C}\cos \varrho} \cdot \mathfrak{C}\cos n\varrho d\varrho,$$

wo β reell positiv; ferner auf p. 95:

$$H_n^{(2)}(x) = e^{i(n+1)\pi} \cdot H_n^{(1)}(xe^{i\pi})$$

oder für $x = -i\beta$:

$$(2) \quad H_n^{(2)}(-i\beta) = (-1)^{n+1} \cdot H_n^{(1)}(i\beta).$$

Durch Kombination der Formeln (1) und (2) folgt der Ausdruck des Textes.

Nun gilt allgemein die Rekursionsformel¹⁾

$$H_{n+1}^{(1)} + H_{n-1}^{(1)} = \frac{2n}{x} \cdot H_n^{(1)}.$$

wo x das gemeinsame Argument ist. Daher erhält man als einfachste Gestalt der gesuchten Funktion:

$$(50) \quad M(\beta) = -2\pi^2 c^3 \cdot \frac{i H_2^{(1)}(i\beta)}{\beta}.$$

Bei nochmaliger Benutzung der Rekursionsformel in der Gestalt

$$H_2^{(1)} = \frac{2}{x} \cdot H_1^{(1)} - H_0^{(1)}$$

geht Gleichung (50) über in

$$(51) \quad M(\beta) = 2\pi^2 c^3 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \{-2 \cdot H_1^{(1)}(i\beta) + \beta \cdot i H_0^{(1)}(i\beta)\}.$$

Die hier auftretenden Funktionen der beiden niedrigsten Ordnungen $i \cdot H_0^{(1)}(i\beta)$ und $-H_1^{(1)}(i\beta)$ liegen tabelliert²⁾ vor (was für $-i \cdot H_2^{(1)}(i\beta)$ bisher nicht der Fall ist); sie nehmen für ein von 0 bis $+\infty$ wachsendes β selbst von $+\infty$ bis 0 monoton ab. Auch $M(\beta)$ ist stets positiv und nimmt beständig ab bis zum Werte Null.

Somit ist die Funktion $M(\beta)$ jetzt als völlig bekannt anzusehen, da sie durch (49), (50) und (51) auf Besselsche Funktionen reduziert ist.

§ 7. Die relativtheoretischen thermodynamischen Funktionen des ruhenden idealen einatomigen Gases als Hankelsche Zylinderfunktionen der Temperatur.

Unter Benutzung der einfachsten Form (50) von $M(\beta)$ mögen nun die wichtigsten der in § 5 berechneten thermodynamischen Funktionen, die einem ruhenden idealen einatomigen Gase vom Standpunkte der Relativtheorie aus zukommen, explizit angegeben werden.

Die Energie E wird wegen (20)

$$(52) \quad E = Nm c^2 \cdot \left\{ \frac{1}{\beta} - \frac{i \cdot H_2^{(1)'}(i\beta)}{H_2^{(1)}(i\beta)} \right\},$$

1) Jahnke-Emde p. 165.

2) Jahnke-Emde p. 134—136. Die Tabellen gehen von $\beta = 0,2$ bis $\beta = 12,0$; man vgl. auch die beiden zugehörigen Kurven S. 134.

wo der Strich bei $H_2^{(1)}$ die Differentiation nach dem Argument, d. h. nach $i\beta$, bedeutet, oder analog zu (28):

$$(52^2) \quad E = N m c^2 \cdot \left\{ \frac{k T}{m c^2} - \frac{i \cdot H_2^{(1)'} \left(i \frac{m c^2}{k T} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{m c^2}{k T} \right)} \right\}.$$

Die Entropie S wird nach (24):

$$(53^1) \quad \left\{ \begin{aligned} S = \text{const.} + k N \cdot \left\{ -\beta \cdot \frac{i H_2^{(1)'}(i\beta)}{H_2^{(1)}(i\beta)} \right. \\ \left. + \log(-i \cdot H_2^{(1)}(i\beta)) - \log \beta + \log V \right\}, \end{aligned} \right.$$

oder entsprechend (31):

$$(53^2) \quad \left\{ \begin{aligned} S = \text{const.} + k N \cdot \left\{ -\frac{m c^2}{k T} \cdot \frac{i \cdot H_2^{(1)'} \left(i \frac{m c^2}{k T} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{m c^2}{k T} \right)} \right. \\ \left. + \log \left(-i \cdot H_2^{(1)} \left(i \frac{m c^2}{k T} \right) \right) + \log T + \log V \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die freie Energie A wird gemäß (37):

$$(54^1) \quad \left\{ \begin{aligned} A = \text{const.} \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{N m c^2}{\beta} \cdot \left\{ \log(-i \cdot H_2^{(1)}(i\beta)) \right. \\ \left. - \log \beta + \log V \right\} \end{aligned} \right.$$

oder:

$$(54^2) \quad \left\{ \begin{aligned} A = \text{const.} \cdot T - k N T \cdot \left\{ \log \left(-i \cdot H_2^{(1)} \left(i \frac{m c^2}{k T} \right) \right) \right. \\ \left. + \log T + \log V \right\}. \end{aligned} \right.$$

Übrigens lassen sich diese Gleichungen ebenso wie (51) sämtlich mittels $H_1^{(1)}$ und $H_0^{(1)}$ allein schreiben, wenn man außer der oben angegebenen Rekursionsformel noch die weitere¹⁾

$$\frac{d H_n^{(1)}(x)}{dx} = -\frac{n}{x} \cdot H_n^{(1)} + H_{n-1}^{(1)}$$

benutzt. Doch möge hier nur der so zu erhaltende Ausdruck

1) Jahnke-Emde p. 165.

für die Energie angegeben werden, der also unmittelbar die Benutzung der vorhandenen Funktionstafeln gestattet:

$$(55) \quad E = Nm c^2 \cdot \frac{(6 + \beta^2) \cdot H_1^{(v)}(i\beta) - 3\beta \cdot i \cdot H_0^{(v)}(i\beta)}{\beta \cdot (2 H_1^{(v)}(i\beta) - \beta \cdot i \cdot H_0^{(v)}(i\beta))}.$$

§ 8. Numerische Diskussion: die Zahlenwerte von β und das Verhältnis der relativtheoretischen zur gewöhnlichen Gastheorie.

Wie die Relativmechanik für kleine Geschwindigkeiten in die Newtonsche Mechanik übergeht, so muß notwendig die relativtheoretische Gastheorie für kleine mittlere Molekulargeschwindigkeiten, d. h. für niedrige Temperaturen, in die gewöhnliche Gastheorie übergehen. Um dies genauer überblicken zu können, ist eine zahlenmäßige Diskussion der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Formeln notwendig. Dabei kann man sich auf die Untersuchung von E beschränken, da von dessen Verhalten auch dasjenige von C_v , S , A usw. unmittelbar abhängt.

Zuerst möge die Größenordnung der Zahlenwerte von

$$\beta = \frac{m c^2}{k T}$$

ermittelt werden, da β in allen Formeln das primäre Argument ist. Es ist¹⁾

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \quad k = 1,346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}},$$

also

$$\beta = \frac{9}{1,346} \cdot 10^{36} \cdot \frac{m}{T}.$$

Obwohl nun der die Temperatur messende Parameter β eine reine Zahl ist (auch in bezug auf die Temperatur), so ist er doch offenbar keine universelle Funktion der Temperatur, sondern dem Molekulargewicht des Gases proportional. Da β meist recht groß werden wird, wählen wir als Beispiel das *Helium*, da dieses unter den einatomigen Gasen das kleinste Atomgewicht, nämlich $\text{He} = 3,99$ (gegen $\text{O} = 16,000$), hat. Für den auch einatomigen Quecksilberdampf, dessen Atomgewicht

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906. p. 162; oder Acht Vorlesungen p. 93 und 94.

Hg = 200,0 ist, würde β bei gleicher Temperatur immer 50 mal größer sein als für das Helium.

Die Masse eines Heliummoleküls ist

$$m = \frac{3,99}{6,175 \cdot 10^{23}} \text{ g} = 6,46 \cdot 10^{-24} \text{ g},$$

wo $6,175 \cdot 10^{23}$ der Zahlenwert¹⁾ der oben (vgl. (26 b)) eingeführten Loschmidtschen Konstanten N_1 ist. Demnach gilt für He:

$$\beta = \frac{4,32 \cdot 10^{13}}{T},$$

und man erhält folgende Übersichtstabelle:

T (° abs.)	β
0	∞
3	$1,44 \cdot 10^{13}$
300	$1,44 \cdot 10^{11}$
6000	$0,72 \cdot 10^{10}$
1 Billion	43,2
43,2 Billionen	1
1 Trillion	$4,32 \cdot 10^{-5}$
∞	0

Man erkennt, daß bei den dem Experiment zugänglichen Temperaturen der Parameter β für *alle* einatomigen Gase immer einen sehr hohen Wert besitzt: Auch wenn man die auf über 20000° berechneten Temperaturen mancher Fixsterne hier berücksichtigen wollte, würde doch β in diesem Gebiete für keinen Stoff unter den Wert einer Milliarde herabsinken.

In diesem Temperaturbereiche und noch weit höher hinauf darf man daher gewiß für die Zylinderfunktionen ihre asymptotischen Darstellungen anwenden. Es gilt nun für großes β ²⁾:

$$-i \cdot H_2^{(1)}(i\beta) = \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \beta}} \cdot S_2(2\beta),$$

1) Vgl. die Anmerkung auf p. 877.

2) Jahnke-Emde p. 100 u. 98.

wo

$$S_2(2\beta) = 1 + \frac{4 \cdot 2^2 - 1}{1! 8\beta} + \frac{(4 \cdot 2^2 - 1)(4 \cdot 2^2 - 9)}{2!(8\beta)^2} + \dots$$

$$= 1 + \frac{15}{8\beta} + \frac{105}{128\beta^2} - + \dots$$

eine halbkonvergente Reihe ist. Hiermit geht (50) über in (vgl. § 4 am Ende):

$$(56) \quad M(\beta) = 2^{3/2} \pi^{3/2} c^3 \cdot \frac{e^{-\beta}}{\beta^{3/2}} \cdot S_2(2\beta).$$

Für die Energie gilt nach (20) die Gleichung

$$E = - Nm c^2 \cdot \frac{d \log M(\beta)}{d\beta};$$

nach (56) ist ferner:

$$\log M(\beta) = \text{const.} - \beta - \frac{3}{2} \log \beta + \log S_2(2\beta);$$

daher erhält man folgenden asymptotischen Ausdruck für die Energie:

$$(57) \quad E = Nm c^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{2\beta} - \frac{1}{S_2(2\beta)} \cdot \frac{d S_2(2\beta)}{d\beta} \right\}.$$

Betrachtet man nun zuerst sehr große β , so kann man angenähert

$$S_2(2\beta) = 1$$

setzen; man bekommt dann aus (57):

$$(58^1) \quad E = Nm c^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{2\beta} \right)$$

oder:

$$(58^2) \quad E = Nm c^2 + \frac{3}{2} Nk T.$$

Die Vergleichung mit dem Ausdruck E_0 aus (28*) gibt:

$$(59) \quad E = Nm c^2 + E_0.$$

Also geht in der Tat bei den unseren Experimenten zugänglichen Temperaturen E angenähert in eine lineare Funktion der Temperatur über, und zwar in den gewöhnlichen Ausdruck E_0 bis auf das konstante additive Glied $Nm c^2$. Dieses letztere, das im Unterschiede zu E_0 von der Natur des Gases abhängig

ist, ist als dessen innere Energie aufzufassen, die es auch bei $T = 0$ besitzt.¹⁾

Will man jetzt die Abweichung der Energiefunktion von der Linearität ermitteln oder die Energie für weniger große β berechnen, so muß man die vollständige Gleichung (57) anwenden. Da

$$\frac{dS_2(2\beta)}{d\beta} = -\frac{15}{8\beta_2} - \frac{105}{64\beta^3} + \dots$$

ist, so erhält man folgende explizite genauere asymptotische Darstellung der Energie (für große β):

$$(60^1) \quad E = Nm c^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{2\beta} + \frac{15}{8\beta^2} - \frac{15}{8\beta^3} \dots \right\}$$

oder:

$$(60^2) \quad E = Nm c^2 + \frac{3}{2} NkT + \frac{15 Nk^2}{8 m c^2} T^2 - \frac{15 Nk^3}{8 m^2 c^4} T^3 \dots$$

Aus (60¹) erkennt man, daß das Verhältnis der ersten Korrektion von E zu dem Hauptwert E_0 durch

$$\frac{15}{8\beta^2} : \frac{3}{2\beta} = \frac{5}{4\beta}$$

gegeben wird. Dies beträgt für Helium

$$T \cdot 2,9 \cdot 10^{-12} \text{ Proz.};$$

daher ist für dieses Gas der wirkliche Wert $E - Nm c^2$ z. B. bei Zimmertemperatur um ca. 10^{-9} Proz., bei 6000° um ca. $2 \cdot 10^{-8}$ Proz. und bei $\frac{1}{10}$ Billion Grad um ca. 0,3 Proz. größer als der Näherungswert E_0 . Für Quecksilberdampf fallen diese Korrekturen noch 50 mal kleiner aus.

Die Gleichung (59) und somit die Clausiussche Annahme (siehe oben § 5) ist also bei jedem einatomigen Gase bis zu einer Temperatur von $\frac{1}{10}$ Billion Grad herauf praktisch vollkommen erfüllt, so daß auch für die spezifischen Wärmen, die

1) Vgl. M. Planck, Ann. d. Phys. 26. p. 1–34. 1908. Entsprechend gibt der im Text zugrunde gelegte Ausdruck (3) für L angenähert für kleine q den Wert

$$L = m c^2 + \frac{m}{2} q^2.$$

adiabatischen Vorgänge usw. hier praktisch die gewöhnlichen Formeln gelten.

Geht man andererseits in den Temperaturen bei Helium über 10 Billionen Grad, bei Quecksilberdampf über 500 Billionen Grad hinauf, so hat in diesen extremen Gebieten das lineare Gesetz (59) seine Bedeutung ganz verloren, da dort β klein wird (vgl. oben die Tabelle). Die Temperaturabhängigkeit von E wird dann nur durch die Zylinderfunktionen bestimmt gemäß (52) oder (55). Auch die asymptotischen Darstellungen (60) gelten dort nämlich nicht mehr; sie haben ihre besondere Bedeutung vor allem in dem Mittelgebiet der Temperaturen, also z. B. für Helium von $\frac{1}{10}$ Billion bis etwa zu 1 Billion Grad, da hier die Korrektionsglieder erheblich werden und dennoch β noch groß ist.

Betrachtet man mehrere einatomige Gase von derselben Temperatur, so sind ihre Energien E verschieden, da wegen der Ungleichheit ihrer Molekulargewichte m auch ihre Parameter β verschieden sind. *Das Gesetz der gleichmäßigen Energieverteilung ist also in der Relativtheorie der idealen einatomigen Gase in strengem Sinne niemals erfüllt.* Beschränkt man sich jedoch auf Temperaturen von unter einer Billion Grad, für die (52) durch (60²) ersetzt werden kann, so sieht man, daß gerade in dem Hauptglied E_0 sich der Massenfaktor m fortgehoben hat, während dies in allen übrigen Gliedern nicht der Fall ist. Also kann man in diesem Temperaturbereiche genauer sagen: für das Hauptglied gilt das Gesetz der gleichmäßigen Energieverteilung, für die innere Energie und die Korrektionsglieder aber nicht. Dabei verhalten sich die Korrektionsglieder erster Ordnung umgekehrt wie die ersten, diejenigen zweiter Ordnung umgekehrt wie die zweiten Potenzen der Molekulargewichte usw. (vgl. oben das Zahlenbeispiel für He und Hg). Beschränkt man sich nunmehr noch weiter, nämlich auf Temperaturen unter $\frac{1}{10}$ Billion Grad, so gilt hier praktisch gleichmäßige Energieverteilung, da dann nur E_0 noch in Betracht kommt; von der konstanten inneren Energie wird dabei abgesehen.

Vergleicht man zum Schluß noch Gase von verschiedenen Molekulargewichten mit Resonatorenssystemen von verschiedenen Schwingungszahlen, wie sie Planck in der Strahlungstheorie eingeführt hat, so erkennt man, daß streng genommen beide

Arten von Gebilden bei keiner Temperatur eine gleichmäßige Energieverteilung aufweisen. Angenähert zeigen eine solche die Resonatoren unter sich bei hohen Temperaturen und nicht zu großen Schwingungszahlen¹⁾, die Gase unter sich bei niederen Temperaturen (im oben erklärten Sinne), Resonatoren und Gase gemeinsam also bei mittleren Temperaturen (d. h. bei den gewöhnlichen hohen Temperaturen unserer Experimente).

Berlin, den 30. Januar 1911.

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, p. 159—160.

(Eingegangen 5. Februar 1911.)