1911. № 5.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 34.

1. *Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme;*

von Philipp Frank und Hermann Rothe.

Die Transformationsgleichungen, welche die Raumzeitkoordinaten (x, y, z, t) eines ruhenden Systems mit denen in einem bewegten System (x', y', z', t') verknüpfen, dessen Geschwindigkeit q nach Richtung und Größe konstant ist, haben in der heutigen Physik eine so große Wichtigkeit erlangt, daß es sich wohl lohnt, genau zu prüfen, welche Voraussetzungen physikalischer oder anderer Natur eigentlich notwendig sind, um die Gestalt dieser Gleichungen abzuleiten. Nach der Relativitätstheorie sind sie durch die *Lorentztransformation* gegeben. Diese lautet bekanntlich, wenn wir mit c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnen und die Koordinatensysteme so wählen, daß zur Zeit Null das bewegte mit dem ruhenden zusammenfällt und sich dann in der x-Richtung weiterbewegt:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\left(t - \frac{q}{c^2}x\right), \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}(-qt + x). \end{aligned}\right.$$

Als Grenzfall für $c = \infty$ ist in diesen Gleichungen bekanntlich die *Galileitransformation* enthalten:

$$(2)\qquad t' = t, \qquad x' = -qt + x.$$

Die heute übliche Ableitung der Gleichungen (1) rührt von A. Einstein[1]) her und beruht im wesentlichen auf folgenden Voraussetzungen:

1) A. Einstein, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 4. p. 411 ff. 1907. Eine nähere Ausführung der Einsteinschen Ableitung findet man in der Arbeit: Ph. Frank, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-phys. Kl. 118. Abt. IIa. p. 421 ff. 1909.

α) Wenn c der Wert der Lichtgeschwindigkeit in bezug auf ein ruhendes System ist, so soll der Wert der Lichtgeschwindigkeit in bezug auf jedes relativ zum ersten gleichförmig geradlinig bewegte System ebenfalls für alle Fortpflanzungsrichtungen c betragen. Dem entspricht mathematisch die Forderung, daß die Beziehungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \text{und} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

vermöge der Transformationsgleichungen auseinander folgen sollen.

β) Die Transformationsgleichungen sollen linear homogen in den Koordinaten sein; ihre Koeffizienten können dann nur von q abhängen.

γ) Wenn man q durch $-q$ ersetzt, soll die Transformation in ihre inverse (d. h. nach x, y, z, t aufgelöste Form) übergehen.

δ) Die Kontraktion, welche die Längen vermöge der Bewegung erfahren, soll nur vom Betrage, nicht vom Vorzeichen von q abhängen.

Wir wollen nun zeigen, daß man die Zahl dieser Voraussetzungen sehr beschränken und insbesondere die scheinbar wichtigste α), die Forderung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden und bewegten System, fallen lassen kann.

Unsere Ableitung stützt sich vielmehr nur auf folgende beide Voraussetzungen:

A. Die Transformationsgleichungen bilden, wenn wir q als variablen Parameter auffassen, eine lineare homogene Gruppe.

B. Die Kontraktion der Längen soll nicht vom Vorzeichen, sondern nur vom Betrage von q abhängen.

Die in A. verlangte Gruppeneigenschaft der Transformationsgleichungen muß notwendig gefordert werden, wenn überhaupt ein für alle Geschwindigkeiten q gültiger Typus von Transformationsgleichungen existieren soll. Denn wenn die Gleichungen keine Gruppe bildeten, würde die Zusammensetzung zweier Transformationen, also der Übergang von einem System zu einem bewegten mit Hilfe eines Zwischensystems, zu Gleichungen von ganz anderer Gestalt als die ursprünglichen führen.

Wir gehen nun so vor, daß wir zuerst die allgemeinsten Transformationsgleichungen aufstellen, die der Forderung A.

genügen. Durch Spezialisierung derselben erhalten wir alle diejenigen, die auch noch die Forderung B. erfüllen. Als Resultat ergibt sich, daß dann nur Gleichungen übrig bleiben, die entweder gar keine Kontraktion zur Folge haben, oder mit den Lorentzschen (1) übereinstimmen. Die ersteren bilden einen neuen Typus von Transformationsgleichungen (wir nennen sie *Dopplertransformation*) und enthalten die *Galileitransformation* (2) als besonderen Fall.

Einen Teil der hier zum Beweise verwendeten Ansätze und Formeln haben wir schon bei einer anderen Gelegenheit in der Arbeit[1]) „Über eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips und die dazu gehörige Mechanik" veröffentlicht, so z. B. das Additionstheorem der Geschwindigkeiten für die allgemeinsten der Forderung A. genügenden Transformationsgleichungen.[2])

Hr. v. Ignatowsky[3]) hat schon den Versuch gemacht, die Einsteinschen Voraussetzungen auf eine geringere Zahl zu beschränken. Wenn man auch die von ihm stillschweigend gemachten Annahmen ausspricht, kann man den Inhalt seiner Arbeit folgendermaßen wiedergeben: er vermeidet die Voraussetzung α) (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit), behält aber außer den unsrigen noch die Einsteinsche Forderung γ) bei. Ferner wendet er sofort alle Voraussetzungen an und stellt nicht die allgemeinsten der Forderung A. genügenden Transformationsgleichungen auf, woraus erst die Stellung der Lorentztransformation innerhalb aller anderen klar ersichtlich würde.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Wir setzen von vornherein:

$$y' = y, \quad z' = z,$$

weil die recht leichte Begründung dieser Gleichungen den Gedankengang nur mit vermeidlicher Schwerfälligkeit belasten würde. Wir betrachten also nur die Transformation von x und t.

---

1) Ph. Frank u. H. Rothe, Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-nat. Kl. **119**. Abt. IIa. p. 615ff. 1910.

2) l. c. p. 619, Gleichung (12) und die folgende ohne Nummer.

3) W. v. Ignatowsky, Berichte d. Deutsch. Physik. Ges. p. 788 ff. 1910 und Arch. f. Math. u. Phys. **17**. p. 1 ff.

Im Abschnitt I stellen wir die verwendeten Begriffe und Sätze aus der Theorie der Transformationsgruppen kurz zusammen.[1]) In den Abschnitten II und III wenden wir diese Sätze auf die durch Voraussetzung A. bestimmten Transformationsgleichungen an, führen im Abschnitt IV in dieselben einen Parameter[2]) q ein, der die Eigenschaften einer Geschwindigkeit hat, worauf sich das Additionstheorem der Geschwindigkeiten ergibt und geben im Abschnitt V Beispiele zu den vorangehenden Entwickelungen. Im Abschnitt VI endlich berechnen wir die Gestalt der allgemeinsten der Forderung A. genügenden Transformationsgleichungen und insbesondere die Kontraktion als Funktion der in IV eingeführten Geschwindigkeit q. Auf diese wenden wir dann in Abschnitt VII unsere Forderung B. an und erhalten so alle Gleichungen, die unserem System von Voraussetzungen genügen.

I.

1. Es seien t, x, p drei Veränderliche, von denen wir t, x als *rechtwinkelige Koordinaten* eines *Punktes* P in einer t, x-Ebene und p als *Parameter* deuten. Ferner seien:

$$\varphi(t, x, p), \quad \psi(t, x, p) \tag{3}$$

zwei eindeutige, stetige und differenzierbare Funktionen der drei Argumente t, x, p[3]), für welche die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(t, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix} \tag{4}$$

nicht identisch verschwindet und überdies nicht gleichzeitig:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial p} \equiv 0 \tag{5}$$

ist.

---

1) Wir beziehen uns dabei überall auf die elementare Darstellung der Gruppentheorie in dem Werke S. Lie u. G. Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893.

2) Vgl. auch: Ph. Frank u. H. Rothe, l. c. p. 618.

3) Nötigenfalls sind die drei Veränderlichen t, x, p auf einen bestimmten Bereich der t, x, p-Mannigfaltigkeit zu beschränken, dem dann jedes weiterhin in Betracht kommende Wertesystem t, x, p angehören muß.

Durch die beiden Gleichungen:

$$t' = \varphi(t, x, p), \quad x' = \psi(t, x, p) \tag{6}$$

wird dann, wenn dem Parameter p ein fester Wert erteilt wird, jedem Wertepaare t, x ein zweites Wertepaar t', x' zugeordnet; diese Zuordnung heißt eine *Transformation* und mag mit T_p bezeichnet werden. Geometrisch bedeutet die Transformation T_p eine *punktweise Abbildung* der t, x-Ebene auf eine t', x'-Ebene, welche, wie im folgenden vorausgesetzt werden soll, auch mit der t, x-Ebene zusammenfallen kann; dabei beziehen wir überdies die Koordinaten t', x' der transformierten Punkte P' zunächst auf dasselbe Koordinatensystem wie die Koordinaten t, x der ursprünglichen Punkte P.

2. Durchläuft der Parameter p stetig die ganze Zahlenreihe oder ein bestimmtes Intervall auf derselben, so erhalten wir eine *Schar* $\mathfrak{S}$ von ∞^1 Transformationen T_p, deren jede einem bestimmten Wert von p entspricht; dieselbe wird auch als eine *eingliedrige* (kontinuierliche) Schar von Transformationen bezeichnet.

Ist $T_{p'}$ eine zweite Transformation der Schar $\mathfrak{S}$, welche zum Parameter p' gehört und welche das Wertepaar t', x' in t'', x'' überführt, so daß also:

$$t'' = \varphi(t', x', p'), \quad x'' = \psi(t', x', p') \tag{7}$$

ist, so erhält man durch Elimination von t', x' aus (6) und (7) die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} t'' = \varphi\big(\varphi(t, x, p), \ \psi(t, x, p), \ p'\big), \\ x'' = \psi\big(\varphi(t, x, p), \ \psi(t, x, p), \ p'\big), \end{array}\right. \tag{8}$$

die eine Transformation T darstellen, welche t, x direkt in t'', x'' überführt und das *Produkt* der beiden Transformationen T_p und $T_{p'}$ heißt; man schreibt:

$$T = T_p T_{p'}, \tag{9}$$

wobei durch die Anordnung der Faktoren des Produktes gleichzeitig die Reihenfolge gegeben ist, in welcher die beiden Transformationen T_p und $T_{p'}$ ausgeführt werden sollen. Im allgemeinen ist:

$$T_{p'} T_p \neq T_p T_{p'}, \tag{10}$$

d. h. für die Zusammensetzung von Transformationen gilt nicht das *kommutative Gesetz.*

3. Das Produkt T der beiden Transformationen T_p und $T_{p'}$ von $\mathfrak{S}$ wird im allgemeinen eine Transformation sein, die *nicht* zur Schar $\mathfrak{S}$ gehört. Ist jedoch das Produkt irgend zweier Transformationen von $\mathfrak{S}$ immer wieder eine Transformation von $\mathfrak{S}$, so sagt man, daß die Transformationen der Schar $\mathfrak{S}$ die *Gruppeneigenschaft* besitzen. Es ist dann:

$$(T_p T_{p'}) T_{p''} = T_p (T_{p'} T_{p''}), \tag{11}$$

d. h. für Produkte dreier (und auch beliebig vieler) Faktoren gilt das *assoziative Gesetz.*

Besitzt $\mathfrak{S}$ die Gruppeneigenschaft, d. h. gehört T zu $\mathfrak{S}$, so müssen die Gleichungen (8) die Form:

$$t'' = \varphi(t, x, p''), \quad x'' = \psi(t, x, p'') \tag{12}$$

annehmen, wobei:

$$p'' = \pi(p, p') \tag{13}$$

eine Funktion von p und p' allein ist.

Man sagt nun, die Transformationen einer Schar $\mathfrak{S}$ bilden eine *Gruppe* $\mathfrak{G}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

A. Die Transformationen von $\mathfrak{S}$ besitzen die Gruppeneigenschaft.

B. Es gibt einen Parameterwert $p = p_0$, für welchen:

$$\varphi(t, x, p_0) \equiv t, \quad \psi(t, x, p_0) \equiv x \tag{14}$$

ist. Die zu diesem Parameterwerte gehörige Transformation T_{p_0}, welche durch die Gleichungen:

$$t' = t, \quad x' = x \tag{15}$$

dargestellt wird, läßt also jedes Wertepaar t, x ungeändert und heißt die *identische* Transformation.

C. Zu jeder Transformation T_p gibt es in $\mathfrak{S}$ eine zweite, welche mit T_p in irgend einer Reihenfolge zusammengesetzt die identische Transformation T_{p_0} liefert. Diese zweite Transformation heißt die zu T_p *inverse* Transformation und wird mit T_p^{-1} bezeichnet, so daß

$$T_p T_p^{-1} = T_p^{-1} T_p = T_{p_0} \tag{16}$$

ist. Die inverse Transformation von T_p findet man, wenn man die Gleichungen (6) nach t und x auflöst, was immer möglich ist, da die Funktionaldeterminante (4) nicht identisch verschwindet. Als Transformation der Schar $\mathfrak{S}$ entspricht der inversen Transformation T_p^{-1} von T_p ein Parameterwert $\bar{p}$, der eine Funktion von p allein ist und mittels der Bedingung:

$$T_p^{-1} = T_{\bar{p}} \tag{17}$$

gefunden werden kann. Nach (13) genügen die *beiden Werte* p und $\bar{p}$ der Gleichung:

$$\pi(p, \bar{p}) = p_0 \,. \tag{18}$$

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *eingliedrig*, weil sie aus ∞^1 Transformationen T_p besteht.

4. Betrachtet man in (13) p als eine zu transformierende Veränderliche und p' als Parameter (oder umgekehrt), so definiert diese Gleichung, wenn p'' die transformierte Veränderliche ist, eine eingliedrige Schar von Transformationen, die ebenfalls eine Gruppe $\mathfrak{P}$ bilden, welche man als die *Parametergruppe* von $\mathfrak{G}$ bezeichnet.

5. Ist δp eine unendlich kleine Größe, so ist die Transformation, welche zum Parameterwert:

$$p = p_0 + \delta p \tag{19}$$

gehört, von der identischen Transformation unendlich wenig verschieden; sie heißt die *infinitesimale* Transformation der Gruppe und führt einen Punkt $P = (t, x)$ in einen unendlich benachbarten Punkt P' über, dessen Koordinaten:

$$t' = t + \delta t \,, \quad x' = x + \delta x \tag{20}$$

sind, wobei:

$$\delta t = \tau(t, x)\,\delta p \,, \quad \delta x = \xi(t, x)\,\delta p \tag{21}$$

ist, wenn:

$$\varphi_p{}'(t, x, p_0) \equiv \tau(t, x) \,, \quad \psi_p{}'(t, x, p_0) \equiv \xi(t, x) \tag{22}$$

gesetzt wird.

In den Gleichungen (21), welche die infinitesimale Transformation definieren, darf δp durch $\varkappa . \delta p$ ersetzt werden, wenn $\varkappa$ eine von Null verschiedene Konstante bedeutet, ohne daß an der Gruppe $\mathfrak{G}$ selbst etwas Wesentliches geändert wird. Betrachtet man zwei in dieser Weise voneinander abhängige infinitesimale Transformationen als identisch, so enthält jede eingliedrige Gruppe nur eine einzige infinitesimale Transformation. Umgekehrt *erzeugt* jede beliebige infinitesimale Transformation (21) eine bestimmte eingliedrige Gruppe; die endlichen Gleichungen (6) derselben werden durch Integration des simultanen Systems:

$$\frac{dt'}{\tau(t', x')} = \frac{dx'}{\xi(t', x')} = dp \tag{23}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$t' = t, \quad x' = x \quad \text{für} \quad p = p_0 \tag{24}$$

gefunden.

6. Denkt man sich nun x als Funktion von t:

$$x = f(t), \tag{25}$$

so erhält man eine Kurve Γ in der t, x-Ebene; diese geht mittels der Transformation (6) in eine andere Kurve Γ' mit der Gleichung:

$$x' = f_1(t') \tag{26}$$

über. Setzt man:

$$w = \frac{dx}{dt} = f'(t), \qquad w' = \frac{dx'}{dt'} = f_1'(t'), \tag{27}$$

so ist:

$$w' = \frac{\psi_t'(t, x, p) + \psi_x'(t, x, p) \,.\, w}{\varphi_t'(t, x, p) + \varphi'_x(t, x, p) \,.\, w}, \tag{28}$$

wofür zur Abkürzung:

$$w' = \chi(t, x, w, p) \tag{29}$$

geschrieben werden soll, die zu (6) gehörige Transformation von w. Für $p = p_0$ erhält man wegen (14):

$$\begin{cases} \varphi_t'(t, x, p_0) \equiv 1, & \varphi_x'(t, x, p_0) \equiv 0, \\ \psi_t'(t, x, p_0) \equiv 0, & \psi_x'(t, x, p_0) \equiv 1, \end{cases} \tag{30}$$

also:

$$\chi(t, x, w, p_0) \equiv w, \tag{31}$$

d. h.:

$$w' = w. \tag{32}$$

Für $p = p_0 + \delta p$ wird:

$$w' = w + \delta w \tag{33}$$

und man bekommt für die infinitesimale Transformation von w:

$$\delta w = [\xi_t' + (\xi_x' - \tau_t')\, w - \tau_x' \, w^2]\, \delta p \tag{34}$$

oder kürzer:

$$\delta w = \eta(t, x, w) \,.\, \delta p. \tag{35}$$

Die Gleichungen (6) und (28) zusammen stellen wieder eine eingliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_1$ von Transformationen dar, welche die Veränderlichen t, x, w in t', x', w' überführen. Diese Gruppe $\mathfrak{G}_1$ heißt die *erste erweiterte Gruppe*; ihre infinitesimale Transformation ist durch die Gleichungen (21) und (34) gegeben und aus derselben findet man die endlichen Gleichungen (6) und (28) der Gruppe durch Integration des simultanen Systems:

$$\frac{dt'}{\tau(t', x')} = \frac{dx'}{\xi(t', x')} = \frac{dw'}{\eta(t', x', w')} = dp \tag{36}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$t' = t, \quad x' = x, \quad w' = w \text{ für } p = p_0. \tag{37}$$

II.

7. Wir wählen nun ein Koordinatensystem S, bestehend aus einer festen Geraden, der x-Achse, und einem festen Punkt O, dem Ursprung, auf derselben. Auf der x-Achse denken wir uns einen festen *Maßstab* mit dem Nullpunkte O und in jedem Punkt des Maßstabes eine *Uhr* angebracht.

Betrachten wir dann die *Bewegung* eines materiellen Punktes M längs der x-Achse, so entspricht jeder Lage desselben ein bestimmtes Wertepaar t, x, nämlich eine bestimmte *Zeigerstellung* derjenigen Uhr, welche zu dem Punkte der x-Achse gehört, mit welchem M zusammenfällt, und ein bestimmter *Teilstrich* des Maßstabes. Jede bestimmte Bewegung wird durch eine bestimmte Gleichung (25) dargestellt und die *Geschwindigkeit* w ist dann durch die erste der Gleichungen (27) gegeben.

Deuten wir die Größen t, x als Koordinaten eines Punktes P der t, x-Ebene, so entspricht jeder Lage von M ein bestimmter Punkt P, welcher der zu dieser Lage gehörige *Raumzeitpunkt* heißt; t, x nennen wir die im *System S gemessenen Raumzeitkoordinaten.* Die ganze Bewegung von M wird dargestellt durch eine kontinuierliche Folge von Raumzeitpunkten, d. h. durch eine Kurve Γ, deren Gleichung (25) ist und welche die zu dieser Bewegung gehörige *Zeitwegkurve* heißt. Die Geschwindigkeit w im Zeitpunkte t ist gleich dem Richtungskoeffizienten der Tangente der Zeitwegkurve im Raumzeitpunkte P. Die einer gleichförmigen Bewegung von M entsprechende Zeitwegkurve ist eine Gerade.

8. Neben dem System S betrachten wir auf derselben Geraden noch eine einfach-unendliche Schar von anderen Systemen S' (d. h. von anderen Längen- und Zeitmessungen), deren jedes einem bestimmten Werte eines Parameters p in der Weise zugeordnet ist, daß verschiedenen Werten von p verschiedene Systeme S' entsprechen. Ein beliebiger Raumzeitpunkt P, der im System S die Raumzeitkoordinaten t, x besitzt, soll dann auch in jedem der Systeme S' bestimmte Raumzeitkoordinaten t', x' besitzen, welche nur von t, x und p abhängen, d. h. die Raumzeitkoordinaten t, x und t', x' von P in bezug auf S und S' sollen durch Gleichungen von der Form (6) zusammenhängen. Die Größen t', x' heißen die *im Systeme S' gemessenen Raumzeitkoordinaten* von P. Den unendlich vielen Werten von p entsprechend sind also jedem Raumzeitpunke unendlich viele Wertepaare t', x' zugeordnet, welche aus t, x durch eine eingliedrige Schar $\mathfrak{S}$ von Transformationen (6) hervorgehen.[1])

Wenn wir zwei Transformationen der Schar $\mathfrak{S}$ nacheinander ausführen, indem wir durch die Transformationsgleichungen (6) von dem Systeme S zu einem zweiten Systeme S' und von diesem wieder durch die Gleichungen (7) zu einem dritten Systeme S'' übergehen, so soll das Produkt beider Transformationen, d. h. die Transformation (8), welche direkt den Übergang von S zu S'' vermittelt, ebenfalls der Schar $\mathfrak{S}$ angehören, d. h. die Schar $\mathfrak{S}$ soll die *Gruppeneigenschaft* besitzen.

Ferner nehmen wir an, daß unter den Systemen S' auch das ursprüngliche System S selbst vorkommt; ist dann demselben der Parameterwert p_0 zugeordnet, so müssen die Gleichungen (6) für $p = p_0$ in die Gleichungen (15) übergehen, d. h. die Schar $\mathfrak{S}$ muß die *identische Transformation* enthalten.

Schließlich setzen wir voraus, daß es in der Schar $\mathfrak{S}$ zu jeder Transformation die *inverse* gibt, also zu jedem Parameter-

1) Der Schluß des Abschnittes II von hier an ist zum Verständnis des Gedankenganges der Arbeit nicht notwendig und dient nur dazu, unsere Forderung A. plausibel zu machen.

wert p einen zweiten $\bar{p}$ von der Art, daß p und $\bar{p}$ der Gleichung (18) genügen. Dann bilden die Transformationen der Schar $\mathfrak{S}$ eine eingliedrige *Gruppe* $\mathfrak{G}$ und wir können die obigen drei Annahmen in eine zusammenfassen, indem wir voraussetzen:

Die Transformationen (6), welche den Übergang von den im ursprünglichen Systeme S gemessenen Raumzeitkoordinaten t, x zu den in einem Systeme S' gemessenen Raumzeitkoordinaten t', x' vermitteln, bilden eine eingliedrige Gruppe mit dem Parameter p.

9. Um die Gruppe $\mathfrak{G}$ näher zu bestimmen, machen wir nun weiter folgende Annahmen:

A. Jede Bewegung eines materiellen Punktes M, welche in bezug auf das ruhende System S eine *gleichförmige* ist, soll auch in bezug auf jedes der bewegten Systeme S' eine gleichförmige sein. Wenn also die Zeitwegkurve Γ einer Bewegung von M in bezug auf S eine *Gerade* ist, so muß auch die Zeitwegkurve Γ' derselben Bewegung in bezug auf S' eine Gerade sein, d. h. die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ müssen so beschaffen sein, daß sie Gerade wieder in Gerade überführen. Die einzigen Transformationen dieser Art sind aber die *projektiven*[1]), d. h. diejenigen, deren Gleichungen (6) die folgende spezielle Form haben:

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} t' &= \frac{a_{11}(p)\,t + a_{12}(p)\,x + a_{13}(p)}{a_{31}(p)\,t + a_{32}(p)\,x + a_{33}(p)}\,, \\ x' &= \frac{a_{21}(p)\,t + a_{22}(p)\,x + a_{23}(p)}{a_{31}(p)\,t + a_{32}(p)\,x + a_{33}(p)}\,. \end{aligned}\right.$$

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ wird dann als *eingliedrige projektive Gruppe* bezeichnet.

B. Jeder Raumzeitpunkt, der in bezug auf das System S *endliche* Koordinaten t, x hat, soll auch in bezug auf jedes System S' endliche Koordinaten t', x' haben. Daraus folgt[2]), daß in den Gleichungen (38):

$$(39)\qquad a_{31}(p) \equiv 0\,, \quad a_{32}(p) \equiv 0$$

sein muß, wodurch dieselben, wenn wir:

$$(40)\qquad \frac{a_{ik}(p)}{a_{33}(p)} \quad (i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3)$$

1) S. Lie u. G. Scheffers, l. c. p. 32. Theorem 2.

2) l. c. p. 57 u. 58. Satz 11.

wieder mit $a_{ik}(p)$ bezeichnen, die Form:

$$(41)\qquad \begin{cases} t' = a_{11}(p)t + a_{12}(p)x + a_{13}(p), \\ x' = a_{21}(p)t + a_{22}(p)x + a_{23}(p) \end{cases}$$

annehmen. Die Transformationen (41) lassen die unendlich ferne Gerade der t, x-Ebene invariant und werden als *affine* bezeichnet; die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt dann *affin* oder *allgemein linear.*

C. Schließlich soll der *Nullpunkt* der Raumzeitmessung in allen Systemen derselbe sein, d. h. aus:

$$t = 0, \quad x = 0$$

soll immer:

$$t' = 0, \quad x' = 0$$

folgen. Dann muß:

$$(42)\qquad a_{13}(p) \equiv 0, \quad a_{23}(p) \equiv 0$$

sein, so daß die Gleichungen (41) in die folgenden:

$$(43)\qquad t' = a_{11}(p)t + a_{12}(p)x, \quad x' = a_{21}(p)t + a_{22}(p)x$$

übergehen. Nunmehr sind also t', x' lineare homogene Funktionen von t, x mit Koeffizienten, die bloß Funktionen des Parameters p sind. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ wird nun als eine *eingliedrige lineare homogene Gruppe* bezeichnet und ihre Transformationen lassen die unendlich ferne Gerade der t, x-Ebene und überdies den Nullpunkt derselben invariant.[1])

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß die Koeffizienten $a_{ik}(p)$ nicht beliebig gewählt werden dürfen, sondern gewissen Bedingungen unterliegen, wenn die Transformationen eine Gruppe bilden sollen. Die Bestimmung der Gestalt dieser Koeffizienten wird uns im folgenden beschäftigen.

III.

10. Alle Voraussetzungen, welche wir über die Transformationen (6) gemacht haben, können wir nunmehr folgendermaßen zusammenfassen:

Die Transformationen (6), welche den Zusammenhang zwischen den Raumzeitkoordinaten in bezug auf das ursprüngliche System S und ein System S' darstellen, bilden eine eingliedrige lineare homogene Gruppe mit dem Parameter p.

---

1) S. Lie u. G. Scheffers, l. c. p. 134.

Damit die Gleichungen (43) für den Parameterwert $p = p_0$ in die Gleichungen (15), welche die identische Transformation darstellen, übergehen, muß:

$$(44) \qquad \begin{cases} a_{11}(p_0) = 1, & a_{12}(p_0) = 0, \\ a_{21}(p_0) = 0, & a_{22}(p_0) = 1 \end{cases}$$

sein. Für den Parameterwert $p = p_0 + \delta p$ bekommen wir daher die Koeffizienten:

$$(45) \qquad \begin{cases} a_{11}(p_0 + \delta p) = 1 + a_{11}'(p_0)\,\delta p, \\ a_{21}(p_0 + \delta p) = a_{21}'(p_0)\,\delta p, \\ a_{12}(p_0 + \delta p) = a_{12}'(p_0)\,\delta p, \\ a_{22}(p_0 + \delta p) = 1 + a_{22}'(p_0)\,\delta p, \end{cases}$$

und daraus folgen, wenn wir noch:

$$(46) \qquad \begin{cases} a_{11}'(p_0) = \alpha_{11}, & a_{12}'(p_0) = \alpha_{12}, \\ a_{21}'(p_0) = \alpha_{21}, & a_{22}'(p_0) = \alpha_{22} \end{cases}$$

setzen, die Gleichungen für die infinitesimale Transformation [vgl. Nr. 5, Gleichung (19), (20), (21) und (22)] in der Form:

$$(47) \qquad \delta t = (\alpha_{11}\, t + \alpha_{12}\, x)\,\delta p, \qquad \delta x = (\alpha_{21}\, t + \alpha_{22}\, x)\,\delta p,$$

so daß für die lineare homogene Gruppe (43):

$$(48) \qquad \tau(t, x) \equiv \alpha_{11}\, t + \alpha_{12}\, x, \qquad \xi(t, x) \equiv \alpha_{21}\, t + \alpha_{22}\, x$$

ist. Die Koeffizienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ können beliebig gewählt werden, aber nur ihre Verhältnisse sind wesentlich; es gibt also ∞^3 infinitesimale Transformationen (47), und jede derselben erzeugt eine bestimmte eingliedrige lineare homogene Gruppe (43).

11. Betrachten wir nun eine bestimmte Transformation von $\mathfrak{G}$, d. h. erteilen wir dem Parameter p irgend einen festen Wert, so erhalten wir durch Differentiation der Gleichungen (43) die Gleichungen:

$$(49) \qquad dt' = a_{11}(p)\,.\,dt + a_{12}(p)\,.\,dx, \qquad dx' = a_{21}(p)\,.\,dt + a_{22}(p)\,.\,dx,$$

aus denen hervorgeht, daß sich die Differentiale dt, dx ebenso transformieren wie die endlichen Größen t, x, daß also die beiden Größenpaare t, x und dt, dx *kogrediente* Transformationen (43) und (49) erleiden.

Aus den Gleichungen (49) folgt:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{a_{21}(p).dt + a_{22}(p).dx}{a_{11}(p).dt + a_{12}(p).dx} \tag{50}$$

und somit wegen (27):

$$w' = \frac{a_{21}(p) + a_{22}(p).w}{a_{11}(p) + a_{12}(p).w} \tag{51}$$

Diese Gleichung, welche die Transformation der Geschwindigkeit w in w' angibt, tritt jetzt an Stelle der Gleichung (28) und stellt mit den Gleichungen (43) die erste erweiterte Gruppe $\mathfrak{G}_1$ dar. Von besonderer Wichtigkeit ist der Umstand, daß im Falle der linearen Gruppe w' bloß eine Funktion von w und p ist, dagegen von t und x nicht abhängt.

Die infinitesimale Transformation der Geschwindigkeit w bekommen wir schließlich nach (34) und (48) in der Form:

$$\delta w = -[-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w + \alpha_{12}w^2]\,\delta p, \tag{52}$$

woraus zu entnehmen ist, daß die Funktion $\eta(t, x, w)$ in (35) nunmehr die Größen t und x nicht enthält. Durch diese infinitesimale Transformation wird die Geschwindigkeit w nach (33) in $w' = w + \delta w$ übergeführt und bleibt somit dann und nur dann ungeändert, wenn:

$$\delta w = 0 \tag{53}$$

ist. Dies tritt für jene Geschwindigkeiten ein, welche Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w + \alpha_{12}w^2 = 0 \tag{54}$$

sind; dieselben bleiben bei der infinitesimalen Transformation und daher auch, wie wir übrigens noch direkt zeigen werden (am Schlusse von Nr. 12), bei jeder endlichen Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ ungeändert. Wir nennen sie im folgenden die *ausgezeichneten* Geschwindigkeiten und setzen voraus:

Die Geschwindigkeit $w = 0$ *(d. i. diejenige im Falle der Ruhe) soll keine ausgezeichnete Geschwindigkeit sein,*

woraus folgt, daß:

$$\alpha_{21} \neq 0 \tag{55}$$

sein muß.

Durch die Voraussetzung (55) ist zunächst der Fall:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,$$

in welchem die Gleichung (54) identisch erfüllt und somit *jede* Geschwindigkeit w eine ausgezeichnete wäre, ausgeschlossen. In jedem anderen Falle haben wir aber nur zwei ausgezeichnete Geschwindigkeiten, die wir mit c_1 und c_2 bezeichnen wollen, nämlich:

$$(56) \qquad c_1 = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11} + \sqrt{\theta}}{2\,\alpha_{12}}, \quad c_2 = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11} - \sqrt{\theta}}{2\,\alpha_{12}},$$

wobei:

$$(57) \qquad \theta = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}$$

ist. Die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln c_1 und c_2 sind:

$$(58) \qquad c_1 + c_2 = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{\alpha_{12}}, \quad c_1\,c_2 = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}},$$

und mittels dieser Beziehungen kann man die infinitesimale Transformation (52) leicht auf die Form:

$$(59) \qquad \delta w = \alpha_{21}\left(1 - \frac{w}{c_1}\right)\left(1 - \frac{w}{c_2}\right)\delta p$$

bringen, in welcher die Bedeutung von c_1 und c_2 als ausgezeichnete Geschwindigkeiten direkt ersichtlich ist.

IV.

12. Um nun die endlichen Gleichungen (43) und (51) der erweiterten Gruppe $\mathfrak{G}_1$, welche durch ihre infinitesimale Transformation (47) und (52) erzeugt wird, zu finden, hätten wir nach Nr. 6 (36) das simultane System:

$$(60) \quad \frac{dt'}{\alpha_{11}\,t' + \alpha_{12}\,x'} = \frac{dx'}{\alpha_{21}\,t' + \alpha_{22}\,x'} = \frac{dw'}{-[-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w' + \alpha_{12}\,w'^2]} = dp$$

mit den Anfangsbedingungen (37) zu integrieren. Wir wollen indessen auf diesem Wege nur die Gleichung (51) für die Transformation der Geschwindigkeit w bestimmen, indem wir von dem Umstande Gebrauch machen, daß w' nur von w und p, nicht aber von t und x abhängt, so daß wir die in dem System (60) enthaltene Gleichung:

$$(61) \qquad \frac{dw'}{-[-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\,w' + \alpha_{12}\,w'^2]} = dp$$

mit der Anfangsbedingung:

$$(62) \qquad w' = w \text{ für } p = p_0$$

losgelöst von demselben direkt integrieren können. Wir bekommen zunächst:

(63)
$$\int_{w}^{w'} \frac{dw'}{-\left[-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, w' + \alpha_{12}\, w'^2\right]} = \int_{p_0}^{p} dp,$$

und daher, wenn wir die Integrale auswerten und beachten, daß die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten c_1 und c_2 die beiden Nullstellen des Nenners im ersten Integral von (63) sind:

(64)
$$\frac{1}{\sqrt{\theta}} \log \operatorname{nat} (c_1, c_2, w, w') = p - p_0,$$

wobei unter (c_1, c_2, w, w') das *Doppelverhältnis* der vier Werte c_1, c_2, w, w', d. h. der Ausdruck:

(65)
$$(c_1, c_2, w, w') = \frac{(c_1 - w)(c_2 - w')}{(c_2 - w)(c_1 - w')}$$

verstanden ist. Aus (64) folgt schließlich:

(66)
$$(c_1, c_2, w, w') = e^{\sqrt{\theta} \cdot (p - p_0)}$$

und daraus findet man durch Auflösen nach w':

(67)
$$w' = \frac{c_1 c_2 \left[1 - e^{\sqrt{\theta}(p - p_0)}\right] - \left[c_2 - c_1 e^{\sqrt{\theta}(p - p_0)}\right] . w}{\left[c_1 - c_2 e^{\sqrt{\theta}(p - p_0)}\right] - \left[1 - e^{\sqrt{\theta}(p - p_0)}\right] . w},$$

womit die endliche Gleichung für die Transformation der Geschwindigkeit [vgl. (28) und (51)] gefunden ist. In (67) können c_1 und c_2 noch durch ihre Werte (56) ersetzt werden.[1])

Aus der Gleichung (67) ist endlich auch zu ersehen, daß die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten c_1 und c_2 tatsächlich bei jeder endlichen Transformation der Gruppe ungeändert bleiben, also in bezug auf jedes System S' dieselben Werte haben, denn setzt man:

$$w = \begin{cases} c_1 \\ c_2 \end{cases},$$

so folgt:

$$w' = \begin{cases} c_1 \\ c_2 \end{cases} = w$$

für jeden Wert des Parameters p (vgl. Nr. 11).

---

1) Man beachte, daß die Gleichungen (64), (66) und (67) von dem *Vorzeichen*, welches der Größe $\sqrt{\theta}$ beigelegt wird, unabhängig sind. Ersetzt man nämlich $\sqrt{\theta}$ durch $-\sqrt{\theta}$, so werden nach (56) gleichzeitig die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten c_1 und c_2 untereinander vertauscht und die Gleichungen bleiben ungeändert.

13. Die Systeme S', die wir in II., Nr. 8 eingeführt haben, wollen wir nun als solche betrachten, welche sich in bezug auf das ursprüngliche System S, das wir als *ruhend* bezeichnen, mit verschiedenen *konstanten Geschwindigkeiten* q bewegen. Dann ist jedem System S' sowohl ein bestimmter Parameterwert p, als auch eine bestimmte Geschwindigkeit q zugeordnet, woraus folgt, daß zwischen p und q eine Relation bestehen muß, welcher wir die Form:

$$p = F(q) \tag{68}$$

geben können, so daß der Parameter p als Funktion der Geschwindigkeit q erscheint.

Führen wir in den Gleichungen (43) und (51) mittels der Gleichung (68) statt des Parameters p die Geschwindigkeit q ein, so wird an der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ nichts Wesentliches geändert; q kann dann als neuer Parameter der Gruppe betrachtet werden.

Um die Geschwindigkeit q zu definieren und damit auch die Gestalt der Funktion $F(q)$ zu bestimmen, stellen wir die folgende Forderung auf:

Wenn sich ein materieller Punkt M in bezug auf das ruhende System S mit der Geschwindigkeit $w = q$ bewegt, so soll er in bezug auf ein mit der Geschwindigkeit q gegen S gleichförmig bewegtes System S' die Geschwindigkeit $w' = 0$ haben.

Diese Forderung besagt, daß das Wertepaar:

$$w = q\,, \quad w' = 0 \tag{69}$$

der Gleichung (64) genügen soll, so daß also:

$$p - p_0 = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \log\operatorname{nat}(c_1, c_2, q, 0) \tag{70}$$

ist. Daraus finden wir für die gesuchte Funktion $F(q)$:

$$p = F(q) = p_0 + \frac{1}{\sqrt{\theta}} \log\operatorname{nat} \frac{c_2(c_1 - q)}{c_1(c_2 - q)} \tag{71}$$

und erhalten durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (67) die Transformationsgleichung für die Geschwindigkeit w in der Form:

$$w' = \frac{c_1 c_2 (w - q)}{c_1 c_2 - (c_1 + c_2) q + q w}\,, \tag{72}$$

oder schließlich nach (58):

$$w' = \frac{-\alpha_{21}(w-q)}{-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\,q + \alpha_{12}\,q\,w} \tag{73}$$

Ferner folgt aus (71), daß dem Parameterwert p_0 der identischen Transformation der Wert Null der Geschwindigkeit q entspricht, daß also das ruhende System S als dasjenige unter den Systemen S' zu betrachten ist, welches sich mit der Geschwindigkeit $q = 0$ bewegt.

14. Betrachten wir von nun an die Geschwindigkeit q als den Parameter unserer Gruppe und setzen wir:

$$a_{ik}\left(F(q)\right) \equiv b_{ik}(q), \quad (i, k = 1, 2), \tag{74}$$

so erhalten wir an Stelle von (43) und (51) die Gleichungen:

$$t' = b_{11}(q) \cdot t + b_{12}(q) \cdot x, \quad x' = b_{21}(q) \cdot t + b_{22}(q) \cdot x \tag{43a}$$

und:

$$w' = \frac{b_{21}(q) + b_{22}(q) \cdot w}{b_{11}(q) + b_{12}(q) \cdot w}, \tag{51a}$$

welche jetzt die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ definieren. Setzt man in der Gleichung (51a) $w = q$, so muß $w' = 0$ werden, und zwar für jeden Wert von q, woraus die Identität:

$$b_{21}(q) + q \cdot b_{22}(q) \equiv 0 \tag{75}$$

folgt.

Legen wir nunmehr die neuen Gleichungen (43a) und (51a) für die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ zugrunde, so liefert der Wert $q = 0$ die *identische* und daher der Wert $q = \delta q$ ihre *infinitesimale* Transformation. Dieselbe dürfen wir auch jetzt noch als durch die Gleichungen (47) gegeben ansehen, denn durch Einführung des neuen Parameters q können zwar die Werte der Koeffizienten α_{ik} selbst, nicht aber deren Verhältnisse — und nur diese sind ja wesentlich — geändert werden.

Durch unsere *Normierung* des Parameters der Gruppe erhalten jetzt auch die Koeffizienten α_{ik} selbst bestimmte Werte, während bisher nur ihre Verhältnisse bestimmt waren. In der Tat ist ja nach (45) und (46):

$$b_{21}(\delta q) = \alpha_{21}\,\delta q, \quad b_{22}(\delta q) = 1 + \alpha_{22}\,\delta q,$$

und daher bekommen wir, wenn wir in der Identität (75)

$q = \delta q$ setzen und Glieder, die in δq von zweiter Ordnung sind, weglassen:

$$(\alpha_{21} + 1)\,\delta q = 0,$$

d. h.:

(76) $$\alpha_{21} = -1,$$

da $\delta q \neq 0$ ist. Dadurch ist also der Koeffizient α_{21}, der bisher nur an die Ungleichung (55) gebunden war, genau bestimmt.

Nach (44) und (46) bekommen wir ferner für die neuen Koeffizienten $b_{ik}(q)$ in (43a) und (51a) die Gleichungen:

(44a) $$\begin{cases} b_{11}(0) = 1, & b_{12}(0) = 0, \\ b_{21}(0) = 0, & b_{22}(0) = 1 \end{cases}$$

und:

(46a) $$\begin{cases} b_{11}'(0) = \alpha_{11}, & b_{12}'(0) = \alpha_{12}, \\ b_{21}'(0) = -1, & b_{22}'(0) = \alpha_{22}. \end{cases}$$

Setzen wir endlich den Wert (76) in die Gleichungen (47) und (52) ein, so erhalten wir für die infinitesimale Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$:

(47a) $$\delta t = (\alpha_{11}\,t + \alpha_{12}\,x)\,\delta q, \quad \delta x = (-t + \alpha_{22}\,x)\,\delta q$$

und für die infinitesimale Transformation der Geschwindigkeit w:

(52a) $$\delta w = -\left[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\,w + \alpha_{12}\,w^2\right]\delta q,$$

oder nach (59):

(59a) $$\delta w = -\left(1 - \frac{w}{c_1}\right)\left(1 - \frac{w}{c_2}\right)\delta q.$$

Die endliche Gleichung (73) für die Transformation der Geschwindigkeit w geht über in:

(73a) $$w' = \frac{w - q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\,q + \alpha_{12}\,q\,w}$$

und aus (57) wird schließlich:

(57a) $$\theta = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 - 4\,\alpha_{12}.$$

15. Setzen wir die Transformation (73a), die zum Parameterwert q gehört und w in w' überführt, mit einer zweiten Transformation derselben Art:

(77) $$w'' = \frac{w' - q'}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\,q' + \alpha_{12}\,q'\,w'},$$

welche zu einem Parameterwert q' gehört und w' in w'' überführt, zusammen, so folgt aus der Gruppeneigenschaft unserer Transformationen, daß die resultierende Transformation, welche w direkt in w'' überführt, die Form:

$$w'' = \frac{w - q''}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q'' + \alpha_{12}\, q''\, w} \tag{78}$$

haben muß, wobei der Parameterwert q'' nach (13) eine Funktion von q und q' ist.

Um diese Funktion in unserem Falle zu bestimmen, brauchen wir nur die Zusammensetzung der beiden Transformationen (73a) und (77) wirklich auszuführen. Wir bekommen dann:

$$\left\{\begin{aligned} w'' &= \frac{\dfrac{w - q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q + \alpha_{12}\, q\, w} - q'}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q' + \dfrac{\alpha_{12}\, q'\, (w - q)}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q + \alpha_{12}\, q\, w}} \\ &= \frac{w - \dfrac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q\, q'}{1 - \alpha_{12}\, q\, q'}}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\dfrac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q\, q'}{1 - \alpha_{12}\, q\, q'} + \alpha_{12}\dfrac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q\, q'}{1 - \alpha_{12}\, q\, q'}\, w}, \end{aligned}\right. \tag{79}$$

und daraus folgt durch Vergleichung mit (78):

$$q'' = \frac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q\, q'}{1 - \alpha_{12}\, q\, q'}. \tag{80}$$

Diese Gleichung, durch welche nunmehr die *Parametergruppe* $\mathfrak{P}$ unserer Gruppe $\mathfrak{G}$ (und $\mathfrak{G}_1$) gegeben ist[1]), drückt das *Additionstheorem der Geschwindigkeiten* q aus, indem q'' die auf das ruhende System S bezogene Geschwindigkeit eines Systems S'' bedeutet, welches sich mit der Geschwindigkeit q' in bezug auf ein System S' bewegt, welches selbst wieder in bezug auf das ruhende System S die Geschwindigkeit q besitzt.

Soll schließlich die Gleichung (77) die *inverse* Transformation von (73a) darstellen, also:

$$w'' = w$$

---

1) Behält man den ursprünglichen Parameter p der Gruppe bei, wie er z. B. in (67) vorkommt, so lautet die Gleichung (13) der Parametergruppe:

$$p'' = p + p' - p_0 .$$

sein, so muß die resultierende Transformation (78) die identische und daher $q'' = 0$ sein. Dann folgt aber aus (80), wenn wir den Parameterwert der inversen Transformation von (73a) mit $\bar{q}$ bezeichnen:

(81) $$q + \bar{q} + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q \bar{q} = 0$$

und somit:

(82) $$\bar{q} = \frac{-q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q}.$$

Setzt man diesen Wert an Stelle von q' in (77) ein, so bekommt man für die inverse Transformation von (73a) die Gleichung:

(83) $$w = \frac{q + w' + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q w'}{1 - \alpha_{12} q w'},$$

die man auch direkt durch Auflösen von (73a) nach w erhalten kann.

Die Formel (83) zeigt, daß w aus q und w' in genau derselben Weise gefunden wird wie q'' aus q und q' — eine Analogie, die sich ohne weiteres aus der kinematischen Bedeutung der beiden Gleichungen (80) und (83) erklärt.

V.

16. Ehe wir die endlichen Gleichungen (43a) der Gruppe $\mathfrak{G}$ im allgemeinen Falle aufstellen, wollen wir als *Beispiele* zu den bisherigen Entwickelungen die beiden anfangs genannten speziellen eingliedrigen linearen homogenen Gruppen (2) und (1) der *Galilei*- und der *Lorentztransformationen* näher betrachten.

Die Koeffizienten $b_{ik}(q)$ der Gruppe (2) der *Galileitransformationen* sind:

(84) $$\begin{cases} b_{11}(q) \equiv 1, & b_{12}(q) \equiv 0, \\ b_{21}(q) \equiv -q, & b_{22}(q) \equiv 1; \end{cases}$$

daraus bekommen wir für $q = 0$:

(44b) $$\begin{cases} b_{11}(0) = 1, & b_{12}(0) = 0, \\ b_{21}(0) = 0, & b_{22}(0) = 1, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (44a). Ferner folgt aus (84):

(85) $$\begin{cases} b_{11}'(q) \equiv 0, & b_{12}'(q) \equiv 0, \\ b_{21}'(q) \equiv -1, & b_{22}'(q) \equiv 0, \end{cases}$$

und daher nach (46a):

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_{11} = b_{11}'(0) = 0\,, & \alpha_{12} = b_{12}'(0) = 0\,, \\ \alpha_{21} = b_{21}'(0) = -1\,, & \alpha_{22} = b_{22}'(0) = 0\,, \end{array}\right. \tag{46b}$$

so daß die Gleichung (76) erfüllt ist. Für die infinitesimale Transformation (47a) und (52a) ergibt sich somit:

$$\delta t = 0\,, \quad \delta x = -\,t\,\delta q \tag{47b}$$

und:

$$\delta w = -\,\delta q\,; \tag{52b}$$

endlich bekommen wir nach (57a):

$$\theta = 0\,, \tag{57b}$$

so daß die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten c_1, c_2 einander gleich werden, und zwar insbesondere:

$$c_1 = c_2 = \infty\,, \tag{86}$$

während die endliche Gleichung (73a) für die Transformation der Geschwindigkeit in:

$$w' = w - q \tag{73b}$$

übergeht.

Für die Gruppe (1) der *Lorentztransformationen* sind die Koeffizienten $b_{ik}(q)$ durch:

$$\left\{\begin{array}{ll} b_{11}(q) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{c^2}}}\,, & b_{12}(q) \equiv \dfrac{-\dfrac{q}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{c^2}}}\,, \\[3ex] b_{21}(q) \equiv \dfrac{-q}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{c^2}}}\,, & b_{22}(q) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{c^2}}} \end{array}\right. \tag{87}$$

gegeben, woraus für $q = 0$ wieder die Gleichungen (44a) entstehen. Für die Ableitungen $b_{ik}'(q)$ dieser Koeffizienten finden wir:

$$\left\{\begin{array}{ll} b_{11}'(q) \equiv \dfrac{\dfrac{q}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,, & b_{12}'(q) \equiv \dfrac{-\dfrac{1}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,, \\[3ex] b_{21}'(q) \equiv \dfrac{-1}{\left(1 - \dfrac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,, & b_{22}'(q) \equiv \dfrac{\dfrac{q}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,, \end{array}\right. \tag{88}$$

und daraus folgt nach (46a):

$$(46\text{c})\qquad \begin{cases} \alpha_{11} = b_{11}'(0) = 0\,, & \alpha_{12} = b_{12}'(0) = -\dfrac{1}{c^2}\,, \\ \alpha_{21} = b_{21}'(0) = -1\,, & \alpha_{22} = b_{22}'(0) = 0\,, \end{cases}$$

wobei wieder die Gleichung (76) erfüllt ist. Die Gleichungen (47a) und (52a) für die infinitesimale Transformation gehen nunmehr in:

$$(47\text{c})\qquad \delta t = -\frac{x}{c^2}\,\delta q\,,\quad \delta x = -t\,\delta q\,,$$

und:

$$(52\text{c})\qquad \delta w = -\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)\delta q$$

über, so daß wir für die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten c_1, c_2 die Werte:

$$(89)\qquad c_1 = -c\,,\quad c_2 = +c$$

erhalten, während nach (57a):

$$(57\text{c})\qquad \theta = \frac{4}{c^2}$$

wird. Schließlich bekommen wir aus (73a) für die Transformation der Geschwindigkeit w die endliche Gleichung:

$$(73\text{a})\qquad w' = \frac{w-q}{1-\dfrac{q}{c^2}\,w}\,.$$

VI.

17. Nunmehr gehen wir an die Aufstellung der allgemeinen Gleichungen der eingliedrigen linearen homogenen Gruppe $\mathfrak{G}$, d. h. an die Bestimmung der Koeffizienten $b_{ik}(q)$ in (43a).

Durch Vergleichung der beiden Gleichungen (51a) und (73a), die ja miteinander übereinstimmen müssen, folgt, daß die vier Koeffizienten:

$$(90)\qquad \begin{cases} b_{11}(q)\,, & b_{12}(q)\,, \\ b_{21}(q)\,, & b_{22}(q) \end{cases}$$

den vier Größen:

$$(91)\qquad \begin{cases} 1+(\alpha_{11}-\alpha_{22})\,q\,, & \alpha_{12}\,q\,, \\ -q\,, & 1 \end{cases}$$

proportional sein müssen, wobei der noch zu bestimmende

Proportionalitätsfaktor nur eine Funktion von q allein sein kann, die wir mit $\omega(q)$ bezeichnen wollen, so daß also:

$$(92)\quad \begin{cases} b_{11}(q) \equiv \omega(q) \cdot [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q], & b_{12}(q) \equiv \omega(q) \cdot \alpha_{12} q, \\ b_{21}(q) \equiv \omega(q) \cdot (-q), & b_{22}(q) \equiv \omega(q) \end{cases}$$

ist, wodurch übrigens auch die Identität (75) erfüllt ist. Durch Einsetzen der Werte (92) in die Gleichungen (43a) bekommen wir dieselben in der Form:

$$(93)\quad \begin{cases} t' = \omega(q)\{[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q] t + \alpha_{12} q x\}, \\ x' = \omega(q)\{-q t + x\}, \end{cases}$$

wo die Funktion $\omega(q)$ noch unbekannt ist.

18. Mittels der Gleichungen (93) können wir die kinematische Bedeutung des Faktors $\omega(q)$ angeben, noch ehe wir seine Gestalt bestimmt haben. Betrachten wir nämlich einen materiellen Punkt M, der sich auf der x-Achse mit einer konstanten Geschwindigkeit w in bezug auf das System S bewegt und sich zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $x = a$ desselben befindet, so ist seine Bewegung in bezug auf S durch die Gleichung:

$$(94)\qquad x = a + w t$$

gegeben. Um nun die Bewegungsgleichung von M in bezug auf ein gegen S mit der Geschwindigkeit q bewegtes System S' zu finden, lösen wir die Gleichungen (93) nach t und x auf, wodurch wir die Gleichungen:

$$(95)\quad \begin{cases} t = \dfrac{t' - \alpha_{12} q x'}{\omega(q)[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2]}, \\ x = \dfrac{q t' + [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q] x'}{\omega(q)[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2]} \end{cases}$$

für die inverse Transformation von (92) finden, und setzen die gefundenen Ausdrücke (95) in (94) ein. Dadurch bekommen wir zunächst:

$$\begin{aligned} & q t' + [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q] x' \\ & \quad = a [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2] \omega(q) + w t' - \alpha_{12} q w x', \end{aligned}$$

also, wenn wir diese Gleichung nach x auflösen:

$$(96)\quad \begin{cases} x' = a \dfrac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q w} \cdot \omega(q) \\ \qquad + \dfrac{w - q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q w} t', \end{cases}$$

oder:

$$x' = a' + w' t', \tag{97}$$

wenn:

$$a' = a \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q w} \cdot \omega(q) \tag{98}$$

den Wert von x' zur Zeit $t' = 0$ und w' die durch (73a) gegebene Geschwindigkeit von M in bezug auf das System S' bedeutet.

Wir betrachten nun zwei materielle Punkte M_1 und M_2, deren im ruhenden System S gemessene Raumzeitkoordinaten t_1, x_1 und t_2, x_2 sein mögen und welche sich mit *derselben* konstanten Geschwindigkeit w bewegen. Sind dann zur Zeit:

$$t_1 = t_2 = 0$$

die Lagen von M_1 und M_2 durch:

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2$$

gegeben, so lauten die Bewegungsgleichungen dieser beiden Punkte in bezug auf das System S:

$$x_1 = a_1 + w t_1, \quad x_2 = a_2 + w t_2, \tag{99}$$

während ihre Bewegungsgleichungen in bezug auf das mit der Geschwindigkeit q gegen S bewegte System S':

$$x_1' = a_1' + w' t_1', \quad x_2' = a_2' + w' t_2' \tag{100}$$

sind, wobei t_1', x_1' und t_2', x_2' die im System S' gemessenen Raumzeitkoordinaten von M_1 und M_2 bedeuten, ferner nach (98):

$$\left\{ \begin{aligned} a_1' &= a_1 \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q w} \cdot \omega(q), \\ a_2' &= a_2 \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q w} \cdot \omega(q) \end{aligned} \right. \tag{101}$$

ist und die Geschwindigkeit w' der Punkte in bezug auf S' wieder durch (73a) gegeben ist.

Die beiden Punkte M_1 und M_2 können wir uns, da sie sich beide auf der x-Achse mit derselben Geschwindigkeit w bewegen, als die Endpunkte eines *starren Stabes* denken, dessen im System S gemessene Länge l wir als Entfernung zweier bezüglich S gleichzeitig eingenommenen Lagen von M_1 und M_2 erhalten, wenn wir in (99):

$$t_1 = t_2$$

setzen und die erste Gleichung von der zweiten subtrahieren:

$$l = x_2 - x_1 = a_2 - a_1 . \tag{102}$$

Ebenso finden wir für die im System S' gemessene Länge l' des Stabes aus den Gleichungen (100), wenn wir in denselben:

$$t_1' = t_2'$$

setzen, den Wert:

$$l' = x_2' - x_1' = a_2' - a_1', \tag{103}$$

also nach (101) und (102):

$$l' = \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q + \alpha_{12}\, q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q + \alpha_{12}\, q\, w} \cdot \omega(q) \,.\, l . \tag{104}$$

Nehmen wir schließlich an, daß der Stab in bezug auf das System S' ruht, daß also $w' = 0$ ist, so bewegt er sich nach (69) in bezug auf das System S mit der Geschwindigkeit $w = q$. Dann wird aus (104):

$$l' = \omega(q) \,.\, l \tag{105}$$

und es folgt:

Die Funktion $\omega(q)$ bedeutet jenen Faktor, mit welchem man die im ruhenden System S gemessene Länge l eines mit der Geschwindigkeit $w = q$ bezüglich S gleichförmig bewegten starren Stabes multiplizieren muß, um seine Länge l' in jenem System S' zu bekommen, in bezug auf welches er sich in Ruhe befindet.

Der Faktor $\omega(q)$ wird als *Kontraktion* bezeichnet.

19. Um schließlich die Gestalt der Funktion $\omega(q)$ zu bestimmen, setzen wir die zum Parameterwert q gehörige Transformation (93), welche das Wertepaar t, x in t', x' überführt. mit einer zweiten Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$:

$$\left\{\begin{aligned} t'' &= \omega(q')\{[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q']\, t' + \alpha_{12}\, q'\, x'\}, \\ x'' &= \omega(q')\{-q'\, t' + x'\} \end{aligned}\right. \tag{106}$$

zusammen, die zum Parameterwert q' gehört und t', x' in t'', x'' verwandelt. Aus der Gruppeneigenschaft der Transformationen (93) folgt dann, daß die resultierende Transformation, welche t, x direkt in t'', x'' überführt, die Form:

$$\left\{\begin{aligned} t'' &= \omega(q'')\{[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q'']\, t + \alpha_{12}\, q''\, x\}, \\ x'' &= \omega(q'')\{-q''\, t + x\} \end{aligned}\right. \tag{107}$$

haben muß, wobei der Parameter q'' durch die Gleichung (80) als Funktion von q nnd q' gegeben ist.

Führt man die Zusammensetzung der beiden Transformationen (93) und (106) wirklich aus, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (80):

$$(108)\begin{cases} t'' = (1 - \alpha_{12}\, q\, q')\, \omega(q)\, \omega(q')\{[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q''] \, t + \alpha_{12}\, q''\, x\}, \\ x'' = (1 - \alpha_{12}\, q\, q')\, \omega(q)\, \omega(q')\{- q''\, t + x''\}, \end{cases}$$

und daraus folgt durch Vergleichung mit (107):

$$(109) \qquad \omega(q'') = (1 - \alpha_{12}\, q\, q')\, \omega(q)\, \omega(q'),$$

also nach (80):

$$(110) \quad \omega\left(\frac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q\, q'}{1 - \alpha_{12}\, q\, q'}\right) = (1 - \alpha_{12}\, q\, q')\, \omega(q)\, \omega(q').$$

Dies ist eine *Funktionalgleichung*, mittels welcher sich die Funktion $\omega(q)$ bestimmen läßt. Zu diesem Zwecke differenzieren wir (110) nach q' und setzen darauf $q' = 0$, wodurch wir bekommen:

$$(111) \quad \omega'(q)[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q + \alpha_{12}\, q^2] = \omega(q)[\omega'(0) - \alpha_{12}\, \omega(0)\, q].$$

Nun ist aber nach der letzten Gleichung in (92):

$$\omega(q) \equiv b_{22}(q),$$

so daß wir für die Kontraktion $\omega(q)$ nach (44a) und (46a) noch die Bedingungen:

$$(112) \qquad \omega(0) = b_{22}(0) = 1$$

und:

$$(113) \qquad \omega'(0) = b_{22}'(0) = \alpha_{22}$$

erhalten, mittels welcher sich für dieselbe aus (111) die *Differentialgleichung*:

$$(114) \quad \omega'(q)[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q + \alpha_{12}\, q^2] = \omega(q)[\alpha_{22} - \alpha_{12}\, q]$$

mit der Anfangsbedingung (112) ergibt. Aus (114) folgt:

$$(115) \qquad \frac{\omega'(q)}{\omega(q)} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}\, q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q + \alpha_{12}\, q^2}$$

und daher:

$$(116) \qquad \int_0^q \frac{\omega'(q)}{\omega(q)}\, dq = \int_0^q \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}\, q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\, q + \alpha_{12}\, q^2}\, dq.$$

Rechnet man die Integrale beiderseits aus und löst die entstehende Gleichung nach $\omega(q)$ auf, so findet man schließlich für die Kontraktion den Ausdruck:

$$(117)\quad \omega(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\,q + \alpha_{12}\,q^2}} \left[\frac{1 + \dfrac{\alpha_{11} - \alpha_{22} + \sqrt{\theta}}{2}\,q}{1 + \dfrac{\alpha_{11} - \alpha_{22} - \sqrt{\theta}}{2}\,q}\right]^{\frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2\sqrt{\theta}}},$$

der in der Tat auch die Bedingung (113) erfüllt.

Damit sind auch die endlichen Gleichungen (93) der allgemeinen eingliedrigen linearen homogenen Gruppe, welche durch die infinitesimale Transformation (47) unter der Voraussetzung (55) erzeugt wird, vollständig bestimmt.[1]

20. Für die *Galileigruppe* findet man insbesondere nach (46b):

$$(117\text{a})\qquad \omega(q) = 1$$

und für die *Lorentzgruppe* nach (46c):

$$(117\text{b})\qquad \omega(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_{12}\,q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{q^2}{c^2}}}$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (2) und (1).

VII.

21. Wir gehen nun daran, die Forderung B. unserer Einleitung anzuwenden und untersuchen, welche der ∞^3 Transformationsgruppen, die durch die Gleichungen (93) und (117) gegeben sind, eine Kontraktion $\omega(q)$ ergeben, die eine gerade Funktion der Geschwindigkeit q ist, d. h. keine der beiden Richtungen der x-Achse auszeichnet.

Dafür ist sicher notwendig und hinreichend, daß die Differentialquotienten ungerader Ordnung der Funktion $\omega(q)$ an der Stelle $q = 0$ verschwinden; speziell muß:

$$(118)\qquad \left(\frac{d\omega}{dq}\right)_{q=0} = \omega'(0) = 0\,, \qquad \left(\frac{d^3\omega}{dq^3}\right)_{q=0} = \omega'''(0) = 0$$

sein. Wir berechnen also die Größen $\omega(0)$, $\omega'(0)$, $\omega''(0)$, $\omega'''(0)$.

Die ersten beiden sind durch die Gleichungen (112) und (113) gegeben; die übrigen erhalten wir am einfachsten durch

---

1) Auch die Gleichung (117) wird durch eine Vorzeichenänderung von $\sqrt{\theta}$ nicht beeinflußt. (Vgl. die Fußnote zu Nr. 12.)

wiederholtes Differenzieren der Gleichung (114); dieses ergibt, wenn wir zugleich $q = 0$ setzen:

$$\omega''(0) + (\alpha_{11} - 2\alpha_{22})\,\omega'(0) + \alpha_{12}\,\omega(0) = 0\,, \tag{119}$$

$$\omega'''(0) + (2\alpha_{11} - 3\alpha_{22})\,\omega''(0) + 4\alpha_{12}\,\omega'(0) = 0\,. \tag{120}$$

Daraus folgt:

$$\omega''(0) = -\alpha_{12} - \alpha_{22}(\alpha_{11} - 2\alpha_{22})\,, \tag{121}$$

$$\omega'''(0) = 2\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{22}(2\alpha_{11}^2 - 7\alpha_{12} - 7\alpha_{11}\alpha_{22} + 6\alpha_{22}^2)\,. \tag{122}$$

Aus der ersten der Gleichungen (118) in Verbindung mit Gleichung (113) folgt:

$$\alpha_{22} = 0 \tag{123}$$

und in Verbindung mit (122):

$$\alpha_{11}\alpha_{12} = 0\,. \tag{124}$$

Die Gleichungen (123) und (124) müssen also notwendig erfüllt sein, wenn die Transformationsgleichungen eine Kontraktion ergeben sollen, die der Forderung B. genügt. Wir werden bald sehen, daß das Bestehen der Gleichungen (123) und (124) auch hinreichend dafür ist.

22. Es ergeben sich nämlich nach Gleichung (124) drei Unterfälle:

$$1.\quad \alpha_{11} = 0\,,\quad \alpha_{12} = 0\,, \tag{125a}$$

$$2.\quad \alpha_{11} = 0\,,\quad \alpha_{12} \neq 0\,, \tag{125b}$$

$$3.\quad \alpha_{11} \neq 0\,,\quad \alpha_{12} = 0\,. \tag{125c}$$

Jedem dieser Unterfälle entspricht ein bestimmter Typus von Transformationsgleichungen, die unseren Forderungen A. und B. genügen.

Der erste Unterfall ergibt, wie man aus Gleichung (93) in Verbindung mit (117) und (117a) sieht, die Gruppe der *Galileitransformationen*, der zweite Unterfall, wie aus den Gleichungen (93) in Verbindung mit Gleichung (117) und (117b) erhellt, die Gruppe der *Lorentztransformationen.*

23. Der dritte Unterfall aber führt auf eine bisher noch nicht behandelte Gruppe. Es folgt aus Gleichung (117) in Verbindung mit (123) und (125c):

$$\omega(q) = 1 \tag{126}$$

und aus Gleichung (93):

$$\left\{\begin{aligned} t' &= (1 + \alpha_{11}\, q)t\,, \\ x' &= -\,q\,t + x\,. \end{aligned}\right. \tag{127}$$

Die ausgezeichneten Geschwindigkeiten haben die Werte:

$$c_1 = -\frac{1}{\alpha_{11}}\,, \quad c_2 = \infty\,, \tag{128}$$

denn dies sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung (54), wenn die Koeffizienten derselben den Bedingungen (76), (123) und (125 c) genügen. Die Transformationsgleichungen (127) lassen sich dann in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} t' &= \left(1 - \frac{q}{c_1}\right)t\,, \\ x' &= -\,q\,t + x \end{aligned}\right. \tag{129}$$

schreiben.

Die durch diese Transformation dargestellte Uhrenregulierung läßt sich nun in ähnlicher Art physikalisch deuten, wie es Einstein[1]) für die *Lorentztransformation* getan hat.

Zur Zeit $t = 0$ möge ein Lichtstrahl vom Ursprunge in der positiven Koordinatenrichtung ausgehen und sich mit der Geschwindigkeit c_1 fortpflanzen. Wenn sich nun ein Körper mit der Geschwindigkeit q bewegt, so hat das Licht in bezug auf diesen Körper die Geschwindigkeit $c_1 - q$ (in der Zeit des ruhenden Systems). Wenn wir nun wollen, daß die Geschwindigkeit des Lichtstrahles in bezug auf den bewegten Körper auch noch c_1 ist, können wir das dadurch erreichen, daß wir die Ganggeschwindigkeit der Uhren im Verhältnis von c_1 zu $c_1 - q$ verändern; dadurch führen wir aber im bewegten Körper eine Zeit t' ein, die durch:

$$t' = \frac{c_1 - q}{c_1}\,t\,,$$

d. h. durch die erste der Gleichungen (129) gegeben ist. Diese Zeitregulierung entspricht dem *Dopplerschen Prinzip;* wir wollen daher die Gleichungen (129) kurz als die *Dopplertransformation* bezeichnen.

Die Dopplertransformation unterscheidet sich von der Lorentztransformation sehr wesentlich dadurch, daß in einem

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891 ff. 1905.

mit der Geschwindigkeit q bewegten Körper an allen Stellen dieselbe Zeit herrscht; es gibt keine Ortszeit, und was noch wichtiger ist: wenn wir die Regulierung für in der Richtung der *positiven* x-Achse sich fortpflanzende Lichtstrahlen vorgenommen haben, die also jetzt in allen bewegten Körpern dieselbe Geschwindigkeit c_1 besitzen (wir setzen hier $c_1 > 0$ voraus), so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Lichtstrahlen, die sich in der *negativen* x-Richtung mit der Geschwindigkeit c_1 in bezug auf das ruhende System fortpflanzen, darum noch nicht in bezug auf alle bewegten Körper die nämliche.

Denn wenn c_1 eine ausgezeichnete Geschwindigkeit ist, so ist darum noch nicht $-c_1$ auch eine. Laut Gleichung (128) wäre das nur für $c_1 = \infty$, also $\alpha_{11} = 0$ der Fall; dann haben wir aber die Galileitransformation vor uns.

Für die Lorentztransformation hingegen ist, wie aus Gleichung (56) zusammen mit Gleichungen (76), (123) und (125b) hervorgeht:

$$c_1 = -c_2 = c \quad \text{(vgl. auch Gleichung (89))}.$$

Wir können also das Ergebnis unserer Untersuchung folgendermaßen zusammenfassen:

Unter allen Transformationsgleichungen, die eingliedrigen linearen homogenen Gruppen entsprechen, gibt es drei Typen, bei denen der Betrag der Kontraktion nicht von der Richtung der Bewegung im absoluten Raume abhängt. Darunter hat nur ein Typus eine tatsächliche Kontraktion der Längen zur Folge, nämlich die Lorentztransformation [Gleichung (1)], die beiden anderen Typen, die Galilei- und die Dopplertransformation [Gleichung (2) bzw. (129)] lassen die Längen unverändert. Bei der Lorentztransformation hat die Lichtgeschwindigkeit in allen bewegten Systemen bei beliebiger Fortpflanzungsrichtung denselben endlichen Wert c. Bei der Dopplertransformation hingegen nur bei Fortpflanzung nach e i n e r *Richtung, bei der Galileitransformation überhaupt nur, wenn die Lichtgeschwindigkeit unendlich wäre.*

W i e n, 13. Januar 1911.

(Eingegangen 15. Januar 1911.)