3. *Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra;*
von A. Sommerfeld.

In dieser und einigen anschließenden Studien möchte ich darstellen, wie merkwürdig sich die elektrodynamischen Begriffe und Rechnungen vereinfachen, wenn man sich dabei von der tiefsinnigen Raum–Zeit-Auffassung Minkowskis leiten läßt. Dem so jäh verstorbenen Freunde würde das Nachstehende kaum etwas Neues bieten; als Erläuterung der Minkowskischen Ideen aber mag es manchem willkommen sein.

Den Inhalt des Relativitätsprinzipes kann man nach Minkowski bekanntlich so formulieren: In den physikalischen Gleichungen dürfen nur *Raumzeitvektoren* auftreten, d. h. Größen, die in der vierfachen Mannigfaltigkeit von Raum und Zeit, der Minkowskischen „Welt", Vektorcharakter besitzen, deren Komponenten sich daher beim Übergang von einem zu einem neuen Bezugssystem nach dem Schema der Koordinatentransformation für diese Mannigfaltigkeit („Lorentz-Transformation") umsetzen. An die Stelle des absoluten Raumes der älteren Theorie tritt so die absolute Welt, d. h. die Verknüpfung von Raum und Zeit durch die Lichtgeschwindigkeit c, deren Unveränderlichkeit jetzt das absolute Substrat der Elektrodynamik ausmacht.

In diesem ersten Teil beschränke ich mich auf die algebraischen Beziehungen der Raumzeitvektoren. Ein zweiter Teil „Vektoranalysis" soll die differentiellen Eigenschaften der vierdimensionalen Vektorfelder darstellen. Besonderen Wert habe ich darauf gelegt, die Definition und Transformation der Vektoren möglichst geometrisch zu fassen. Die hierzu erforderlichen Vorstellungen und Rechnungen, die auch einen vollen Ersatz für die von Minkowski benutzte Matrixrechnung liefern, sind (bei Zulassung imaginärer Koordinaten) unmittelbare Verallgemeinerungen des uns geläufigen dreidimensionalen Vektorverfahrens.

§ 1. Vierer- und Sechservektoren.

Im Raum von drei Dimensionen hat man bekanntlich zwei Arten von Vektoren zu unterscheiden, *Vektoren erster Art* oder polare Vektoren und *Vektoren zweiter Art* oder axiale Vektoren, auch Rotoren oder Plangrößen genannt. Ein Vektor erster Art ist eine mit Richtungssinn versehene gerade Strecke, seine Komponenten die senkrechten Projektionen auf die Koordinaten*achsen*. Ein Vektor zweiter Art ist eine mit Umlaufssinn versehene ebene Fläche, seine Komponenten die senkrechten Projektionen der Fläche auf die Kordinaten*ebenen*. Die Komponenten des ersteren sind daher auf je eine, die des letzteren auf je zwei Achsen bezogen, erstere daher mit einem, letztere mit zwei Indizes zu schreiben. Zu den ersteren gehört in der Mechanik Kraft und Geschwindigkeit, zu den letzteren Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit. Z. B. wären die Komponenten einer Winkelgeschwindigkeit als ω_{yz}, ω_{zx}, ω_{xy} zu schreiben; erst nach Übergang zu der Graßmannschen „Ergänzung“, dem auf der Drehebene errichteten Lot, rechtfertigt sich die gewöhnliche Schreibweise ω_x, ω_y, ω_z. Derselben Klasse von Vektoren gehört auch, wie Wiechert hervorgehoben hat, die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ an. Die übliche und auch im folgenden beibehaltene Schreibweise $\mathfrak{H}_x \ldots$ sollte daher konsequenterweise durch $\mathfrak{H}_{yz} \ldots$ ersetzt werden.

In dem Minkowskischen[1]) Raume von vier Dimensionen sind die Vektoren erster Art vierkomponentig, „Vierervektoren“, diejenigen zweiter Art sechskomponentig, „Sechservektoren“. Es gibt auch Vektoren dritter Art, die wieder vierkomponentig werden.[2])

1) Die beiden Arbeiten Minkowskis sind: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Göttinger Nachr. 1908. p. 1 oder Mathematische Ann. **68.** p. 472. 1910, auch separatim bei B. G. Teubner demnächst erscheinend; *Raum und Zeit*, Physik. Zeitschr. **10.** p. 104. 1909, sowie separatim bei B. G. Teubner, mit einem Bildnis Minkowskis.

2) Entsprechend der Anzahl der Koordinaten-Achsen, -Ebenen und -Räume, die sich durch die Anzahl der Kombinationen von vier Elementen zu je 1, 2 oder 3 berechnen, nämlich:

$$\frac{4}{1} = 4, \quad \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6, \quad \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Ein *Vierervektor* ist z. B. der Fahrstrahl vom Anfangspunkte nach einem Raumzeitpunkte $(x\,y\,z\,l)$ mit den Komponenten

$$x,\ y,\ z,\ l = i\,c\,t,\ i = \sqrt{-1}\,;$$

l ist ebenso wie x, y, z eine Länge; die Bezeichnung erinnere an „Lichtweg". Die Größe dieses Vektors, d. h. die Länge der zugehörigen vierdimensionalen Strecke ist

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + l^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}\,.$$

Zwei Vektoren $(x_1\,y_1\,z_1\,l_1)$ und $(x_2\,y_2\,z_2\,l_2)$ heißen *zu einander senkrecht*, wenn

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + l_1 l_2 = 0\,.$$

Der Koordinatenvektor $(x\,y\,z\,l)$ ist der Typus aller Vierervektoren. Ein Quadrupel von Größen verdient nur dann den Namen Vierervektor, wenn es sich bei einer Koordinatenänderung ebenso wie der Koordinatenvektor, d. h. kovariant mit ihm, transformiert. Die Länge eines jeden Vierervektors verhält sich hierbei invariant; sie ist seine einzige Invariante. Speziell für den Koordinatenvektor drückt die Invarianz seiner Länge das *Prinzip von der konstanten Fortpflanzung des Lichtes* aus. Wegen des imaginären Charakters seiner vierten Komponente kann übrigens die Länge eines Vierervektors Null sein, ohne daß er selbst und seine Komponenten verschwindet.

Ein Vektor erster Art ist ferner die „Viererdichte P", welche den Begriff der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Dichte ϱ einer bewegten Ladung zusammenfaßt, mit den Komponenten:

$$(1) \qquad P_x = \varrho\,\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\,, \quad P_y = \varrho\,\frac{\mathfrak{v}_y}{c}\,, \quad P_z = \varrho\,\frac{\mathfrak{v}_z}{c}\,, \quad P_l = i\,\varrho\,;$$

seine Länge wird

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad |P| = i\,\varrho\,\sqrt{1 - \beta^2}\,, \quad \text{wo} \quad \beta^2 = \frac{1}{c^2}\,(\mathfrak{v}_x^{\,2} + \mathfrak{v}_y^{\,2} + \mathfrak{v}_z^{\,2})\,.$$

Der Vektorcharakter von P ergibt sich folgendermaßen: Man betrachte die Weltlinie eines Ladungselementes de, d. h. die aufeinanderfolgenden raum-zeitlichen Lagen desselben in der $x\,y\,z\,l$-Mannigfaltigkeit. Das Weltlinienelement zwischen zwei benachbarten Punkten 1 und 2

$$dx,\ dy,\ dz,\ dl$$

ist sicher ein mit dem Koordinatenvektor kovarianter Vierervektor. Sodann ziehen wir das wichtige Prinzip der

Unabhängigkeit der Ladung vom Bezugssystem heran, durch welches die elektrische Masse grundsätzlich vor der materiellen Masse ausgezeichnet ist. Das Prinzip ist natürlich im Einklang mit den Maxwellschen Gleichungen und von Einstein als Folge derselben erwähnt. Hiernach ist:

$$de = \varrho\, dS = \varrho'\, dS';$$

$dS = dx\, dy\, dz$ bedeutet das dreidimensionale Raumelement, ebenso dS' dasselbe in einem neuen „gestrichenen" Bezugssystem, das durch eine bloße Drehung um 0 aus dem ursprünglichen hervorgeht. In Fig. 1 erscheinen dS und dS' als zwei beliebige Querschnitte durch die Weltlinienröhre, welche der Begrenzung von de entspricht. Legt man solche Querschnittspaare je durch die Punkte 1 und 2, so schneidet man zwei gleiche vierdimensionale Raumelemente $d\Sigma$ aus:

$$d\Sigma = dS\, dl = dS'\, dl';$$

hier sind dl, dl' die Höhen der beiden Raumelemente $d\Sigma$ und zugleich die Komponenten des Weltlinienelementes 12 nach den Achsen l, l', die als vierte Achsen unseres ungestrichenen und gestrichenen Bezugssystems senkrecht auf dS und dS' stehen müssen.[1]) Durch Division der beiden vorhergehenden Gleichungen ergibt sich, daß

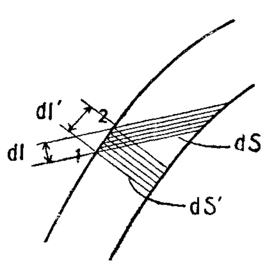

Fig. 1.

$$\frac{\varrho}{dl} = \frac{\varrho'}{dl'} = \frac{de}{d\Sigma}$$

eine vom Bezugssystem unabhängige, skalare Größe ist. Multiplizieren wir also den Vierervektor (dx, dy, dz, dl) mit $i\varrho/dl$, so behält er seinen Vektorcharakter; dabei entsteht genau der Vierervektor P aus Gleichung (1).

Zu den *Raumzeitvektoren zweiter Art* übergehend, betrachten wir im Raum von vier Dimensionen ein Ebenenstück

1) Ich halte es für erlaubt, Zeichnung und Ausdruck so einzurichten, als ob l reell und das Senkrechtstehen ein Euklidisches wäre. In Wirklichkeit ist ja ein imaginäres l und ein nichteuklidisches Senkrechtstehen gemeint, welches man mit Minkowski an einer Hyperbel bzw. einem Hyperboloid konstruieren kann. Es ist möglich, aber kaum zu empfehlen, alles folgende dementsprechend nichteuklidisch umzudeuten.

von bestimmter Größe und Stellung, wobei es uns nur auf den Flächeninhalt, nicht auf die Form, nur auf die Orientierung, nicht auf die absolute Lage ankommt; die Lage kann durch Parallelverlagerung, die Form durch inhaltsgleiche Umformung beliebig abgeändert werden. Dieses geometrische Bild ist aber noch zu speziell; es hat nur fünf unabhängige Bestimmungsstücke, indem seine Größe durch eine, seine Lage durch vier [1]) Zahlen gegeben wird. Beachten wir aber, daß zu einer Ebene im Raum von vier Dimensionen auch die dazu senkrechte Ebene (die Gesamtheit aller derjenigen Geraden, die auf allen Geraden der ersten Ebene senkrecht stehen) eindeutig [2]) bestimmt ist. In dieser Normalebene denke man sich jetzt ein zweites Ebenenstück von bestimmter Größe gegeben. *Der Inbegriff zweier solcher zueinander normaler Ebenenstücke ist das geometrische Bild eines Vektors zweiter Art.* Er hängt von sechs Bestimmungsstücken ab, indem zu den fünf genannten des einen noch die Größe des dazu normalen Ebenenstückes als sechstes Bestimmungsstück hinzutritt. Wir sprechen daher von einem *Sechservektor.* Als seine sechs rechtwinkligen Komponenten in einem $x\,y\,z\,l$-Koordinatensystem bezeichnen wir die Summe der senkrechten Projektionen der beiden Flächenstücke auf je eine der sechs Koordinatenebenen $x\,y$, $y\,z$, .. $z\,l$; die Komponenten eines Sechservektors sind daher je mit zwei Indizes zu schreiben,

---

1) Man kann sich die Lage des Ebenenstückes durch zwei von einem beliebigen Punkte desselben ausgehenden und beliebig in ihm gelegene Vierervektoren gegeben denken, deren Lage zunächst durch je drei Größen, etwa die Verhältnisse ihrer vier Komponenten, bestimmt wird. Jeder der beiden Vierervektoren kann aber beliebig innerhalb der Ebene gedreht werden. Dadurch kann man je einem ihrer drei Bestimmungsstücke einen beliebigen Wert geben. Es bleiben also nur $2\,(3-1) = 4$ Bestimmungsstücke für die Lage der Ebene übrig.

2) Man denke sich etwa in der ersten Ebene zwei Gerade gezogen und konstruiere die Gesamtheit der zu ihnen senkrechten Geraden, die je einen linearen Raum erfüllen. Diese beiden Räume schneiden sich in einer Ebene, welche alle gemeinsamen Senkrechten der beiden Ausgangsgeraden enthält und daher die Normalebene der ersten Ebene ist. *Die beiden zueinander senkrechten* Ebenen haben, ebenso wie irgend zwei Ebenen von allgemeiner Lage, nur einen Punkt gemeinsam. Denn jede Ebene ist im Raum von vier Dimensionen durch zwei lineare Gleichungen gegeben und vier lineare Gleichungen bestimmen eindeutig einen Punkt.

die voneinander verschieden sein müssen und auf deren Reihenfolge es ankommt.[1])

Den *speziellen Raumzeitvektor zweiter Art*, das einfache Ebenenstück, kann man kinematisch einer *einfachen Drehung*, den *allgemeinen Sechservektor*, das Ebenenpaar, einer *allgemeinen Drehung* oder *Schraubung* zuordnen. Man beachte nämlich, daß in vier Dimensionen die einfachste Drehungsoperation die sämtlichen Punkte einer Ebene ungeändert läßt, daß man also nicht von einer Drehungsachse, sondern von einer Drehungsebene zu sprechen hat; diese Drehungsebene ist dann durch die Ebene unseres Flächenstückes, die Drehungsgröße durch die Größe desselben gegeben. Ebenso wie sich in drei Dimensionen eine Schraubung[2]) aus einer gewissen Drehung und einer Translation nach der Achse dieser Drehung, d. h. einer Drehung um die dazu senkrechte, unendlich ferne Achse zusammensetzt, entsteht die allgemeine Drehung in vier Dimensionen aus der Zusammensetzung zweier einfacher Drehungen um zwei zueinander normale Ebenen, entsprechend dem Aufbau unseres allgemeinen Sechservektors aus zwei normalen Flächenstücken. Durch diese Bemerkung möge die Bezeichnung „Schraubung" für die allgemeine Drehung gerechtfertigt werden.

Ein Vektor zweiter Art ist z. B. der *Sechservektor f des elektromagnetischen Feldes* mit den Komponenten:

$$(2)\qquad \begin{cases} f_{yz} = \mathfrak{H}_x, & f_{zx} = \mathfrak{H}_y, & f_{xy} = \mathfrak{H}_z, \\ f_{xl} = -i\,\mathfrak{E}_x, & f_{yl} = -i\,\mathfrak{E}_y, & f_{zl} = -i\,\mathfrak{E}_z. \end{cases}$$

Der Bedeutung des Sechservektors und der Beziehung seiner Komponenten auf zwei in gewisser Reihenfolge zu nehmenden Koordinatenachsen entspricht dabei die allgemeine Festsetzung:

$$(2\text{a})\qquad f_{ik} = -f_{ki},\quad f_{ii} = 0\quad (i,\ k = x,\ y,\ z,\ l).$$

Daß die elektrische und magnetische Kraft $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bei Minkowski zu der höheren Einheit des Sechservektors f zu-

1) Vertauschung von xy mit yx bedeutet Projektion auf die Rückseite der xy-Ebene und daher ebenso wie bei drei Dimensionen, Vorzeichenumkehr. Vgl. hierzu die Formel (3).

2) Auf diese Analogie weist auch Minkowski hin: Raum und Zeit § V.

sammengefaßt wird, ist für die Relativtheorie charakteristisch, in der je nach dem Bezugssystem dasselbe Feld als rein elektrisch oder als elektromagnetisch erscheinen kann. Z. B. zeigt eine gleichförmig bewegte Ladung dem mitbewegten Beobachter nur die „elektrische Seite" des Sechservektors, dem an der Bewegung nicht teilnehmenden Beobachter auch seine „magnetische Seite".

Daß in der Tat das elektromagnetische Feld als Sechservektor aufzufassen ist, d. h. daß sich seine Komponenten bei einer Änderung des Bezugssystems nach dem Typus des vierdimensionalen Ebenenstückes bzw. Ebenenpaares transformieren, folgt daraus, daß durch die Maxwellschen Gleichungen das Feld mit der Viererdichte P durch eine Divergenzbeziehung (vgl. später) verknüpft ist.

Zur näheren Kenntnis des Sechservektors betrachten wir den speziellen Fall eines *einzelnen* Flächenstückes φ vom Inhalte 1 und geben ihm die Form eines etwa vom Nullpunkte auslaufenden Parallelogramms. Die beiden Seiten desselben seien die Vierervektoren u, v. Dann ist die Projektion dieses Flächenstückes auf die xy-Ebene bestimmt durch die Projektionen $u_x u_y v_x v_y$ der Vierervektoren, nämlich

$$\varphi_{xy} = u_x v_y - v_x u_y . \tag{3}$$

Zwischen den so gebildeten sechs Komponenten dieses speziellen Sechservektors, von denen nach der Abzählung auf p. 753 nur fünf voneinander unabhängig sind, besteht die Identität:

$$\varphi_{yz}\varphi_{xl} + \varphi_{zx}\varphi_{yl} + \varphi_{xy}\varphi_{zl} = 0 , \tag{3a}$$

wie unmittelbar durch Multiplikation der betreffenden Determinanten bewiesen wird. Ferner ist[1]) als Inhalt $|\varphi|$ des Flächenstückes die Quadratwurzel aus der Quadratsumme seiner sechs Komponenten zu definieren. In unserem Falle gilt also

$$|\varphi|^2 = \varphi_{yz}^2 + \varphi_{zx}^2 + \varphi_{xy}^2 + \varphi_{xl}^2 + \varphi_{yl}^2 + \varphi_{zl}^2 = 1 . \tag{3b}$$

---

1) Sein Quadrat ist zunächst gegeben durch die Formel der gewöhnlichen Planimetrie:

$$|u|^2 |v|^2 \sin^2(u, v) = |u|^2 |v|^2 \left(1 - \cos^2(u, v)\right) = |u|^2 |v|^2 - (u\,v)^2,$$

vgl. § 3 A, woraus Gleichung (3b) unmittelbar durch geeignete Zusammenfassung der Komponenten folgt.

Wir betrachten andererseits das zu φ normale Flächenstück φ^* vom Inhalt 1, das wir auch als die „Ergänzung“ jenes bezeichnen können und behaupten, daß seine Komponenten lauten

$$\text{3c)} \quad \varphi_{yz}^* = \varphi_{xl}, \quad \varphi_{zx}^* = \varphi_{yl}, \quad \varphi_{xy}^* = \varphi_{zl}, \quad \varphi_{xl}^* = \varphi_{yz} \cdots$$

oder allgemein, wenn wir durch Einklammerung die nicht vertretenen Indizes andeuten,

$$\text{(3d)} \qquad \varphi_{ik}^* = \varphi_{(ik)},$$

wobei hinsichtlich der Reihenfolge der Indizes $i\,k\,(i\,k)$ festzusetzen ist, daß sie aus der Reihenfolge $x\,y\,z\,l$ durch eine *gerade* Anzahl von Vertauschungen hervorgehen soll.

Zum Beweise stellen wir φ^* wieder durch zwei Vierervektoren u^*v^* dar, welche einzeln auf $u\,v$ senkrecht stehen. Dies besagt (vgl. die obige Definition des Senkrechtstehens) das Bestehen der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_x^* u_x + u_y^* u_y + u_z^* u_z + u_l^* u_l &= 0, \\ u_x^* v_x + u_y^* v_y + u_z^* v_z + u_l^* v_l &= 0, \\ v_x^* u_x + v_y^* u_y + v_z^* u_z + v_l^* u_l &= 0, \\ v_x^* v_x + v_y^* v_y + v_z^* v_z + v_l^* v_l &= 0. \end{aligned}$$

Indem man sie bzw. mit v_l, u_l, v_l, u_l multipliziert und die zweite von der ersten, die vierte von der dritten subtrahiert, erhält man:

$$\begin{aligned} u_x^* \varphi_{xl} + u_y^* \varphi_{yl} + u_z^* \varphi_{zl} &= 0, \\ v_x^* \varphi_{xl} + v_y^* \varphi_{yl} + v_z^* \varphi_{zl} &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man ferner diese beiden Gleichungen bzw. mit $v_z^* u_z^*$ oder mit $v_y^* u_y^*$ und subtrahiert sie voneinander, so folgt

$$\varphi_{xz}^* \varphi_{xl} + \varphi_{yz}^* \varphi_{yl} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{xy}^* \varphi_{xl} + \varphi_{zy}^* \varphi_{zl} = 0.$$

Wegen $\varphi_{xz}^* = -\varphi_{zx}^*$ kann man hierfür die Proportion schreiben:

$$\varphi_{yz}^* : \varphi_{xy}^* : \varphi_{zx}^* = \varphi_{xl} : \varphi_{yl} : \varphi_{zl}.$$

In entsprechender Weise ergibt sich

$$\varphi_{yz} : \varphi_{xy} : \varphi_{zx} = \varphi_{xl}^* : \varphi_{yl}^* : \varphi_{zl}^*.$$

und daher, wenn λ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$\varphi_{ik}^* = \lambda\, \varphi_{(ik)}.$$

Da nun aber φ^* ebenso wie φ den Flächeninhalt 1 haben soll, so wird $\lambda^2 = 1$, entsprechend unserer obigen Behauptung (3d).

Die Identität (3a) können wir jetzt mit Benutzung der Bezeichnungen von § 3 A auch so schreiben:

$$\text{(3e)} \quad \left\{ \begin{aligned} (\varphi\,\varphi^*) &= \varphi_{yz}\,\varphi_{yz}^* + \varphi_{xy}\,\varphi_{xy}^* + \ldots + \varphi_{zl}\,\varphi_{zl}^* \\ &= 2\,(\varphi_{yz}\,\varphi_{xl} + \varphi_{zx}\,\varphi_{yl} + \varphi_{xy}\,\varphi_{zl}) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ein allgemeiner Sechservektor f entsteht jetzt aus den beiden speziellen φ und φ^* in der Form

$$\text{(4)} \qquad f = \varrho\,\varphi + \varrho^*\,\varphi^*;$$

ϱ und ϱ^* sind die Inhalte der beiden zueinander senkrechten Flächenstücke von der Orientierung φ und φ^*, aus denen sich f zusammensetzt. Zu f bilden wir den „dualen Vektor f^*, seine „Ergänzung" durch Vertauschung der Flächen ϱ und ϱ^*. Es sei nämlich im Anschluß an (4) f^* definiert durch:

$$\text{(4a)} \qquad f^* = \varrho^*\,\varphi + \varrho\,\varphi^*.$$

Hieraus folgt z. B. für die yz-Komponenten dieses dualen Vektors

$$\text{(4b)} \qquad f_{yz}^* = \varrho^*\,\varphi_{yz} + \varrho\,\varphi_{yz}^* = \varrho^*\,\varphi_{xl}^* + \varrho\,\varphi_{xl} = f_{xl},$$

ebenso

$$\text{(4b)} \quad f_{zx}^* = f_{yl}, \quad f_{xy}^* = f_{zl}, \quad f_{xl}^* = f_{yz}, \quad f_{yl}^* = f_{zx}, \quad f_{zl}^* = f_{xy}$$

und allgemein

$$\text{(4c)} \qquad f_{ik}^* = f_{(ik)}, \quad f_{ki}^* = -f_{ik}^*, \quad f_{ii}^* = 0,$$

so daß f und f^* in demselben Zusammenhang stehen, wie das spezielle Flächenstück φ mit dem dazu normalen φ^*.

Durch ϱ und ϱ^* drücken sich auch die nach dem Vorbilde von (3 b, e) gebildeten Größen $|f|^2$ und $(f f^*)$ aus:

$$\text{(5 a)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\qquad |f|^2 = f_{yz}^2 + f_{zx}^2 + \ldots f_{zl}^2 \\ &= \varrho^2\,|\varphi|^2 + \varrho^{*2}\,|\varphi^*|^2 + 2\,\varrho\,\varrho^*\,(\varphi\,\varphi^*) = \varrho^2 + \varrho^{*2}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(5 b)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\qquad (f f^*) = f_{yz} f_{yz}^* + f_{xy} f_{xy}^* + \ldots + f_{zl} f_{zl}^* \\ &= \varrho^2\,(\varphi\,\varphi^*) + \varrho^{*2}\,(\varphi^*\,\varphi) + \varrho\,\varrho^*\,(|\varphi|^2 + |\varphi^*|^2) = 2\,\varrho\,\varrho^*. \end{aligned} \right.$$

Beide sind als *Invarianten* des Sechservektors zu bezeichnen, da sie ebenso wie die Flächen ϱ und ϱ^* eine von der Lage des Koordinatensystems unabhängige geometrische Bedeutung haben. Man kann etwa $|f|$ als (geometrische) Flächensumme, $(f f^*)$ als (doppeltes) Flächenprodukt bezeichnen. Im Falle

f die elektromagnetische Kraft bedeutet, haben wir nach (2) und (5a, b)

(5c) $$|f|^2 = \mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2 = 2\,L\,, \quad (f f^*) = -2\,i(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})\,.$$

Die Bezeichnung L bedeutet „Lagrangesche Funktion der Volumeneinheit".

Man kann aber außer von den Komponenten eines Sechservektors nach den Koordinaten*ebenen* auch sprechen von seinen Komponenten nach den Koordinaten*räumen* und Koordinaten*achsen*.

Unter der Komponente nach einem Koordinatenraum ist zu verstehen ein in diesem Raum gelegenes Flächenstück, das man erhält, wenn man die beiden Flächenstücke ϱ und ϱ^* auf diesen Raum projiziert und die geometrische Summe ihrer beiden Projektionen bildet. Z. B. ist die Komponente von f nach dem Raum der $x\,y\,z$ der dreidimensionale Vektor zweiter Art:

$$(f_{yz}\,,\ f_{zx}\,,\ f_{xy}) = \mathfrak{H}\,.$$

Unter der Komponente nach einer Koordinatenachse[1] ist zu verstehen ein dieser Achse paralleles Flächenstück, das man erhält, wenn man von den Flächenstücken ϱ und ϱ^* ihre Komponenten nach dem zu dieser Achse senkrechten Raum abspaltet und die beiden übrig bleibenden Flächenstücke geometrisch zusammensetzt. Indem man die resultierende Fläche mit dem zur Achse normalen Raum zum Schnitt bringt, entsteht ein dreidimensionaler Vektor erster Art in diesem Raume. Z. B. wird die Komponente von f nach der Achse l der dreidimensionale Vektor erster Art:

(6) $$f_l = (f_{lx}\,,\ f_{ly}\,,\ f_{lz}) = i\,\mathfrak{E}\,,$$

der sich auch als spezieller Vierervektor von verschwindender l-Komponente auffassen läßt. Allgemein sei f_j der zur j-Achse senkrechte Vierervektor:

(6a) $$f_j = (f_{jx}\,,\ f_{jy}\,,\ f_{jz}\,,\ f_{jl})\,.$$

Die entsprechende Bedeutung hat die Komponente der Ergänzung f^* nach der j-Achse:

(6b) $$f_j^* = (f_{jx}^*\,,\ f_{jy}^*\,,\ f_{jz}^*\,,\ f_{jl}^*)$$

[1] Dieser zunächst etwas komplizierte Begriff scheint mir für die geometrische Deutung der späteren differentiellen Vektoroperationen unentbehrlich.

und im besonderen

$$f_l^* = (f_{yz}, f_{zx}, f_{xy}, 0) = \mathfrak{H}. \tag{6c}$$

Im vierdimensionalen Raum gibt es außer den Vektoren erster und zweiter Art auch solche dritter Art, die wieder Vierervektoren sind, aber nicht durch eine Strecke, sondern durch ein dreidimensionales Raumstück gegeben werden und deren Komponenten mit drei Indices zu schreiben wären, als Projektionen des Raumstücks auf die vier Koordinatenräume, z. B.

$$\mathfrak{A}_{yzl}, \quad \mathfrak{A}_{zlx}, \quad \mathfrak{A}_{lxy}, \quad \mathfrak{A}_{xyz}.$$

Geometrisch kann man einem solchen Vektor dritter Art in eindeutiger Weise einen Vektor erster Art, seine „Ergänzung", zuordnen, nämlich die auf dem Raumstücke senkrechte Strecke, deren Länge gleich der Größe des Raumstückes ist. Die Komponenten des letzteren,

$$\mathfrak{A}_x, \ \mathfrak{A}_y, \ \mathfrak{A}_z, \ \mathfrak{A}_l,$$

sind der Reihe nach den Komponenten des Vektors dritter Art gleich. Diese Ersetzbarkeit des Vektors dritter Art durch seine Ergänzung reicht hier sogar noch weiter, wie bei drei Dimensionen die Zuordnung der Ergänzung zu dem Vektor zweiter Art, insofern als hier die Ergänzung wegen der geraden Dimensionenzahl das Verhalten des Vektors dritter Art nicht nur bei Koordinatentransformationen von der Determinante $+1$, sondern auch bei solchen von der Determinante -1 (Spiegelung, Inversion) richtig wiedergibt. Als zusammenfassende Bezeichnung für die Vektoren erster und dritter Art empfiehlt sich der Name „Vierervektor".

Da man irgend zwei Raumstücke durch vektorielle Addition ihrer Ergänzungen geometrisch zusammensetzen kann, erhält man durch ein Raumpaar keinen allgemeineren Vektor dritter Art wie durch ein einzelnes Raumstück. In der Tat hat letzteres schon vier voneinander unabhängige Bestimmungsstücke, seine Größe und die drei zur Definition seiner Lage erforderlichen Daten.

Ein wichtiges Beispiel für die Vektoren dritter Art werden wir (vgl. § 3 B und § 4) in der elektrodynamischen Kraft (Pf) kennen lernen.

§ 2. Komponentenbildungen nach beliebigen Richtungen und Ebenen und ihr Zusammenhang mit der Lorentz-Transformation.

Charakteristisch für den Vektorbegriff und seine Unabhängigkeit vom Koordinatensystem ist es, daß wir von seinen Komponenten nach beliebigen Richtungen (beim Sechservektor Ebenen) sprechen können. Unter der Komponente eines Vierervektors P nach der Achse x' haben wir zu verstehen die senkrechte Projektion auf diese Achse, d. i.

$$P_{x'} = P_x \cos(x'x) + P_y \cos(x'y) + P_z \cos(x'z) + P_l \cos(x'l). \tag{7}$$

Ist x' eine „raumartige" Achse, so wird[1]) $\cos(x', x)$, $\cos(x', y)$, $\cos(x', z)$ reell, $\cos(x'l)$ rein imaginär, so daß (vgl. (1) und (7)) $P_{x'}$ reell wird. Dagegen ist $P_{l'}$ rein imaginär, wenn l' eine „zeitartige" Achse ist.

Unter der Komponente eines Sechservektors f nach einer beliebigen Ebene, die wir uns durch zwei in ihr enthaltene zueinander senkrechte Richtungen $x'y'$ gegeben denken, ist zu verstehen die Summe der senkrechten Projektionen der den Vektor f bildenden Flächenstücke auf diese Ebene; sie berechnet sich aus den zweireihigen Determinanten der Richtungskosinus zu:

$$\tag{8} \left\{ \begin{aligned} f_{x'y'} = f_{xy} & \begin{vmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) \end{vmatrix} + f_{yz} \begin{vmatrix} \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ \cos(y'y) & \cos(y'z) \end{vmatrix} \\ + f_{zx} & \begin{vmatrix} \cos(x'z) & \cos(x'x) \\ \cos(y'z) & \cos(y'x) \end{vmatrix} + f_{xl} \begin{vmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'l) \\ \cos(y'x) & \cos(y'l) \end{vmatrix} \\ + f_{yl} & \begin{vmatrix} \cos(x'y) & \cos(x'l) \\ \cos(y'y) & \cos(y'l) \end{vmatrix} + f_{zl} \begin{vmatrix} \cos(x'z) & \cos(x'l) \\ \cos(y'z) & \cos(y'l) \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Zum Beweise betrachten wir zunächst den speziellen Sechservektor φ (reines Flächenstück von der Größe 1) und

---

1) Sind $x_1\ y_1\ z_1\ l_1$ die Koordinaten irgend eines Punktes auf der Achse x' im System der $x\,y\,z\,l$ und setzt man $R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + l_1^2$, so wird nach der allgemeinen Definition von § 3 A:

$$\cos(x'x) = \frac{x_1}{R_1}, \quad \cos(x'y) = \frac{y_1}{R_1}, \quad \cos(x'z) = \frac{z_1}{R_1}, \quad \cos(x'l) = \frac{l_1}{R_1}.$$

Die Achse heißt raumartig, wenn $R_1^2 > 0$, d. h. $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > |l_1|^2$, zeitartig, wenn $R_1^2 < 0$. Im ersten Fall sind die drei ersten Kosinus reell, der letzte imaginär, im zweiten Fall die drei ersten imaginär, der letzte reell.

stellen dieses wie in § 1 in der Form eines Parallelogramms durch zwei Vierervektoren u, v dar. Dann bestimmt sich das auf die $x'y'$-Ebene projizierte Flächenstück, d. h. die gesuchte Komponente $\varphi_{x'y'}$, aus den Projektionen der Vierervektoren $u_{x'}$, $u_{y'}$, $v_{x'}$, $v_{y'}$ auf die x'- und y'-Achse wie in Gleichung (3) zu:

$$\varphi_{x'y'} = u_{x'} v_{y'} - v_{x'} u_{y'} .$$

Setzen wir hier für $u_{x'}, \ldots$ die Werte aus (7) ein und schreiben nach (3) für die Unterdeterminanten $u_x v_y - u_y v_x \ldots$ bzw. $\varphi_{xy} \ldots$, so ergibt sich genau die Gleichung (8) für den speziellen Fall $f = \varphi$. Dieselbe Gleichung entsteht ebenso für das zu φ normale Flächenstück φ^* und daher auch für die Summe $\varrho\,\varphi + \varrho^*\,\varphi^*$, welche nach Gleichung (4) den allgemeinen Sechservektor bedeutet. Die Komponentenregel (8) für den Sechservektor ist also eine notwendige Folge derjenigen für den Vierervektor (7).

Bezüglich der Realitätsverhältnisse gilt ähnliches wie bei den Komponenten des Vierervektors: $f_{x'y'}$ besteht aus lauter reellen, $f_{x'l'}$ aus lauter rein imaginären Termen, wenn die Achsen x', y' raumartig, l' zeitartig sind.

Wir betrachten ferner das aus dem Sechservektor f abgeleitete Quadrupel von Vierervektoren f_j (Gleichung (6)) und fragen, wie sich die Komponente $f_{x'}$ von f nach der neuen Achse x' (die also ein zu x' paralleles Flächenstück bzw. einen zu dieser Achse senkrechten Vierervektor bedeutet) aus den Komponenten f_x, f_y, f_z, f_l nach den ursprünglichen Achsen ausdrückt. In der Tat muß ja durch Angabe von f_x, f_y, f_z, f_l auch $f_{x'}$ mitgegeben sein. Wir behaupten, daß folgender Zusammenhang besteht:

$$(9) \quad f_{x'} = f_x \cos(x'x) + f_y \cos(x'y) + f_z \cos(x'z) + f_l \cos(x'l).$$

Gleichung (9) stimmt formal mit (7) überein, unterscheidet sich aber wesentlich dadurch, daß auf der rechten Seite von (9) vier gerichtete Vierervektoren, auf der von (7) vier ungerichtete Komponenten stehen. Gleichung (9) ist natürlich auf Grund der Vektoreigenschaft von f, Gleichung (8), zu beweisen. Wir bezeichnen die in (9) vorkommende Vektorsumme mit Σ:

$$\Sigma = f_x \cos(x'x) + f_y \cos(x'y) + f_z \cos(x'z) + f_l \cos(x'l)$$

und bilden ihre Komponenten nach den Achsen $x\,y\,z\,l$ nach Gleichung (6a):

$$\begin{aligned}
\Sigma_x &= \qquad\qquad\qquad\quad f_{yx}\cos(x'y) + f_{zx}\cos(x'z) + f_{lx}\cos(x'l),\\
\Sigma_y &= f_{xy}\cos(x'x) \qquad\qquad\quad + f_{zy}\cos(x'z) + f_{ly}\cos(x'l),\\
\Sigma_z &= f_{xz}\cos(x'x) + f_{yz}\cos(x'y) \qquad\qquad\quad + f_{lz}\cos(x'l),\\
\Sigma_l &= f_{xl}\cos(x'x) + f_{yl}\cos(x'y) + f_{zl}\cos(x'z).
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir hier, unter j' zunächst eine beliebige Achse verstanden, der Reihe nach mit $\cos(j'x)$, $\cos(j'y)$, $\cos(j'z)$, $\cos(j'l)$ und addieren, so entsteht nach (7) die Komponente von Σ nach dieser Achse j' und zwar ergibt sich

für $j' = x'$ die Summe 0,

für $j' = y'$ der Ausdruck (8),

für $j' = z'$ derselbe Ausdruck bei Vertauschung von y' mit einer zu x' senkrechten neuen Richtung z' usw.

Die rechte Seite von (9) stellt also in der Tat das Quadrupel derjenigen Größen dar, die wir nach Gleichung (6) mit $f_{x'}$ zu bezeichnen haben, nämlich das Quadrupel

$$(0 \quad f_{x'y'} \quad f_{x'z'} \quad f_{x'l'}).$$

Der Vollständigkeit halber sei auch das Verhalten eines Vektors dritter Art bei der Projektion auf einen beliebigen Raum $x'y'z'$ erwähnt. Seine Komponente nach dem Raum $x'y'z'$ würde sich durch einen viergliedrigen Ausdruck berechnen, in dem die dreireihigen Unterdeterminanten der Richtungskosinusse als Koeffizienten auftreten, für die man aber auch nach den zwischen ihnen bestehenden Orthogonalitätsbedingungen die Richtungskosinus der gemeinsamen Senkrechten l' setzen kann. Der Vierervektor dritter Art projiziert sich daher ebenso wie der Vierervektor erster Art, der seine Ergänzung bildet.

Wir überzeugen uns nun, daß die hier entwickelten Projektions- oder Komponentenformeln identisch sind mit den Transformationsformeln der Relativtheorie. Zu dem Zweck betrachten wir, wie üblich, den Sonderfall, daß das neue Bezugssystem der $x'y'z'l'$ in den beiden mittleren Achsen mit dem ursprünglichen der $x\,y\,z\,l$ übereinstimmt, so daß jenes aus diesem durch eine Drehung in der $x\,l$-Ebene (um die $y\,z$-Ebene) hervorgeht (Drehwinkel φ); und zwar sei die x'-Achse eine raumartige, also die l'-Achse eine zeitartige. Dann ist

$$(10)\qquad \begin{cases} \cos(x'x) = \cos(l'l) = \cos\varphi\,, \\ \cos(x'l) = -\cos(l'x) = \sin\varphi\,, \\ \cos(y'y) = \cos(z'z) = 1\,, \\ \cos(y'x) = \ldots \qquad = 0\,. \end{cases}$$

Wenden wir also die Komponentenformel (7) auf den Koordinatenvektor $(x\,y\,z\,l)$ an, so ergibt sich

$$(10\text{a})\qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + l\sin\varphi\,, \quad y' = y\,, \\ l' = -x\sin\varphi + l\cos\varphi\,, \quad z' = z\,. \end{cases}$$

Nun ist $\cos\varphi > 1$, da nach der Anmerkung auf p. 760 $\cos\varphi = x_1 / \sqrt{x_1^{\,2} + l_1^{\,2}}$ und $l_1^{\,2} < 0$ ist, also φ, $\sin\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$ rein imaginär, sowie $|\operatorname{tg}\varphi| < 1$. Man hat daher, wenn β einen echten Bruch bedeutet:

$$(10\text{b})\qquad \operatorname{tg}\varphi = i\beta\,, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Daraufhin werden die Gleichungen (10a) mit der Lorentz-Einsteinschen Transformation identisch und zeigen, daß $v = \beta c$ die Geschwindigkeit bedeutet, mit der sich im Raum der $x\,y\,z$ das neue Achsensystem gegen das ursprüngliche gleichförmig in der x-Richtung verschiebt.

Zugleich zeigt Gleichung (8), wie sich dabei der Sechservektor des Feldes transformiert (oder „projiziert"). Wir haben nach (8) und (10):

$$\begin{aligned} f_{x'y'} &= f_{xy}\cos\varphi - f_{yl}\sin\varphi\,, & f_{z'x'} &= f_{zx}\cos\varphi + f_{zl}\sin\varphi\,, \\ f_{y'z'} &= f_{yz}\,, & f_{x'l'} &= f_{xl}\,, \\ f_{y'l'} &= f_{yl}\cos\varphi + f_{xy}\sin\varphi\,, & f_{z'l'} &= f_{zl}\cos\varphi - f_{zx}\sin\varphi\,, \end{aligned}$$

oder wegen (10b) und (2):

$$(10\text{c})\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_{x'} = \mathfrak{H}_x\,, \quad \mathfrak{H}_{y'} = \dfrac{\mathfrak{H}_y + \beta\,\mathfrak{E}_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad \mathfrak{H}_{z'} = \dfrac{\mathfrak{H}_z - \beta\,\mathfrak{E}_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \\ \mathfrak{E}_{x'} = \mathfrak{E}_x\,, \quad \mathfrak{E}_{y'} = \dfrac{\mathfrak{E}_y - \beta\,\mathfrak{H}_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad \mathfrak{E}_{z'} = \dfrac{\mathfrak{E}_z + \beta\,\mathfrak{H}_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \end{cases}$$

Hiernach erscheinen also auch diese wohlbekannten Transformationsformeln des Feldes als unmittelbarer Ausfluß aus unserer geometrischen Auffassung des Sechservektors und seiner aus der Projektion vierdimensionaler Strecken abgeleiteten Komponentenbildung. Von den Maxwellschen Gleichungen, aus denen diese Formeln bei Lorentz und Einstein abgeleitet werden, war dabei überhaupt nicht die Rede (außer insofern, als wir unter Hinweis auf jene Gleichungen f als Sechservektor ansprachen). Überhaupt stellt sich ja bei Einstein und Minkowski das Relativitätsprinzip als ein der Elektrodynamik übergeordnetes Prinzip dar.

§ 3. Produkte von Vierer- und Sechservektoren.

A. Skalare Produkte.

Zwei *Viererrektoren* P und Φ werden *skalar* multipliziert nach der Regel

$$(P\,\Phi) = P_x\,\Phi_x + P_y\,\Phi_y + P_z\,\Phi_z + P_l\,\Phi_l\,.$$

Bedeutet z. B. P die Viererdichte, Φ das Viererpotential (Zusammenfassung von skalarem und Vektorpotential, vgl. später), so wird $(P\,\Phi)$ das „elektrokinetische Potential“ von Schwarzschild. Das Quadrat der Länge eines Vierervektors ist gleich dem skalaren Produkt mit sich selbst, z. B. $|P|^2 = (P\,P)$ vgl. (1a).

Bei beliebiger Bedeutung von P und Φ definiert die aus der gewöhnlichen Vektorrechnung übertragene Formel

$$(P\,\Phi) = |P|\,|\Phi|\cos(P,\,\Phi)$$

den Richtungskosinus zweier beliebiger Richtungen; sie wurde in diesem Sinne bereits am Anfang des § 2, Anm. benutzt. Die Definition des Senkrechtstehens vom Anfange des § 1 bildet einen speziellen Fall davon.

Auch zwei *Sechservektoren* f und F können *skalar* multipliziert werden nach der Regel

$$(f\,F) = f_{xy}\,F_{xy} + f_{yz}\,F_{yz} + \ldots f_{zl}\,F_{zl}\,.$$

Unter diese Regel fallen die beiden Invarianten des Sechservektors f, vgl. (5a, b)

$$|f|^2 = (f\,f) \quad \text{und} \quad (f\,f^*)\,.$$

B. Vektorielle Produkte.

Zwei *Vierervektoren* u, v werden *vektoriell* multipliziert nach einer Regel, die dem gewöhnlichen dreidimensionalen Vektorprodukt analog ist. So wie dort aus zwei Vektoren erster Art ein Vektor zweiter Art entsteht, so ergibt sich hier aus zwei Vierervektoren ein *Sechservektor*, und zwar ein spezieller Sechservektor φ (einfaches Flächenstück) mit der Invariante $(\varphi\varphi^*) = 0$. Die schon in § 1 benutzte Multiplikationsregel lautet

$$\varphi_{xy} = u_x v_y - u_y v_x, \ldots$$

φ bedeutet nach Größe und Lage das aus u und v gebildete *Parallelogramm.*

Man kann auch einen *Vierervektor* und einen *Sechservektor vektoriell,* nämlich zu einem *Vierervektor dritter Art* vereinigen. Ist der Sechservektor speziell ein einfaches Flächenstück, so bedeutet der Vektor dritter Art direkt das aus dem Vierervektor und der Ergänzung dieses Flächenstücks gebildete räumliche *Parallelopiped.* Im allgemeinen Falle wird er als geometrische Summe zweier solcher Parallelopipede konstruiert, kann aber immer (vgl. den Schluß von § 1) durch einen Vierervektor erster Art ersetzt werden. Der Sachverhalt ist derselbe wie in der gewöhnlichen Vektorrechnung, wo durch vektorielle Multiplikation eines Vektors erster und zweiter Art ein Vektor erster Art entsteht. Das formale Schema dieser Multiplikation entnehmen wir eben diesem dreidimensionalen Falle.

Sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_x \mathfrak{A}_y \mathfrak{A}_z)$ der Vektor erster Art und $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_{yz}, \mathfrak{B}_{zx}, \mathfrak{B}_{xy})$ der Vektor zweiter Art. Aus letzterem bilden wir drei spezielle Vektoren erster Art, nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= (\mathfrak{B}_{xx}, \mathfrak{B}_{xy}, \mathfrak{B}_{xz}), \\ \mathfrak{B}_y &= (\mathfrak{B}_{yx}, \mathfrak{B}_{yy}, \mathfrak{B}_{yz}), \qquad (\mathfrak{B}_{ik} = -\mathfrak{B}_{ki}, \ \mathfrak{B}_{ii} = 0) \\ \mathfrak{B}_z &= (\mathfrak{B}_{zx}, \mathfrak{B}_{zy}, \mathfrak{B}_{zz}), \end{aligned}$$

allgemein $\mathfrak{B}_j$, deren jeder wegen $\mathfrak{B}_{jj} = 0$ senkrecht zur j-Achse steht. Sie können ebenso wie in § 1, Gleichung (6a) auch als Komponenten des Flächenstückes $\mathfrak{B}$ nach der j-Achse bezeichnet werden und bedeuten ursprünglich Flächenstücke, die dieser Achse parallel sind. Als j-Komponente des Vektorproduktes von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist nun zu definieren das skalare Produkt der beiden Vektoren erster Art $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_j$, nämlich

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_j) = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_{jx} + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_{jy} + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_{jz}.$$

Dies stimmt mit der gewöhnlichen Regel des Vektorproduktes überein und liefert z. B. für $j = x$:

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_x) = \mathfrak{A}_y\,\mathfrak{B}_{xy} - \mathfrak{A}_z\,\mathfrak{B}_{zx}.$$

Dementsprechend definieren wir im vierdimensionalen Falle das Produkt (Pf) aus einem beliebigen Vierervektor P und Sechservektor f durch seine vier Komponenten für $j = x, y, z, l$ mittels der Formel:

$$(Pf_j) = P_x f_{jx} + P_y f_{jy} + P_z f_{jz} + P_l f_{jl}. \tag{11}$$

Jede dieser Komponenten wird also gewonnen durch skalare Multiplikation des Vierervektors P mit dem zur j-Achse senkrechten in (6a) definierten und aus f abgeleiteten speziellen Vierervektor f_j. Im nächsten Paragraphen betrachten wir als wichtigstes Beispiel hierzu die elektrodynamische Kraft $\mathfrak{F}$. Hier möge zunächst die schon genannte geometrische Bedeutung dieses Vektors dritter Art begründet werden, in dem speziellen Falle, wo $f = \varphi$ ein einfaches Flächenstück darstellt.

Wir ersetzen φ als Parallelogramm durch zwei Vierervektoren u, v und gehen zu dem dualen Flächenstück φ^* über, das aus zwei zu u, v senkrechten Vierervektoren u^*, v^* gebildet wird. Die Komponenten von $(P\varphi)$ erweisen sich dann gleich den vier dreireihigen Unterdeterminanten D_x, D_y, D_z, D_l des Schemas

$$\begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z & P_l \\ u_x^* & u_y^* & u_z^* & u_l^* \\ v_x^* & v_y^* & v_z^* & v_l^* \end{vmatrix}. \tag{11a}$$

Bei Fortlassung der ersten Kolonne entsteht nämlich:

$$\begin{aligned} D_x = {} & P_y(u_z^* v_l^* - u_l^* v_z^*) + P_z(u_l^* v_y^* - u_y^* v_l^*) \\ & + P_l(u_y^* v_z^* - u_z^* v_y^*) = P_y\,\varphi_{zl}^* + P_z\,\varphi_{ly}^* + P_l\,\varphi_{yz}^*. \end{aligned}$$

Hierfür kann man nach (5a) schreiben:

$$D_x = P_y\,\varphi_{xy} + P_z\,\varphi_{xz} + P_l\,\varphi_{xl},$$

was mit unserer Definition (11) von $(P\varphi_x)$ übereinstimmt.

D_x bedeutet nach bekannten Formeln der Raumgeometrie ein in dem yzl-Raum gelegenes Parallelopiped, gebildet aus den Vektoren (P_y, P_z, P_l), (u_y^*, u_z^*, u_l^*), (v_y^*, v_z^*, v_l^*), d. h. aus den Projektionen der Vierervektoren P, u^*, v^* auf den yzl-Raum; D_x ist also zugleich die Projektion des aus diesen Vierervektoren gebildeten, im vierdimensionalen Raum gelegenen

Parallelopipeds auf den Koordinatenraum der yzl. D_x, D_y, D_z, D_l stellen also nach der Definition vom Ende des § 1 in der Tat die Komponenten eines Vektors dritter Art dar. Indem wir diese Komponenten mit D_x, ... statt ausführlicher mit D_{yzl} ... bezeichneten, haben wir bereits den Übergang von dem Raumstück zu seiner Ergänzung, der auf dem Raumstück senkrechten Strecke, gemacht. Daß die als Vektor erster Art aufgefaßte Größe (D_x, D_y, D_z, D_l) auf dem aus den Vektoren P, u^*, v^* gebildeten Parallelopiped senkrecht steht, erkennt man direkt. Man hat nur das obige 3×4 reihige Determinantenschema durch Hinzufügung der vier Komponenten von P oder u^* oder v^* zu einer verschwindenden vierreihigen Determinante zu ergänzen und erhält so

(11 b) $$(P D) = (u^* D) = (v^* D) = 0\,.$$

Handelt es sich um das Produkt aus P mit einem allgemeinen Sechservektor $f = \varrho\,\varphi + \varrho^* \varphi^*$, so betrachte man in gleicher Weise die beiden Parallelopipede D und D^*, welche bzw. aus den Vektoren P, u^*, v^* und P, u, v gebildet werden. Dann stellt $(P f) = \varrho\, D + \varrho^* D^*$ die geometrische Summe dieser beiden Raumstücke dar, die man sich aus den zu jenen Raumstücken senkrechten Ergänzungen als Resultierende der beiden Strecken $\varrho\, D$ und $\varrho^* D^*$ hergestellt denken kann.

C. Tensorprodukte.

Ein *Vektor zweiter Art* liefert, vollständig mit sich selbst multipliziert, einen *Tensor*. Wir erläutern die Bildungsweise zunächst im dreidimensionalen Falle.

Sei $\mathfrak{B}$ ein dreidimensionaler Vektor zweiter Art mit den Komponenten $\mathfrak{B}_{yz}$, $\mathfrak{B}_{zx}$, $\mathfrak{B}_{xy}$ und $\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{B}_h$ irgend zwei der aus ihm abgeleiteten drei speziellen Vektoren erster Art (vgl. p. 765), so sei allgemein für $j, h = x, y, z$

$$T_{jh} = (\mathfrak{B}_j\, \mathfrak{B}_h) = \mathfrak{B}_{jx}\, \mathfrak{B}_{hx} + \mathfrak{B}_{jy}\, \mathfrak{B}_{hy} + \mathfrak{B}_{jz}\, \mathfrak{B}_{hz}\,.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$T_{jh} = T_{hj}\,, \quad T_{jj} \neq 0\,.$$

Die so definierte dreidimensionale Tensorgröße ist sechskomponentig und unterscheidet sich von unserem vierdimensionalen Sechservektor, für den $f_{ik} = -f_{ki}$, $f_{ii} = 0$ gilt, grundsätzlich. Geometrisch deutet man die sechs Komponenten von T bekanntlich am besten als Koeffizienten der Gleichung einer Fläche zweiten Grades.

Im vierdimensionalen Falle gehen wir entsprechend von einem Sechservektor f aus und definieren einen Tensor $(f f)$ durch die sämtlichen möglichen skalaren Produkte der nach Gleichung (6a) aus f abgeleiteten speziellen Vierervektoren f_j, f_h für $h, j = x, y, z, l$. Daraus entstehen zunächst 16 Tensorkomponenten

$$(f_j f_h) = f_{jx} f_{hx} + f_{jy} f_{hy} + f_{jz} f_{hz} + f_{jl} f_{hl},$$

die sich aber wegen $(f_j f_h) = (f_h f_j)$ auf 10 reduzieren. Die Ausrechnung liefert, wenn $f = (\mathfrak{H}, -i\mathfrak{E})$ im besonderen den Feldvektor bedeutet, für $j = h$:

$$\begin{aligned}
(f_x f_x) &= \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2, \\
(f_y f_y) &= \mathfrak{H}_z^2 + \mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2, \\
(f_z f_z) &= \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2, \\
(f_l f_l) &= -\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2
\end{aligned}$$

und für $j \neq h$

$$\begin{aligned}
(f_x f_y) &= (f_y f_x) = -(\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y), \\
(f_y f_z) &= (f_z f_y) = -(\mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z), \\
(f_z f_x) &= (f_x f_z) = -(\mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_x), \\
(f_x f_l) &= (f_l f_x) = \ \ i(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y), \\
(f_y f_l) &= (f_l f_y) = \ \ i(\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z), \\
(f_z f_l) &= (f_l f_z) = \ \ i(\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x).
\end{aligned}$$

Daneben betrachten wir den aus dem dualen Sechservektor $f^* = (-i\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$ gebildeten Tensor $(f^* f^*)$, dessen Komponenten aus den vorstehenden durch Vertauschung von $\mathfrak{H}$ mit $-i\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}$ mit $+i\mathfrak{H}$ entstehen, z. B.

$$\begin{aligned}
(f_x^* f_x^*) &= -\mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{H}_x^2, \\
(f_x^* f_y^*) &= \ \ (f_y^* f_x^*) = +(\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y), \\
(f_x^* f_l^*) &= \ \ (f_l^* f_x^*) = \ \ i(\mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_z - \mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_y)
\end{aligned}$$

und gehen schließlich zu dem aus beiden sich zusammensetzenden Tensor[1])

(12) $$T = \tfrac{1}{2}\left((f \cdot f) - (f^* f^*)\right)$$

1) Nach einem freundlichen Vorschlag von Hrn. Kollegen M. Laue.

über, mit den Komponenten:

$$(12\text{a})\quad \left\{\begin{aligned} T_{xx} &= \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{H}_x^2+\mathfrak{H}_y^2+\mathfrak{H}_z^2-\mathfrak{E}_x^2+\mathfrak{E}_y^2+\mathfrak{E}_z^2),\\ T_{yy} &= \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{H}_y^2+\mathfrak{H}_z^2+\mathfrak{H}_x^2-\mathfrak{E}_y^2+\mathfrak{E}_z^2+\mathfrak{E}_x^2),\\ T_{zz} &= \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{H}_z^2+\mathfrak{H}_x^2+\mathfrak{H}_y^2-\mathfrak{E}_z^2+\mathfrak{E}_x^2+\mathfrak{E}_y^2),\\ T_{ll} &= \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{H}_x^2-\mathfrak{H}_y^2-\mathfrak{H}_z^2-\mathfrak{E}_x^2-\mathfrak{E}_y^2-\mathfrak{E}_z^2); \end{aligned}\right.$$

$$(12\text{b})\quad \left\{\begin{aligned} T_{xy} &= T_{yx} = -(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y+\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y),\\ T_{yz} &= T_{zy} = -(\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z+\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z),\\ T_{zx} &= T_{xz} = -(\mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_x+\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x); \end{aligned}\right.$$

$$(12\text{c})\quad \left\{\begin{aligned} T_{xl} &= T_{lx} = i(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z-\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y),\\ T_{yl} &= T_{ly} = i(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x-\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z),\\ T_{zl} &= T_{lz} = i(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y-\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x). \end{aligned}\right.$$

Wie man sieht, sind die Komponenten T_{ik} mit den obigen Komponenten $(f_i f_k)$ identisch; die Komponenten (T_{ii}), die von $(f_i f_i)$ verschieden sind, genügen der Relation $T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}+T_{ll}=0$. Die drei Komponenten (12c) sind, nach Multiplikation mit $-ic$ gleich den Komponenten des Poyntingschen Energieflusses, die ersten drei Komponenten (12a) und die drei Komponenten (12b) stellen die Maxwellschen Spannungen dar, während die vierte Komponente (12a) die negativ genommene Energiedichte ist.

Auch jetzt deutet man die 16 Tensorkomponenten am besten als Koeffizienten in der Gleichung eines im vierdimensionalen Raum gelegenen dreidimensionalen „Raumes zweiten Grades".

Die hier besprochenen Produktbildungen fallen sämtlich unter das von Minkowski benutzte Matrixschema. Zweifellos bietet dieses in mathematischer Hinsicht den Vorteil größtmöglicher Allgemeinheit und Einfachheit. Im Vorangehenden sollte gerade umgekehrt versucht werden, die besondere geometrische Bedeutung der einzelnen Produkte im Anschluß an die gewöhnliche Vektorrechnung hervorzukehren.

Alle diese Produkte sind ihrer geometrischen Bedeutung nach von der Wahl des Bezugssystems unabhängig, und zwar in folgendem Sinne: Die unter A. betrachteten skalaren Produkte sind reine Invarianten der Lorentztransformation. Die unter B. besprochenen Vektorprodukte transformieren sich kovariant wie ein Sechser- bzw. ein Vierervektor; ihre Komponenten im neuen Bezugssystem hängen also nach den Formeln des § 2 mit denen im alten Bezugssystem zusammen.

Für das Vektorprodukt (Pf) rechnet man dies unmittelbar aus Gleichung (9) nach. Multipliziert man nämlich hier die links und rechts stehenden Vierervektoren skalar mit dem Vierervektor P, so entsteht

$$(Pf_{x'}) = (Pf_x)\cos(x'x) + (Pf_y)\cos(x'y) \\ + (Pf_z)\cos(x'z) + (Pf_l)\cos(x'l),$$

d. h. diejenige Formel, welche nach § 2, Gleichung (7), die x'-Komponente eines Vierervektors durch die alten Komponenten ausdrückt. (Pf) ist also ein richtiger Vierervektor und $(Pf_{x'})$ seine Projektion auf die x'-Richtung.

Zugleich berechnen sich auch die neuen aus den alten Tensorkomponenten nach dem einfachen Schema der Tensortransformation, dessen Koeffizienten quadratisch aus den Richtungskosinussen der neuen gegen die alten Koordinatenachsen gebildet werden.

§ 4. Die elektrodynamische Kraft $\mathfrak{F}$.

Die im vorigen Paragraph unter (11) besprochene kovariante Bildung (Pf) aus der Viererdichte P und dem Feldvektor f beansprucht ein besonderes Interesse. Ihre formale Ausrechnung ergibt:

$$\mathfrak{F}_x = (Pf_x) = \varrho\left(\frac{\mathfrak{v}_x}{c} f_{xx} + \frac{\mathfrak{v}_y}{c} f_{xy} + \frac{\mathfrak{v}_z}{c} f_{xz} + i f_{xl}\right) \\ = \varrho\left(\frac{\mathfrak{v}_y}{c}\mathfrak{H}_z - \frac{\mathfrak{v}_z}{c}\mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_x\right)$$

und ähnlich für die y, z-Komponente; dagegen für die l-Komponente:

$$\mathfrak{F}_l = (Pf_l) = \varrho\left(\frac{\mathfrak{v}_x}{c} f_{lx} + \frac{\mathfrak{v}_y}{c} f_{ly} + \frac{\mathfrak{v}_z}{c} f_{lz} + i f_{ll}\right) \\ = \frac{i\varrho}{c}(\mathfrak{v}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{v}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{v}_z\mathfrak{E}_z).$$

In der Bezeichnung der gewöhnlichen dreidimensionalen Vektorrechnung finden wir also für $j = x, y, z$ bzw. l:

$$\mathfrak{F}_j = \varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\right), \quad \mathfrak{F}_l = \frac{i\varrho}{c}(\mathfrak{E}\mathfrak{v}). \tag{13}$$

$\mathfrak{F}_j$ stellt also die j-Komponente der auf die Volumeinheit wirkenden elektrodynamischen Kraft, $\mathfrak{F}_l$ die mit i/c multiplizierte an der bewegten Ladung pro Volumen- und Zeiteinheit geleistete elektrische Arbeit dar. Letztere heiße die *energetische*, erstere die *dynamischen* Komponenten.

Zerlegt man $f = \varrho\,\varphi + \varrho^*\,\varphi^*$ in zwei einfache Flächenstücke, so zerlegt sich $\mathfrak{F} = \varrho\,D + \varrho^*\,D^*$, wie im vorigen Paragraph besprochen, in zwei einfache Raumstücke, deren Ergänzungen auf der Viererdichte P senkrecht stehen. Da letztere (vgl. den Anfang des § 1) die Richtung des Weltlinienelementes der Ladung hat (ihre Komponenten waren proportional mit dx, dy, dz, dl), *so steht auch die Kraft $\mathfrak{F}$ auf der Weltlinie ihres Angriffspunktes senkrecht.* Die entsprechende Forderung hat man auf eine beliebige Kraft zu erweitern, solange man dissipative Vorgänge wie die Erzeugung Joulescher Wärme usw. ausschließt.

Die vierte energetische Komponente von $\mathfrak{F}$ hat keineswegs, wie es zunächst scheinen könnte, nur eine formale Bedeutung. Vielmehr rangiert bei einem Wechsel des Bezugssystems ein Teil derselben direkt unter die wirklichen dynamischen Komponenten. Handelt es sich z. B. wie in den Gleichungen (10a) um ein Bezugssystem $x'\,y'\,z'\,l'$, welches durch eine Drehung in der $x\,l$-Ebene aus dem ursprünglichen hervorgeht, so wird

$$(14)\qquad \mathfrak{F}_{x'} = \mathfrak{F}_x \cos\varphi + \mathfrak{F}_l \sin\varphi \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_{x'} \cos\varphi - \mathfrak{F}_{l'} \sin\varphi\,.$$

Die energetischen Zusatzglieder $\mathfrak{F}_l \sin\varphi$ (bzw. $-\,\mathfrak{F}_{l'} \sin\varphi$) sind klein von der Ordnung $1/c^2$, da sowohl $\mathfrak{F}_l$ (bzw. $\mathfrak{F}_{l'}$) wie $\sin\varphi$ den Faktor $1/c$ enthalten. *Trotzdem sind diese Zusatzglieder für die Durchführung des Relativitätsprinzipes unentbehrlich,* wie später an dem Beispiel des einfachen Coulombschen Gesetzes erläutert werden soll.

Kennt man die dynamischen Komponenten $\mathfrak{F}_x$ und $\mathfrak{F}_x'$ irgend einer Kraft $\mathfrak{F}$ in zwei relativ zueinander bewegten Systemen, z. B. auf Grund hinreichend genauer Messungen, so kann man durch ihren Vergleich nach den vorstehenden Formeln die energetischen Komponenten $\mathfrak{F}_l$ und $\mathfrak{F}_{l'}$ bestimmen. Umgekehrt können wir sagen: *Eine Kraft* (z. B. auch die Gravitation) *ist erst dann physikalisch vollständig bekannt,* d. h. im Sinne des Relativitätsprinzipes für ein beliebiges Bezugssystem angebbar, *wenn auch ihre energetische Komponente $\mathfrak{F}_l$ bekannt ist.*

Wenn wir das gestrichene System speziell als „mitbewegtes“ wählen, so also, daß der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{F}$ in diesem Bezugssystem ruht, so wird $dx' = dy' = dz' = 0$ und auch $\mathfrak{F}_{l'} = 0$, weil ja die Kraft auf der Weltlinie ihres Angriffspunktes senkrecht steht. Nur in diesem Falle verschwindet die energetische Komponente aus den Formeln zur Bestimmung von $\mathfrak{F}_x \dots \mathfrak{F}_l$, die also einfach lauten (x-Richtung = Richtung der Relativbewegung):

$$\mathfrak{F}_x = \cos\varphi\,\mathfrak{F}_{x'}, \quad \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_{y'}, \quad \mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}_{z'}, \quad \mathfrak{F}_l = -\sin\varphi\,\mathfrak{F}_{x'}. \tag{14a}$$

Dies die typischen Transformationsformeln für den Übergang von dem „mitbewegten“ zu einem „ruhenden System“, gültig für jeden Vektor erster (oder dritter) Art, insbesondere für die auf die Volumeinheit bezogene elektrodynamische Kraft. Wir nehmen an, daß sich ebenso wie diese *jede „spezifische“, d. h. pro Volumeinheit gerechnete Kraft als Vektor erster Art verhält.*

Anders die Gesamtkraft $\mathfrak{K}$ bez. $\mathfrak{K}'$ im ruhenden oder mitbewegten System, deren erstere wegen ihrer Beziehung zu einem willkürlichen Koordinatensystem in der Relativtheorie eigentlich keinen Platz hat. Durch die spezifische Kraft ist sie so zu definieren:

$$\mathfrak{K} = \int \mathfrak{F}\, dS, \quad \mathfrak{K}' = \int \mathfrak{F}'\, dS', \tag{15}$$

wenn $dS = dx\,dy\,dz$ das dreidimensionale Volumelement im ruhenden, $dS' = dx'\,dy'\,dz$ dasjenige im mitbewegten System bedeutet. Letzteres ist von ersterem verschieden, je nach der gegenseitigen Lage der beiden Bezugssysteme. Durch das Hinzutreten von dS, dS' wird daher der Vektorcharakter der rechten Seiten gestört. *Die Gesamtkraft verhält sich nicht einfach wie ein Vektor erster Art.*

Aus Fig. 1 folgt

$$dS' = dS\cos\varphi = \frac{dS}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{15a}$$

Ist nämlich, wie wir jetzt voraussetzten, das gestrichene System mit seiner l'-Achse nach der Weltlinie des Angriffspunktes von $\mathfrak{F}$ orientiert, so steht der $x'y'z'$-Raum und dessen Volumelement dS' senkrecht auf dieser Weltlinie und es ist dS' die senkrechte Projektion von dS auf diesen Raum. Der Projektionswinkel ist gleich dem Winkel der beiden in Betracht kommenden Normalen l' und l, also gleich φ. Der Umstand, daß φ imaginär ist, bringt es mit sich, daß die Projektion dS' größer ist als das projizierte Element dS, entgegen unserer Zeichnung in Fig. 1, die mit einem reellen φ operiert. Das Verhältnis $dS/dS' = \sqrt{1-\beta^2}$ ist die bekannte Lorentz-Kontraktion.

Aus (15), (15a) und (14a) folgt jetzt unmittelbar:

$$\mathfrak{K}_x = \int \mathfrak{F}_x \, dS = \cos\varphi \int \mathfrak{F}_{x'} \, dS = \int \mathfrak{F}_{x'} \, dS' = \mathfrak{K}_{x'},$$

$$\mathfrak{K}_y = \int \mathfrak{F}_y \, dS = \int \mathfrak{F}_{y'} \, dS = \frac{1}{\cos\varphi} \int \mathfrak{F}_{y'} \, dS' = \frac{1}{\cos\varphi} \mathfrak{K}_{y'} \quad \text{usw.}$$

und zusammenfassend:

$$(14\text{b}) \quad \mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_{x'}, \quad \mathfrak{K}_y = \frac{1}{\cos\varphi} \mathfrak{K}_{y'}, \quad \mathfrak{K}_z = \frac{1}{\cos\varphi} \mathfrak{K}_{z'}, \quad \mathfrak{K}_l = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \mathfrak{K}_{x'}.$$

Diese Formeln (14b), verglichen mit (14a), belegen die obige Angabe, daß sich $\mathfrak{K}$ nicht wie ein Vektor verhält. Bezeichnen wir nämlich, in formaler Analogie zu unserer Vektorbezeichnung, mit $|\mathfrak{K}|^2$ bzw. $|\mathfrak{K}'|^2$ die Quadratsumme der ungestrichenen bzw. gestrichenen Komponenten (wobei $\mathfrak{K}_l'$ nach der Definitionsgleichung (15) gleich Null ist), so wird wegen (14b) $|\mathfrak{K}|$ nicht gleich $|\mathfrak{K}'|$, sondern

$$|\mathfrak{K}| = \frac{|\mathfrak{K}'|}{\cos\varphi} = |\mathfrak{K}'| \sqrt{1-\beta^2},$$

während aus (14a), wie es für einen Vierervektor sein muß, natürlich $|\mathfrak{F}| = |\mathfrak{F}'|$ folgt.

Wir betrachten noch speziell den Fall eines im gestrichenen System wirkenden Normaldruckes, d. h. einer Kraftverteilung, die an einer im gestrichenen System ruhenden Fläche σ' angreifend, dort zu einem in die Normale n' fallenden pro Flächeneinheit gemessenen Drucke p' Anlaß gibt. Wir können diesen Fall entweder als eine Verteilung unendlich kleiner Gesamtkräfte $\mathfrak{K}$ oder unendlich großer spezifischer Kräfte $\mathfrak{F}$ ansehen, nach dem einen oder anderen der folgenden beiden Schemata

$$\mathfrak{K}_{n'} = p' \, d\sigma' \quad \text{oder} \quad p' = \mathfrak{F}_{n'} \, dn'.$$

Den ersten Standpunkt nimmt Einstein[1]) ein. Der letztere

1) A. Einstein, Jahrbuch f. Radioakt. 4. p. 448.

dürfte wegen des übersichtlicheren vektoriellen Verhaltens von $\mathfrak{F}$ vorzuziehen sein. Von diesem Standpunkte aus denken wir uns $\mathfrak{F}$ über eine der Fläche σ' anliegende Schicht von der Dicke dn' verteilt, ähnlich wie man eine Oberflächenladung als Grenze einer räumlichen Verteilung auffaßt.

Errichten wir auf dieser dreidimensionalen im $x'y'z'$-Raum gelegenen Schicht $\sigma' dn'$ einen vierdimensionalen Zylinder parallel der l'-Achse, so umfaßt dieser die Gesamtheit aller Weltlinien der Schichtpunkte. Die Kraft $\mathfrak{F}'$, die im $x'y'z'$-Raume senkrecht auf σ' stehen sollte, fällt zugleich in die Normale dieses vierdimensionalen Zylinders, da sie auch senkrecht zu der Weltlinie ihres Angriffspunktes ist. Legt man nun irgend einen geneigten Schnitt als xyz-Raum durch den Zylinder, so schneidet dieser aus dem Zylinder dasjenige Bild σdn der Schicht aus, das einem im $xyzl$-System befindlichen Beobachter erscheint. In Fig. 2 ist als Zeichenebene die (nach p. 753, Anm. 2 vollkommen bestimmte) durch den betrachteten Punkt von σ zu legende Normalebene zur Tangentialebene von σ gewählt. Dieselbe enthält nicht nur die Normale n von σ im xyz-Raum, sondern auch die Zylindernormale n' sowie die l-Achse, da alle drei Richtungen auf σ senkrecht stehen. In die n'-Richtung fällt die Richtung des Vektors $\mathfrak{F}$; wir haben nach Richtung und Größe $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{n'}$. Für das Bezugssystem $xyzl$ zerlegt er sich in zwei Komponenten, die beide in der Figur ersichtlich sind: die energetische Komponente $\mathfrak{F}_l$ und die dynamische $\mathfrak{F}_n$.

Eine Komponente von $\mathfrak{F}$ senkrecht zur Zeichenebene in der Tangentialebene von σ dagegen gibt es nicht, d. h. *auch im ungestrichenen System steht* (nach Abtrennung ihrer energetischen Komponente) *die Kraft* $\mathfrak{F}$ *und der ihr entsprechende Druck* p *senkrecht auf ihrer Angriffsfläche* σ. Bezüglich der Größe von p folgt jetzt unmittelbar aus der Figur: Sei α der Winkel zwischen n und n' (wobei α zwischen 0 und φ liegen wird, und diese äußersten Werte dann annimmt, wenn n' im besonderen senkrecht oder parallel zur Richtung der Relativbewegung des

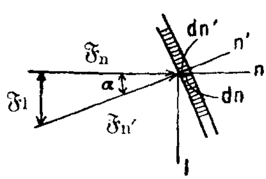

Fig. 2.

gestrichenen und ungestrichenen Systems liegt). Dann gilt offenbar

$$\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_{n'} \cos\alpha \quad \text{und zugleich} \quad dn' = dn \cos\alpha$$

also

$$\mathfrak{F}_n\, dn = \mathfrak{F}_{n'}\, dn' \quad \text{oder} \quad p = p'.$$

Denn der ungestrichene Beobachter definiert seinen Druck p aus der dynamischen Komponente $\mathfrak{F}_n$ von $\mathfrak{F}$ und der von ihm gesehenen Schichtdicke dn durch $\mathfrak{F}_n dn$ geradeso wie der gestrichene durch $\mathfrak{F}_{n'} dn'$. *Die Gleichheit dieser beiden Drucke*, die für die Plancksche Thermodynamik bewegter Systeme grundlegend ist, *folgt also hier wieder als rein geometrische Aussage über das Verhalten vierdimensionaler Vektoren und ihrer Projektion.*

Beim Operieren mit der Gesamtkraft $\mathfrak{K}$ läßt sich eine so unmittelbare geometrische Schlußweise schwerer durchführen, weil sich $\mathfrak{K}$ nicht wie ein Vektor verhält.

Wir kehren schließlich nochmals zur elektrodynamischen Bedeutung von $\mathfrak{F} = (Pf)$ zurück. Während diese im Anfange dieses Paragraphen durch die formale Übereinstimmung mit dem Lorentzschen Kraftansatz, Gleichung (13), begründet wurde, soll dieselbe jetzt direkt aus dem Relativitätsprinzip erschlossen werden.

Wir betrachten eine im gestrichenen System ruhende Volumeinheit, in welcher elektrische Ladung mit der Dichte ϱ' verteilt ist. Da die elektrische Feldstärke definiert ist als bewegende Kraft auf die Ladung 1, so wirkt auf unsere Volumeinheit die Kraft $\varrho'\mathfrak{E}'$. Hierdurch sind die drei dynamischen Komponenten der spezifischen Kraft $\mathfrak{F}$ im gestrichenen System bestimmt; die energetische Komponente ist gleich Null zu setzen, da der Angriffspunkt von $\mathfrak{F}$ im gestrichenen System ruht und seine Weltlinie auf $\mathfrak{F}$ senkrecht steht. Die vier Komponenten von $\mathfrak{F}$ lauten also:

$$\mathfrak{F}_{x'} = \varrho'\mathfrak{E}_{x'}, \quad \mathfrak{F}_{y'} = \varrho'\mathfrak{E}_{y'}, \quad \mathfrak{F}_{z'} = \varrho'\mathfrak{E}_{z'}, \quad \mathfrak{F}_{l'} = 0.$$

Andererseits liefert der Vektor (Pf) für die $x'y'z'l'$-Achse nach Gleichung (11), da $P_{x'} = P_{y'} = P_{z'} = 0$, $P_{l'} = i\varrho'$ (vgl. Gleichung (1)) und $f_{x'l'} = -i\mathfrak{E}_{x'}$ usw. (vgl. Gleichung (2)):

$$(Pf_{x'}) = P_{l'} f_{x'l'} = \varrho'\mathfrak{E}_{x'}, \quad (Pf_{y'}) = P_{l'} f_{y'l'} = \varrho'\mathfrak{E}_{y'},$$

$$(Pf_{z'}) = P_{l'} f_{z'l'} = \varrho'\mathfrak{E}_{z'}, \quad (Pf_{l'}) = P_{l'} f_{l'l'} = 0.$$

Dieser Vektor stimmt also für das gestrichene System in allen vier Komponenten mit der spezifischen Kraft $\mathfrak{F}$ überein. *Unter der alleinigen Annahme, daß sich diese Kraft wie ein Vierervektor verhält, muß also $\mathfrak{F}$ für jedes Bezugssystem durch den Vierervektor (Pf) gegeben sein.* In der Relativtheorie folgt also der Lorentzsche *Kraftansatz* unmittelbar aus der Definition der elektrischen Feldstärke unter der alleinigen Annahme, daß sich die spezifische Kraft wie ein Vierervektor verhält, der auf der Weltlinie des Angriffspunktes senkrecht steht. In der ursprünglichen Lorentzschen Absoluttheorie dagegen mußte dieser Kraftansatz als neue Erfahrungstatsache neben den Feldgleichungen eingeführt werden. *Es scheint mir eine besonders schöne Leistung der Relativtheorie zu sein, daß sie diese Erfahrungstatsache als solche entbehrlich macht, indem sie sie aus viel allgemeineren Prinzipien ableitet.*

Hieran schließt sich noch eine Bemerkung mehr kritischer Natur. Das Relativitätsprinzip will selbstverständlich nur für stationäre oder quasistationäre Bewegungen der beiden Bezugssysteme gegeneinander gelten. Eine Ableitung des Lorentzschen Kraftansatzes aus der Relativtheorie garantiert denselben daher nur für den Umfang dieser Bewegungen. Während man in der Absoluttheorie diesen Ansatz als allgemeingültig postulierte, wird man, wenn man das Relativitätsprinzip als seine wahre Quelle ansieht, es durchaus offen lassen müssen, ob nicht in dem Ausdruck von $\mathfrak{F}$ für eine wirklich beschleunigte Bewegung Zusatzglieder auftreten können, die von der Beschleunigung erster und höherer Ordnung abhängen mögen. Da alle realisierbaren Bewegungen, wie es scheint, unter die Klasse der quasistationären Bewegungen fallen, so würden solche Zusatzglieder kaum ein praktisches Interesse haben. In prinzipieller Hinsicht aber scheint es mir nützlich, ihre Möglichkeit ins Auge zu fassen.

(Eingegangen 17. März 1910.)