

3. *Diskussion der Versuche über die träge Masse bewegter Elektronen; von W. Heil.*

Es kann als experimentell erwiesen gelten, daß die träge Masse der Elektronen von ihrer Geschwindigkeit abhängig ist. Für die Art dieser Abhängigkeit kommen zwei Theorien in Betracht: die Lorentz-Einsteinsche „Relativtheorie“ und die Abrahamsche „Kugeltheorie“. Dieselben wurden schon mehrmals einer experimentellen Prüfung unterzogen, und zwar im Jahre 1906 durch Hrn. W. Kaufmann¹⁾, 1908 durch Hrn. A. H. Bucherer²⁾ und neuerdings durch Hrn. E. Hupka.³⁾ Während Hr. Kaufmann zugunsten der Kugeltheorie entschied, kamen Hr. Bucherer und Hr. Hupka zu dem Schlusse, daß die Ergebnisse ihrer Messungen zugunsten der Relativtheorie sprechen. Besonders scheinen die Resultate Hrn. Hupkas auf den ersten Blick eine glänzende Bestätigung der Relativtheorie darzustellen, mit der Kugeltheorie aber unvereinbar zu sein.

Die Betrachtungen des Hrn. Hupka über die Genauigkeit seiner Resultate enthalten jedoch einen bemerkenswerten Irrtum. Es heißt auf p. 26 seiner Dissertation: „Der größte mögliche Fehler bei der Bestimmung des Potentials wird auf ± 80 Volt veranschlagt.“ Auf p. 40 heißt es, daß „nicht anzunehmen sei, daß die bei der Bestimmung des Entladungspotentials vorkommenden Fehler $\frac{1}{4}$ Proz. übersteigen.“⁴⁾ Die Deutung der Ablenkungsversuche zugunsten der Kugeltheorie

1) W. Kaufmann, Ann. d. Phys. **19**. p. 497. 1906.

2) A. H. Bucherer, Physik. Zeitschr. **9**. p. 755. 1908; Ann. d. Phys. **28**. p. 585. 1909.

3) K. E. Hupka, Berliner Dissertation.

4) Ich mache darauf aufmerksam, daß es in einer „vorläufigen Mitteilung des Hrn. Hupka im Heft 11 der Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. auf p. 254 nur heißt: „Der größte mögliche Fehler bei der Bestimmung des Potentials wird auf ± 1 Promille veranschlagt.“

würde aber einen Fehler von ca. 1 Proz. erfordern.“ Auf p. 37: „Die Annahme eines Fehlers von etwa 80 Volt in Verbindung mit einem bestimmten Fehlergesetz ermöglicht eine Deutung der Versuchsergebnisse im Sinne der Kugeltheorie.“

Es läßt sich aber leicht der Nachweis führen, daß schon die Annahme eines Fehlers von ± 80 Volt in Verbindung mit einem bestimmten Fehlergesetz eine Deutung von Versuchsergebnissen Hrn. Hupkas im Sinne der Kugeltheorie ermöglicht.

Die folgende Tab. I gibt gemäß Formel (22a) der Hupkaschen Dissertation zunächst die zu einigen äquidistanten Werten von β gehörigen Werte von P .

Tabelle I.

β	P	β	P
0,26	17919	0,41	47641
0,27	19389	0,42	50287
0,28	20926	0,43	53026
0,29	22529	0,44	55866

Während einer Messungsreihe wurde die Größe der Ablenkung bei variabler Potentialdifferenz durch passende Regulierung des Magnetstromes konstant gehalten. Es wurde aber nicht die Größe der magnetischen Ablenkungen berechnet und ihre Konstanz geprüft, sondern eine gewisse Funktion $C_{(\beta)}$, welche ebenfalls aus den Versuchsdaten berechnet werden kann und während einer Messungsreihe konstant bleiben muß.

Es ergaben sich z. B. aus der zweiten Messungsreihe folgende Resultate:

Tabelle II.

P	J Magnet- strom	β Kugel- theorie	β Relativ- theorie	$C_{(\beta)}$ Kugel- theorie	$C_{(\beta)}$ Relativ- theorie
19440	0,12983	0,270343	0,268883	2,1462	2,1502
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
53240	0,21825	0,430686	0,424906	2,1402	2,1508

Der Wert für $C_{(\beta)}$ in der Relativtheorie bleibt so gut wie konstant, während in der Kugeltheorie $C_{(\beta)}$ mit wachsender Potentialdifferenz abnimmt.

Ändert man nun die gemessenen Werte für die Spannung P in geeigneter Weise, aber so, daß sich die neuen Werte von den gegebenen um höchstens ± 80 Volt unterscheiden, so kann man es erreichen, daß auch die Werte für $C_{(\beta)}$ in der Kugeltheorie konstant ausfallen. Das geht aus der folgenden Tab. III hervor, die mit Hilfe der Tab. I und der Formel:

$$C_{(\beta)} = \frac{3}{4J} \cdot \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{2 - \beta} - 1 \right)$$

aufgestellt wurde. Rechnerisch sicherer ergibt sich $C_{(\beta)}$ aus der Reihe:

$$C_{(\beta)} = \frac{\beta}{J} \left(1 + \frac{2}{5} \beta^2 + \frac{9}{35} \beta^4 + \frac{12}{63} \beta^6 + \dots + \frac{3n}{4n^2 - 1} \cdot \beta^{2(n-1)} \right).$$

Tabelle III.

P	J	β Kugeltheorie	$C_{(\beta)}$ Kugeltheorie
19440 - 80	0,12983	0,26981	2,1416 (2,1842)
53240 + 80	0,21825	0,43106	2,1423 (2,1860)

Die unter $C_{(\beta)}$ in Klammern eingeschlossenen Zahlen entsprechen dem Werte $\varepsilon/\mu_0 = 1,84 \cdot 10^7$, welcher sich aus den Kaufmannschen Messungen als der der Kugeltheorie günstigste Zahlenwert ergeben hat.¹⁾

Während also in Tab. II die Werte für $C_{(\beta)}$ in der Kugeltheorie mit wachsender Potentialdifferenz abnehmen, nehmen sie in Tab. III zu.

Bezeichnet v die Zahl, welche angibt, um wieviel Prozent man irgend einen zu ein und derselben Messungsreihe gehörigen Wert für die Potentialdifferenz ändern muß, um das dazugehörige $C_{(\beta)}$ der Tabelle auf den Mittelwert $C'_{(\beta)}$ aller zu einer Messungsreihe gehörigen $C_{(\beta)}$ zu bringen, dann ist

$$v = \frac{200 \cdot J(C_{(\beta)} - C'_{(\beta)})}{\sqrt{P}} \sqrt{\frac{3 \cdot 10^3 c}{2 \cdot \eta_0}}$$

1) Vgl. weiter unten p. 545 und W. Heil, Berliner Diss. März 1909.

Demnach ist zur Ausgleichung auf Konstante $C_{i\varphi}$ für die Hupkasche Tabelle:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$\nu \leq$	$4/10$	$1/4$	$4/10$	$3/10$	$4/10$	$8/10$	$4,5/10$	$3/10$	$1/4$

Hieraus geht hervor, daß die Deutung der Ablenkungsversuche zugunsten der Kugeltheorie in den Potentialmessungen einen Fehler von in einigen Fällen weniger als $1/4$ Proz., im ungünstigsten Falle aber weniger als $1/2$ Proz. erfordert. Da die Potentialmessungen um $1/4$ Proz. fehlerhaft sein konnten, so lag daher die Feststellung des Unterschiedes in der Leistungsfähigkeit der beiden Theorien bei den Hupkaschen Messungen hart an der Grenze der Ausführbarkeit.

Es wäre vielleicht doch zweckmäßiger gewesen, die absoluten magnetischen Ablenkungen wirklich zu messen. Dann hätte man prüfen können, ob für ein und dieselbe Theorie die magnetischen Ablenkungen nicht nur relativ zueinander, sondern auch *absolut* richtig sind. Denn wenn auch der relative Gang der der Prüfung der Theorien zugrunde gelegten Vergleichsgrößen den gestellten Anforderungen genügt, so reicht das zur Entscheidung zwischen den Theorien noch keineswegs aus, zumal wenn nur ein kleines Gebiet hoher Elektronengeschwindigkeiten erzielt werden kann. Was hätte z. B. die Feststellung für einen Wert, daß die eine Theorie das *relative* Verhalten der der Prüfung zugrunde gelegten Vergleichsgröße besser darstellt als die andere, wenn die aus *beiden* Theorien berechneten *absoluten* Werte der Vergleichsgröße von den beobachteten Werten um mehr als 10 Proz. abweichen (vgl. weiter unten)!

Die einzige Bemerkung, welche sich in der Hupkaschen Dissertation auf die Größe der erfolgten absoluten magnetischen Ablenkungen bezieht, findet sich auf p. 26. Es heißt daselbst, daß „die gesamte Ablenkung etwa 15—30 mm“ betrug. Wie mir Hr. Hupka mündlich versicherte, betrug die größte magnetische Ablenkung auf keinen Fall mehr als 30 mm. Überdies war eine größere mit dem Mikroskop beobachtete Ablenkung unmöglich, da der Halbmesser der Tube an dem Ende, wo sich der Phosphoreszenzschirm befand, genau 3 cm betrug.

Da Hr. Hupka das Magnetfeld ausgemessen hatte und mir die Messungsergebnisse freundlichst zur Verfügung stellte, so war es mir möglich, die absoluten magnetischen Ablenkungen nach beiden Theorien zu berechnen. Ich bin dabei zu dem überraschenden Resultat gelangt, daß die berechneten Werte der magnetischen Ablenkungen bei der Relativtheorie um ca. 10 bis $10\frac{1}{2}$ Proz., bei der Kugeltheorie um $10\frac{1}{2}$ bis 11 Proz. von den wirklich erfolgten Ablenkungen abweichen. Diese Verhältnisse ändern sich nicht wesentlich, wenn den Berechnungen auch wesentlich andere Werte für ϵ/μ_0 zugrunde gelegt werden als der Classensche Wert $1,77 \times 10^7$.

Der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems liege zwischen Kathode und Anode auf der Achse des Entladungsrohres 0,5 cm von der Kathode entfernt. (Die magnetische Feldstärke reichte in meßbarer Größe nämlich nicht bis ganz an die Kathode heran, sondern erstreckte sich nur bis zu einer Stelle, die ca. 0,5 cm von der Kathode entfernt lag.) Die Achse des Entladungsrohres sei x -Achse. Die z -Achse laufe parallel zur Achse des Spulenpaares NS . Die Entfernung der Anode A , des Diaphragmas D und des Phosphoreszenzschirmes P vom Anfangspunkt des Koordinatensystems werde mit a bzw. b und d bezeichnet. Es ist $a = 3$ cm, $b = 6,5$ cm und $d = 21,8$ cm.

ds bezeichne ein Element der Strahlenbahn, ϑ den Winkel, den irgend eine Tangente der Bahn mit der x -Achse bildet. ϑ_1 sowie s_1 und die magnetische Ablenkung y_1 mögen dem Punkte $x = d$ der Strahlenbahn entsprechen, s_0 dem Punkte $x = 0$. y_1 ist die zu bestimmende magnetische Ablenkung.

Es werde angenommen, daß infolge der Abweichung der elektrischen Kraftlinien an den Rändern des 4 mm weiten Diaphragmas A aus der zur Rohrachse parallelen Richtung keine in Betracht kommende elektrische Ablenkung erfolgt ist.

Bezeichnet man noch zur Abkürzung die rechten Seiten der Gleichungen (7) und (8) der Hupkaschen Dissertation mit Φ_β , dann ist für beide Theorien

$$\frac{1}{c} \cdot \eta_0 \int \varrho = \Phi_\beta$$

und da

$$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta},$$

$$(1) \quad \frac{1}{c} \eta_0 \int_{s_0}^s \frac{\mathfrak{S}}{\Phi_\beta} ds = \vartheta.$$

In dem in Betracht kommenden Bereich des Feldes kann \mathfrak{S} und Φ_β als Funktion von x allein betrachtet und \mathfrak{S} parallel zur z -Achse angenommen werden. Daher ist

$$(2) \quad \int_{s_0}^s \frac{\mathfrak{S}}{\Phi_\beta} ds = \int_0^x \frac{\mathfrak{S}}{\Phi_\beta} dx$$

und

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta.$$

Aus (3) ergibt sich

$$y = \int \operatorname{tg} \vartheta dx.$$

Folglich:

$$y_1 = \int_b^a \operatorname{tg} \vartheta dx,$$

oder in Reihenentwicklung:

$$(4) \quad y_1 = \int_b^a dx \left[\vartheta + \frac{\vartheta^3}{3} + \frac{2}{15} \vartheta^5 + \dots \right].$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$(5) \quad \vartheta = \frac{1}{c} \eta_0 \int_0^x \frac{\mathfrak{S}}{\Phi_\beta} dx.$$

\mathfrak{S} ist proportional dem Magnetstrom J und einem konstanten Reduktionsfaktor, der mit R bezeichnet werde. $\mathfrak{S} = R H$ entspreche dem Magnetstrom 1 C.G.S. Dann ist allgemein:

$$(6) \quad \mathfrak{S} = J R H.$$

H ist für alle Messungen ein und dieselbe Funktion von x .

Aus (5) und (6) ergibt sich:

$$\vartheta = \frac{1}{c} \cdot \eta_0 J R \int_0^x \frac{H}{\Phi_\beta} dx,$$

da Φ_β für $x > a$ konstant ist, so folgt wegen

$$\int_b^d \vartheta dx = \int_0^d \vartheta dx - \int_0^b \vartheta dx$$

$$(7) \left\{ \int_b^d \vartheta dx = \frac{JR\eta_0}{c} \left[(d-b) \int_0^a \frac{H}{\Phi_\beta} dx + \frac{d-b}{\Phi_\beta} \int_a^b H dx + \frac{1}{\Phi_\beta} \int_b^d dx \int_b^x H dx \right] \right.$$

Zur weiteren Behandlung der Gleichungen (4) und (7) ist es erforderlich, auf das Magnetfeld selbst einzugehen.

Die Ausmessung ergab für

x	H	x	H
0	0	6,0	91
0,5	0,75	6,5	122
1,0	2	7,0	164
1,5	2	7,5	189
2,0	4,5	8,0	228
2,5	8	8,5	273
3,0	12	9,0	311
3,5	17	9,5	344
4,0	25	10,0	373
4,5	35	10,5	344
5,0	54	11,0	311
5,5	61	usw.	usw.

Wenn $\xi = x - 10$, dann ist aus Symmetriegründen $H_{-\xi} = H_{+\xi}$. Für $J = 4,5$ Amp. und $H = 12$ ist

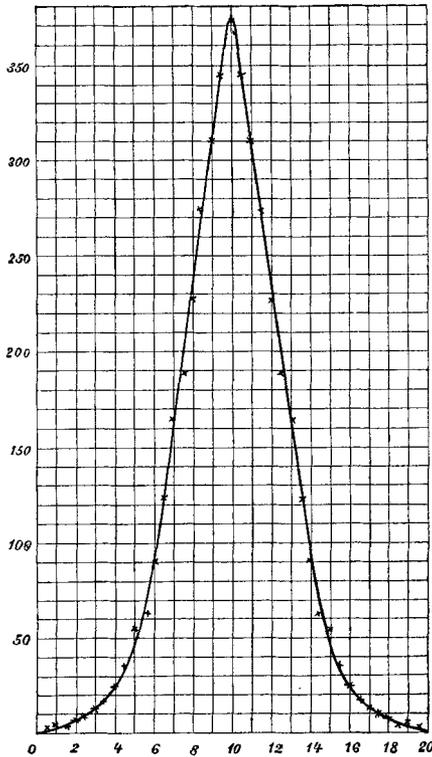
$$\xi = 2,34 \text{ C.G.S.}$$

daher der Reduktionsfaktor

$$R = \frac{10 \times 2,34}{12 \times 4,5}$$

Die nachstehende Kurve ist diejenige, welche sich wohl am besten den von Hrn. Hupka gemessenen Werten für H anpaßt. Die Koordinaten, welche ich zu ihrer Darstellung benutzt und den späteren Berechnungen zugrunde gelegt habe, sind die folgenden:

x	H	x	H
0	0	6,0	92
0,5	0,25	6,5	123
1,0	1	7,0	158
1,5	3	7,5	195
2,0	5	8,0	233
2,5	8	8,5	271
3,0	12	9,0	309
3,5	17	9,5	344
4,0	24	9,6	353
4,5	34	9,7	361
5,0	48	9,8	367,5
5,5	67	9,9	371,5
6,0	92	10	373



x Abszisse, H Ordinate. Die Sternchen bezeichnen die beobachteten Werte von H .

Zwischen $x = 0$ und $x = 3$ wird die Kurve analytisch auch dargestellt durch die Gleichung

$$(8) \quad 2H = 3x^2 - x,$$

zwischen $x = 9,5$ und $x = 10,5$ durch die Gleichung:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} H = 373 - \xi^2 [2,16006] + \xi^4 [2,10327] - \xi^6 [1,71675] \\ + \xi^8 [0,83291], \end{aligned} \right.$$

wenn $\xi = x - 10$ und die eckigen Klammern die Logarithmen der Koeffizienten enthalten.

Mit Hilfe der letzten Tabelle, der Gleichung (9) und der bekannten Formel der mechanischen Quadratur¹⁾:

$$\int_a^{a+iw} f(t) dt = w \left[\frac{1}{2} f(a+iw) - \frac{1}{12} f'(a+iw) + \frac{11}{720} f'''(a+iw) \dots \right],$$

wenn

$$f\left(a - \frac{1}{2}w\right) = -\frac{1}{2}fa + \frac{1}{12}f'a - \frac{11}{720}f'''a \dots,$$

sind folgende Ausdrücke numerisch ermittelt worden:

$$(10) \quad \lg \frac{(d-b)R}{3000} \int_a^b H dx = 0,58370 - 1,$$

$$(11) \quad \lg \frac{R}{3000} \int_b^d dx \int_b^x H dx = 0,50091,$$

$$(12) \quad \lg \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3000}\right)^3 \int_0^d dx \left[\int_0^x dx R H \right]^3 = 0,96341 - 2,$$

$$(13) \quad \lg \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{1}{3000}\right)^5 \int_0^d dx \left[\int_0^x dx R H \right]^5 = 0,510 - 3.$$

Setzt man in (12) und (13) als obere Grenze b statt d , dann ergeben sich Zahlenwerte für die so entstandenen Ausdrücke, die verschwindend klein sind im Vergleich zu den Zahlenwerten, die der oberen Grenze d entsprechen. Es kann daher in (12) und (13) die untere Grenze 0 mit b vertauscht werden.

1) Vgl. z. B. Bauschinger, *Astronomische Tafelsammlung*.

Bis auf das Glied mit dem Integral

$$(14) \quad \int_0^a \frac{H}{\Phi_\beta} dx$$

als Faktor, sind somit alle zur Berechnung von y_1 erforderlichen Konstanten ermittelt.

Zur Berechnung des Integrals (14) ist zu berücksichtigen, daß die magnetische Feldstärke zwischen Anode und Kathode äußerst schwach war. Es beeinträchtigt daher die zur Berechnung des Integrals (14) erforderliche Genauigkeit nicht, wenn in Φ_β und P nur die niedrigste Potenz von β berücksichtigt wird.

Man erhält dann aus den Hupkaschen Gleichungen (II) und (24):

$$(15) \quad \Phi_\beta = \sqrt{P} \sqrt{\frac{2 \eta_0}{3 \cdot 3,5 \cdot c \cdot 10^2}} \sqrt{0,5 + x}.$$

Setzt man (15) und (8) in (14) ein, dann ergibt sich als Resultat einer sehr leicht durchführbaren Integration:

$$(16) \quad \sqrt{P} \sqrt{\frac{2 \eta_0}{3 \cdot 3,5 \cdot c \cdot 10^2}} \int_0^a \frac{H}{\Phi_\beta} dx = 6,84.$$

Aus (10), (11), (12), (13) und (16) ergibt sich wegen (4) und (7) die gesamte magnetische Ablenkung:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \frac{J \sqrt{\eta_0 \cdot 10^{-7}}}{\sqrt{P}} [1,27810] + \frac{\eta_0 \cdot 10^{-7}}{C_\beta} [0,55091], \\ &+ \left(\frac{\eta_0 \cdot 10^{-7}}{C_\beta} \right)^2 [0,96341 - 2] + \left(\frac{\eta_0 \cdot 10^{-7}}{C_\beta} \right)^3 [0,510 - 3]. \end{aligned} \right.$$

Die eckigen Klammern enthalten die Logarithmen der Koeffizienten. C_β ist wie bei Hrn. Hupka zur Abkürzung für Φ_β/J gesetzt.

Mit abnehmendem C_β wächst die magnetische Ablenkung. Die kleinsten Werte für C_β finden sich in der Hupkaschen Tab. VIII.

In der Relativtheorie ist der kleinste Wert für C_β :

$$C_\beta = 1,9577,$$

entsprechend

$$P = 42230 \quad \text{und} \quad J = 0,21244,$$

in der Kugeltheorie:

$$C_{\beta} = 1,9462,$$

entsprechend

$$P = 67850 \quad \text{und} \quad J = 0,27252.$$

Setzt man diese Werte in (17) ein, so ergibt sich für die *größte* magnetische Ablenkung in der *Relativtheorie*:

$$y_1 = 0,026 + 3,212 + 0,068 + 0,002 = 3,308 \text{ cm},$$

in der Kugeltheorie:

$$y_1 = 0,026 + 3,230 + 0,069 + 0,002 = 3,327 \text{ cm}.$$

Die größten Werte für C_{β} finden sich in der Hupkaschen Tab. I. In der Relativtheorie beträgt der größte Wert für C_{β} :

$$C_{\beta} = 3,8583,$$

entsprechend:

$$P = 20960 \quad \text{und} \quad J = 0,07518,$$

in der Kugeltheorie:

$$C_{\beta} = 3,8509,$$

entsprechend:

$$P = 19310 \quad \text{und} \quad J = 0,07211.$$

Setzt man diese Werte in (17) ein, dann ergibt sich für die *kleinste* magnetische Ablenkung in der *Relativtheorie*:

$$y_1 = 0,013 + 1,630 + 0,009 + 0 = 1,652,$$

in der Kugeltheorie:

$$y_1 = 0,013 + 1,633 + 0,009 + 0 = 1,655,$$

d. h.: Alle magnetischen Ablenkungen, die sich aus der *Relativtheorie* ergeben, liegen zwischen

$$16,52 \quad \text{und} \quad 33,08 \text{ mm},$$

aus der Kugeltheorie zwischen:

$$16,55 \quad \text{und} \quad 33,27 \text{ mm},$$

die wirklich erfolgten magnetischen Ablenkungen lagen aber zwischen

$$15 \quad \text{und} \quad 30 \text{ mm}.$$

Daher weichen alle aus der Relativtheorie hervorgehenden magnetischen Ablenkungen von den wirklich erfolgten Ablenkungen um ca. $10-10\frac{1}{2}$ Proz. ab, alle aus der Kugeltheorie hervorgehenden um $10\frac{1}{2}-11$ Proz.

Die Abweichungen werden in den beiden Theorie mit ab-

nehmendem η_0 kleiner. Legt man zum Beispiel den Bestelmeyerschen Wert $1,72 \times 10^7$ zugrunde, dann ergibt sich für

$$P = 42230 \quad \text{und} \quad J = 0,21244 \quad (\text{vgl. Tab. VIII}),$$

$$C_\beta (\text{Rel.}) = 1,9290 \quad \text{und} \quad y_1 = 32,60 \text{ mm},$$

d. h. die Abweichung vom Werte 30 mm beträgt immer noch 9 Proz.

Vergleicht man hiermit, daß die Genauigkeit der mikroskopischen Ablesung etwa 0,015 mm betrug, so kommt man zu dem Schlusse, daß mit den Hupkaschen Messungen weder die Relativtheorie noch die Kugeltheorie vereinbar ist.

Man könnte geneigt sein, den großen Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung der Ungenauigkeit zuzuschreiben, die bei der Ausmessung der der Hupkaschen Dissertation beigegebenen Figur unvermeidlich ist. Zur Deutung obiger Resultate zugunsten der Theorien müßte jedoch der Abstand zwischen der Anode und dem Phosphoreszenzschirm mehr als 1 cm kleiner angenommen werden als der Abstand, der sich aus der Figur ergibt. Ungenauigkeiten bei der Ausmessung der Figur können daher zur Erklärung meiner Resultate schwerlich in Betracht gezogen werden.

Die Bestimmung der Potentialdifferenzen soll höchstens um $\frac{1}{4}$ Proz. fehlerhaft gewesen sein. Zur Deutung meiner Resultate müßten aber die Werte für die Potentialdifferenzen um ca. 10 Proz. größer angenommen werden.

Irrtümer bei der Ausmessung des Magnetfeldes können eventuell durch theoretische Bestimmung desselben auf Grund der Arbeiten von Minchin¹⁾ und Nogaoka²⁾ ermittelt werden. Untersuchungen in dieser Hinsicht habe ich bereits in Angriff genommen.

Für die Richtigkeit der numerischen Berechnungen glaube ich bürgen zu dürfen, da dieselben mehrmals durchgeführt und aufs schärfste kontrolliert worden sind. Auch alle aus der Hupkaschen Dissertation übernommenen Werte für β und C_β wurden nachgerechnet und eine für die Zwecke meiner Untersuchung hinreichend gute Übereinstimmung gefunden.

1) G. M. Minchin, *Phil. Mag.* (5) 35 u. 36. 1893; 37. 1894.

2) H. Nogaoka, *Phil. Mag.* (6) 6. 1903.

Die obigen Ergebnisse sind um so auffallender, als sich bereits bei den Kaufmannschen Messungen für die Relativtheorie Abweichungen von der Beobachtung um ca. 11 Proz. herausgestellt haben. Während aber bei den Hupkaschen Messungen die Kugeltheorie der Relativtheorie in der Leistungsfähigkeit ein wenig nachsteht, werden die Kaufmannschen Beobachtungen von der Kugeltheorie weit besser gedeutet als von der Relativtheorie. Bei den Kaufmannschen Messungen beträgt in der Kugeltheorie der absolute Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung nur ca. 4 Proz.¹⁾ Hier würde es daher in der Tat für die Kugeltheorie eine Stütze bedeuten, wenn der Nachweis erbracht werden kann, daß die Kugeltheorie auch den *relativen* Gang der Kurve $(\bar{y}\bar{z})$ ²⁾ besser deutet als die Relativtheorie. Da aber die Abweichung um 4 Proz. immer noch sehr unbefriedigend ist, so muß dieser Nachweis von allen unsicheren Beobachtungsdaten möglichst unabhängig sein, besonders von den gemessenen (von Hrn. Bucherer³⁾ angezweifelten) absoluten Werten der elektrischen und magnetischen Feldstärke.

Eine solche Methode für die Analyse der Kaufmannschen Messungen läßt sich in der Tat angeben. Dieselbe setzt nur voraus, daß die Kurven $\bar{z}\bar{y}$ und ihre Ausmessungen unbedingt zuverlässig waren, und daß die durch etwaige Ionisation der Gasreste eingetretene Veränderung des elektrischen Feldes *zwischen* den Kondensatorplatten so klein war, daß sie für die Beurteilung der Theorien nicht in Betracht kommt.⁴⁾

Den bisherigen Untersuchungen im Anschluß an die Kaufmannschen Messungen wurde ausnahmslos die von Hrn. Kaufmann selbst aufgestellte „ausgegliche Kurve“ der Tab. VI, l. c. 1906, p. 524, zugrunde gelegt. Diese Tabelle gibt zu neun magnetischen, nicht genau äquidistanten Ablenkungen \bar{z} die zugehörigen ausgeglichenen elektrischen Ablenkungen \bar{y} . Wenn aber die ausgeglichene Kurve mit Hilfe der Lagrange-

1) W. Heil, Berliner Dissert. 1909.

2) Es bezeichnet \bar{y} die elektrische und \bar{z} die magnetische Ablenkung.

3) A. H. Bucherer, Physik. Zeitschr. 9. p. 755. 1908.

4) W. Kaufmann, Verh. 10. p. 91. 1908; W. Heil, Berliner Dissertation 1909.

schen Interpolationsformel auf äquidistante magnetische Ablenkungen, etwa auf die Werte 0,20, 0,25, 0,30, 0,35, 0,40 und 0,45 cm interpoliert wird (vgl. folgende Tabelle), so zeigt sich nach der Bildung der I. und II. Differenzen von \bar{y} , daß sich besonders die II. Differenzen äußerst sprunghaft ändern.

Tabelle IV.

\bar{z}	\bar{y}	I. Diff.	II. Diff.
0,2	0,04135	. 136,5	
0,25	0,0550	. 156	.. 19,5
0,3	0,0706	. 197,5	.. 41,5
0,35	0,09035	. 198	.. 0,5
0,4	0,11015	. 221	.. 23,0
0,45	0,13225		

Daß dieser unregelmäßige Verlauf der „ausgeglichenen Kurve“ keineswegs eine natürliche Eigentümlichkeit derselben ist, zeigt sich dadurch, daß ein anderes, in gewisser Beziehung einwandfreieres Ausgleichungsverfahren als das Kaufmannsche zu einer Kurve führt, die sich in den II. Differenzen durch große Regelmäßigkeit auszeichnet.

Das weiter unten ausgeführte Ausgleichungsverfahren besteht im wesentlichen darin, daß jede einzelne von Hrn. Kaufmann, l. c. 1906, p. 519/520, mitgeteilte Messungsreihe auf gleiches elektrisches Feld reduziert und auf die sechs äquidistanten magnetischen Ablenkungen $\bar{z} = 0,20, 0,25$ bis $0,45$ interpoliert wurde. Die so erhaltenen sechs Gruppen der elektrischen Ablenkungen y_r wurden aus Rücksicht auf das verschiedene Gewicht p der einzelnen Messungsreihen alsdann nach der Gleichung

$$\bar{y} = \frac{\sum(y_r \cdot p)}{\sum p}$$

ausgeglichen.

Dieses Verfahren scheint mir insofern einwandfreier zu sein als das Kaufmannsche, als Hr. Kaufmann ungeachtet der Krümmung der auszugleichenden Kurven nach dem Schwerpunktssatz Messungen miteinander verknüpft hat, die in \bar{z} bis zu einem halben Millimeter voneinander abweichen. Außerdem erhöht es wesentlich die Übersicht, Sicherheit und Kontrollbarkeit der numerischen Berechnung aller nur von \bar{z} abhängigen

Formeln, wenn denselben äquidistante Werte in \bar{z} zugrunde gelegt werden.

Daß ich mich auf die zu den sechs magnetischen Ablenkungen 0,2 bis 0,4 gehörigen elektrischen Ablenkungen beschränkt habe, ist dadurch begründet, daß die Ausführungen weiter unten je zwei benachbarte Beobachtungen miteinander verknüpfen, und es daher erforderlich ist, daß allen Beobachtungen womöglich dasselbe größte Gewicht beigelegt werden kann. Der ersten Beobachtung in der Kaufmannschen Tab. VI kommt aber nach Kaufmann nur die Hälfte, der achten und neunten nur ein Viertel des Gewichtes zu, das den übrigen sechs Beobachtungen beigelegt werden darf, und diese Gewichtsverhältnisse würden auch bei dem neuen Ausgleichungsverfahren ungeändert bestehen bleiben. Zunächst wurden alle beobachteten Werte der elektrischen Ablenkungen auf die Spannungsdifferenz 2603 Volt reduziert nach der Gleichung:

$$y_r = y_b \frac{2603}{\text{mittlere Spannung am Kondensator}}$$

(vgl. W. K., Ann. d. Phys. l. c. p. 521).

Da in den beobachteten magnetischen Ablenkungen nominelle 10 mm einen wahren Wert von 9,975 mm hatten (vgl. W. K., Ann. d. Phys. l. c. p. 518),

	\bar{z}		z_b
so entsprechen	}	die	}
den wahren		nominellen	
Werten:		Werte:	
0,20		0,2005	
0,25		0,2506	
0,30		0,30075	
0,35	0,3509		
0,40	0,4010		
0,45	0,4511		

Die Interpolation hat daher in bezug auf die unter z_b stehenden nominellen Werte zu erfolgen. Dies ist auch durchweg geschehen mit Ausnahme der Interpolation auf den letzten Wert 0,4511. Da nämlich die zweiten Messungsreihen der Kurven auf den Platten 11 und 13 nur bis zu den Werten $z_b = 0,4403$ bzw. $z_b = 0,4456$ ausgeführt worden sind, so ist, um Extrapolationen zu vermeiden, ein nomineller Wert z ermittelt worden, der der Schwerpunktsgleichung:

$$\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x(p_3 + p_4 + \dots p_7)}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_7} = 0,4511$$

Genüge leistet. In dieser Gleichung ist

$$z_1 = 0,4403, \quad z_2 = 0,4456,$$

$p_1 = 1$ das Gewicht der zweiten Messungsreihe auf Platte 11,
 $p_2 = 1,3$ das Gewicht der zweiten Messungsreihe auf Platte 13,
 p_3 bis p_7 die Gewichte der übrigen Messungsreihen (vgl. W. K.,
 Ann. d. Phys., l. c. p. 521—523). Es ergab sich:

$$z = 0,4550.$$

Die zwei zu den magnetischen Ablenkungen z_1 und z_2 gehörigen gemessenen elektrischen Ablenkungen wurden also direkt benutzt, während sonst in bezug auf die magnetische Ablenkung $z = 0,4550$ interpoliert wurde.

Das ganze Interpolationsverfahren ist um so weniger bedenklich, als fast alle den Messungen zugrunde gelegten magnetischen Ablenkungen nur wenig von den nominellen Werten 0,2005 bis 0,4550 abweichen. Es konnte also in den meisten Fällen die Stirlingsche Interpolationsformel angewendet werden, weniger häufig brauchte die Besselsche Formel und nur selten die Newtonsche Interpolationsformel angewendet zu werden.

Tabelle V.

Auf gleiches elektrisches Feld reduzierte elektrische Ablenkungen.

Platte	x_b	y_r	p
10	0,2005	0,0415	1
11		0,0421	1
11		0,0410	1
12		0,0434	1
13		0,0397	1,3
13		0,0405	1,3
10	0,2506	0,0555	1
11		0,0547	1
11		0,0540	1
12		0,0576	1
13		0,0536	1,3
13		0,0539	1,3
15		0,0572	0,65
15		0,0565	0,65

Tabelle V (Fortsetzung).

Platte	x_b	y_r	p
10	0,30075	0,0713	1
11		0,0697	1
11		0,0689	1
12		0,0742	1
13		0,0700	1,3
13		0,0694	1,3
15		0,0740	0,65
15		0,0737	0,65
11	0,3509	0,0870	1
11		0,0872	1
12		0,0921	1
13		0,0882	1,3
13		0,0887	1,3
15		0,0921	0,65
15		0,0914	0,65
11	0,4010	0,1087	1
11		0,1087	1
12		0,1106	1
13		0,1097	1,3
13		0,1097	1,3
15		0,1107	0,65
15		0,1102	0,65
11	0,4550	0,1323	1
11	0,4403	0,1302	1
12	0,4550	0,1353	1
13	0,4550	0,1331	1,3
13	0,4456	0,1294	1,3
15	0,4550	0,1337	0,65
15	0,4550	0,1326	0,65

Die ausgeglichenen elektrischen Ablenkungen erhält man aus jeder Gruppe nach der Gleichung

$$\bar{y} = \frac{\sum(y_r \cdot p)}{\sum p}$$

Die Gewichte derselben sind dann proportional $\sum p$. Folgende Tabelle enthält die so erhaltenen sechs Punkte der ausgeglichenen Kurve. Die Gewichte sind auf ganze Zahlen abgerundet.

Tabelle VI.

\bar{x}	\bar{y}	I. Diff.	II. Diff.	Σp
0,20	0,0413			7
0,25	0,0551	. 138	. . 21,5	8
0,30	0,07105	. 159,5	. . 22	8
0,35	0,0892	. 181,5	. . 23,5	7
0,40	0,1097	. 205	. . 20	7
0,45	0,1322	. 225		7

Die Abweichungen der elektrischen Ablenkungen in den Tab. IV und VI betragen im Maximum ca. 12 Mikron, sind also immerhin so erheblich, daß es nicht gleichgültig sein kann, welche von den beiden ausgeglichenen Kurven der Prüfung der in Frage stehenden Theorien zugrunde gelegt wird. Allen folgenden Berechnungen dient daher die „ausgegliche Kurve“ der Tab. VI als Grundlage.

Wegen der großen Verschiedenheit der Zahlenwerte, die bis jetzt über das Verhältnis ϵ/μ_0 vorliegen, brauchen wir uns nicht an einen bestimmten Wert für ϵ/μ_0 zu halten. Auch ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß sowohl der von Hrn. Kaufmann angegebene Zahlenwert für das elektrische Feldintegral E_1 , sowie für die Spannung der Kondensatorplatten den tatsächlichen Verhältnissen nicht entspricht.

Was die Spannungsmessungen des Hrn. Kaufmann betrifft, so wies Hr. Bucherer¹⁾ darauf hin, daß dieselben wahrscheinlich fehlerhaft seien, da Hr. Kaufmann den Widerstand des Kondensators nicht gemessen, sondern unendlich groß angenommen habe.

Was aber das „elektrische Feldintegral“ betrifft, so besteht dasselbe

1. aus Gliedern, die nur die Dimensionen des Apparates enthalten und daher ein für allemal als sicher festgestellt betrachtet werden können, und

2. aus Gliedern, welche abhängig sind vom Verlauf des elektrischen Feldes zwischen den Plattenrändern und der Ebene der Strahlungsquelle bzw. der Diaphragmaebene.

1) A. H. Bucherer, Physik. Zeitschr. 7. p. 755. 1908.

Und gerade in diesen Gebieten hatten die von den Radiumstrahlen erzeugten Ionen und Elektronen unter der Triebkraft der elektrischen Feldstärke zu ihrer Vermehrung durch Ionenstoß weit mehr Spielraum als zwischen den Kondensatorplatten. An den Rändern konnten nämlich die Ionen und Elektronen, vom geraden Wege nach der Seite abweichend, auf einem Umwege von einer Platte zur anderen gelangen.

Es kann sich aber auch eine elektrische Strömung zwischen den Plattenrändern einerseits und der Ebene der Strahlenquelle bzw. der Diaphragmaebene andererseits gebildet haben, also auf einem Wege, der größer war als der doppelte Plattenabstand und daher die Bildung von Ionen und Elektronen begünstigt hat.¹⁾

Es ist daher nicht unwahrscheinlich, daß gerade in den beiden Gebieten zwischen den Plattenrändern und den Ebenen der Strahlenquelle und des Diaphragmas das elektrische Feld in einer für die Beurteilung der Theorien in Betracht kommenden Weise verzerrt worden ist.

Es braucht übrigens die Verzerrung des elektrischen Feldes in beiden Gebieten nicht gleich stark gewesen zu sein. Das ist schon deshalb unmöglich, weil die Platten in bezug auf die Ebene der Strahlungsquelle einerseits und die Diaphragmaebene andererseits nicht ganz symmetrisch aufgestellt waren, dann aber auch besonders deshalb, weil in unmittelbarer Nähe der Strahlungsquelle die Ionendichtigkeit offenbar größer war als an der ca. 2 cm entfernten Diaphragmaöffnung.

Da im folgenden von der Planckschen Methode²⁾ der Analyse der Kaufmannschen Messungen Gebrauch gemacht wird, so könnten Zweifel erhoben werden, ob dies statthaft ist, da dieselbe doch so durchgeführt ist, wie wenn vollständige Symmetrie in bezug auf die Mitte der Strecke von der Strahlungsquelle bis zur Diaphragmaöffnung geherrscht hätte.

Dagegen wäre einzuwenden, daß die Plancksche Methode durchaus nicht verlangt, daß in Wirklichkeit strenge Symmetrie

1) Die mittlere freie Weglänge der Ionen und Elektronen liegt nämlich bei einem Drucke von 0,1 mm Hg, der allerdings der höchste ist, welcher bei den Kaufmannschen Messungen in Betracht kommt, zwischen 1,1 und 4,3 mm.

2) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. S. p. 418. 1906.

vorliegt, sondern nur eine *Reduktion* unsymmetrischer, komplizierter auf symmetrische, einfachere Verhältnisse darstellt, ähnlich wie die Runge-Kaufmannsche Methode eine Reduktion der in Wirklichkeit endlichen Ablenkungen auf unendlich kleine Ablenkungen ist.

In folgender Zusammenstellung aller nach der Planckschen Methode¹⁾ zur Berechnung der elektrischen Ablenkung \bar{y} erforderlichen Formeln bezeichnet

$x_1 = 1,994$ cm den Abstand der Strahlungsquelle von der Diaphragmaöffnung,

$x_2 = 3,963$ cm den Abstand der Strahlungsquelle von der photographischen Platte,

ϱ den Radius der kreisförmigen Projektion der Strahlenbahn auf die xz -Ebene,

φ den Winkel, welchen irgend eine in der Richtung der Strahlen genommene Tangente des Kreises mit der x -Achse bildet, φ_1 und φ_2 die Werte von φ für $x = x_1$ bzw. $x = x_2$,

φ' den Wert von φ für $x = x_1/2 + \xi'$, wenn ξ' der Gleichung genügt

$$(18) \quad \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \left(\frac{x_1}{2} + \xi' \right) = E_1,$$

q die Geschwindigkeit der Elektronen,

β das Verhältnis der Geschwindigkeit der Elektronen zu der des Lichtes,

$\zeta = 142,8$ die im Felde als nahezu konstant angenommene magnetische Feldstärke,

p die elektrische Feldstärke im homogenen Teil des elektrischen Feldes, d. h. den Quotienten aus der Potentialdifferenz und dem Plattenabstand,

κ , λ und μ bezeichnen Hilfsgrößen, definiert durch die Gleichungen (19), (20) und (25).

Die Berechnung der elektrischen Ablenkung \bar{y} vollzieht sich alsdann nach folgendem Schema:

$$(19) \quad \kappa - \lambda \cdot \xi' = 1,$$

$$(20) \quad \kappa - \lambda \cdot \frac{x_1}{2} = 0,$$

$$(21) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1 \bar{z}}{(x_2 - x_1)x_2 + \bar{z}^2},$$

1) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 8. p. 418. 1906.

$$(22) \quad \varrho = \frac{x_1}{2 \sin \varphi_1},$$

$$(23) \quad \sin \varphi' = \frac{\xi'}{\varrho},$$

$$(24) \quad \sin \varphi_2 = \frac{2x_2 - x_1}{x_1} \cdot \sin \varphi_1,$$

$$(25) \quad u = \frac{\mu_0}{s} \cdot \frac{2c \sin \varphi_1}{x_1 \mathfrak{S}}.$$

Nachdem auf diese Weise u ermittelt worden ist, ergibt sich β bzw. $q = c \cdot \beta$ in der Relativtheorie aus der Gleichung:

$$(26) \quad \frac{1}{u} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

in der Kugeltheorie aus der Gleichung:

$$(27) \quad \frac{1}{u} = \frac{3}{4\beta} \left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right).$$

Wenn β bzw. q bekannt ist, berechnet sich die elektrische Ablenkung nach der Formel:

$$(28) \quad \bar{y} = \frac{p \cdot 10^8 \cdot q (\varphi_2 - \varphi_1)}{q \mathfrak{S}} [\varphi' + \kappa (\varphi_1 - \varphi') - \lambda \varrho (\cos \varphi' - \cos \varphi_1)].$$

Es soll nun auf Grund der gegebenen ausgeglichenen Kurve der Tab. VI untersucht werden, ob überhaupt für irgend eine der zu prüfenden Theorien ein physikalisch möglicher Wert für ϵ/μ_0 existiert, der längs der ganzen ausgeglichenen Kurve konstant ist, und ob uns die betreffende Theorie die Gewähr zu geben vermag, daß auch p und E_1 längs der ganzen Kurve konstant gewesen sind. Die zweite Forderung wäre z. B. dann erfüllt, wenn sich eine nur von p und E_1 abhängige Funktion f angeben und ohne Kenntnis der Größen p und E_1 aus der Kurve selbst berechnen läßt, die längs der ganzen Kurve wo möglich denselben Zahlenwert besitzt.

Zur Ermittlung je eines Wertepaares ϵ/μ_0 und f werden zwei beobachtete Kurvenpunkte erforderlich sein. Da aber die ausgeglichene Kurve der Tab. VI sechs beobachtete Punkte enthält, so möge die dadurch erlaubte Willkür in der Wahl der Punktpaare durch die Feststellung beseitigt werden, daß wir jedesmal je zwei benachbarte beobachtete Punkte miteinander kombinieren. Es ergeben sich auf diese Weise fünf

voneinander unabhängige Wertepaare für ε/μ_0 und f . Je vollkommener in einer Theorie diese fünf Wertepaare die Bedingung der Konstanz erfüllen, desto leistungsfähiger geht die betreffende Theorie aus den Kaufmannschen Messungen hervor.

Ausgehend von Gleichung (28) p. 539 führen wir für die von \bar{z} und ξ' abhängigen Ausdrücke zur Abkürzung ein:

$$n = x(\varphi_1 - \varphi') - \lambda \rho (\cos \varphi' - \cos \varphi_1),$$

$$N = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi' + n) \cdot \rho}{\bar{\delta}}.$$

Dann ist, wenn p in Volt pro cm ausgedrückt wird

$$(29) \quad \bar{y} = \frac{p \cdot N}{900 \cdot \beta}.$$

Für den Ausdruck N läßt sich eine für das Intervall $\bar{z} = 0,20$ bis $0,45$ und $\xi' = 0,40$ bis $0,60$ cm gültige Eigenschaft nachweisen, die die Durchführung der gesetzten Aufgabe wesentlich erleichtert.

Zunächst setzen wir in den Ausdruck für N

$$\cos \varphi' - \cos \varphi_1 = 2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi'}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1 - \varphi'}{2}.$$

Der in \bar{y} verursachte Fehler beträgt höchstens $-1/10$ Mikron, wenn man den $\sin(\varphi_1 - \varphi')/2$ durch den Bogen $(\varphi_1 - \varphi')/2$ ersetzt, allerdings unter der Voraussetzung, daß man nicht unter $\xi' = 0,40$ und über $\bar{z} = 0,45$ cm hinausgeht und für p rund 20000 Volt einsetzt. Somit wird:

$$n = (\varphi_1 - \varphi') \left(x - \lambda \rho \sin \frac{\varphi_1 + \varphi'}{2} \right).$$

Aus den Gleichungen (19) und (20) p. 538 geht hervor, daß

$$x = \frac{x_1}{x_1 - 2\xi'} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{2}{x_1 - 2\xi'} \quad \text{ist.}$$

Zerlegt man ferner $\sin(\varphi_1/2 + \varphi'/2)$ in die Funktionen der einzelnen Summanden des Argumentes, so läßt sich jetzt schreiben

$$n = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{x_1 - 2\xi'} \left(x_1 - 2\rho \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi'}{2} - 2\rho \sin \frac{\varphi'}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \right).$$

Im zweiten Klammergliede dieser Gleichung kann $\cos \varphi'/2$ durch $\cos \varphi_1/2$ und im dritten $\cos \varphi_1/2$ durch $\cos \varphi'/2$ er-

setzt werden. Dadurch wird zwar der absolute Betrag des zweiten Klammterglied zu klein, der des dritten zu groß; der Klammerinhalt wird daher fehlerhaft um die Differenz der Abweichungen der zwei verfälschten letzten Glieder von den wahren Werten. Dieselbe beträgt höchstens 5×10^{-4} und der dadurch in \bar{y} verursachte Fehler nur etwa höchstens $-0,5$ Mikron.

Somit ist, wenn

$$2 \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} = \sin \varphi_1$$

und

$$2 \sin \frac{\varphi'}{2} \cos \frac{\varphi'}{2} = \sin \varphi'$$

gesetzt wird,

$$n = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{x_1 - 2\xi'} (x_1 - \rho \sin \varphi_1 - \rho \sin \varphi').$$

Da ferner $\rho \sin \varphi_1 = x_1/2$ und $\rho \sin \varphi' = \xi'$ ist, so ergibt sich

$$n = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{x_1 - 2\xi'} \left(\frac{x_1}{2} - \xi' \right).$$

Daher

$$n = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{2},$$

$$(30) \quad N = \frac{\rho}{\bar{y}} \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_1 + \varphi')}{2}.$$

Es möge die Abhängigkeit der Größe N von \bar{z} und ξ' durch die Schreibweise $N(\gamma \nu)$ angedeutet werden. γ und ν mögen bestimmte Zahlenwerte der Argumente \bar{z} und ξ' bezeichnen: γ eine bestimmte Zahl aus der Gruppe

$$0,2, 0,25, 0,3, 0,35, 0,4, 0,45,$$

ν erfülle die Bedingung

$$0,4 < \nu \leq 0,6 \text{ cm.}$$

Da ρ , φ_2 und φ_1 nur von \bar{z} abhängig ist, φ' dagegen von \bar{z} und ξ' , so ist

$$(31) \quad \frac{N(\gamma \nu)}{N(\gamma 0,6)} = \frac{\rho \varphi_1 + \rho \varphi'_\nu}{\rho \varphi_1 + \rho \varphi'_{0,6}},$$

wenn der Index bei φ' den der Berechnung von φ' zugrunde gelegten Zahlenwert von ξ' bezeichnet. Zur Abkürzung sei

$$(32) \quad \frac{N(\gamma \nu)}{N(\gamma 0,6)} = g(\gamma \nu).$$

Dann ist für $\nu = 0,6 \dots g(\gamma \nu) = 1$.

In bezug auf die übrigen Werte für ν läßt sich folgendes ausführen:

Setzt man in Gleichung (31)

$$\varphi_1 = \sin \varphi_1 + \frac{\varphi_1^3}{3!} - \frac{\varphi_1^5}{5!} + \dots,$$

$$\varphi' = \sin \varphi' + \frac{\varphi'^3}{3!} - \frac{\varphi'^5}{5!} + \dots,$$

so folgt wegen (32)

$$g(\gamma \nu) = \frac{\varrho \sin \varphi_1 + \varrho \sin \varphi_{\nu'} + \varrho \left[\frac{\varphi_1^3 + \varphi_{\nu'}^3}{3!} - + \dots \right]}{\varrho \sin \varphi_1 + \varrho \sin \varphi'_{0,6} + \varrho \left[\frac{\varphi_1^3 + \varphi'_{0,6}^3}{3!} - + \dots \right]},$$

und wegen (22) und (23)

$$g(\gamma \nu) = \frac{\frac{x_1}{2} + \nu + \varrho \left[\frac{\varphi_1^3 + \varphi_{\nu'}^3}{3!} - + \dots \right]}{\frac{x_1}{2} + 0,6 + \varrho \left[\frac{\varphi_1^3 + \varphi'_{0,6}^3}{3!} - + \dots \right]}.$$

Dieser Quotient ist in den Hauptgliedern des Zählers und Nenners nicht mehr abhängig von \bar{z} . Beschränkt man sich in \bar{z} auf das Intervall 0,20 bis 0,45 cm, so unterscheiden sich die für $\bar{z} = 0,20$ berechneten Quotienten von den für $\bar{z} = 0,45$ berechneten selbst im ungünstigsten Falle (nämlich $\nu = 0,40$) nur um ca. 1×10^{-4} . Die Mittelwerte aus den extremsten Werten geben daher längs der ganzen Kurve ($\bar{z} \bar{y}$) hinreichend genaue Werte für $g(\gamma \nu)$. Diese Mittelwerte mögen mit $g(\nu)$ bezeichnet werden. Es folgt daher die Gleichung

$$(33) \quad g(\nu) \cdot N(\gamma, 0,6) = N(\gamma \nu).$$

Somit ist $N(\gamma \nu)$ in das Produkt zweier Faktoren zerlegt, von denen der erste nur mit ξ' , der zweite nur mit \bar{z} variiert. Beide Faktoren können tabuliert werden.

Tabelle VII.

\bar{z}	$N(\bar{z}, 0,6) \times 10^3$
0,20	0,5641
0,25	0,7049
0,30	0,8456
0,35	0,9861
0,40	1,1264
0,45	1,2665

Tabelle VIII.

ξ'	g
0,4	0,8748
0,5	0,9374
0,6	1,0000

Setzt man in Gleichung (29) wegen Gleichung (33) kurz

$$N = g N(\bar{z}, 0,6),$$

dann folgt:

$$(34) \quad \bar{y} = \frac{p \cdot g \cdot N(\bar{x}, 0,6)}{300 \cdot \beta}.$$

Daher

$$(35) \quad p g = \frac{300 \beta \cdot \bar{y}}{N(\bar{x}, 0,6)}.$$

Es sei

$$(36) \quad \eta = \frac{\beta}{p g}.$$

Dann ist wegen Gleichung (34)

$$(37) \quad \eta = \frac{N(\bar{x}, 0,6)}{300 \bar{y}}.$$

η kann also unabhängig von jeder Theorie für die sechs Punkte der Kurve $(\bar{y} \bar{z})$ berechnet werden.

Tabelle IX.

\bar{z}	$\eta \times 10^4$
0,20	0,4553
0,25	0,4264
0,30	0,3967
0,35	0,3685
0,40	0,3423
0,45	0,3193

Wenn k eine der Zahlen 0,2, 0,25 . . . bis 0,40 bezeichnet, so folgt aus der Gleichung

$$(38) \quad \frac{s}{\mu_0} = \frac{2 c \sin \varphi_1}{x_1 \mathfrak{F}} \cdot \frac{1}{u} \quad (\text{vgl. Gl. (25)})$$

$$\left(\frac{\sin \varphi_1}{u} \right)_k = \left(\frac{\sin \varphi_1}{u} \right)_{k+0,5}.$$

Oder, da u eine Funktion von β ist und nach Gleichung (36)

$$(39) \quad \beta = \eta \cdot p g$$

ist, so gilt

$$(40) \quad \frac{(\sin \varphi_1)_k}{(\sin \varphi_1)_{k+0,5}} = \frac{u_{\eta_k} \cdot p g}{u_{\eta_{k+0,5}} \cdot p g}.$$

In dieser Gleichung ist das Produkt $p g$ die einzige Unbekannte. Sie sei mit f bezeichnet. Nach der Lorentzschen Theorie läßt sich Gleichung (40) direkt nach f auflösen. Es ist nämlich nach der Lorentzschen Theorie wegen Gl. (26):

$$(41) \quad \frac{(\sin \varphi_1)_k}{(\sin \varphi_1)_{k+0,5}} = \frac{\eta_{k+0,5}}{\eta_k} \sqrt{\frac{1 - \eta_k^2 \cdot f^2}{1 - \eta_{k+0,5}^2 \cdot f^2}}.$$

Führt man zur Abkürzung für die Lorentzsche Theorie ein:

$$M = \left[\frac{(\eta \cdot \sin \varphi_1)_{k+0,5}}{(\eta \cdot \sin \varphi_1)_k} \right]^2,$$

so folgt aus (41):

$$1 - \eta_{k+0,5}^2 \cdot f^2 = M(1 - \eta_k^2 \cdot f^2).$$

Hieraus folgt:

$$f^2 = \frac{M - 1}{M \cdot \eta_k^2 - \eta_{k+0,5}^2}.$$

Während aus dieser Gleichung f für die Lorentzsche Theorie direkt bestimmt werden kann, muß für die Abrahamsche Theorie f aus Gleichung (40) etwa mit Hilfe der Kaufmannschen Tafel (Ann. d. Phys. l. c. p. 552) ermittelt werden. Ist die Funktion f für je zwei benachbarte elektrische Ablenkungen bekannt, so kann nach Gleichung (39) β , nach den Gleichungen (26) und (27) u , und nach Gleichung (38) ε/μ_0 bestimmt werden. Folgende Tabelle enthält die so berechneten Werte für die Funktion f und ε/μ_0 .

Tabelle X.

$\bar{\alpha}$	Abraham		Lorentz	
	f	$\varepsilon/\mu_0 \cdot 10^{-7}$	f	$\varepsilon/\mu_0 \cdot 10^{-7}$
0,20 / 0,25	20040	1,845	18970	1,83
0,25 / 0,30	20025	1,84	18720	1,76
0,30 / 0,35	20025	1,84	18570	1,73
0,35 / 0,40	19850	1,81	18255	1,68
0,40 / 0,45	20180	1,86	18550	1,725
0,35 / 0,45	20020	1,84		

Mittelwerte für f und ε/μ_0 :

Abraham	$f = 20025$,	$\varepsilon/\mu_0 = 1,84 \times 10^7$,
Lorentz	$f = 18610$,	$\varepsilon/\mu_0 = 1,74 \times 10^7$,
Kaufmann	$f = 20870$.	

Aus der Tab. X geht die Abrahamsche Theorie als diejenige hervor, welche am vollkommensten die Forderung erfüllt, daß ε/μ_0 längs der ganzen Kurve konstant sein soll. Die beiden Werte $1,81 \times 10^7$ und $1,86 \times 10^7$ weichen ein wenig vom Mittelwert $1,84 \times 10^7$ ab. Das liegt aber am 5. Kurvenpunkt ($\bar{y}\bar{z}$) der Tab. VI. Denn wenn man denselben überschlägt und den 4. gleich mit dem 6. Kurvenpunkt kombiniert, so ergibt sich für ε/μ_0 wiederum der Wert $1,84 \times 10^7$ und für f der Wert 20020.

Insofern zur Berechnung der Tab. X der Wert des Gradienten p nicht bekannt zu sein brauchte, sind die Zahlenwerte für ε/μ_0 von der Spannungsdifferenz der Kondensatorplatten unabhängig, und es ist somit dem Buchererschen Einwand Rechnung getragen worden.¹⁾

Die obigen Mittelwerte für ε/μ_0 sind offenbar für die Theorien, was deren Stellung zu den Kaufmannschen Messungen betrifft, die günstigsten Werte für ε/μ_0 überhaupt.

Daß bei der von Hrn. M. Planck²⁾ ausgeführten Berechnung der p -Werte auf Grund der Bestelmeyerschen Zahl für ε/μ_0 die Lorentzsche Theorie viel geringere Abweichungen der Gradienten untereinander aufweist als die Abrahamsche Theorie, rührt offenbar hauptsächlich daher, daß der der Lorentzschon Theorie günstigste Wert für ε/μ_0 , nämlich die Zahl $1,74 \times 10^7$, der Bestelmeyerschen Zahl $1,72 \times 10^7$ weit näher liegt als die für die Abrahamsche Theorie günstigste Zahl $1,84 \times 10^7$.

Die aus der Abrahamschen Theorie sich ergebende Zahl $1,84 \times 10^7$ ist nur wenig kleiner als die Simonsche Zahl $1,878 \times 10^7$ und stimmt gut überein mit der Beckerschen Zahl $1,847 \times 10^7$ für langsame Kathodenstrahlen.

1) Was das Verhalten der Werte für ε/μ_0 in bezug auf die Forderung der Konstanz betrifft, so ist dasselbe auch unabhängig vom absoluten Betrag für die magnetische Feldstärke.

2) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. p. 304. 1907.

Hr. A. Becker, der für seine Messungen den Anspruch auf den Grad bis dahin unerreichter Genauigkeit erhebt, kommt zu dem Schlusse, „daß die erste Dezimale der gesuchten Größe 1,8 . . . definitiv als sichergestellt zu betrachten ist. Diese Folgerung würde in dem Falle, daß die Kugeltheorie aus dem Wettstreit der Theorien als richtig hervorgehen sollte, in der guten Übereinstimmung der Simonschen und besonders der Beckerschen Zahl mit dem Werte $1,84 \times 10^7$ eine wesentliche Stütze gewinnen.

Das Ergebnis der obigen Analyse der Kaufmannschen Messungen trägt nicht den Charakter einer definitiven Entscheidung. Denn es stützt sich in erster Linie auf die Voraussetzung, daß die Kurven und ihre Ausmessungen unbedingt zuverlässig waren. Wenn man aber die bedeutenden Schwierigkeiten der Messungen bedenkt und vor allem die durch die verhältnismäßig große Breite der Kurven bedingte Willkür derselben, so ist es immerhin fraglich, ob diese Voraussetzung zutrifft.

Während aber die Hupkaschen und vor allem die Kaufmannschen Messungen wegen des reichen mitgeteilten Zahlenmaterials einer eingehenden Kontrolle zugänglich sind, ist dies bei den Buchererschen Messungen leider nicht der Fall.

Messungen und Berechnungen, welche eine so wichtige Entscheidung wie die zwischen den Theorien der Dynamik des Elektrons zum Gegenstand der Untersuchung machen, sollten in allen Teilen der Kritik zugänglich sein.

Hermsdorf bei Berlin, 2. November 1909.

(Eingegangen 10. November 1909.)
