

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 28.

1. *Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie; von A. Sommerfeld.*

§ 1. Einleitung und Ergebnisse.

Während sich die weitaus größte Mehrzahl der praktischen und theoretischen Arbeiten über drahtlose Telegraphie mit den Verhältnissen beim Sender und Empfänger beschäftigt, hat die Frage nach der Ausbreitung der Wellen zwischen Sender und Empfänger, insbesondere nach der Rolle, welche die Erde hierbei spielt, verhältnismäßig wenig Beachtung gefunden. Mit gutem Grunde: jene Verhältnisse sind es allein, die der Experimentator kontrollieren kann. Dagegen muß er den Mechanismus der Ausbreitung als etwas Gegebenes hinnehmen.

Ein mehr formaler Grund mag hinzukommen: Während sich die Theorie des Senders und Empfängers verhältnismäßig einfach gestaltet und mit praktisch genügender Annäherung (man denke an die gekoppelten Systeme) durch totale Differentialgleichungen beherrscht wird, führt uns die Frage nach der Ausbreitung der Wellen unausbleiblich in das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen und stellt uns vor nicht ganz einfache Randwertaufgaben.

Zwei Auffassungen stehen sich hier gegenüber, die — wenigstens in allgemeinen Umrissen — durch den Gegensatz „Raumwellen“ und „Oberflächenwellen“ gekennzeichnet werden. Mit Raumwellen haben wir es in der Akustik und bei der überwiegenden Mehrzahl der optischen Erscheinungen zu tun. Ebenfalls zu den Raumwellen gehören die Hertz'schen Wellen der Elektrodynamik. Das klassische Beispiel von Oberflächenwellen sind diejenigen der Hydrodynamik. In der Optik treten bei der Totalreflexion im optisch dünneren Medium Oberflächenwellen auf, die namentlich von Voigt theoretisch und experimentell untersucht worden sind. Ferner sind die elektro-

dynamischen Drahtwellen typische Oberflächenwellen. Endlich sei auf die Elastizitätstheorie hingewiesen, wo sich in den neueren seismischen Beobachtungen die Wellen vom Raum- und Oberflächentyp deutlich voneinander sondern lassen.

Welchem Typus sind nun die Wellen der drahtlosen Telegraphie zuzuzählen? Sind sie den Hertzischen Wellen in Luft zu vergleichen oder den elektrodynamischen Drahtwellen?

Die erste Ansicht dürfte die vorherrschende sein. Sie stützt sich in quantitativer Hinsicht auf eine Untersuchung von M. Abraham¹⁾, dem es gelang, aus einer schon von Hertz angegebenen einfachsten Potentialfunktion Π Gesetze für die Ausbreitung der elektrischen und magnetischen Kraft und ihrer Abhängigkeit von Entfernung und Azimut zu entwickeln und damit zu einer ersten Klärung unseres Gebietes wesentlich beizutragen.

Bei Hertz handelte es sich bekanntlich um die Aufgabe, das Feld eines Erregers Hertzischer Schwingungen zu beschreiben. Denkt man die beiden Teile des Erregers, zwischen denen der Funke überspringt, als punktförmig, so ergibt sich das Feld eines „Dipols“. Setzt man nun mit Hertz:

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R},$$

wo R den Abstand vom Dipol, k eine Materialkonstante des umgebenden Mediums (s. u.) bedeutet (im reinen Äther ist $k/2\pi$ die reziproke Wellenlänge der Hertzischen Schwingung), so läßt sich aus diesem Π das elektromagnetische Feld durch einen einfachen Differentiationsprozeß ableiten. In Gedanken ist bei Π der Zeitfaktor e^{-int} (n = Frequenz der Schwingung) und der Übergang zum reellen Teil zu ergänzen. Insbesondere wird das elektrische Feld in der Nähe des Dipols gegeben durch den Gradienten von $\partial \Pi / \partial z$, wenn z die Achse des Erregers ist, was eben der Differenzwirkung einer positiven und negativen oszillierenden Ladung, d. h. einem Dipol entspricht.

Die Diagramme, die Hertz im Anschluß an jene Lösung entwirft, zeigen nun, daß die elektrischen Kraftlinien zur

1) M. Abraham, Physikal. Zeitschr. 2. p. 329. 1901; Theorie der Elektrizität 2. § 34 und Enz. d. math. Wiss. V. Art. 18.

Äquatorebene ($z = 0$) des Dipols senkrecht stehen. Hierauf gründet sich die Abrahamsche Anwendung der Hertzschen Lösung in der drahtlosen Telegraphie unter der Annahme einer *vollkommen leitenden Erde*, auf der ja die elektrischen Kraftlinien ebenfalls senkrecht endigen müßten. Die Erdoberfläche tritt also an die Stelle der Äquatorebene des Dipols. Die Erde würde unter dieser Annahme keine andere Rolle spielen, als daß sie den vom Sender ausgehenden Raumwellen den Eintritt verwehrt.

Übrigens tritt die Hertzsche Lösung in der Optik schon viel früher auf zur Charakterisierung einer einfachsten optischen Punktquelle, von der sich kugelförmige Raumwellen ausbreiten. Wir werden daher wegen späterer Verallgemeinerungen und im Anschluß an seinen analytischen Ausdruck H auch als *Funktion des leuchtenden Punktes* bezeichnen.

Die umgekehrte Ansicht, daß es sich bei der drahtlosen Telegraphie um ein Analogon zu den Drahtwellen handle und daß die Erde die Wellenfortpflanzung wesentlich mitbestimmt, ist verschiedentlich¹⁾ geäußert worden. Eine quantitative Unterlage erhielt sie durch die Dissertation von Uller²⁾ und durch neuere Arbeiten von Zenneck.³⁾ Uller untersucht eine bestimmte Art ebener — in der Bezeichnung von Voigt „inhomogener ebener“ — Wellen, welche auf die Grenze der beiden Medien Erde und Luft mehr oder minder konzentriert sind. Zenneck zieht unter Voraussetzung dieser Wellenform eine Reihe bemerkenswerter Schlüsse über das Verhalten der elektrischen Wellen bei verschiedener Bodenbeschaffenheit und über die Wirkung der Empfänger und Sender für gerichtete Telegraphie.

Als Oberflächenwellen werden diese Wellen namentlich durch den Wert von Fortpflanzung und Dämpfung gekennzeichnet. Sind ε , μ , σ Dielektrizitätskonstante, Permeabilität

1) A. Blondel, C. R. du Congrès de Nantes 1898; E. Lecher, Physik. Zeitschr. 3. p. 273. 1901.

2) K. Uller, Beiträge zur Theorie der elektromagnetischen Strahlung, Rostock 1903. E. Cohn hatte in seinem Lehrbuche denselben Wellentyp bereits früher mit Rücksicht auf die Theorie der Drahtwellen behandelt.

3) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 23. p. 846. 1907; sowie Physik. Zeitschr. 9. p. 50 und 553. 1908.

und Leitfähigkeit des ersten oder zweiten Mediums (Luft oder Erde), so kommt es wesentlich auf die Größe

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu n^2 + i \mu \sigma n}{c^2}$$

an, die wir für Luft und Erde als k_1^2 und k_2^2 unterscheiden. Aus beiden Größen baut sich (wenn die Permeabilität von Luft und Erde gleich 1 gesetzt wird, ein Fall, auf den wir uns in dieser Übersicht durchweg beschränken dürfen) diejenige komplexe Größe

$$s = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}$$

auf, welche Fortpflanzung und Dämpfung durch ihren reellen und imaginären Teil bestimmt. Dabei ist die Bezeichnung als Oberflächenwelle nicht so aufzufassen, daß wie bei den Wasserwellen oder den seismischen Störungen der Sitz der Wellen wesentlich das zweite Medium sei. Im Gegenteil findet sich der Hauptteil der Energie im ersten Medium, Luft, ebenso wie bei den Drahtwellen. Die Amplitude nimmt von der Erdoberfläche nach oben hin langsam, nach unten hin schnell ab (Skineffekt).

Dieser interessante Wellentyp war aber bisher durchaus hypothetisch. Daß er sich wirklich aus den vom Sender ausgehenden Wellen in größerer Entfernung vorzugsweise herausbildet, dafür fehlte sozusagen der Existenzbeweis.

Es ist eine Hauptaufgabe der vorliegenden Untersuchung diesen Beweis zu liefern und die Frage: Raumwellen oder Oberflächenwellen? zu entscheiden.

Von vornherein ist zu betonen, daß die Antwort nicht unbedingt und für alle Fälle gleich sein wird, wie denn überhaupt unsere vereinfachten Begriffe und Bezeichnungen meist nur gewisse Grenzfälle richtig treffen, ohne der Komplexität der Erscheinungen im allgemeinen gerecht zu werden. So verliert die Bezeichnung des einfallenden und reflektierten Lichtes bei allgemeineren optischen Problemen ihren präzisen Sinn und geht in den Begriff des optischen Feldes der Beugungserscheinungen auf. Ähnlich gibt es in unserem Falle Übergänge zwischen Raum- und Oberflächenwellen und wird eine scharfe Sonderung beider im allgemeinen unmöglich.

Immerhin treten genau die Uller-Zenneckschen Oberflächenwellen als ein wesentlicher und unter gewissen Umständen überwiegender Bestandteil des elektromagnetischen Feldes hervor, begleitet von Raumwellen, welche unter gewissen anderen Umständen ihrerseits überwiegen.

Wir haben zunächst das mathematische Problem zu skizzieren, welches die Grundlage unserer Diskussion bildet. Es handelt sich gewissermaßen darum, den leuchtenden Punkt der Hertzschen Lösung in zwei Teile zu spalten, eine dem Medium 1 und eine dem Medium 2 entsprechende Hälfte, und beide Teile vermöge der Grenzbedingungen zwischen 1 und 2 aneinander anzupassen; oder anders ausgedrückt, das Hertzsche Π durch ein Funktionenpaar Π_1, Π_2 zu ersetzen, das durch Differentialgleichungen und Grenzbedingungen bestimmt wird und von dem an der Erregungsstelle $R = 0$ sich Π_1 wie eine Hertzsche Lösung in 1, Π_2 wie eine solche in 2 verhält. Eine so weitgehende Vereinfachung der tatsächlichen Verhältnisse ist natürlich nur für solche Entfernungen zulässig, von denen aus die Antenne als Erregungspunkt erscheint, die also groß gegen die Wellenlänge der Schwingung sind. Wie sich das Feld in der unmittelbaren Umgebung des Senders verhält, kann und will unsere Theorie nicht beschreiben. Das Problem ist durch die hier genannten und einige ergänzende Bedingungen eindeutig bestimmt und wird, die Trennungsebene als *eben* vorausgesetzt, in Strenge gelöst durch die übersichtliche Form je eines bestimmten Integrales für Π_1 und Π_2 , welches aus einer Besselschen und einer Exponentialfunktion gebildet ist, §§ 2 und 3. Der Diskussion dieser Lösung ist alles Folgende gewidmet. §§ 4, 5 und 6 operiert in der komplexen Ebene und zerlegt die strenge Lösung durch Deformation des Integrationsweges in drei Bestandteile, welche zum Teil näherungsweise, zum Teil in Strenge ausgeführt werden. §§ 7 und 8 sucht dasselbe Ziel durch Reihenentwicklung zu erreichen.

Bei dieser Diskussion tritt ein besonders wichtiges Element unserer Theorie hervor, das wir die *numerische Entfernung* des Aufpunktes vom Sender nennen. Es zeigt sich nämlich, daß Größe und Charakter der übertragenen Wirkung nicht so sehr von der *absoluten Entfernung* r (diese etwa gemessen gedacht

in Einheiten der Wellenlänge) abhängt, als vielmehr von einer reinen Zahl ρ — eben unserer numerischen Entfernung —, die sich aus r und den Materialkonstanten k_1, k_2 berechnet. In dem Auftreten dieser Größe haben wir eine Art *Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie* zu sehen, welches sich aber hier nicht direkt aus den Differentialgleichungen des Problems, sondern erst aus ihren Integralen entnehmen läßt, wie schon daraus hervorgeht, daß es nicht in Strenge und allgemein, sondern nur mit Annäherung in der Nähe der Erdoberfläche gilt. Wir definieren:

$$(a) \quad \rho = \left| \frac{k_1^4 k_1^2 - k_2^2 k_1 r}{k_2^4 k_1^2} \right|.$$

In dem besonderen Fall, wo k_1 reell (ungedämpfte¹⁾ Schwingungen in Luft) k_2^2 rein imaginär (ϵn zu vernachlässigen gegen σ) und k_1^2 klein gegen $|k_2^2|$ ist, kann man für ρ einfacher schreiben:

$$(b) \quad \rho = \frac{k_1^2 k_1 r}{(-i k_2^2) 2},$$

Die numerische Entfernung ρ wächst also mit der absoluten Entfernung r , ist aber bei gleichem r über Seewasser ($|k_2^2/k_1^2|$ groß) viel kleiner als über Land- oder Süßwasser.

Wir berichten zunächst kurz über den mathematischen Gedankengang unserer Diskussion der allgemeinen Lösung.

In der komplexen Ebene der Integrationsvariablen — sie heiße λ — gibt es einen ausgezeichneten Punkt, in dem der Integrand einfach unendlich wird. Dieser „Pol“ liegt genau bei dem oben angegebenen Werte $\lambda = s$. Das zugehörige „Residuum“, welches den Wert des Integrales bei einem Umgang um diesen Pol angibt, liefert einen ersten Bestandteil P unserer Lösung und geht für große Werte von r *genau in die oben genannten Oberflächenwellen über*. Das Vorhandensein jenes Poles und das Auftreten dieser Wellen ist an eine Ungleichung zwischen den Materialkonstanten beider Medien geknüpft. Indem

1) Zeitlich gedämpfte Schwingungen entsprechen einem komplexen n und daher auch einem komplexen k_1 , wobei aber auch bei den ursprünglichen Einfach-Antennen der imaginäre Teil von n und k_1 immer noch klein ist gegen den reellen. Wegen der Schwierigkeit, die gedämpfte Schwingungsform für alle Werte von t als gültig anzusetzen, vgl. z. B. meine Arbeit über Drahtwellen Wied. Ann. 67, p. 240. 1899.

gezeigt wird, daß diese unter den Verhältnissen der drahtlosen Telegraphie stets erfüllt ist, wird der Existenzbeweis für die Oberflächenwellen erbracht. Zwei weitere Bestandteile Q_1 und Q_2 unserer allgemeinen Lösung ergeben sich als Umgänge um zwei in der komplexen Ebene anzubringende „Verzweigungsschnitte“ und haben den Charakter von *Raumwellen* des Mediums 1 oder 2, da ihre Fortpflanzung in 1 oder 2 allein durch die Materialkonstanten dieses Mediums bestimmt wird. Der so gefundene Ausdruck für die Raumwellen Q_1 ist nur als erste Näherung bei unendlich wachsendem r anzusehen. Die Reihenentwicklung des § 6 fügt demselben eine unendliche Serie weiterer Glieder hinzu, deren jedes sich auffassen läßt als Wirkung einer an der Erregungsstelle supponierten höheren Singularität, entstanden durch das Zusammenwirken von zwei oder mehreren Dipolen. Diese Reihe schreitet nach *negativen Potenzen der numerischen Entfernung* fort und ist nur brauchbar (semikonvergent) für *große Werte* dieser Größe. Als Ergänzung dazu gibt § 7 eine Reihenentwicklung, die nach *positiven Potenzen der numerischen Entfernung* geordnet ist und welche sich deuten läßt als Superposition der Wirkung eines einfachen „leuchtenden Punktes“, einer an der Erregungsstelle endigenden „leuchtenden Linie“ von gleichmäßiger, von Dreiecks-, Parabelbelegung usf. Diese Reihe ist, obschon für alle Werte von ρ konvergent, doch nur für *kleine numerische Entfernungen* zweckmäßig. (Die absolute Entfernung r wird aus oben genannten Gründen natürlich auch hier als groß vorausgesetzt.) Insbesondere dient diese Reihe dazu, den *Abrahamschen Grenzfall des vollkommenen Leiters* ($|k_2| = \infty$, $\rho = 0$) in unsere Theorie einzuordnen. Beide Reihen sind übrigens nicht in demselben Sinne streng, wie die ursprüngliche Lösung, sondern unter gewissen praktisch berechtigten Vernachlässigungen abgeleitet; für die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche lassen sich beide in eine geschlossene Form summieren, welche für die numerische Berechnung und graphische Darstellung sehr bequem ist.

Nach dieser allgemeinen Übersicht heben wir einige praktische Konsequenzen unserer Theorie hervor.

1. Die *Eindeutigkeit* unseres Problems bei vorgegebener axial-symmetrischer Erregung läßt einen allgemeinen Schluß auf den Einfluß zu, den die besondere Anordnung des Senders,

seine mehr oder minder innige Erdung, seine Ausbildung als einfaches oder gekoppeltes System usw. haben kann. In unserer Lösung bleibt unbestimmt nur die (bei Dämpfung komplexe) Frequenz n und eine allen unseren Formeln hinzuzufügende multiplikative Konstante C , die die Intensität des Vorganges mißt; ihrem Quadrat ist die aufzuwendende Energie proportional. Nur diese beiden Konstanten n und C können durch die Besonderheiten des Senders beeinflußt werden, während der Ausbreitungsvorgang als solcher davon unabhängig verläuft. Es ist bekannt, daß Frequenz und Dämpfung (also unsere Konstante n) durch Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand der Stromkreise des Senders bestimmt werden. Dasselbe gilt von dem Wirkungsgrad der im Sender aufgewendeten Energie (also unserer Konstanten C). Was die *Erdung* betrifft, so fällt die Frage, wie sie Frequenz und Dämpfung, Stromverteilung und Stromamplitude auf der Antenne beeinflußt, außerhalb des Rahmens unseres Problems. Einen Einfluß auf die *Form des Wellenvorganges*, seine *Abnahme mit der Entfernung* usw. dagegen müssen wir, eben wegen der Eindeutigkeit unseres Problems, für ausgeschlossen erklären — entgegen früher vertretenen Ansichten, aber in Übereinstimmung mit der Erfahrung.¹⁾ Insbesondere kann die Erdung nicht, wie man etwa denken könnte, die flächenhafte Ausbreitung der elektrischen Störung auf Kosten der räumlichen Ausbreitung begünstigen. Vielmehr ist das Verhältnis zwischen Oberflächen- und Raumwellenanteil von der Erdung und überhaupt von der Anordnung des Senders unabhängig.

Bei diesen Schlüssen ist allerdings nur die Rede von solchen Antennen, deren Wirkung sich mit einem einfachen, allseitig symmetrischen Dipol identifizieren läßt. Es sind dies höchstwahrscheinlich alle heute gebrauchten symmetrischen Antennen, deren Höhe stets sehr klein gegen die Wellenlänge der Schwingung ist. Bei den früheren Antennen, die gleich ein Viertel Wellenlänge oder damit vergleichbar waren, bedingt die Stromverteilung auf dem Sender Abweichungen von dem

1) Man vgl. J. Zenneck, Elektrische Schwingungen p. 810, Nr. 420, wonach zwei vergleichbare Antennen, d. h. zwei Antennen von gleicher Stromverteilung und Stromamplitude identisch wirken, gleichviel, ob sie geerdet sind oder nicht.

Verhalten des Dipols. Bei unsymmetrischer Anordnung des Senders (vgl. unten unter Nr. 8) treten natürlich ebenfalls Abweichungen von der Symmetrie des Dipols auf (Längenabweichungen, während wir die vorher genannten als Breitenabweichungen bezeichnen können, die Achse des Dipols als Polarachse gedacht). Offenbar entspricht solchen Antennen ein anderes Feld wie den Antennen mit Dipolsymmetrie, das aber ebenso wie dieses von uns zu untersuchende Feld durch die Symmetrieeigenschaften eindeutig und unabhängig von den Besonderheiten der Anordnung bestimmt sein wird.

2. Die Größe der *numerischen Entfernung* und damit zugleich der Charakter der Wellen wird sehr wesentlich bestimmt durch die Bodenbeschaffenheit. Nimmt man beispielsweise die absolute Entfernung gleich $\frac{1}{4}$ Erdquadrant (entsprechend etwa der Marconischen transatlantischen Station) und die Wellenlänge der Schwingung gleich 2 km (entsprechend der deutschen Station Nauen), so ergibt sich nach gewissen runden Daten von Zenneck (Näheres vgl. § 9)

für Seewasser	Süßwasser	Nasser Boden	Trockener Boden
$\varrho = \frac{1}{30}$,	$\varrho = 30$,	$\varrho = 6,5$,	$\varrho = 300$.

Entsprechend der ganz *verschiedenen Größenordnung* dieser Zahlen haben wir in diesen Fällen auch eine durchaus verschiedene Größenordnung der telegraphischen Wirkung und ein ganz verschiedenes Bild des Wellenvorganges zu erwarten.

3. Durch Vergrößerung der Wellenlänge l (Verkleinerung der Frequenz) wird der Wert von ϱ verkleinert, in dem Sonderfalle der Formel (b) sogar quadratisch, weil sich k_1 wie $1/l$ und $(-ik_2^2)$ ebenfalls wie $1/l$ verhält. Durch Verkleinerung von ϱ nähern wir uns aber dem idealen Falle des vollkommenen Leiters ($\varrho = 0$). Wir schließen daraus, daß *eine Vergrößerung der Wellenlänge für die Überwindung großer Entfernungen günstig* sein wird, wie die Praxis längst ergeben hat. Übrigens würde die früher von Marconi angegebene Regel, nach der man bei vertikaler Einfach-Antenne ihre Höhe und damit die Wellenlänge mit der Quadratwurzel aus der zu überwindenden Entfernung wachsen lassen soll, nach dem soeben Gesagten gerade der Forderung entsprechen, *trotz wachsen der absoluter Entfernung die numerische Entfernung festzuhalten*.

Dagegen bleibt die günstige Wirkung der Vergrößerung der Wellenlänge nach der Theorie des vollkommenen Leiters unverständlich; hiernach würde vielmehr — bei vorgegebener Spannung und Antenne — eine Vergrößerung der Wellenlänge das Feld in der Entfernung r *ungünstig* beeinflussen.

4. Auch die Frage nach dem *Gültigkeitsbereich der Annahme eines vollkommen leitenden Erdbodens* erweist sich im Grunde als eine Frage nach der Größe der numerischen Entfernung, indem sich ja auch aus unserer Theorie für hinreichend kleine numerische Entfernung der Abrahamsche Grenzfall des vollkommenen Leiters ergibt. Behalten wir von der Reihe des § 7 außer jenem Grenzgließe noch das nächstfolgende Glied als Korrektion bei, so lautet unsere Lösung für das erste Medium

$$H_1 = (1 - i\sqrt{\rho\pi}) \frac{e^{ik_1 r}}{r}$$

bei Beschränkung auf die Erdoberfläche ($R = r$) und einen für die Abschätzung bequemen Sonderfall. Lassen wir 10 Proz. Abweichung vom Grenzfall des vollkommenen Leiters zu, so ist zu verlangen $\sqrt{\rho\pi} < 1/10$. Hieraus ergibt sich (vgl. § 9) bei Seewasser und $l = 2$ km bzw. $l = 1/3$ km als diejenige absolute Entfernung, in der die Annahme vollkommener Leitfähigkeit hinreichend genau ist,

$$r = 240 \text{ km} \quad \text{bzw.} \quad r = 8 \text{ km},$$

während die entsprechende Entfernung bei anderer Bodenbeschaffenheit unterhalb einer Wellenlänge liegt und daher überhaupt nicht in Betracht kommen würde. *Die Annahme vollkommener Leitfähigkeit ist also nur bei Seewasser innerhalb eines sehr engen Bereiches erlaubt.*

5. Dem Charakter der Oberflächenwellen entspricht es, daß der Bestandteil P unserer Lösung (s. o.) *nur wie $1/\sqrt{r}$ mit wachsendem r abnimmt* (wenn man von der hinzukommenden radialen Dämpfung absieht). In der Tat wird bei flächenhafter Ausbreitung der Energie diese wie $1/r$ abnehmen, da durch Kreise (oder zugehörige Zylinder), die um den Erregungspunkt mit verschiedenem Radius geschlagen sind, dieselbe Energie hindurchgeht. Daraus folgt aber, daß die Amplitude des Feldes sich wie $1/\sqrt{r}$ verhält. Andererseits wird bei räum-

licher Energiestrahlung im einfachsten Falle diese wie $1/r^2$, die Amplitude des Feldes wie $1/r$ abnehmen, wie es u. a. die Abrahamsche Behandlung des vollkommenen Leiters zeigt. Bemerkte sei noch, daß unsere Raumwellen Q (s. o.) mit wachsendem r nicht wie $1/r$, sondern wie $1/r^2$ abnehmen. Den Grund hierfür haben wir wohl darin zu sehen, daß unsere Raumwellen Q nur im Verein mit unseren Oberflächenwellen P auftreten können, denen sie fortgesetzt Energie nachzuliefern haben.

Offenbar ist die geringe Abnahme der Oberflächenwellen mit r für die Praxis der Zeichenübertragung bedeutsam. Nur ist zu beachten, daß die mit den Oberflächenwellen notwendig verknüpfte Absorption im zweiten Medium eine *radiale Dämpfung* bewirkt, welche exponentiell fortschreitet, und die Oberflächenwellen schließlich stärker zu Null gehen läßt, als selbst die Raumwellen. Diese radiale Dämpfung, die schon in den ebenen Wellen von Uller und Zenneck auftritt, hat ihren Grund in der komplexen Beschaffenheit von s und kann (in dem Sonderfalle $|k_2| \ll |k_1|$) einfach gemessen werden durch $e^{-\rho}$.

6. Über die *relative Bedeutung des Raum- und Oberflächenwellen-Bestandteiles unserer Lösung* orientiert Fig. 8 in § 9, die sich auf die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche und auf den mehrfach genannten bequemen Spezialfall k_2^2 rein imaginär und $|k_2^2| \gg k_1^2$ bezieht. Sie zeigt, daß für sehr kleine numerische Entfernungen der Raumwellentypus überwiegt (entsprechend Nr. 4), daß für wachsende ρ der Oberflächentypus vorherrscht (entsprechend Nr. 5, erster Absatz), während von einem gewissen ρ ab dieser wieder hinter jenen zurücktritt (entsprechend Nr. 5, zweiter Absatz). Bemerkte muß dabei werden, daß die Trennung in Raum- und Oberflächenwellen, wie sie diese Figur gibt (durch den reellen und imaginären Teil der oben erwähnten geschlossenen Form unserer Lösung), nur bis auf einen Zahlenfaktor 2 mit der durch die Betrachtung in der komplexen Ebene gegebenen Trennung in P und Q übereinstimmt. Jedenfalls aber tritt auch aus dieser Figur die Bedeutung der Oberflächenwellen hervor.

7. Unsere Theorie setzt eine ebene Trennungsfläche voraus. Es würde nicht schwer sein, die strenge Lösung auf den Fall der *gekrümmten Erdoberfläche* zu erweitern; nur die Dis-

kussion der so entstehenden Reihe nach Kugel- und Zylinderfunktionen würde Weiterungen verursachen. Aber auch ohne Kenntnis dieser Lösung läßt sich wohl so viel sagen, daß *durch die Erdkrümmung die Verhältnisse zu Gunsten der Oberflächenwelle verschoben werden*, da durch die Erdkrümmung die Raumwellen abgeschirmt werden, soweit sie dieselbe nicht durch einen Beugungsprozeß überwinden, die Oberflächenwellen aber nicht nennenswert behindert werden. Es ist sehr wohl möglich, daß das schließliche Überwiegen der Raumwellen durch die Erdkrümmung aufgehoben und diese nur mehr für sehr kleine numerische Entfernungen vor den Oberflächenwellen vorherrschen. In den populären Schriften über drahtlose Telegraphie (z. B. Poincaré) scheint übrigens der Einfluß der Beugung als das die Erdkrümmung überwindende Moment überschätzt zu werden. Wenn dort auf die Größe der Wellenlänge hingewiesen wird, mit der die Stärke der Beugung zunimmt, so ist andererseits daran zu erinnern, daß es immer nur auf das Verhältnis der Wellenlänge zum Krümmungsradius des zu überwindenden Hindernisses ankommt und daß dieses Verhältnis für die Wellen der drahtlosen Telegraphie und die Erdkrümmung nicht günstiger liegt wie für sichtbares Licht und eine mäßig abgerundete Kante.

8. Auch die Möglichkeit der *gerichteten Telegraphie* im Sinne Marconis (durch einen geknickten Sender) wird sich durch eine Erweiterung unserer Theorie unschwer erklären lassen. Es ist nur nötig, die symmetrische Erregung, die dem skalaren Hertzschen Potential $\Pi = e^{ikR}/R$ entspricht, zu ersetzen durch eine einseitige unsymmetrische, die durch ein vektorielles Hertzsches Potential, einen „Hertzschen Vektor“ in der Bezeichnung von Abraham, gegeben wird. Dem Marconischen Sender mit vertikalem Schenkel a (positive z -Richtung) und horizontalem Schenkel b (negative x -Richtung), welcher eine bevorzugte Aussendung nach der positiven x -Richtung ergibt, würde z. B. der Hertzsche Vektor

$$\Pi_x = -a b \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \Pi_y = 0, \quad \Pi_z = a \frac{e^{ikR}}{R}$$

als primäre Erregung entsprechen.

Den Schluß der Arbeit bildet ein Vergleich unserer

Oberflächenwellen mit den *elektrodynamischen Drahtwellen* und mit gewissen *optischen Tatsachen*. In ersterer Hinsicht ergibt § 10, daß unsere Oberflächenwellen aus denjenigen Formeln entstehen, die ich für die Theorie der Drahtwellen vor zehn Jahren entwickelt habe, wenn man den Drahradius ∞ setzt. Ferner wird hier (nach energetischer Definition) eine Formel für den *Widerstand* der Erde pro Flächeneinheit aufgestellt, analog der Rayleighschen bei Drahtwellen, und für ihre *Kapazität* („dynamische Kapazität“, die wesentlich höher ist als die statisch gerechnete für die Flächeneinheit der Erdkugel). In dem optischen § 11 wird das Auftreten *inhomogener* Wellen, wie sie von der *Totalreflexion* her bekannt sind, hervor-gehoben sowohl als Bestandteil unserer *allgemeinen Lösung*, die sich als ein Bündel gewöhnlicher, homogener, zusammen mit einem Bündel totalreflektierter, inhomogener Wellen deuten läßt, wie auch bei unseren speziellen Wellentypen *P* und *Q*. Was insbesondere unsere Oberflächenwelle *P* in großer Entfernung vom Ursprung betrifft, wo sie als ebene und zwar als ebene homogene Welle gelten kann, wenn hierbei der bequemeren Ausdrucksweise wegen von der Absorption in Erde abgesehen wird, so erweist sich deren Struktur als unmittelbar bestimmt durch das Brewstersche Gesetz: *im ersten Medium eine unter dem Polarisationswinkel einfallende, senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Welle, und daher kein reflektierter Strahl, im zweiten Medium eine unter dem Komplement des Polarisationswinkels gebrochene Welle, deren Strahlrichtung senkrecht zu dem (nicht vorhanden) reflektierten Strahl liegt.*

§ 2. Problemstellung.

Die beiden Medien 1 (Luft) und 2 (Erde) stoßen in der Ebene $z = 0$ aneinander (Fig. 1) $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ sind Dielektrizitätskonstante, Permeabilität und Leitfähigkeit für Luft, $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ für Erde, so daß σ_1 sehr klein, σ_2 relativ groß ist. Wir benutzen die Abkürzungen

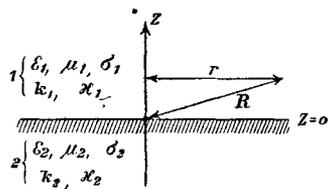


Fig. 1.

1) W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik 2. § 13. p. 629.

$$(1) \quad \begin{cases} k_1^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_1 n^2 + i n \mu_1 \sigma_1}{c^2}, & \kappa_1^2 = \frac{k_1^2}{\mu_1}, \\ k_2^2 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2 n^2 + i n \mu_2 \sigma_2}{c^2}, & \kappa_2^2 = \frac{k_2^2}{\mu_2}, \end{cases}$$

c = Lichtgeschwindigkeit, n = Schwingungszahl in 2π Zeiteinheiten, wobei wir den Zeitfaktor des (rein-periodisch und harmonisch gedachten) Wellenvorganges in der Form

$$e^{-int}$$

denken. Hiermit gleichberechtigt wäre natürlich der Ansatz e^{+int} , bei dem in k_1^2 , k_2^2 und allen folgenden Formeln das Vorzeichen von i umzukehren wäre. Der reelle Teil unserer komplexen Ausdrücke, den wir ja schließlich meinen, wird ersichtlich durch das Vorzeichen von i nicht beeinflusst, da er gleich der halben Summe der beiden konjugierten Ausdrücke ist. Beim Ausziehen der Wurzel soll das Vorzeichen so gewählt werden, daß k_1 , k_2 im ersten Quadranten der komplexen Ebene liegen.

Die Erregungsstelle sei $z = 0$, $r = 0$, und unser Vorgang axial symmetrisch um die z -Achse. Die magnetischen Kraftlinien verlaufen überall als Kreise um, die elektrischen Kraftlinien in Ebenen durch diese Achse. Wie schon Hertz gezeigt hat, lassen sich dann die Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} durch eine einzige charakteristische Funktion Π , die „Hertzische Funktion“, ausdrücken.¹⁾ Wegen $\mathfrak{H}_z = 0$, $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ setzen wir:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \\ \mathfrak{H}_x &= \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Maxwellsche Gleichung $\varepsilon \mathfrak{E} + \sigma \mathfrak{E} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ (in Heavisideschen Einheiten geschrieben) liefert dann

1) Das von Abraham als „Hertzscher Vektor“ eingeführte Funktionstripel \mathfrak{B} (Theorie der Elektrizität 2. 2. Aufl. p. 276) würden wir erst bei der Behandlung der gerichteten Telegraphie (vgl. Einleitung unter Nr. 8) nötig haben. Der Hertzsche Vektor wird bei unserer Symmetrie überall der x -Achse parallel und reduziert sich auf unsere Hertzische Funktion. Übrigens entspricht unser Π nicht genau dem Abrahamschen \mathfrak{B} , sondern der Ableitung $\partial \mathfrak{B} / c \partial t = i k \mathfrak{B}$.

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{-in\epsilon + \sigma}{c} \mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial x}, \quad \mathfrak{E}_x = \frac{in}{c} \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial x}, \\ \frac{-in\epsilon + \sigma}{c} \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{in}{c} \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}, \\ \frac{-in\epsilon + \sigma}{c} \mathfrak{E}_z = - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right), \\ \mathfrak{E}_z = \frac{-in}{c} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right). \end{array} \right.$$

Die Resultierende von \mathfrak{H}_x und \mathfrak{H}_y steht senkrecht auf der r -Richtung und hat die Größe

$$(2a) \quad \mathfrak{H} = \frac{\partial \Pi}{\partial r};$$

die Resultierende von \mathfrak{E}_x und \mathfrak{E}_y hat die Richtung von r und die Größe

$$(3a) \quad \mathfrak{E}_r = \frac{in}{c} \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial x}.$$

Die andere Maxwell'sche Gleichung $\mu \dot{\mathfrak{H}} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}$ verlangt endlich, daß Π die Differentialgleichung befriedigt:

$$(4) \quad \Delta \Pi + k^2 \Pi = 0.$$

In den Gleichungen (2), (3), (4) sind Π , k und x mit den Indizes 1 und 2 zu verstehen, je nachdem $z > 0$ oder $z < 0$.

In der Grenzebene $z = 0$ gelten die Bedingungen $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{E}_{1r} = \mathfrak{E}_{2r}$. Sie sind erfüllt, wenn wir längs dieser ganzen Ebene verlangen:

$$(5) \quad \Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{x_1^2} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \frac{1}{x_2^2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}.$$

Bekanntlich lautet diejenige Lösung von (4), welche einer punktförmigen Energiequelle entspricht:

$$(6) \quad \Pi = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R^2 = r^2 + z^2.$$

Sie liefert, mit dem Zeitfaktor e^{-int} multipliziert, Wellen, die mit wachsendem t nach außen eilen. Eine Quelle dieser Art werden wir an der Erregungsstelle, und zwar im Luftraum sowohl wie in Erde, als schematische Darstellung der Funkenstrecke, Antenne und Erdleitung zugrunde legen.

Unser Problem formuliert sich nun mathematisch folgendermaßen: Es wird ein Funktionenpaar Π_1, Π_2 für $z > 0$ bzw. $z < 0$ gesucht, welches den Bedingungen genügt:

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta \Pi_1 + k_1^2 \Pi_1 = 0 \dots z > 0, \\ \Delta \Pi_2 + k_2^2 \Pi_2 = 0 \dots z < 0, \end{cases}$$

$$(II) \quad \Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{\kappa_1^2} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} \dots z = 0,$$

$$(III) \quad \begin{cases} \Pi_1 = 0 \dots z > 0, & r = \infty \quad \text{und} \quad z = +\infty, \\ \Pi_2 = 0 \dots z < 0, & r = \infty \quad \text{und} \quad z = -\infty, \end{cases}$$

$$(IV) \quad \left. \begin{cases} \Pi_1 - \frac{e^{i k_1 R}}{R} & \text{für } z \geq 0 \\ \Pi_2 - \frac{e^{i k_2 R}}{R} & \text{,, } z \leq 0 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{endlich und stetig mitsamt} \\ \text{den ersten Ableitungen} \\ \text{einschl. der Stelle } R = 0. \end{array}$$

Daß wir die Art des Unendlichwerdens für $R = 0$ in beiden Medien durch die Funktion $e^{i k_{1,2} R} / R$ und zwar beidemale mit dem gleichen Faktor (der in (IV) gleich 1 gewählt wurde) festlegen, ist keine Willkür. In der Tat wird diese Gleichheit durch die Grenzbedingungen (III) verlangt, welche bis in die unmittelbare Nähe von $R = 0$ ihre Gültigkeit behalten müssen. Willkürlich bleibt nur die Größe dieses gemeinsamen Faktors, welcher die Größe des Energieaufwandes im Sender mißt und gleich ist dem Produkt aus der Frequenz, der Höhe der Antenne, ihrer Kapazität und der angelegten Spannung.

Nach den Greenschen Methoden läßt sich zeigen, daß durch die Bedingungen (I) bis (IV) das Funktionenpaar Π_1, Π_2 *eindeutig* bestimmt ist. Da der Beweisgang wegen der komplexen Beschaffenheit der Π von dem üblichen etwas abweicht und ein praktisches Interesse für die Wirkung der Erdung (vgl. Einleitung unter Nr. 1) beanspruchen darf, möge er angedeutet werden.

Es seien Π_1, Π_2 und Π_1', Π_2' zwei als verschieden vorausgesetzte Lösungen. Die konjugierten Lösungen, die durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ entstehen, heißen $\bar{\Pi}_1$ usw. Ferner seien u_1, u_2 die Differenzen $\Pi_1 - \Pi_1', \Pi_2 - \Pi_2'$ und \bar{u}_1, \bar{u}_2 die Differenzen der konjugierten Lösungen.

Wir gehen aus von der Greenschen Gleichung:

$$\int u \Delta v dS + \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dS = \int u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

Bei ihrer Anwendung auf den Halbraum 1 sei $u = u_1$, $v = \bar{u}_1$. Wegen (I) wird die linke Seite:

$$-\bar{k}_1^2 \int u_1 \bar{u}_1 dS + \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) dS,$$

wo also beide Raumintegrale reell sind, das erste aber mit einem im allgemeinen komplexen Faktor versehen ist.

Die rechte Seite zerfällt in drei Teile: ein Oberflächenintegral über eine unendlich kleine Halbkugel (Radius ρ), welche den singulären Punkt $R = 0$ von 1 ausschließt, ein Oberflächenintegral über eine unendlich große Halbkugel (Radius P), welche 1 nach außen begrenzt, ein Integral über den zwischen beiden Halbkugeln enthaltenen Teil der Grenzfläche $z = 0$.

Der erste Teil verschwindet wie ρ^2 . Nach (IV) ist nämlich nicht nur die Differenz zwischen jeder unserer Lösungen und der primären Erregung, sondern auch ihre gegenseitige Differenz u und deren in beliebiger Richtung genommener Differentialquotient für $R = 0$ endlich.

Der zweite Teil verschwindet ebenfalls. Bei komplexem k reicht nämlich die Forderung (III) aus, um ein exponentielles Verschwinden im Unendlichen zu sichern, so daß auch das Produkt solcher Exponentialgrößen in die Oberfläche der unendlich großen Kugel verschwindet. (Bei reellem k müßte man (III) in bekannter Weise dahin ergänzen, daß II und also auch u , \bar{u} von höherer Ordnung als $1/P$ verschwinden.)

Es bleibt also nur der dritte Teil des Oberflächenintegrals übrig und die Greensche Gleichung reduziert sich auf:

$$-\bar{k}_1^2 \int u_1 \bar{u}_1 dS + \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) dS = \int_{z=0} u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} d\sigma.$$

Bei entsprechender Bedeutung von u_2 und \bar{u}_2 ergibt sich für den Halbraum 2:

$$-\bar{k}_2^2 \int u_2 \bar{u}_2 dS + \int \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \dots \right) dS = \int_{z=0} u_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial n} dS.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $1/\bar{\kappa}_1^2$, die zweite mit $1/\bar{\kappa}_2^2$ und addieren. Dabei verschwindet die Summe der rechten Seiten wegen (II) — man beachte, daß in der ersten Zeile $\partial/\partial n = -\partial/\partial z$, in der zweiten $\partial/\partial n = +\partial/\partial z$ ist — und es folgt:

$$\begin{aligned} & \mu_1 \int u_1 \bar{u}_1 dS + \mu_2 \int u_2 \bar{u}_2 dS \\ &= \frac{1}{\bar{\kappa}_1^2} \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) dS + \frac{1}{\bar{\kappa}_2^2} \int \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \dots \right) dS. \end{aligned}$$

Hier ist die linke Seite reell, die rechte komplex wegen der komplexen Beschaffenheit von $\bar{\kappa}_1^2, \bar{\kappa}_2^2$, wobei der imaginäre Teil in beiden Termen das gleiche Vorzeichen hat. Da er verschwinden muß, so verschwinden die Integrale der rechten Seite einzeln. Man schließt daraus unmittelbar auf $\Pi_1 = \Pi_1'$, $\Pi_2 = \Pi_2'$.

Auch wenn eines der beiden Medien ein reelles k^2 besitzt, würde der Schluß nicht hinfällig werden. Haben aber beide Medien reelles k^2 , so ist unsere Behauptung selbst nicht mehr richtig, weil sich dann unserer Lösung Eigenschwingungen des ganzen Raumes überlagern können, die die Eindeutigkeit des Problems aufheben.

§ 3. Allgemeine Lösung des Problems.

Wir schicken zwei Bemerkungen voran:

1. Eine Lösung der Differentialgleichung (4) mit einem willkürlichen Parameter λ lautet:

$$(7) \quad C J(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}.$$

J bedeutet die überall endliche Besselsche Funktion vom Index 0. Diese Lösung reduziert sich, was für die Erfüllung der Grenzbedingungen wichtig ist, für $z = 0$ auf die von der Materialkonstanten k des Mediums unabhängige Größe CJ . Damit sie für $z > 0$ bzw. $z < 0$ und für alle positiven Werte von λ endlich bleibt, ist das Vorzeichen von $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ so zu wählen, daß stets $\sqrt{\lambda^2 - k^2} z$ einen negativen reellen Teil habe. Um dies deutlicher zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir

statt (7), indem wir die willkürliche Konstante C als eine willkürliche Funktion von λ auffassen:

$$(8) \quad \begin{cases} f_1(\lambda) J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \dots z > 0, \\ f_2(\lambda) J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \dots z < 0, \end{cases}$$

mit der Festsetzung, daß beidemal das Vorzeichen der Wurzel so gewählt werde, daß ihr reeller Teil positiv sei.

2. Unsere spezielle Funktion (6) läßt sich als eine Summe von Lösungen der Form (8) auffassen. Es ist nämlich:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{e^{i k_1 R}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \dots z > 0, \\ \frac{e^{i k_2 R}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \dots z < 0. \end{cases}$$

Zum Beweise bemerken wir, daß für eine beliebige Funktion von r ($0 < r < \infty$) die Besselsche Integraldarstellung¹⁾ gilt:

$$F(r) = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^\infty \rho d\rho F(\rho) J(\lambda \rho) J(\lambda r).$$

Dieselbe folgt unmittelbar aus der Fourierschen Integraldarstellung für eine Funktion $F(x, y)$, wenn die darzustellende Funktion nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängt.²⁾

Setzen wir $F(r) = e^{i k r}/r$, d. h. gleich demjenigen Wert, auf den sich (6) für $z = 0$ reduziert, so folgt:

$$\frac{e^{i k r}}{r} = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^\infty d\rho e^{i k \rho} J(\lambda \rho) J(\lambda r).$$

Die Integration nach ρ läßt sich ausführen und liefert³⁾

$$\int_0^\infty d\rho e^{i k \rho} J(\lambda \rho) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}},$$

1) Vgl. z. B. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, § 140.

2) Vgl. z. B. meine Diss.: Die willkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik, Kap. II, Königsberg 1892.

3) Vgl. Nielsen, l. c. § 74, Gl. (1) bis (4). Sehr viel einfacher gewinnt man die fragliche Formel bei komplexem k , wenn man für J seine Integraldarstellung benutzt und die Integration in der komplexen Ebene ausführt.

also

$$(10) \quad \frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J(\lambda r).$$

Will man diese Funktion von r gemäß der Differentialgleichung $\Delta II + k^2 II = 0$ für $z > 0$ bzw. $z < 0$ fortsetzen, so hat man nur rechterhand unter dem Integralzeichen den Faktor $e^{\mp \sqrt{\lambda^2 - k^2} z}$ hinzuzufügen. Dabei muß linkerhand die Funktion e^{ikR}/R entstehen. Man bestätigt dies leicht für $r = 0$ durch direkte Ausführung der Integration. Nimmt man noch $k = k_1$ bzw. k_2 , so ergeben sich die zu beweisenden Gleichungen (9).

Indem wir zu dem Problem vom Ende des vorigen Paragraphen zurückkehren, setzen wir II_1, II_2 aus einer „primären“ und „sekundären Erregung“ zusammen. Erstere entspricht der alleinigen Wirkung der Quelle und wird dargestellt durch das erste Glied auf der rechten Seite der folgenden Ausdrücke, letztere rührt her von der Wirkung der Erdoberfläche, ihrer Ladung und der damit zusammenhängenden Brechung der Kraftlinien usw., und wird gegeben durch das zweite Glied:

$$(11) \quad \begin{cases} II_1 = \frac{e^{ik_1 R}}{R} + \int_0^{\infty} f_1(\lambda) J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda, \\ II_2 = \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \int_0^{\infty} f_2(\lambda) J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \lambda d\lambda. \end{cases}$$

Die primäre Erregung ist in der Form (6) angesetzt, und zwar beidemal mit der gleichen Amplitude, wie es der Grenzbedingung $II_1 = II_2$ für $r = 0, z = 0$ entspricht; die sekundäre Erregung haben wir in der Form (8) gewählt.

Jetzt lassen sich die Grenzbedingungen (5) durch Wahl von f_1, f_2 befriedigen. Mit Rücksicht auf (9) schreiben wir die Bedingung $II_1 = II_2$ folgendermaßen:

$$(12a) \quad \left\{ \int_0^{\infty} \lambda d\lambda J(\lambda r) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \right\} \right. \\ \left. = - \int_0^{\infty} \lambda d\lambda J(\lambda r) \{ f_1(\lambda) - f_2(\lambda) \}. \right.$$

Was die Grenzbedingung $\partial \Pi_1 / \kappa_1^2 \partial z = \partial \Pi_2 / \kappa_2^2 \partial z$ betrifft, so dürfen wir hier die primäre Erregung nicht durch die Formeln (9) darstellen, weil diese, unter dem Integralzeichen nach z differenziert, für $z = 0$ divergieren würden. Aus Symmetriegründen oder durch Ausrechnung folgt aber direkt, daß

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikR}}{R} = 0 \quad \text{für } z = 0.$$

Deshalb fällt aus unserer zweiten Grenzbedingung die primäre Erregung heraus, und dieselbe lautet einfach:

$$(12b) \quad 0 = - \int_0^\infty \lambda d\lambda J(\lambda r) \left\{ \frac{f_1(\lambda)}{\kappa_1^2} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \frac{f_2(\lambda)}{\kappa_2^2} \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \right\}.$$

Die Gleichungen (12a) und (12b) sind befriedigt, wenn wir machen:

$$f_1(\lambda) - f_2(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}},$$

$$\frac{f_1(\lambda)}{\kappa_1^2} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \frac{f_2(\lambda)}{\kappa_2^2} \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} = 0,$$

d. h.

$$(13) \quad \begin{cases} f_1(\lambda) = \frac{\kappa_1^2}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\kappa_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \kappa_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}, \\ f_2(\lambda) = \frac{\kappa_2^2}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{\kappa_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \kappa_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}. \end{cases}$$

Durch Eintragen dieser Werte in (11) ist unsere allgemeine Lösung völlig bestimmt. Man kann nur noch eine gemeinsame multiplikative Konstante zu Π_1 , Π_2 hinzufügen, durch die die Stärke der Erregung in der Quelle dargestellt wird.

Man überzeugt sich nachträglich leicht, daß auch unsere Stetigkeits- und Endlichkeitsbedingungen erfüllt sind. In der Tat bleibt unsere sekundäre Erregung (die Differenz von Π und der primären Erregung) auch für $z = 0$, $r = 0$ endlich, da dieselbe z. B. im Medium 1 gegeben ist durch

$$\left(\Pi_1 - \frac{e^{ik_1 R}}{R} \right)_{R=0} = \int_0^\infty \frac{\kappa_1^2 \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\kappa_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + \kappa_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}},$$

d. h. durch ein unbedingt konvergentes Integral (der Integrand verschwindet für $\lambda = \infty$ wie $1/\lambda^2$). Ähnliches gilt für den

Gradienten der sekundären Erregung im Punkte $R=0$, d. h. für den nach einer beliebigen Richtung des Mediums 1 genommenen Differentialquotienten, in dem wir allerdings nicht mehr wie soeben unter dem Integralzeichen $r = z = 0$ setzen dürfen, ohne die Konvergenz des Integrals zu zerstören.

Sei ϑ der Winkel zwischen jener Richtung und der z -Achse, so wird für einen beliebigen Punkt (r, z) , den wir nachträglich in der gleichen Richtung ϑ nach $(0, 0)$ wandern lassen

$$\text{grad}_{\vartheta} = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r},$$

also mit der Abkürzung $\varphi(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} f_1(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\Pi_1 - \frac{e^{i k_1 R}}{R} \right) &= - \cos \vartheta \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \varphi(\lambda) J(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2 z} \\ &\quad + \sin \vartheta \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \varphi(\lambda) J'(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2 z}. \end{aligned}$$

Das erste Integral geht mit der Substitution $\lambda r = u$ wegen $z/r = \text{ctg } \vartheta$ über in:

$$\frac{1}{r^2} \int_0^{\infty} u du \psi(u) J(u) e^{-V u^2 - k_1^2 r^2 \text{ctg } \vartheta},$$

$$\text{wenn} \quad \psi(u) = \varphi \left(\frac{u}{r} \right) = \alpha_1^2 \frac{\sqrt{u^2 - k_1^2 r^2} - \sqrt{u^2 - k_2^2 r^2}}{\alpha_1^2 \sqrt{u^2 - k_2^2 r^2} + \alpha_2^2 \sqrt{u^2 - k_1^2 r^2}}.$$

Lassen wir r zu Null abnehmen, so bleibt das Integral nach u konvergent, weil der Exponent von e den auch für $r=0$ und alle Werte von $\vartheta < \pi/2$ negativen Wert $-u \text{ctg } \vartheta$ hat. Dagegen wird der Faktor $1/r^2$ vor dem Integral ∞ . Wir zeigen indessen, daß er sich forthebt. Zu dem Zwecke teilen wir die Integration in zwei Teile, von 0 bis ε , und von ε bis ∞ , wo $\varepsilon = k r$ und k größer als $|k_2|$ und $|k_1|$ sei. In dem Integral von ε bis ∞ können wir $\psi(u)$ entwickeln:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \alpha_1^2 \frac{u \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 r}{u} \right)^2 + \dots \right) - u \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{u} \right)^2 + \dots \right)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) u + \dots} \\ &= - \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{k_1^2 - k_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \frac{r^2}{u^2}. \end{aligned}$$

Dieser Teil bleibt also mit r^2 dividiert endlich für $r=0$. In dem anderen Teile von 0 bis ϵ können wir das Produkt von ψ , J und der Exponentialfunktion durch seinen maximalen absoluten Wert M ersetzen. Dieser Teil wird also nach Division mit r^2 kleiner als

$$\frac{M}{r^2} \int_0^\epsilon u \, du = \frac{M k^3}{2},$$

und bleibt daher ebenfalls endlich. Dieselbe Überlegung überträgt sich auf den anderen Teil des Gradienten im Medium 1 sowie auf das Medium 2. Es bleibt also auch der Gradient der Differenz zwischen Π_1 , Π_2 und unserer primären Erregung im Punkte $R=0$ und somit überall endlich.

Während sich für die Untersuchung der Stelle $R=0$ die Darstellung (11) als sehr geeignet erweist, wird bei der Betrachtung großer Entfernungen eine andere Form der Lösung geeigneter, in der die primäre und sekundäre Erregung nicht mehr getrennt erscheinen. Wir stellen also die primäre Erregung durch das Integral (9) dar und ziehen sie in (11) unter dem Integralzeichen nach λ mit der sekundären zusammen. Eine leichte Rechnung liefert so die mit (11) völlig identische Form:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_1 &= \int_0^\infty \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{N} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2} z} \lambda \, d\lambda, \\ \Pi_2 &= \int_0^\infty \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{N} J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2} z} \lambda \, d\lambda \end{aligned} \right.$$

mit der Abkürzung

$$(15) \quad N = \kappa_1^2 \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2} + \kappa_2^2 \sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2}.$$

Zwei Spezialfälle mögen sogleich erwähnt werden:

1. $\kappa_1 = \kappa_2 = k$, einheitliches homogenes Medium. In diesem Falle wird

$$\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{N} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

und nach (14) und (9):

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{e^{ikR}}{R},$$

während (11) und (13) noch direkter zeigen, daß die sekundäre Erregung verschwindet.

2. $k_2 = \infty$, *unendlich hohe Leitfähigkeit oder unendlich große Dielektrizitätskonstante im Medium 2.* Wiederum wird einfach:

$$\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{N} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}$$

und nach (14) und (9)

$$(16) \quad \Pi_1 = \frac{e^{i k_1 R}}{R},$$

d. h. gleich der speziellen Funktion des Hertzschen Dipols, die Abraham (vgl. Einleitung) der Diskussion dieses Grenzfalles zugrunde legt. Der Ausdruck von Π_2 wird gleichzeitig

$$\Pi_2 = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r) e^{+ \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} = 0.$$

Unsere Lösung erscheint hiernach als direkte Verallgemeinerung bekannter Sonderfälle.

§ 4. Vorbereitung zur Diskussion der Lösung.

Schwieriger als die Aufstellung der allgemeinen Formeln erweist sich hier wie so häufig ihre spezielle Diskussion.

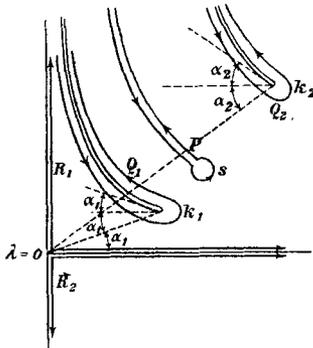


Fig. 2.

Da wir k_2 als komplex voraussetzen müssen und da wir der Allgemeinheit und Einfachheit wegen das Gleiche von k_1 annehmen, so wird es nötig, den reellen Integrationsweg ($0 < \lambda < \infty$) in die komplexe λ -Ebene überzuführen. Auf der reellen Achse verhält sich der Integrand in den Gleichungen (14) durchweg regulär und uncharakteristisch. Die charakteristischen Stellen desselben, die allein zu einer naturgemäßen

Berechnung der Ausdrücke (14) dienen können, liegen im Komplexen. Es gibt deren drei:

die Stellen $\lambda = k_1$ und $\lambda = k_2$,

welche Verzweigungspunkte der zu integrierenden Funktion sind, und

$$\text{eine Stelle } \lambda = s,$$

in der der Nenner N verschwindet.

Die Verzweigungspunkte $\lambda = k_1$ und $\lambda = k_2$ verbinden wir durch geeignete Verzweigungsschnitte mit dem Unendlichen. Hierbei wird unsere Festsetzung vom Anfange des vorigen Paragraphen maßgebend, wonach der reelle Teil von

$$\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$$

positiv sein soll. Damit unsere Integrale für jeden Wert von $z > 0$ bzw. $z < 0$ einen Sinn haben, ist dieselbe auf die komplexe Ebene auszudehnen. Als Grenze, die vom Integrationsweg nicht überschritten werden darf („Verzweigungsschnitt“), hat daher diejenige Linie zu gelten, in der $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ rein imaginär wird. Diese Linie verläuft asymptotisch nach dem Unendlichen der imaginären Achse, wo ja $\sqrt{\lambda^2 - k^2} = \lambda$ rein imaginär ist, und beginnt bei $\lambda = k$ unter einem Winkel, der in Fig. 2 konstruiert ist. Setzen wir vorübergehend für die Umgebung von $\lambda = k$:

$$\lambda - k = \zeta = |\zeta| e^{i\psi}, \quad k = |k| e^{i\alpha},$$

so wird

$$\sqrt{\lambda^2 - k^2} = \sqrt{2 k \zeta} = \sqrt{2 |k| |\zeta|} e^{\frac{i(\psi + \alpha)}{2}}.$$

Auf dem Verzweigungsschnitt in der Nachbarschaft von $\lambda = k$ muß also $(\psi + \alpha)/2 = \pi/2$, $\psi = \pi - \alpha$ sein, wie in Fig. 2 angedeutet. Die Verzweigungsschnitte sind, entsprechend ihren beiden „Ufern“, als Doppellinien eingetragen. Die weiteren Verzweigungspunkte $\lambda = -k_1$, $\lambda = -k_2$, die im dritten Quadranten der λ -Ebene liegen, werden für uns keine Rolle spielen, da wir nur im ersten und vierten Quadranten operieren.

Was die Verschwindungsstelle $\lambda = s$ von N betrifft, so ist zunächst zu untersuchen, ob sie in dem durch die Verzweigungsschnitte begrenzten Teile der λ -Ebene oder in den anderen „Blättern“ derselben liegt. Zunächst folgt aus $N = 0$ nach (15):

$$(17) \quad s = \sqrt{\frac{k_2^2 x_1^4 - k_1^2 x_2^4}{x_1^4 - x_2^4}}$$

oder, wenn wir spezieller $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\kappa_1^2 = k_1^2/\mu$, $\kappa_2^2 = k_2^2/\mu$ voraussetzen:

$$(17a) \quad s = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}.$$

Die Frage ist, ob dieser Wert von s bei der durch unsere Festsetzung bedingten Wahl der Wurzelzeichen der Gleichung

$$(18a) \quad \sqrt{\frac{s^2 - k_2^2}{s^2 - k_1^2}} = - \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}$$

oder aber der Gleichung

$$(18b) \quad \sqrt{\frac{s^2 - k_2^2}{s^2 - k_1^2}} = + \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}$$

genügt. Im ersten Falle verschwindet N in dem für uns zugänglichen Teil der λ -Ebene, im zweiten Fall in den unzugänglichen Blättern. Dabei wird es erlaubt und bequem sein, von dem etwas spezielleren Werte (17a) auszugehen; das

Resultat überträgt sich unmittelbar auf den allgemeineren Fall (17).

Aus (17a) folgt

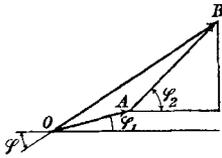


Fig. 3.

$$(17c) \quad \begin{cases} \sqrt{s^2 - k_1^2} = \sqrt{\frac{-k_1^4}{k_1^2 + k_2^2}}, \\ \sqrt{s^2 - k_2^2} = \sqrt{\frac{-k_2^4}{k_1^2 + k_2^2}}. \end{cases}$$

Im Anschluß an Fig. 3, in der die komplexe Zahl k_1^2 als Vektor OA und k_2^2 als Vektor AB , also $k_1^2 + k_2^2$ als Vektor OB aufgetragen ist, sei φ_1 , φ_2 , φ der Winkel, der zu k_1^2 , k_2^2 , $k_1^2 + k_2^2$ gehört. Dann wird nach (17c):

$$(19a) \quad \sqrt{s^2 - k_1^2} = \pm \sqrt{\frac{|k_1^4|}{|k_1^2 + k_2^2|}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$(19b) \quad \sqrt{s^2 - k_2^2} = \pm \sqrt{\frac{|k_2^4|}{|k_1^2 + k_2^2|}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2 - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Ist, wie wir annehmen dürfen, $\varphi_1 < \varphi_2$, so wird (vgl. Fig. 3) $\varphi < \varphi_2$ und um so mehr $\varphi_2 - \varphi/2 > 0$, also

$$\frac{\pi}{2} + \varphi_2 - \frac{\varphi}{2} > \frac{\pi}{2}.$$

Damit der reelle Teil positiv ausfällt, muß zunächst in (19b) das *untere* Vorzeichen $-$ gewählt werden. Was (19a) betrifft,

so folgt aus $\varphi_1 < \varphi_2$ (vgl. Fig. 3) ebenso $\varphi > \varphi_1$; wir machen aber die weitergehende Annahme

$$(20) \quad \varphi > 2\varphi_1;$$

dann ist jedenfalls

$$0 < \frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2};$$

damit also der reelle Teil von (19a) positiv ausfällt, haben wir hier das obere Vorzeichen + zu wählen. Durch Division von (19b) und (19a) erweist sich also bei dieser Vorzeichenwahl die Gleichung (18a) als erfüllt; *der Punkt $\lambda = s$ liegt im zugänglichen Gebiet*. Die hierzu erforderliche Bedingung (20) ist bei den Verhältnissen Luft-Erde stets erfüllt. Hier ist wegen der überwiegenden Leitfähigkeit des Erdreichs sicher $\varphi_2 \gg \varphi_1$, und daher auch (vgl. Fig. 3) $\varphi \gg \varphi_1$. Wie wir sehen werden, treten, wenn s im zugänglichen Gebiet liegt, *elektrodynamische Oberflächenwellen* auf. *Die Bedingung für ihre Möglichkeit ist also ebenfalls durch (20) gegeben*. Um diese Bedingung durch die Materialkonstanten und Schwingungszahl auszudrücken, folgern wir aus (20)

$$\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{tg} 2\varphi_1$$

und hieraus zusammen mit der Gleichung (1) bei reellem n :

$$(20a) \quad \frac{\mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2}{\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2} > \frac{2 \varepsilon_1 \sigma_1 n^2}{\varepsilon_1^2 n^2 - \sigma_1^2}.$$

Im Falle eines vollkommenen Nichtleiters $\sigma_1 = 0$ ist (20a) natürlich stets erfüllt, wenn nicht gleichzeitig $\sigma_2 = 0$. Ist auch $\sigma_2 = 0$, so rückt unser Pol auf den Verzweigungsschnitt, tritt also ins unzugängliche Gebiet über. Im unzugänglichen Gebiet liegt er z. B., wenn $\sigma_1 = \sigma_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ist.

In Fig. 2 tragen wir nun entsprechend der Annahme, daß (20) erfüllt ist, den Punkt $\lambda = s$, der einen Pol des Integranden bedeutet, im zugänglichen Gebiete ein. Er rückt (vgl. (17)) um so näher an den Verzweigungspunkt k_1 heran, je größer κ_2 gegen κ_1 ist.

Wie bereits bemerkt, beabsichtigen wir den Integrationsweg von der reellen Achse ins Komplexe überzuführen. Hierbei würde die Funktion J störend sein, da sie sowohl für positiv-imaginäre wie für negativ-imaginäre unendlich große Werte des Argumentes unendlich anwächst. Wir spalten

daher J in die beiden sogenannten Hankelschen Funktionen¹⁾

H_1, H_2 :

$$(21) \quad J(\lambda r) = \frac{1}{2} (H_1(\lambda r) + H_2(\lambda r)),$$

die für die meisten physikalischen Anwendungen die wichtigsten Lösungen der Besselschen Differentialgleichung sind. H_1 bzw. H_2 stellen nach dem Unendlichen divergierende oder aus dem Unendlichen konvergierende *fortschreitende* Zylinderwellen, J dagegen *stehende* Zylinderwellen dar. Für große Werte des Arguments rechts von der imaginären Achse gelten die bekannten asymptotischen Formeln:²⁾

$$(22) \quad \begin{cases} H_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4})}, \\ H_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4})}. \end{cases}$$

$H_1(x)$ verschwindet also im Unendlichen des ersten Quadranten der komplexen Ebene, $H_2(x)$ im Unendlichen des vierten Quadranten.

Schreiben wir jetzt statt (14) wegen (21):

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_0^{\infty} \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2N} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2} z} \lambda d\lambda, \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2N} H_2(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2} z} \lambda d\lambda, \end{aligned}$$

so werden wir den Integrationsweg im ersten Integral nach dem ersten, im zweiten nach dem vierten Quadranten hin verlegen. Im ersten Quadranten darf aber der Integrationsweg nicht über die Verzweigungsschnitte und den Pol $\lambda = s$ hinübergezogen werden. Im vierten Quadranten fehlen solche Hinder-

1) Bezeichnung von Nielsen l. c. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905 und Seitz, Ann. d. Phys. 21. p. 1013. 1906 bezeichnen sie mit Q . In meiner Arbeit über Drahtwellen (Wied. Ann. 67. p. 237. 1899) kommt H_2 im Anschluß an Heines $K(\vartheta + 0i)$ als Besselsche Funktion K vor.

2) Nielsen, l. c. § 58.

nisse. Daher läßt sich das zweite Integral direkt überführen in ein Integral längs der negativen imaginären Achse

$$R_2 = \int_0^{\infty} \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2N} H_2(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2} z} \lambda d\lambda.$$

Das erste Integral zerlegt sich in vier Bestandteile, die wir mit

$$P, Q_1, Q_2, R_1$$

bezeichnen: P sei der Umgang um den Pol $\lambda = s$, im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers erstreckt, wie aus Fig. 2 ersichtlich. Q_1, Q_2 sind die an den Verzweigungsschnitten hängen gebliebenen, an deren beiderseitigen Ufern entlang zu führenden Teile des Integrals. Endlich ist R_1 das Integral längs der positiven imaginären Achse

$$R_1 = \int_0^{+i\infty} \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2N} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2} z} \lambda d\lambda.$$

Außer diesen vier Bestandteilen würden bei der kontinuierlichen Deformation des reellen Integrationsweges noch die beiden Zuführungswege aus dem Unendlichen nach unserem Pol und gewisse unendlich ferne Wegstücke auftreten. Die ersteren heben sich aber bekanntlich gegenseitig auf, die letzteren geben keinen Beitrag, weil eben $H_1(H_2)$ im Unendlichen des ersten (vierten) Quadranten verschwindet. Schließlich aber heben sich auch noch R_1 und R_2 gegeneinander auf infolge der Beziehung¹⁾

$$H_2(x e^{-i\pi}) = -H_1(x).$$

Setzen wir hierin $x = \lambda r$, multiplizieren beiderseits mit

$$\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2N} e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2} z} \lambda d\lambda$$

und integrieren auf der positiv imaginären λ -Achse von $\lambda = 0$ bis $\lambda = +i\infty$, so entsteht rechts $-R_1$; machen wir dann noch links die Substitution $\lambda e^{-i\pi} = \lambda'$, so durchläuft die nun-

1) Nielsen, l. c. § 5 Gleichung (7).

mehrige Integration in λ' die negativ imaginäre Achse und es entsteht links $+R_2$. Somit gilt in der Tat:

$$R_1 + R_2 = 0.$$

Wir haben also schließlich nur drei charakteristische Bestandteile, aus denen sich II_1 und ganz analog II_2 zusammensetzt:

$$(23) \quad \left. \begin{array}{l} II_1 \\ II_2 \end{array} \right\} = P + Q_1 + Q_2.$$

Mit Rücksicht auf § 8 sei hier noch folgende Bemerkung eingeschaltet. Gehen wir nicht von dem Ausdrucke (14) für II_1 , sondern von der Integraldarstellung (9) für die einfache primäre Erregung $e^{ik_1 R}/R$ aus und wenden auf diese dasselbe Verfahren an, so haben wir als einzigen Verzweigungsschnitt den zu $\lambda = k_1$ gehörigen zu berücksichtigen. Der Nenner $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ im Ausdruck (9) verschwindet an keiner anderen Stelle als im Verzweigungspunkte selbst. Auch die beiden über die positive bzw. negative imaginäre Achse mit H_1 bzw. H_2 gebildeten Integrale (entsprechend den vorstehenden Termen R_1, R_2) heben sich gegenseitig auf und es bleibt allein das dem vorstehenden Terme Q_1 entsprechende Integral übrig. Wir haben daher

$$(23a) \quad \frac{e^{ik_1 R}}{R} = \frac{1}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z},$$

das Integral als Schleife, um den zu $\lambda = k_1$ gehörigen Verzweigungsschnitt geführt.

§ 5. Die Oberflächenwellen P .

Am interessantesten und zugleich am leichtesten auszuwerten ist der Bestandteil P . Wir haben, wenn das Integral einen Umgang um den Pol $\lambda = s$ bedeutet,

$$(24) \quad P = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{N} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z},$$

also nach der Residuenregel:

$$P = 2\pi i \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2} s H_1(s r) e^{-\sqrt{s^2 - k_1^2} z} \lim_{\lambda \rightarrow s} \left(\frac{\lambda - s}{N} \right).$$

Der letzte Faktor ist nichts anderes als das Residuum von $1/N$ und gleich $1/(dN/d\lambda)$. Nun folgt aus (15) für $\lambda = s$:

$$\frac{dN}{d\lambda} = \frac{\alpha_1^2 s}{\sqrt{s^2 - k_2^2}} + \frac{\alpha_2^2 s}{\sqrt{s^2 - k_1^2}}$$

und aus (17):

$$(25) \quad \sqrt{s^2 - k_2^2} = \sqrt{\frac{(k_2^2 - k_1^2) \alpha_2^4}{\alpha_1^4 - \alpha_2^4}}, \quad \sqrt{s^2 - k_1^2} = \sqrt{\frac{(k_2^2 - k_1^2) \alpha_1^4}{\alpha_1^4 - \alpha_2^4}},$$

also mit Rücksicht auf die Vorzeichenbestimmung in den Gleichungen (18) und (19):

$$\frac{dN}{d\lambda} = \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \right) s \sqrt{\frac{\alpha_1^4 - \alpha_2^4}{k_2^2 - k_1^2}},$$

$$(26a) \quad P = \pi C H_1(s r) e^{-\sqrt{s^2 - k_1^2} z}, \quad C = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \sqrt{\frac{k_2^2 - k_1^2}{\alpha_2^4 - \alpha_1^4}}.$$

Der entsprechende Wert für das Medium 2 entsteht hieraus, wie der Vergleich der beiden Formeln (14) zeigt, wenn wir in der Exponentialfunktion k_1 mit k_2 und $+$ mit $-$ vertauschen, nämlich

$$(26b) \quad P = \pi C H_1(s r) e^{+\sqrt{s^2 - k_2^2} z}.$$

Die Ausdrücke (26) kennzeichnen sich von selbst als *Oberflächenwellen*: Die Fortpflanzung (Phasengeschwindigkeit in radialer Richtung und radiale Dämpfung) bestimmt sich durch den Wert von s , also durch die Materialkonstanten *beider* Medien; die Welle ist mehr oder minder *konzentriert* auf die Umgebung der Oberfläche, indem ihre Intensität normal zur Oberfläche abnimmt und zwar bei großem k_2 infolge der Gleichung (25) langsam nach oben, schnell nach unten hin; die Amplitude nimmt, von der radialen Dämpfung abgesehen, mit wachsendem r nur sehr langsam, nämlich (vgl. (22)) wie $1/\sqrt{r}$ ab.

Auf letzteren Umstand haben wir besonderes Gewicht zu legen; er ist ebensosehr maßgebend für die Praxis der Übertragung von Signalen, wie kennzeichnend für die Natur der Oberflächenwellen (vgl. Einleitung unter Nr. 5).

Ihrer Ableitung nach sind die Formeln (26) strenge gültig für jedes r ; trotzdem werden sie für kleines r ungeeignet, da sie für $r = 0$, $z \neq 0$ ein Unendlichwerden liefern, das nicht in der Natur der Sache liegt. Dieses kommt nur durch die

Zerlegung des Gesamtvorganges nach (23) zustande und muß durch ein entgegengesetztes Unendlichwerden der Bestandteile Q aufgehoben werden. Wir werden uns deshalb im folgenden auf den Fall: r groß oder, besser gesagt, $r k_1$ eine große Zahl beschränken. ($r k_1$ bedeutet das 2π -fache der Anzahl Wellenlängen, um die der Aufpunkt von der Vertikalen durch die Quelle entfernt ist.) Es kommt hinzu, daß wegen der weitgehenden Schematisierung des Erregungsvorganges in unserem Ansatz die Formeln überhaupt nur in großer Entfernung von der Quelle die Verhältnisse richtig wiederzugeben beanspruchen können, während im Bereiche einiger Wellenlängen die besondere Anordnung des Sendersystems von erheblichem Einfluß sein kann.

Bei großem r folgt aus (26) wegen (22)

$$(26c) \quad \begin{cases} P = C e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{sr}} e^{i s r - \sqrt{s^2 - k_1^2} z} \dots z > 0, \\ \text{bzw.} \\ P = C e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{sr}} e^{i s r + \sqrt{s^2 - k_2^2} z} \dots z < 0. \end{cases}$$

Wir bilden die zugehörigen Feldstärken nach (2a), (3) und (3a), wobei wir konsequenterweise nur die niedrigsten Potenzen von r beizubehalten haben. Es ergibt sich, zusammenfassend für $z \geq 0$ geschrieben:

$$\mathfrak{H} = C e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi s}{r}} e^{i s r \mp \sqrt{s^2 - k^2} z},$$

$$\mathfrak{E}_r = \mp \frac{i n}{c x^2} C e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{s^2 - k^2} \sqrt{\frac{2\pi s}{r}} e^{i s r \mp \sqrt{s^2 - k^2} z},$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{n}{c x^2} C e^{\frac{i\pi}{4}} s \sqrt{\frac{2\pi s}{r}} e^{i s r \mp \sqrt{s^2 - k^2} z}.$$

Schließlich mögen wir noch in dem großen Abstände r von der Quelle ein rechtwinkeliges Koordinatensystem einführen: die x -Achse in der Richtung der wachsenden r , die z -Achse parallel der früheren z -Achse, wobei die Richtung von \mathfrak{H} in die y -Achse fällt. Dann wird mit der Abkürzung

$$(27) \quad \begin{cases} a = C e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi s}{r}} \\ \mathfrak{H}_y = a e^{i s x \mp \sqrt{s^2 - k^2} z}, \\ \mathfrak{E}_x = \mp \frac{i n}{c \kappa^2} a \sqrt{s^2 - k^2} e^{i s x \mp \sqrt{s^2 - k^2} z}, \\ \mathfrak{E}_z = \frac{n}{c \kappa^2} a s e^{i s x \mp \sqrt{s^2 - k^2} z}. \end{cases}$$

Dies sind genau diejenigen Formeln, welche Uller und Zenneck (vgl. Einleitung) der Behandlung der drahtlosen Telegraphie zugrunde gelegt haben. Wegen der numerischen Diskussion dieser Formeln kann auf die Arbeit von Zenneck verwiesen werden. Zur allgemeinen Orientierung sei nur hinzugefügt, daß die elektrischen Kraftlinien in Luft im Sinne der Fortpflanzungsrichtung voraneilen (vgl. die schematische Fig. 4), in Erde nachschleppen, und daß der Winkel, den die Kraftlinien in Luft mit der Normalen zur Erdoberfläche bilden, um so größer wird, je schlechter ihre Leitfähigkeit ist (bei Seewasser unmerklich klein, bei trockenem Erdboden etwa 30°).

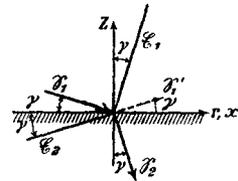


Fig. 4.

Schließlich haben wir noch auf einen Punkt hinzuweisen: die Abhängigkeit unseres Faktors C (Gleichung (26a)) von der Materialkonstante k_2 . Mit wachsendem k_2 (also z. B. mit zunehmender Leitfähigkeit des Bodens) nähert sich C dem Werte

$$(28) \quad C = - \frac{\kappa_1^2 k_2}{\kappa_2^2} = 0.$$

Unsere Oberflächenwellen, so scheint es, treten also bei guter Leitfähigkeit an Bedeutung mehr und mehr zurück. Auf die Berichtigung dieser Folgerung kommen wir in § 8 ausführlich zurück.

§ 6. Die Raumwellen Q .

Der Bestandteil Q_1 der Hertzschen Funktion im ersten Medium ist bestimmt durch:

$$(29) \quad Q_1 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{N} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z},$$

wenn das Integral im Sinne der Fig. 2 über die beiden Ufer des Verzweigungsschnittes ($i\infty, k_1$) genommen wird. Auf

diesem ist $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = i\tau$, d. h. rein imaginär, und zwar $+i\tau$ auf dem einen, $-i\tau$ auf dem anderen Ufer. Indem wir τ alle reellen Werte von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis $+\infty$ beilegen, durchlaufen wir das eine und sodann, wie es sein soll, im entgegengesetzten Sinne das andere Ufer. Für Q_1 können wir schreiben

$$(30) \quad Q_1 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \lambda d\lambda H_1(\lambda r) \frac{e^{-i\tau z}}{\kappa_2^2 i\tau + \kappa_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}},$$

wobei noch wegen $\lambda^2 - k_1^2 = -\tau^2$ ersetzt werden kann $\lambda d\lambda$ durch $-\tau d\tau$. Man erkennt hieraus, daß es sich um die Integration einer durchweg stetigen Funktion handelt. Deshalb können wir eine partielle Integration ausführen.

Nach der Besselschen Differentialgleichung, deren Lösung $H(x)$ ist, gilt:

$$\frac{d}{dx} x \frac{dH}{dx} = -xH,$$

also unbestimmt ausgeführt

$$\int^x x H(x) dx = -x \frac{dH(x)}{dx}$$

und

$$\int H(\lambda r) \lambda d\lambda = -\frac{1}{r} \lambda H'(\lambda r).$$

Da H' , der nach dem Argument genommene Differentialquotient, für die Grenzen $\tau = \pm i\infty$, d. h. $\lambda = i\infty$ verschwindet, so fällt bei der partiellen Integration das vom Integralzeichen freie Glied fort und es folgt aus (30):

$$Q_1 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2r} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \lambda d\lambda H_1'(\lambda r) \frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\tau z}}{\kappa_2^2 i\tau + \kappa_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}} \frac{d\tau}{d\lambda}.$$

Hier setzen wir für $d\tau/d\lambda$ den aus $\lambda d\lambda = -\tau d\tau$ folgenden Wert $-\lambda/\tau$ und für H_1' , indem wir wie auf p. 696 zu großen Werten von r übergehen, den aus (22) folgenden asymptotischen Ausdruck

$$H'(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{i\lambda r}$$

ein; z soll dabei eine mäßige Größe und jedenfalls klein gegen r sein. Dann wird:

$$(31) \quad Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{r\sqrt{2}\pi r} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} \frac{\lambda\sqrt{\lambda} d\lambda}{\tau} e^{i\lambda r} \frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\tau z}}{x_2^2 i\tau + x_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}}$$

Jetzt wird der Integrand für $\tau = 0$ unendlich wie $1/\tau$, d. i. in der Variablen λ für $\lambda = k_1$ wie $i/\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$.

Nun besteht der allgemeine Satz¹⁾, daß

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Lim}_{r=\infty} \int_0^{i\infty} e^{i\tau r} f(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} &= \frac{f(0)}{\sqrt{r}} \int_0^{i\infty} e^{i\tau} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= f(0) \sqrt{\frac{\pi}{r}} e^{\frac{i\pi}{4}}, \end{aligned} \right.$$

falls $f(\tau)$ auf dem ganzen Integrationswege endlich und stetig ist und falls man sich, wie es durch das Limeszeichen angedeutet wird, auf die niedrigste Potenz in r beschränkt. In diesem Falle trägt nämlich nur die Stelle $\tau = 0$ merklich zum Werte des Integrales bei, so daß man $f(\tau)$ durch $f(0)$ ersetzen kann. Führt man dann $x = \tau r$ als neue Integrationsvariable ein, so tritt der Faktor $1/\sqrt{r}$ vor das Integralzeichen. Das Integral nach x läßt sich, wie in (32) angegeben, direkt ausführen. Um diesen Satz auf (31) anzuwenden, setzen wir:

$$\begin{aligned} t &= \lambda - k_1, \quad e^{i\lambda r} = e^{i k_1 r} e^{i t r}, \\ f(t) &= \frac{i\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + k_1}} \frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\tau z}}{x_2^2 i\tau + x_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}}, \\ f(0) &= \frac{i k_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{e^{-i\tau z}}{x_2^2 i\tau + x_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}} \right)_{\tau=0} \\ &= \frac{k_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_2^2}{x_1^4 (k_1^2 - k_2^2)} + \frac{z}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right); \end{aligned}$$

auf dem einen Ufer des Verzweigungsschnittes läuft t von 0 bis $i\infty$, auf dem anderen Ufer von ∞i bis 0; letzteres liefert wegen des umgekehrten Vorzeichens von \sqrt{t} denselben Wert wie ersteres.

1) Vgl. z. B. E. Heine, Handb. d. Kugelfunktionen 1. p. 62, 4. Satz.

Daraufhin ergibt sich aus (32):

$$(33a) \quad \begin{cases} Q_1 = \frac{C_1}{r^2} e^{i k_1 r}, \\ C_1 = -i k_1 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4 (k_1^2 - k_2^2)} + \frac{\alpha}{\alpha_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right) \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, welche Abänderungen hierin vorzunehmen sind, wenn wir von dem Bestandteile Q_1 im ersten Medium zu demjenigen im zweiten Medium übergehen wollen. Wir haben in (29) zu ersetzen:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z \quad \text{durch} \quad +\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z, \\ \text{also in (30):} & \\ & -i \tau z \quad \text{durch} \quad \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2} z, \end{aligned}$$

ebenso in (31). Die Definition von $f(t)$ wird daher jetzt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{i \lambda \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + k_1}} \frac{d}{d\tau} \frac{e^{\sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2} z}}{\alpha_2^2 i \tau + \alpha_1^2 \sqrt{-\tau^2 + k_1^2 - k_2^2}}, \\ f(0) &= \frac{k_1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4 (k_1^2 - k_2^2)} e^{\sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}. \end{aligned}$$

Daher wird für das Medium 2:

$$(33b) \quad \begin{cases} Q_1 = \frac{C_1'}{r^2} e^{i k_1 r + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}, \\ C_1' = -i k_1 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4 (k_1^2 - k_2^2)}. \end{cases}$$

Die Werte des anderen Bestandteiles Q_2 im ersten und zweiten Medium lassen sich leicht aus den vorstehenden abnehmen. Ersetzen wir k_1 durch k_2 und $+z$ durch $-z$, so geht das Integral über den Verzweigungsschnitt ($i\infty, k_1$) in dasjenige über den Verzweigungsschnitt ($i\infty, k_2$) und daher auch der Wert von Q_1 im ersten in denjenigen von Q_2 im zweiten Medium, und umgekehrt über. Wir erhalten daher durch die genannte Vertauschung aus (33b) als Wert von Q_2 in 1:

$$(34a) \quad \begin{cases} Q_2 = \frac{C_2}{r^2} e^{i k_2 r - \sqrt{k_2^2 - k_1^2} z}, \\ C_2 = -i k_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^4 (k_2^2 - k_1^2)}, \end{cases}$$

und aus (33a) als Wert von Q_2 in 2:

$$(34b) \quad \begin{cases} Q_2 = \frac{C_2'}{r^2} e^{i k_2 r}, \\ C_2' = -i k_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^4 (k_2^2 - k_1^2)} - \frac{\alpha}{\alpha_2^2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2}} \right). \end{cases}$$

Betrachten wir nun die Ausdrücke (33) und (34) unter den im vorigen Paragraphen aufgestellten Gesichtspunkten.

Wir erkennen in (33a) gewisse dem Medium 1 charakteristische Raumwellen. Die Fortpflanzung dieser Wellen (Phasengeschwindigkeit und eventuelle Dämpfung) hängt nämlich nur von der Materialkonstante k_1 ab. Im Medium 2 (33b) haben wir wegen der Wechselwirkung beider Medien an der Grenzfläche notwendig dieselbe radiale Fortpflanzung, gegeben durch den Faktor $e^{i k_1 r}$. Dazu kommt aber, wegen der im Medium 2 herrschenden Differentialgleichung, eine Fortpflanzung und Dämpfung in normaler Richtung, gegeben durch den Faktor

$$e^{\sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}.$$

Ebenso erkennen wir in (34b) gewisse dem Medium 2 charakteristische Raumwellen, welche durch die Materialkonstante k_2 bedingt werden, und in (34a) diejenige Wellenform, wie sie, den Verhältnissen des Mediums 1 angepaßt, in diesem koexistieren kann.

Beide Arten Raumwellen nehmen mit wachsendem r sehr schnell ab, nämlich (von der radialen Dämpfung abgesehen) wie $1/r^2$. Sie werden daher in großer Entfernung von der Quelle gegen die Oberflächenwellen im allgemeinen zurücktreten. Allerdings müssen wir bei der Bezeichnung „Raumwellen“ hervorheben, daß es sich nicht um den gewöhnlichen Typus von Kugelwellen handelt. Weder der Faktor $1/r^2$ in (33) und (34) (über dessen Bedeutung man die Einleitung unter Nr. 5 vergleiche) noch das Vorkommen der Koordinate z in C_1 und C_2' entspricht dem gewöhnlichen Wellenvorgange im homogenen Medium; vielmehr handelt es sich hier um einen durch den Zusammenhang beider Medien und durch seine Koexistenz mit den Oberflächenwellen abgeänderten Typus.

Unsere Ausdrücke sind ihrer Ableitung nach Näherungsformeln und gelten natürlich nur in großem Abstand von der z -Achse, wie schon durch ihr scheinbares Unendlichwerden für $r = 0$ dargetan wird (vgl. hierzu eine Bemerkung von p. 695 über ein ähnliches Vorkommnis bei P). Unter Einführung des im vorigen Paragraphen genannten rechtwinkligen Koordinatensystems wollen wir auch hier die Feldstärken $\mathfrak{S}_y, \mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_z$ bei derjenigen ebenen Welle angeben, in die z. B. unsere

Raumwelle Q_1 für einen hinreichend entfernten Beobachter übergeht. Nehmen wir die in (2a), (3a) und (3) vorgesehenen Differentiationen an den Ausdrücken (33a) und (33b) vor, unter Beschränkung auf die niedrigste Potenz von r , zählen den Faktor $1/r^2$ zur Amplitude hinzu und schreiben schließlich im Exponenten x statt r , so ergibt sich für das Medium 1:

$$(35a) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_y = (a + bz) e^{ik_1 x}, \\ \mathfrak{E}_x = \frac{in}{c\kappa_1^2} b e^{ik_1 x}, \\ \mathfrak{E}_z = \frac{nk_1}{c\kappa_1^2} (a + bz) e^{ik_1 x}, \end{cases}$$

und für das Medium 2:

$$(35b) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_y = a e^{ik_1 x + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}, \\ \mathfrak{E}_x = \frac{in}{c\kappa_1^2} b e^{ik_1 x + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}, \\ \mathfrak{E}_z = \frac{nk_1}{c\kappa_2^2} a e^{ik_1 x + \sqrt{k_1^2 - k_2^2} z}; \end{cases}$$

mit den Abkürzungen:

$$a = \frac{k_1^2 \kappa_2^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}{r^2 \kappa_1^4 (k_1^2 - k_2^2)}, \quad b = \frac{k_1^2}{r^2} \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}}.$$

Ersichtlich erfüllt das vorstehende System in Strenge die Maxwell'schen Differentialgleichungen und Oberflächenbedingungen (\mathfrak{E}_x und \mathfrak{S}_y beiderseits gleich) und kann daher als ein neuer Typus ebener Wellen ein gewisses Interesse beanspruchen. Zur Veranschaulichung des Verlaufs der Kraftlinien in der Nähe der Trennungsfäche kann auch jetzt Fig. 4 dienen.

Schließlich betrachten wir auch hier die Abhängigkeit unserer Konstanten C , welche die Intensität der Raumwellen bestimmen, von der Materialkonstanten k_2 in der Grenze für unendlich wachsendes k_2 und κ_2 . Es wird

$$C_1 = C_1' = -i \frac{k_1}{k_2^2} \frac{\kappa_2^4}{\kappa_1^4} = -i \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \frac{k_2^2}{k_1^3} = \infty,$$

$$C_2 = C_2' = i \frac{\kappa_1^2}{k_2 \kappa_2^2} = i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_1^2}{k_2^3} = 0.$$

Hiernach scheint es, als ob unsere Raumwellen Q_1 gegenüber den Oberflächenwellen P , deren Amplitude (vgl. den Schluß des vorigen Paragraphen) mit wachsendem k_2 abnimmt, an

Bedeutung zunehmen. Die folgenden beiden Paragraphen werden diese Folgerung zwar im großen und ganzen bestätigen, zugleich aber auch den Gültigkeitsbereich der bisherigen Formeln umgrenzen, derart, daß es zu einem Unendlichwerden der Amplitude der Raumwellen unter keinen Umständen kommen kann.

§ 7. Reihenentwicklung für die Raumwelle Q_1 bei großer numerischer Entfernung.

Wir wollen die im vorigen Paragraphen gegebene Darstellung von Q_1 durch eine Reihenentwicklung ergänzen, deren erstes Glied jene Darstellung ist. Als Kriterium für die Gültigkeit der früheren sowie der neuen Darstellung wird sich ergeben, daß eine aus den Materialeigenschaften und der Entfernung zusammengesetzte Zahl, die wir (vgl. Einleitung) die *numerische Entfernung* nennen, groß sein muß.

Unserer Entwicklung legen wir zunächst die Voraussetzungen zugrunde: 1. $k_1 r$ und um so mehr $k_1 R$ groß, d. h. r bzw. R ein großes Vielfaches der Wellenlänge. 2. $|k_2|$ groß gegen $|k_1|$, was bei allen Bodenarten mehr oder minder gut zutrifft. Aus dem vorigen Paragraphen entnehmen wir, daß dann die Raumwellen Q_2 neben Q_1 vernachlässigt werden können wegen des Faktors $e^{ik_2 r}$, der eine starke radiale Dämpfung mit sich bringt, da $k_2 r = (k_2/k_1) k_1 r$ erst recht eine große Zahl ist. Wir werden uns also nur mit Q_1 beschäftigen.

Nach Gleichung (29) haben wir

$$Q_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \int H_1(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2 z} \frac{\lambda d\lambda}{N},$$

wenn das Integral auf einer Schleife um den Verzweigungsschnitt $k_1 \infty$ erstreckt wird, die den Pol $\lambda = s$ ausschließt. Nach Gleichung (15) ist

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{x_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} - \frac{1}{1 + \frac{x_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{x_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}}.$$

Das hier auftretende Produkt

$$\frac{x_2^2}{x_1^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_1^2}{\lambda^2 - k_2^2}}$$

ist in der Nähe des Verzweigungspunktes $\lambda = k_1$ jedenfalls

klein und erreicht im Pole $\lambda = s$, wo ja N verschwindet, den Wert -1 . Sein absoluter Betrag ist also < 1 auf unserer Schleife in der Nähe von $\lambda = k_1$, auf die es bei der Berechnung des Integrals wesentlich ankommt, so daß wir hier $1/N$ nach den aufsteigenden Potenzen jenes Produktes konvergent entwickeln können. Diese Entwicklung wird allerdings auf den entfernteren Teilen unserer Schleife divergent. Wenn wir sie trotzdem für den ganzen Integrationsweg benutzen, so ist das eine Ungenauigkeit, die unter gewissen Umständen (große „numerische Entfernung“) praktisch nicht ins Gewicht fällt, die aber zur Folge hat, daß die abzuleitende Formel streng genommen nicht konvergiert. Näheres hierüber vgl. unten. Eine weitere Ungenauigkeit lassen wir zu, indem wir die Größe $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ in N ersetzen durch $\sqrt{k_1^2 - k_2^2}$ mit Rücksicht auf die Voraussetzung 2 und den Umstand, daß die Umgebung von $\lambda = k_1$ für den Wert unseres Integrales maßgebend ist.

Wir erhalten so

$$(36) \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \sum_0^{\infty} \left(-\frac{x_2^2}{x_1^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_1^2}{k_1^2 - k_2^2}} \right)^{\nu}$$

und

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_1 &= -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2 x_2^2} \sum_0^{\infty} \left(\frac{-x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right)^{\nu+1} \\ &\quad \int (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2})^{\nu} H_1(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2} z \lambda d\lambda. \end{aligned} \right.$$

Die hier auftretenden Integrale sind bekannt. Aus (23a) folgt nämlich durch fortgesetzte Differentiation nach z :

$$\frac{\partial^{\nu+1}}{\partial z^{\nu+1}} \frac{e^{i k_1 R}}{R} = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2} \int (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2})^{\nu} H_1(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_1^2} z \lambda d\lambda.$$

Unsere Reihe (37) können wir also in üblicher Symbolik folgendermaßen schreiben:

$$Q_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} \sum_0^{\infty} \left(\frac{x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\nu+1} \frac{e^{i k_1 R}}{R},$$

oder auch, wenn Ω die Operation

$$(38) \quad \Omega = \frac{x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \frac{\partial}{\partial z}$$

und $\Omega^2, \Omega^3, \dots$ die zweimalige, dreimalige Anwendung derselben bedeutet:

$$(39) \quad Q_1 = - \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2^2} (\Omega + \Omega^2 + \Omega^3 + \dots) \frac{e^{i k_1 R}}{R}.$$

Diese Reihe legt eine sehr einfache physikalische Deutung nahe. Bezeichnen wir unsere primäre Erregung $e^{i k_1 R}/R$ als *einfachen Pol*, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{i k_1 R}}{R} \quad \text{ein Dipol,}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{i k_1 R}}{R} \quad \text{ein Tetrapol usw.,}$$

entstanden durch das Zusammenrücken von zwei, vier ... einfachen auf der z -Achse gelegenen Polen. Unsere Welle Q_1 entsteht also (vgl. Fig. 5) durch Überlagerung der Wirkung eines Dipoles, Tetrapoles ..., wobei sich die Intensität jeder höheren Singularität durch den Faktor $x_2^2/x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}$ von der der nächst niedrigeren unterscheidet. Bezeichnen wir dagegen mit Hertz, anknüpfend an die Struktur des aus II abzuleitenden elektrischen Feldes, bereits die Erregung $e^{i k_1 R}/R$ als *Dipol*, so wäre

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{i k_1 R}}{R} \quad \text{als Tetrapol,}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{i k_1 R}}{R} \quad \text{als Oktopol usw.}$$

zu bezeichnen und unser Q_1 durch Überlagerung eines Tetrapoles, Oktopoles ... zu erzeugen.

In dem gemeinsamen Ursprung aller dieser Wirkungen ($R = 0$) wird offenbar jede folgende Erregung von höherer Ordnung unendlich wie die vorhergehende. Dagegen wird in großer Entfernung vom Ursprung wegen der immer vollständigeren Kompensation der zusammengedrängten Pole jede folgende Erregung von geringerer Intensität wie die vorhergehende. Dieser Umstand weist bereits darauf hin, daß unsere Darstellung nur für große Entfernungen brauchbar sein kann, wie unten näher präzisiert werden wird.

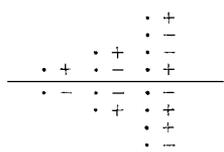


Fig. 5.

Auch diese ergänzte Darstellung (39) führt zu dem Ergebnis, daß wir Q_1 als *Raumwelle* anzusprechen haben, da die genannten Dipole, Tetrapole . . . die einfachsten Quellentypen von Wellen sind, die sich räumlich im Medium 1 ausbreiten.

Für das Folgende bedürfen wir einer expliziten Ausrechnung der Operation Ω^ν oder $\partial^\nu / \partial z^\nu$. Von den Fällen $\nu = 1, 2, \dots$ schließen wir durch vollständige Induktion leicht auf die folgende Regel: Es sei ω das Symbol $\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}$ und $\omega^2, \omega^3, \dots$ die zweimalige, dreimalige . . . Anwendung dieses Differentiationsprozesses; dann gilt:

$$\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} = z^\nu \omega^\nu + \frac{\nu(\nu-1)}{2} z^{\nu-2} \omega^{\nu-1} \\ + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2 \cdot 4} z^{\nu-4} \omega^{\nu-2} + \dots + \zeta;$$

das letzte Glied ζ lautet dabei, je nachdem ν gerade oder ungerade ist:

$$\zeta = \frac{\nu!}{2^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{\nu}{2}\right)!} \omega^{\nu/2} \quad \text{bzw.} \quad \zeta = \frac{\nu!}{2^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu-1}{2}\right)!} z \omega^{\frac{\nu+1}{2}}.$$

Bedeutet $[\nu/2]$ die größte ganze Zahl $\leq \nu/2$, so können wir durch Eintragen der vorstehenden Entwicklung in (39) Q_1 als Doppelsumme folgendermaßen schreiben:

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_1 = & - \frac{x_1^2 + x_2^2}{z_2^2} \sum_1^\infty \sum_0^{[\nu/2]} \mu \left(\frac{x_2^2}{x_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right)^\nu \\ & \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu-2\mu+1)}{2^\mu \mu!} z^{\nu-2\mu} \omega^{\nu-\mu} \left(\frac{e^{i k_1 R}}{R} \right). \end{aligned} \right.$$

Wir suchen zunächst die Glieder niedrigster Ordnung in $1/R$ auf, nämlich die Glieder mit $1/R^2$. Dieselben werden allein durch das Symbol ω^1 geliefert, und zwar ist

$$\omega \left(\frac{e^{i k_1 R}}{R} \right) = \left(\frac{i k_1}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right) e^{i k_1 R},$$

während ω^2 bereits von der Ordnung $1/R^3$, ω^3 von der Ordnung $1/R^4$ ist. Es gibt aber zwei Glieder in unserer Reihe mit ω^1 , für die also $\nu - \mu = 1$ ist, nämlich $\nu = 2, \mu = 1$ und $\nu = 1, \mu = 0$. Indem wir nur diese beiden Glieder bei-

behalten und auch in ω^1 das Glied mit $1/R^3$ gegen das Glied $i k_1/R^2$ streichen, wird aus (40):

$$\begin{aligned} Q_1 &= - \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2^2} \left(\frac{\kappa_2^4}{\kappa_1^4 (k_1^2 - k_2^2)} + \frac{\kappa_2^2 \kappa}{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right) \omega \left(\frac{e^{i k_1 R}}{R} \right) \\ &= - \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2^2} i k_1 \left(\frac{\kappa_2^4}{\kappa_1^4 (k_1^2 - k_2^2)} + \frac{\kappa_2^2 \kappa}{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right) \frac{e^{i k_1 R}}{R^2}. \end{aligned}$$

Somit haben wir genau den Wert (33a) für Q_1 wiedergefunden, mit der Erweiterung, daß R an die Stelle von r getreten ist, daß wir also nicht mehr auf die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche ($z = 0$) uns zu beschränken brauchen. Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen werden also durch die jetzige eingehendere Untersuchung bestätigt.

Zur Feststellung des Gültigkeitsbereiches müssen wir weiterhin die höheren Glieder beibehalten; im Interesse der Einfachheit wollen wir aber nun $z = 0$, also $R = r$ setzen. Dann bleiben in (40) nur diejenigen Glieder übrig, in denen ν gerade und $\mu = \nu/2$ ist, weil alle übrigen Glieder mit einer Potenz von z behaftet sind. Benutzen wir also μ als Summationsindex und setzen dementsprechend $\nu = 2\mu$, so reduziert sich die Doppelsumme auf die folgende einfache:

$$Q_1 = - \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2^2} \sum_1^{\infty} (\mu) \left(\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right)^{2\mu} \frac{(2\mu)!}{2^\mu \mu!} \omega^\mu \left(\frac{e^{i k_1 r}}{r} \right).$$

Bei der Berechnung von ω^μ dürfen wir wegen der Voraussetzung 1 am Anfange dieses Paragraphen näherungsweise setzen:

$$\omega^\mu \left(\frac{e^{i k_1 r}}{r} \right) = \left(\frac{i k_1}{r} \right)^\mu \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

Zur Begründung verweisen wir auf den oben angegebenen Wert von ω^1 oder auf den daraus folgenden von

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{e^{i k_1 r}}{r} \right) &= \left(- \frac{k_1^2}{r^3} - \frac{3 i k_1}{r^4} + \frac{3}{r^5} \right) e^{i k_1 r} \\ &= \left(\frac{i k_1}{r} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{i k_1 r} + \frac{3}{(i k_1 r)^2} \right) \frac{e^{i k_1 r}}{r}. \end{aligned}$$

Nach dieser Vereinfachung ergibt sich

$$Q_1 = - \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2^2} \sum_1^{\infty} (\mu) \left(\frac{\kappa_2^2 \sqrt{i k_1}}{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \sqrt{r}} \right)^{2\mu} \frac{(2\mu)!}{2^\mu \mu!} \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

Setzen wir noch etwa (wegen Voraussetzung 2 vom Anfange dieses Paragraphen) den Faktor vor der Summe gleich 1 und führen wir die wichtige Abkürzung ein:

$$(41) \quad \alpha = \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2}} \sqrt{\frac{r k_1}{2i}},$$

so ergibt sich

$$(42) \quad Q_1 = - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{\alpha^6} + \dots \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Aus dieser Form können wir bequem auf die Bedingung der Gültigkeit unserer jetzigen und früheren Darstellung schließen. Die Beschränkung auf das erste Glied unserer Reihe, entsprechend der Rechnung des vorigen Paragraphen, ist jedenfalls nur dann berechtigt, wenn $|\alpha^2| \gg 1$ ist. Der absolute Betrag von α^2 soll uns die schon mehrfach genannte *numerische Entfernung* definieren. Sie sei

$$(43) \quad \rho = |\alpha^2| = \left| \frac{\kappa_1^4}{\kappa_2^4} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2} \frac{k_1 r}{2} \right|.$$

Wir können also sagen: *die Näherungsformeln des vorigen Paragraphen sind nur berechtigt, wenn die numerische Entfernung eine große Zahl ist.*

Unter derselben Voraussetzung ist aber auch die jetzige Reihe allein brauchbar. Dieselbe ist nämlich divergent, weil das Verhältnis des N^{ten} zum $(N-1)^{\text{ten}}$ Gliede gleich $(2N-1)/2\alpha^2$ ist, was nach einer Bemerkung über die Divergenz der ursprünglichen Potenzreihe auf den entfernteren Teilen des Integrationsweges nicht wundernehmen kann. Die Meinung unserer Entwicklung muß daher die sein, daß wir die ursprüngliche Potenzreihe nur bis zu einem geeigneten, nicht zu hoch gewählten Gliede benutzen und durch ein Restglied abschließen. Dadurch würden auch die Reihen (32), (39), (40), (42) in die Form endlicher Reihen mit Restglied übergehen, welches letzteres bei hinreichend hoher numerischer Entfernung absolut genommen klein gehalten werden kann. In dieser Auffassung scheint also die Divergenz unserer Reihen keine Schwierigkeit zu bieten.

Reihe (42) läßt sich auch in geschlossener Form schreiben, nämlich wie folgt:

$$(44) \quad Q_1 = (1 + 2\alpha e^{-\alpha^2} \int_{\alpha}^{i\infty} e^{\beta^2} d\beta) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Entwickelt man nämlich durch fortgesetzte partielle Integration das vorstehende Integral nach negativen Potenzen von α , ähnlich wie es bei den analogen Fresnelschen Integralen üblich ist, so ergibt sich

$$\int_{\alpha}^{i\infty} e^{\beta^2} d\beta = -\frac{e^{\alpha^2}}{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{1}{\alpha^4} + \dots \right).$$

Auch diese Reihe ist natürlich divergent und durch ein Restglied abzuschließen. Setzt man sie in (44) ein, so entsteht in der Tat genau (42).

Was die Definition der numerischen Entfernung betrifft, so sei hervorgehoben, daß in einem besonders wichtigen Fall ρ direkt gleich α^2 gesetzt, also das Zeichen des absoluten Betrages unterdrückt werden kann. Es ist dies der Fall: k_2^2 rein imaginär, k_1 reell. Letzteres trifft immer hinreichend nahe bei ungedämpften Wellen zu, ersteres dann, wenn die Leitfähigkeit des Bodens groß genug und die Frequenz nicht zu groß ist. Nähere Zahlenangaben findet man in § 9. Hierzu kommt noch die im Anfange dieses Paragraphen genannte Bedingung: k_1 klein gegen $|k_2|$. In diesem Falle können wir nach der Definitionsgleichung (41) von α und mit Rücksicht auf $\alpha_1^2 = k_1^2/\mu_1$, $\alpha_2^2 = k_2^2/\mu_2$ schreiben:

$$\alpha^2 = \frac{-\alpha_1^4 \frac{k_2^2}{k_1^2} r k_1}{\alpha_2^4 \frac{k_1^2}{k_1^2} 2i} = \frac{k_1^2 \mu_2^2 k_1 r}{(-i k_2^2) \mu_1^2 2}.$$

Da nun alle Faktoren dieses Produktes positiv-reelle Zahlen sind, so ergibt sich in der Tat α^2 als reell und positiv und $\rho = \alpha^2$. Dementsprechend können wir in diesem Falle die Gleichung (42) und (44) direkt in ρ schreiben:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_1 &= - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\rho} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{1}{\rho^2} + \dots \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r} \\ &= (1 + 2\sqrt{\rho} e^{-\rho}) \int_{\sqrt{\rho}}^{i\infty} e^{\beta^2} d\beta \frac{e^{ik_1 r}}{r}. \end{aligned} \right.$$

Hieran schließt sich eine Bemerkung, welche auch die vorangehenden Umrechnungen betrifft und deren Sicherheit bis zu einem gewissen Grade in Frage stellt: Bei reellem ρ ist der Faktor von $e^{ik_1 r}/r$ in dem ersten Ausdrucke von (45) reell, in dem zweiten aber komplex, da sich das Integral in einen reellen Teil von $\sqrt{\rho}$ bis 0 und einen rein imaginären von 0 bis $i\infty$ zerlegen läßt. Eine solche Gleichheit zwischen Reell und Komplex ist natürlich unmöglich. Sie ist hier offenbar, wie alle unsere Entwicklungen, *asymptotisch* für $\rho = \infty$ aufzufassen, so nämlich, daß die Gleichheit erfüllt ist bis auf Terme, die von höherer Ordnung als jede negative Potenz von ρ , also z. B. wie e^{-e} verschwinden. Nur von dieser Ordnung ist aber in der Tat der Beitrag, den der imaginäre Teil des genannten Integrals zu dem zweiten Ausdruck (45) liefert.

Schließlich wollen wir noch die Oberflächenwelle P in eine zu (44) analoge Form schreiben. Wir beschränken uns dabei auf die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche, setzen also $z = 0$ und nehmen k_1 als klein gegen $|k_2|$ an. Dann folgt zunächst aus (17):

$$s = k_1 \sqrt{\frac{1 - k_2^2 x_1^4 / k_1^2 x_2^4}{1 - x_1^4 / x_2^4}} = k_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x_1^4}{x_2^4} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2} \right)$$

und

$$e^{i s r} = e^{i k_1 r} e^{-\alpha^2},$$

während nach Gleichung (26 a) wird

$$C = -\frac{x_1^2}{x_2^2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2}, \quad C e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{s r}} = -\frac{2 i \alpha \sqrt{\pi}}{r},$$

also nach (26 c):

$$(46) \quad P = -2 i \alpha \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2} \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

In dem besonderen Falle: k_2^2 rein imaginär, k_1 reell: können wir ähnlich wie oben α^2 durch ρ ersetzen und schreiben:

$$(46a) \quad P = -2 i \sqrt{\pi \rho} e^{-e} \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

Zugleich ergibt sich noch für die Summe $P + Q_1$, welche bis auf den zu vernachlässigenden Bestandteil Q_2 unsere totale

Erregung II_1 im Medium 1 darstellt, eine elegante zusammenfassende Formel. Wir berücksichtigen, daß

$$(46b) \quad \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta = -i \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\beta^2} d\beta.$$

Dann ist (46) identisch mit

$$P = -2\alpha e^{-\alpha^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\beta^2} d\beta \frac{e^{ik_1 r}}{r}$$

und die Summe von (44) und (46) liefert:

$$(47) \quad II_1 = P + Q_1 = \left(1 - 2\alpha e^{-\alpha^2} \int_{i\infty}^{\alpha} e^{\beta^2} d\beta\right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Dieselbe Formel werden wir im nächsten Paragraphen wiederfinden und zwar auf einwandfreiem Wege, während die vorstehende Rechnung nach obigem nur ein asymptotisch, d. h. in den Potenzen von α richtiges Resultat zu liefern braucht, während Glieder von der Ordnung $e^{-\alpha^2}$, zu denen auch P gehört, unsicher sein können.

§ 8. Der Grenzfall des vollkommenen Leiters.
Reihenentwicklung bei kleiner numerischer Entfernung.

Wie am Schlusse der §§ 5 und 6 bemerkt wurde, führen unsere Formeln im Falle eines sehr großen k_2 zu Unzuträglichkeiten: die Amplitude der Oberflächenwellen P wird Null, die der Raumwellen Q scheinbar unendlich. Andererseits zeigte der vorige Paragraph, daß unsere Entwicklungen für Q_1 nur bei großer numerischer Entfernung ρ brauchbar sind. Bei unendlich wachsendem k_2 wird aber ρ für beliebige Werte von r gleich Null, so daß in diesem Grenzfall überhaupt kein Anwendungsgebiet für unsere bisherigen Formeln übrig bleibt.

Wir müssen daher unsere bisherigen Formeln ergänzen, durch Entwicklungen für kleine numerische Entfernung ρ . In ihnen wird der Grenzfall des vollkommenen Leiters für $\rho = 0$ enthalten sein. Wir sahen bereits am Ende des § 3, daß in diesem Grenzfall II_1 übergehen muß in die bekannte Funktion $e^{ik_1 R}/R$, die bezüglich ihrer Abnahme mit der Entfernung

(wie r^{-1}) die Mitte hält zwischen der Abnahme von P (wie $r^{-1/2}$) und der von Q_1 (wie r^{-2} in erster Näherung).

Der analytische Grund für das Versagen unserer bisherigen Darstellung wird durch eine Bemerkung von p. 691 geklärt: Bei wachsendem k_2 rückt der Pol $\lambda = s$ dem Verzweigungspunkte $\lambda = k_1$ unbegrenzt näher; eine Trennung der Integrationswege von P und Q_1 , die zwischen Pol und Verzweigungspunkt festgelegt sind, wird schließlich unmöglich und die resultierende Darstellung unbrauchbar. Für die jetzigen Zwecke müssen wir daher auf eine Abtrennung der Oberflächenwellen verzichten und in der Darstellung (23)

$$II_1 = (P + Q_1) + Q_2$$

die Bestandteile $(P + Q_1)$ gemeinsam behandeln, während wir (vgl. den Anfang des vorigen Paragraphen) Q_2 vernachlässigen dürfen.

$(P + Q_1)$ und also auch näherungsweise II_1 wird wieder durch das Integral (29) gegeben, das auf einer Schleife um den Verzweigungsschnitt $k_1 \infty$ zu erstrecken ist, so aber, daß jetzt der Pol $\lambda = s$ eingeschlossen wird (Fig. 6). Wir haben jetzt genau reziprok zu verfahren wie im vorigen Paragraphen. Wir schreiben:

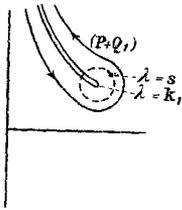


Fig. 6.

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{x_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \frac{1}{1 + \frac{x_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{x_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}}$$

Der absolute Betrag des Produktes

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2}},$$

welches das Reziproke der im vorigen Paragraphen benutzten Entwicklungsgröße ist, ist groß in nächster Nähe des Verzweigungspunktes k_1 , gleich 1 im Pole s , wo ja $N = 0$ wird, und < 1 auf unserem Schleifenwege, wenn dieser (vgl. Fig. 6) außerhalb einer durch den Pol s gehenden, in der Figur punktierten und nahezu kreisförmigen Linie verläuft, und zwar nicht nur auf den dem Punkte $\lambda = k_1$ benachbarten Teilen des Weges, sondern wegen $|x_2| > |x_1|$ auch auf den entfernten Teilen. Daher konvergiert die nach aufsteigenden Potenzen

jenes Produktes fortschreitende Reihe auf dem ganzen Integrationswege. Erlauben wir uns wieder die Ungenauigkeit, $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ zu ersetzen durch $\sqrt{k_1^2 - k_2^2}$ (vgl. den vorigen Paragraphen), so lautet die an Stelle von (36) tretende Reihe

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\kappa_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \sum_0^{\infty} \left(-\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2}} \right)^{\nu}$$

und unser Integral:

$$(48) \quad \Pi_1 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2^2} \sum_0^{\infty} \left(-\frac{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}}{\kappa_2^2} \right)^{\nu} X_{\nu}$$

mit der Abkürzung

$$(48a) \quad X_{\nu} = \frac{1}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - k_1^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}$$

Auch diese Integrale X_{ν} lassen sich aus der einfachen Funktion $e^{i k_1 R} / R$ ableiten, nur nicht wie die entsprechenden Größen im vorigen Paragraphen durch Differentiation, sondern durch Integration. Zunächst ist X_0 nach Gleichung (23a) identisch mit $e^{i k_1 R} / R$ selbst. Ersetzen wir nun in (23a) z durch $z - \zeta$ und dementsprechend R durch $R_{\zeta} = \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}$ und integrieren (23a) beiderseits nach ζ von $\zeta = -\infty$ bis $\zeta = 0$, so läßt sich die Integration rechts unter dem Integralzeichen ausführen und es verschwindet der Beitrag der unteren Grenze $\zeta = -\infty$. Daher

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{i k_1 R_{\zeta}}}{R_{\zeta}} d\zeta = \frac{1}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 - k_1^2} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z},$$

also gleich X_1 . Wählen wir sodann nicht $\zeta = 0$, sondern $\zeta = \zeta_1$ als obere Grenze der Integration nach ζ und fügen eine zweite Integration nach ζ_1 hinzu von $\zeta_1 = -\infty$ bis $\zeta_1 = 0$, so entsteht aus der vorigen Gleichung:

$$\int_{-\infty}^0 d\zeta_1 \int_{-\infty}^{\zeta_1} d\zeta \frac{e^{i k_1 R_{\zeta}}}{R_{\zeta}} = \frac{1}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - k_1^2)^{3/2}} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z},$$

also unser X_2 . Man kann die linke Seite hier auch als einfaches Integral schreiben. Deutet man nämlich ζ und ζ_1 als

rechtwinklige Achsen in einer Ebene, so erstreckt sich das Doppelintegral der vorigen Formel über denjenigen Sektor des III. Quadranten dieser Ebene, der begrenzt wird von der negativen ζ -Achse und der den Winkel zwischen der negativen ζ - und ζ_1 -Achse halbierenden Geraden. Führt man aber die Integration nach ζ_1 vor derjenigen nach ζ aus, so folgt einfacher

$$\int_{-\infty}^0 d\zeta \frac{e^{ik_1 R \zeta}}{R \zeta} \int_{\zeta}^0 d\zeta_1 = - \int_{-\infty}^0 d\zeta \zeta \frac{e^{ik_1 R \zeta}}{R \zeta}.$$

So fortfahrend erkennt man: Man erhält X_ν durch ν -fache Integration aus $e^{ik_1 R}/R$ mittels der Formel

$$(49) \quad \left\{ \int_{-\infty}^0 d\zeta_{\nu-1} \int_{-\infty}^{\zeta_{\nu-1}} d\zeta_{\nu-2} \cdots \int_{-\infty}^{\zeta_1} d\zeta \frac{e^{ik_1 R \zeta}}{R \zeta} \right. \\ \left. = \frac{1}{2} \int \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - k_1^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} H_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}, \right.$$

wobei man der linken Seite auch den einfacheren Ausdruck

$$(49a) \quad X_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \int_{-\infty}^0 d\zeta \zeta^{\nu-1} \frac{e^{ik_1 R \zeta}}{R \zeta}$$

geben kann. Deutet man also die linke Seite von (49) symbolisch durch $(\int d\zeta)^\nu e^{ik_1 R}/R$ an, so schreibt sich (48):

$$\Pi_1 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2^2} \sum_0^\infty \left(- \frac{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}}{\kappa_2^2} \int d\zeta \right)^\nu \frac{e^{ik_1 R}}{R}.$$

Endlich führen wir die zur Operation Ω des vorigen Paragraphen reziproke Operation

$$\Omega^{-1} = - \frac{\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2}}{\kappa_2^2} \int d\zeta$$

ein. Dann ergibt sich die zu (39) analoge und „reziproke“ Darstellung:

$$(50) \quad \Pi_1 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2^2} (1 + \Omega^{-1} + \Omega^{-2} + \dots) \frac{e^{ik_1 R}}{R}.$$

Die Bedeutung der Operation Ω^{-1} ist nach dem Obigen klar: man ersetze in der Funktion, auf welche sie angewandt wird,

z durch $z - \zeta$ und integriere nach ζ von $-\infty$ bis 0; außerdem füge man den Faktor $-\kappa_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2} / \kappa_2^2$ hinzu. Entsprechend ist die ν -fache Wiederholung dieser Operation im Anschluß an Gleichung (49) aufzufassen.

Wir geben zunächst eine physikalische Deutung unserer Reihe (50). Das erste Glied wollen wir wieder bezeichnen als „einfachen Pol“ oder als „punktförmige Erregung“. Das zweite Glied ist ein Integral von $\zeta = -\infty$ bis $\zeta = 0$, dessen Element ebenfalls eine punktförmige Erregung an der Stelle $z = \zeta$ von der Stärke $-(\kappa_1^2 / \kappa_2^2) \sqrt{k_1^2 - k_2^2} d\zeta$ bedeutet. Im ganzen stellt daher das zweite Glied eine „linienförmige Erregung“ dar, nämlich die Erregung einer einseitig (bei $z = 0$) begrenzten Geraden von konstanter Belegung. Das dritte Glied entsteht nach (49a), wenn wir die Linienerrregung nicht gleichförmig nehmen, sondern proportional mit ζ anwachsen lassen nach dem Gesetze:

$$- (\sqrt{k_1^2 - k_2^2} \kappa_1^2 / \kappa_2^2)^2 \zeta d\zeta.$$

Stellen wir die Belegungsichten durch eine senkrecht zur Linie aufgetragene Koordinate dar, so ergibt sich jetzt eine Dreiecksfläche, im vorhergehenden Fall eine Rechtecksfläche. Entsprechend den Faktoren $\zeta^2/2$, $\zeta^3/3!$ in (49a) haben wir (vgl. Fig. 7) bei den folgenden Gliedern die Fläche einer Parabel 2^{ter}, 3^{ter}... Ordnung aufzutragen. Die Gesamtwirkung Π_1 setzt sich also zusammen aus einer punktförmigen Erregung, einer linienförmigen Erregung mit Rechtecks-, Dreiecks-, gewöhnlicher und höherer Parabel-Belegung.

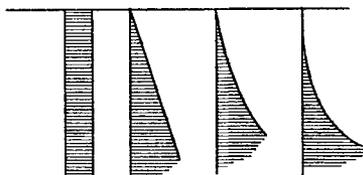


Fig. 7.

Jeder einzelne dieser Wellentypen darf als Raumwelle des Mediums 1 bezeichnet werden, da er sich von den supponierten Erregungsstellen aus im Medium 1 unabhängig von der Anwesenheit und den Materialkonstanten des Mediums 2 auszubreiten vermag; nur auf die Stärke des einzelnen Wellentypus haben die Materialkonstanten des Mediums 2 Einfluß. Das Resultat der Überlagerung aller dieser Wellentypen wird man aber kaum mehr als Raumwelle bezeichnen wollen, da es ja

unserer früheren Summe $P + Q_1$ von Raum- und Oberflächenwelle äquivalent ist. Wie in der Einleitung bemerkt, ist eben die Grenze zwischen Raum- und Oberflächenwellen keine scharfe.

Über die Struktur der einzelnen Wellentypen sei noch folgendes bemerkt: In dem gemeinsamen Endpunkte unserer Belagungen ($z = 0$; $R = 0$) ist jeder folgende Wellentypus unserer Reihe von geringerer Intensität, wie der vorhergehende. Z. B. wird hier die erste (punktförmige) Erregung unendlich wie $1/R$, die zweite (linienförmige) nur noch logarithmisch unendlich, die dritte (linienförmige mit Dreiecksbelegung) bleibt endlich, bei den höheren Gliedern bleiben auch noch je eine Anzahl Differentialquotienten endlich. Dagegen wird in großem Abstand die Reihenfolge der Stärke die umgekehrte sein: die zweite (linienförmige) Erregung wird weiter tragen wie die erste (punktförmige) usw. Die Verhältnisse liegen auch in dieser Hinsicht reziprok zu den im vorigen Paragraphen geschilderten Umständen. Dementsprechend wird die jetzige Entwicklung nur für kleine „numerische Entfernungen“ (vgl. unten) praktisch brauchbar sein. An der Annahme großer absoluter Entfernung, d. h. an der Annahme eines großen $k_1 r$ halten wir auch hier fest, da die unmittelbare Umgebung des Senders für uns kein Interesse hat.

Wir wünschen aber nicht nur eine allgemeine Orientierung über den Charakter der vorliegenden Reihenentwicklung, sondern die Möglichkeit ihrer zahlenmäßigen Beherrschung zu haben.

Deshalb geben wir zunächst eine Formel zur rekurrenten Berechnung der X_ν , nämlich

$$(51) \quad (\nu + 1) X_{\nu+2} + z X_{\nu+1} = \frac{1}{k_1^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} - (\nu - 1) \right\} X_\nu$$

Man beweist dieselbe z. B. von der reellen Integraldarstellung (49a) aus, indem man die rechte und linke Seite mittels partieller Integration nach ζ auf den gemeinsamen Wert

$$\frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!} \frac{1}{i k} \int_{-\infty}^0 \zeta^{\nu-1} e^{i k R \zeta} d\zeta$$

zurückführt. Nach (51) läßt sich X_2, X_3, \dots aus X_0 und X_1 berechnen. Z. B. ergibt sich

$$X_2 = -z X_1 - \frac{1}{i k_1} e^{i k_1 R},$$

$$2 X_3 = z^2 X_1 + \frac{\pi}{i k_1} e^{i k_1 R} + \frac{1}{k_1^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right\} X_1.$$

In dieser Allgemeinheit ist das Bildungsgesetz nicht übersichtlich. Wir nehmen daher weiterhin, wie am Ende des vorigen Paragraphen, $z = 0$ und $k_1 r$ als große Zahl an.

Dann wird zunächst für gerade Werte $\nu = 2\mu$:

$$X_0 = \frac{e^{i k_1 r}}{r}, \quad X_2 = \frac{1}{1} \frac{i}{k_1} e^{i k_1 r},$$

$$X_4 = \frac{1}{1.3} \frac{i}{k_1} \frac{1}{k_1^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right\} e^{i k_1 r} = \frac{1}{1.3} \left(\frac{i}{k_1} \right)^2 r e^{i k_1 r},$$

wenn wir -1 gegen $i k_1 r$ streichen. Allgemein ist

$$(51a) \quad X_{2\mu} = \frac{1}{1.3 \dots (2\mu - 1)} \left(\frac{i r}{k_1} \right)^\mu \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

In der Tat folgt dann aus (51)

$$X_{2\mu+2} = \frac{1}{1.3 \dots (2\mu - 1)(2\mu + 1) k_1^2} \{ i k_1 r + (\mu - 1) - (2\mu - 1) \} \left(\frac{i r}{k_1} \right)^\mu \frac{e^{i k_1 r}}{r},$$

ein Ausdruck, der sich unter den Wert (51a) subsumiert, wenn man $-\mu$ gegen $i k_1 r$ streicht.

Was die ungeraden Werte von $\nu = 2\mu + 1$ betrifft, so bestimmen wir zunächst X_1 . Aus der Definitionsgleichung (48a) ergibt sich nach dem Cauchyschen Satze für $z = 0$ unmittelbar

$$X_1 = \frac{\pi i}{2} H_1(k_1 r)$$

und für große Werte von $k_1 r$ nach (22)

$$X_1 = \sqrt{\frac{\pi r}{2 k_1}} e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

Der schon angegebene Wert von X_3 geht daraufhin für $z = 0$ und großes $k_1 r$ über in

$$X_3 = \sqrt{\pi} \left(\frac{r}{2 k_1} \right)^{3/2} e^{\frac{3i\pi}{4}} \frac{e^{i k_1 r}}{r},$$

und es wird allgemein

$$(51b) \quad X_{2\mu+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\mu!} \left(\frac{r}{2k_1}\right)^{\frac{2\mu+1}{2}} e^{\frac{(2\mu+1)\pi}{4}} \frac{e^{ik_1 r}}{r},$$

wie man wieder durch Anwendung der Rekursionsformel (51) und den Schluß von μ auf $\mu+1$ bestätigt. Die Werte (51a) und (51b) lassen sich mit Hilfe der Γ -Funktion zusammenfassen in:

$$(51c) \quad X_\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \left(\frac{ir}{2k_1}\right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Infolgedessen wird nach (48)

$$H_1 = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2^2} \sum_0^\infty \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \left(-\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2}} \sqrt{\frac{ir k_1}{2}}\right)^\nu \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Nach der Definition von α (Gleichung (41)) können wir hierfür schreiben:

$$(52) \quad H_1 = \sum_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} (-i\alpha)^\nu \frac{e^{ik_1 r}}{r};$$

zugleich haben wir, was erlaubt ist, den Faktor vor der Summe durch 1 und $\sqrt{\pi}$ durch $\Gamma(1/2)$ ersetzt.

Diese Summe ist konvergent für alle Werte von α , wie es nach der Konvergenz der Potenzreihe, von der wir ausgingen (vgl. p. 712), nicht anders zu erwarten war. Trotzdem ist sie nur brauchbar, d. h. durch die ersten Glieder hinreichend gut dargestellt, wenn α absolut genommen *nicht* zu groß ist. Wir werden also jetzt auf die Bedingung geführt, daß die numerische Entfernung $\rho = |\alpha^2|$ keine große Zahl sein darf, und sehen, daß die Entwicklung dieses Paragraphen diejenige des vorigen Paragraphen für das Gebiet kleiner numerischer Entfernungen in willkommener Weise ergänzt.

Das erste Glied der Reihe (52) (für $\nu=0$) lautet $e^{ik_1 r}/r$; hätten wir nicht $z=0$ gesetzt, so würde sich als solches ergeben haben $e^{ik_1 R}/R$ in Übereinstimmung mit dem Schluß von § 3, d. h. diejenige Funktion, die bisher dem Studium der Ausbreitung der funkentelegraphischen Wellen von Abraham zugrunde gelegt wurde. Gleichung (52) zeigt also, wie sich dieser

einfachste Typus einer punktförmigen Erregung bei wachsender numerischer Entfernung in kompliziertere Wellentypen umsetzt. Brechen wir (52) mit dem zweiten Gliede ($\nu = 1$) ab, so ergibt sich:

$$(53) \quad \Pi_1 = (1 - i\alpha\sqrt{\pi}) \frac{e^{ik_1 r}}{r},$$

an welche Formel die Zahlenrechnungen des nächsten Paragraphen anknüpfen werden.

Wollen wir (52) vollständig berechnen, so empfiehlt es sich, die Glieder mit geradem und die mit ungeradem ν für sich zusammenzufassen. Man erhält wegen der schon benutzten Bedeutung der Γ -Funktion bei ungeradem und geradem ν :

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \left(1 - \frac{2}{1} \alpha^2 + \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \alpha^4 - \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 5} \alpha^6 + \dots\right) \frac{e^{ik_1 r}}{r} \\ \quad + \sqrt{\pi} (-i\alpha) \left(1 - \frac{\alpha^2}{1!} + \frac{\alpha^4}{2!} - \frac{\alpha^6}{3!} + \dots\right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}. \end{array} \right.$$

Wir können die hier auftretenden Reihen leicht summieren. Die Reihe der zweiten Zeile ist direkt $e^{-\alpha^2}$. Bezeichnen wir diejenige der ersten mit

$$A = 1 - \frac{2}{1} \alpha^2 + \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \alpha^4 - \dots,$$

so findet man

$$\frac{A-1}{2\alpha} = -\alpha + \frac{2}{1} \frac{\alpha^3}{3} - \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{\alpha^5}{5} + \dots,$$

also

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{A-1}{2\alpha} = -1 + \frac{2}{1} \alpha^2 - \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \alpha^4 + \dots = -A.$$

Dieser Differentialgleichung für A sowie der Anfangsbedingung $dA/d\alpha = 0$ für $\alpha = 0$ genügt nun die Funktion

$$A = 1 - 2\alpha e^{-\alpha^2} \int_0^\alpha e^{\beta^2} d\beta,$$

welche somit die fragliche Summe darstellt. Statt (54) haben wir also auch die geschlossene Formel

$$(55) \quad \Pi_1 = \left(1 - 2\alpha e^{-\alpha^2} \int_0^\alpha e^{\beta^2} d\beta - i\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2}\right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Sie ist vollkommen identisch mit Gleichung (47), indem vermöge (46 b) geschrieben werden kann

$$\sqrt{\pi} = -2i \int_{-i\infty}^0 e^{\beta^2} d\beta.$$

Durch die Übereinstimmung der (allerdings auf die Ebene $z=0$ beschränkten) Formeln (55) und (47) ist der Anschluß unserer jetzigen an die früheren Entwicklungen vollzogen.

Trotzdem bleibt hier eine gewisse Unstimmigkeit bestehen, auf welche hingewiesen werden muß. Sie tritt insbesondere im Falle eines reellen $\alpha^2 = \varrho$ (k_2^2 rein imaginär) hervor. Dann ist Q_1 nach der Reihendarstellung (45), abgesehen von dem Faktor $e^{ik_1 r}/r$, reell, P nach (46 a), abgesehen von demselben Faktor, rein imaginär. Zerlegen wir aber I_1 nach (55) in die zwei Teile

$$u e^{ik_1 r}/r \quad \text{und} \quad -i v e^{ik_1 r}/r,$$

wo u und v reell sind, nämlich

$$(55a) \quad u = 1 - 2\sqrt{\varrho} e^{-\varrho} \int_0^{\sqrt{\varrho}} e^{\beta^2} d\beta, \quad v = \sqrt{\varrho} \pi e^{-\varrho},$$

so ist $-i v e^{ik_1 r}/r$ nicht, wie man erwarten sollte, gleich P , sondern gleich $P/2$ und $u e^{ik_1 r}/r$ nicht gleich Q_1 , sondern gleich $Q_1 + P/2$. Den Grund für diese Unstimmigkeit haben wir in dem zu sehen, was p. 710 über die *asymptotische* Gültigkeit der Entwicklungen des vorigen Paragraphen gesagt wurde, welche Glieder von der Ordnung $e^{-\varrho}$ im allgemeinen nicht wiederzugeben vermögen.

§ 9. Zahlenrechnungen.

Für die Zahlenrechnungen setzen wir $\mu_1 = \mu_2 = 1$, so daß $\kappa_1 = k_1$, $\kappa_2 = k_2$; ferner nehmen wir k_1 als reell (Leitfähigkeit der Luft verschwindend klein, Wellen ungedämpft). Dann ist $k_1 = 2\pi/l$, wenn l die Wellenlänge bedeutet. l beträgt etwa 2 km bei den großen transatlantischen Stationen, 0,36 km bei den deutschen Küstenstationen. Die Frequenz n ist gleich $2\pi c/l$.

Nach den Gleichungen (1) ist für $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$:

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \varepsilon_2 + \frac{i \sigma_2}{n} = \varepsilon_2 + \frac{i \sigma_2 l}{2 \pi c}.$$

Unsere modifiziert elektrostatisch gemessene Leitfähigkeit σ_2 hängt mit der in gewöhnlicher Weise in C.G.S.-Einheiten gemessenen Leitfähigkeit σ folgendermaßen zusammen: $\sigma_2 = 4 \pi \sigma c^2$.
Daher

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \varepsilon_2 + 2 i \sigma c l.$$

Weiterhin kommt alles auf die Größe unserer numerischen Entfernung an. Ist das vorgenannte Verhältnis nicht zu klein¹⁾, so haben wir nach (43), wenn wir $(k_2^2 - k_1^2)/k_1^2$ näherungsweise ersetzen durch k_2^2/k_1^2 :

$$\varrho = \frac{k_1^2}{|k_2^2|} \frac{k_1 r}{2} = \frac{\pi r / l}{|\varepsilon_2 + 2 i \sigma c l|}.$$

Für r nehmen wir, entsprechend der Marconischen transatlantischen Station $r = 1/4$ Erdquadrant $= 1/4 \cdot 10^4$ km; l sei $= 2$ km wie bei der deutschen Station Nauen. Die Daten für ε_2 und σ entlehnen wir für die hauptsächlich in Betracht kommenden Oberflächenarten einer Arbeit von Zenneck.²⁾ Außer ϱ wollen wir wegen des folgenden auch $\sqrt{\pi} \varrho$ berechnen:

Seewasser:

$$\sigma = 10^{-11}, \quad \varepsilon_2 = 80, \quad 2 \sigma c l = 12 \cdot 10^4 = |\varepsilon_2 + 2 i \sigma c l|,$$

also

$$\varrho = \frac{1}{30}, \quad \sqrt{\varrho \pi} = \frac{1}{3}.$$

Süßwasser:

$$\sigma = 10^{-14}, \quad \varepsilon_2 = 80, \quad 2 \sigma c l = 120, \quad |\varepsilon_2 + 2 i \sigma c l| = 145,$$

also

$$\varrho = 30, \quad \sqrt{\varrho \pi} = 10.$$

Nasser Boden:

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-14}, \quad \varepsilon_2 = 10, \quad 2 \sigma c l = 600, \quad |\varepsilon_2 + 2 i \sigma c l| = 600,$$

also

$$\varrho = 6,5, \quad \sqrt{\varrho \pi} = 4,5.$$

1) Selbst bei trockenem Boden (vgl. unten) ist der absolute Betrag desselben immer noch etwa 13. Der Fehler bei der Berechnung von ϱ würde also nur etwa 10 Proz. ausmachen.

2) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 23. p. 859 unter c). 1907.

Trockener Boden:

$$\sigma = 10^{-15}, \quad \varepsilon_2 = 4, \quad 2 \sigma c l = 12, \quad |\varepsilon_2 + 2 i \sigma c l| = 13,$$

also

$$\rho = 300, \quad \sqrt{\rho \pi} = 30;$$

alles in runden Zahlen gerechnet.

Der absoluten Entfernung $r = 1/4$ Erdquadrant entspricht also eine numerische Entfernung, die nur im Falle des Seewassers klein ist; bei allen anderen Bodenarten nimmt sie recht erhebliche Werte an.

Hiernach ist die Frage zu beurteilen, ob man die Ausbreitung der funkentelegraphischen Wellen unter der Annahme eines vollkommen leitenden Bodens, d. h. auf Grund der einfachen Formel $e^{i k_1 r}/r$ behandeln darf. Nach Gleichung (53) tritt zu dieser Formel als erstes Korrektionsglied hinzu: $-i \alpha \sqrt{\pi}$. Nur wenn sein absoluter Betrag $\sqrt{\rho \pi} \ll 1$ ist, wird jene Behandlung erlaubt sein. Aber selbst bei Seewasser fanden wir diese Größe für $r = 1/4$ Erdquadrant gleich $1/3$, so daß auch hier der Ausbreitungsmodus durch die unvollkommene Leitfähigkeit der Oberfläche erheblich modifiziert wird. Für andere Oberflächenbeschaffenheit würde das Korrektionsglied vom Betrage $\sqrt{\rho \pi}$ das erste Glied 1 in Gleichung (53) vielfach übertreffen.

Die Annahme einer vollkommen leitenden Erdoberfläche ist also für die großen Entfernungen des transatlantischen Verkehrs fallen zu lassen und die besondere Materialbeschaffenheit in Rechnung zu ziehen.

Wir fragen sodann, bis zu welchen Entfernungen jene Annahme zulässig ist. Dabei wollen wir etwa eine Ungenauigkeit von 10 Proz. für erlaubt halten derart, daß das Korrektionsglied in Gleichung (53) nicht mehr als $1/10$ des ersten Gliedes betragen soll. Wir haben dann zu verlangen $\sqrt{\rho \pi} < 1/10$ oder höchstens:

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{1000} |\varepsilon_2 + 2 i \sigma c l|.$$

Die hieraus folgenden Werte von r enthält die nachstehende Tabelle und zwar in der ersten Spalte für $l = 2$ km, in der zweiten für $l = 0,36$ km:

<i>Seewasser:</i>	$r = 240$ km	$r = 8$ km
<i>Süßwasser:</i>	0,3	0,03
<i>Nasser Boden:</i>	1,2	0,04
<i>Trockener Boden:</i>	0,03	0,002

Die in den letzten Zeilen aufgeführten Zahlen sind nur Bruchteile der Wellenlänge; da so kleine Entfernungen bei unserem Problem nicht in Frage kommen, dürfen wir sagen: *In den drei letzten Fällen bleibt für die Rechnung mit einer vollkommen leitenden Erde überhaupt kein Gültigkeitsbereich übrig. Nur bei Seewasser ist diese Rechnungsweise bis zu gewissen mäßigen Entfernungen hinreichend genau, nämlich bis zu 240 km bei den langen 2 km-Wellen, bis 8 km bei den Wellen von $\frac{1}{3}$ km.*

An den Ausdruck für die numerische Entfernung im Anfange dieses Paragraphen knüpfen wir noch den folgenden Schluß: Dieselbe nimmt ab mit wachsender Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit des Bodens, außerdem aber, und zwar in quadratischem Verhältnis, mit wachsender Wellenlänge. Mit abnehmender numerischer Entfernung nähern wir uns aber dem idealen Falle des vollkommenen Leiters, welcher ein Optimum für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen bedeutet. *Deshalb ist es günstig, insbesondere für die Überwindung großer Entfernungen, mit großen Wellenlängen zu arbeiten;* die Praxis hat dies natürlich schon lange festgestellt.

Weiter wünschen wir den Ablauf der elektromagnetischen Wellen, wie ihn unsere Theorie ergibt, graphisch zur Anschauung zu bringen. Wir knüpfen dabei am besten an die geschlossene Form (55) (oder die damit identische (47)) an und setzen der Einfachheit halber k_2^2 als rein imaginär und k_1 als klein gegen $|k_2|$, also α^2 gleich der reellen numerischen Entfernung ρ voraus. ρ werde als Abszisse, u und v (Gleichung (55 a)) als Ordinaten aufgetragen, so daß Π_1 durch Multiplikation mit $e^{ik_1 r}/r$ aus $u - iv$ entsteht. Es ergibt sich Fig. 8.

u nimmt von dem Werte $u = 1$ bei kleinen numerischen Entfernungen, der der Annahme vollkommener Leitfähigkeit entspricht, sehr schnell ab und ist für $\rho = 1$ fast Null. Nach Überschreitung eines negativen Minimums nähert sich u asymptotisch der Null. Die punktierte Kurve, welche von etwa $\rho = 4$ ab vollständig mit u verschmilzt, entspricht der Darstellung (45) für Q_1 und entsteht aus dieser durch Abtrennung des Faktors $e^{ik_1 r}/r$. Natürlich darf man bei der Berechnung dieser divergenten Reihe nur bis zu derjenigen Stelle gehen, bis zu der die Glieder abnehmen, und hat die folgenden Glieder durch ein endliches Restglied ersetzt zu denken, auf dessen Ab-

schätzung indessen nicht eingegangen worden ist. Gleichung (45) zeigt, daß die asymptotische Annäherung an die Abszissenachse wie $1/\varrho$, also verhältnismäßig langsam erfolgt. Daß unsere punktierte Kurve erst bei großem ϱ ($\varrho = 4$) mit der ausgezogenen u -Kurve übereinstimmt und für kleine ϱ erheblich davon abweicht, entspricht ganz den Feststellungen des § 7 über den Gültigkeitsbereich unserer früheren Reihe für Q_1 .

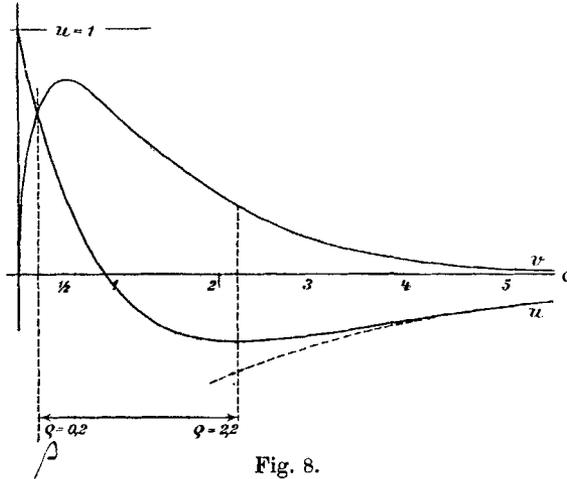


Fig. 8.

Die Kurve v andererseits beginnt bei $\varrho = 0$ mit dem Werte Null, wie es nach der Gültigkeit der Formel $e^{i k_1 r}/r$ für sehr kleine ϱ sein muß, und erreicht bei $\varrho = 1/2$ ein Maximum. Dieses Wachstum entspricht dem Faktor $\sqrt[3]{\varrho}$ in (55a) oder dem früher betonten Umstande, daß unsere Oberflächenwelle \mathcal{P} mit r nur wie $r^{-1/3}$ abnimmt. Dagegen wird die Abnahme von v für $\varrho > 1/2$ durch den Faktor e^{-e} in (55a), d. h. die mit unserer Oberflächenwelle verknüpfte radiale Dämpfung, bestimmt, welche schließlich eine schnelle (exponentielle) Annäherung an die Abszissenachse bewirkt. Trotzdem unser v nicht dem Werte von P sondern von $P/2$ entspricht, werden wir v als Bild der Oberflächenwelle, u als Bild der Raumwelle ansehen dürfen.

In der Figur ist das Gebiet $\varrho = 0,2$ bis $\varrho = 2,2$ besonders hervorgehoben, in dem $v > u$. Bezeichnen wir dieses Gebiet als dasjenige der *mittleren numerischen Entfernungen*, das Gebiet

$\rho < 0,2$ bzw. $\rho > 2,2$ als dasjenige der kleinen bzw. großen numerischen Entfernungen, so ergibt sich: Bei kleinen numerischen Entfernungen überwiegt die Wirkung der Raumwellen, bei mittleren die der Oberflächenwellen, bei großen wieder die der Raumwellen. Die erste dieser Aussagen entspricht ganz den Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen. Die zweite ist in der geringen Abnahme der Oberflächenwellen mit der Entfernung, die dritte in ihrer schließlichen exponentiellen Dämpfung begründet, die sie gegen die Raumwellen zurücktreten läßt. Ob übrigens für in diesem Sinne große numerische Entfernungen eine Zeichenübertragung überhaupt noch möglich ist, möge dahingestellt sein.

Nach dieser Einteilung würde die Marconische transatlantische Station (vgl. oben)¹⁾ noch zu den kleinen Entfernungen zu zählen und in ihrer Wirkungsweise durch den Typus der Raumwellen bestimmt sein. Es ist aber zu beachten, daß unsere Berechnung von ρ auf etwas unsicheren Annahmen über die Materialkonstanten des Seewassers beruhte, daß zwar der größte Teil der zu überbrückenden Entfernung über See liegt, daß aber auch Überlandstrecken mit wesentlich vergrößertem ρ (in der Nähe des Senders und Empfängers) zu dem effektiven Gesamtwerte von ρ beitragen usw. Vor allem aber spielt hier der Umstand der Erdkrümmung mit. Diese ist für die Oberflächenwellen kein Hindernis, während sie die Raumwellen abschirmt und nur durch eine Art Beugungsvorgang zum Empfänger gelangen läßt. Übrigens hängt diese Schirmwirkung nicht von der numerischen Entfernung ρ sondern von dem Verhältnis der absoluten Entfernung zum Erdradius ab.

Durch die Erdkrümmung werden die Verhältnisse zu gunsten der Oberflächenwellen verschoben. Das Gebiet der mittleren numerischen Entfernungen, in dem der Oberflächentyp überwiegt, wird durch die Erdkrümmung sowohl nach der Seite kleiner ρ wie namentlich nach derjenigen großer ρ über die in Fig. 8 angegebenen Grenzen hinaus ausgedehnt werden. Es scheint nicht unwahrscheinlich, daß das schließliche Überwiegen der Raum-

1) Übrigens benutzt Marconi Wellenlängen von 3—4 km, so daß die oben mit $l = 2$ km berechnete numerische Entfernung $\rho = 1/30$ noch weiter zu verkleinern wäre.

wellen für große Entfernungen, wie es sich aus Fig. 8 ergeben würde, durch die Erdkrümmung vollständig illusorisch gemacht wird.

Die letzten Bemerkungen sind natürlich so lange unsicher, als keine vollständige Lösung unseres Problems für die Kugel vorliegt. Eine solche Lösung würde zeigen, daß die Grenzen für das Überwiegen der Oberflächenwellen nicht allein durch die numerische Entfernung sondern zugleich durch das Verhältnis der absoluten Entfernung zum Erdradius bestimmt werden.

§ 10. Zusammenhang mit der Theorie der Drahtwellen.

Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion bei den ebenen Oberflächenwellen.

Daß unsere Oberflächenwellen enge mit der Theorie der Drahtwellen zusammenhängen, geht schon daraus hervor, daß sie in der Literatur zuerst bei E. Cohn als Erläuterung zu jener auftreten (vgl. Anm. 2 zu p. 667). Im folgenden möge noch gezeigt werden, wie sich aus denjenigen Formeln, die ich früher für Drahtwellen an einem Einzeldraht entwickelt habe¹⁾, gerade unsere jetzigen Oberflächenwellen ergeben, wenn wir den Drahtradius ∞ werden lassen. Dabei handelt es sich lediglich um den *ebenen* Typus unserer Oberflächenwellen (Gleichung (27)), wie er sich in großer Entfernung ausbildet.

Wir haben zunächst die Bezeichnungen der früheren Arbeit mit der jetzigen in Einklang zu bringen. Sei a der Drahtradius (früher ρ), s die gesuchte (komplexe) Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen längs der Oberfläche des Drahtes (früher c genannt; die Lichtgeschwindigkeit war V_0), H die „Hankelsche“ Funktion (früher K) und J die gewöhnliche Besselsche Funktion, beide mit dem Index 0. Die Bezeichnungen k_1, k_2 sind dieselben wie früher und es sei $x_1^2 = k_1^2/\mu_1$, $x_2^2 = k_2^2/\mu_2$. Benutzen wir noch aus der früheren Arbeit die Abkürzungen:

$$x_1 = \sqrt{k_1^2 - s^2} a, \quad x_2 = \sqrt{k_2^2 - s^2} a,$$

so führte die Theorie der Drahtwellen auf die folgende transzendente Gleichung²⁾ für s :

$$x_1 \frac{H(x_1)}{H'(x_1)} = \frac{x_1^2}{x_2^2} x_2 \frac{J(x_2)}{J'(x_2)}.$$

1) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. p. 233. 1899.

2) Vgl. l. c. p. 252, Gleichung (20).

In der früheren Arbeit handelte es sich um zwei Fälle:

$$1. \quad |x_1| \text{ klein, } |x_2| \text{ groß.}$$

Normaler Fall. Nicht zu dünner Draht bei guter Leitfähigkeit.

$$2. \quad |x_1| \text{ klein, } |x_2| \text{ klein.}$$

Abnormer Fall. Sehr dünner Draht.

Zu diesen kommt bei $a = \infty$, wo die Drahtoberfläche in unsere ebene Trennungsfäche ausartet:

$$3. \quad |x_1| \text{ groß, } |x_2| \text{ groß.}$$

Dann wird aber

$$\frac{J(x_2)}{J'(x_2)} = +i \quad \text{und} \quad \frac{H(x_1)}{H'(x_1)} = -i,$$

also lautet unsere transzendente Gleichung

$$x_1 = -\frac{x_1^2}{x_2^2} x_2 \quad \text{oder} \quad x_2^2 x_1 + x_1^2 x_2 = 0.$$

In diesem dritten Falle geht also die sonst *transzendente Gleichung* in eine *algebraische* über. Die letztere sagt nichts anderes aus, als das Verschwinden des Nenners N in unserer allgemeinen Lösung des § 3 und definiert daher genau unser jetziges s .

Im Falle 1. der Drahtwellen wird gezeigt, daß sich für s ein Wert ergibt, dessen reeller Teil nahezu gleich k_1 aber etwas größer ist, was einer Fortpflanzung mit etwas weniger als Lichtgeschwindigkeit entspricht. (k_1 wird hier als reell angenommen und bedeutet ja $2\pi/\text{Wellenlänge}$.) Im Falle 2. bei abnehmendem Drahtradius wird die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit beträchtlich, während sie im Falle 3. für $a = \infty$ verschwinden würde, wenn dieser Fall noch durch die früheren Rechnungen gedeckt würde. In Wirklichkeit tritt auch in diesem Falle eine anders geartete Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit auf, die im Falle 1. und 2. gegen die vom Drahtradius abhängige Abweichung zu vernachlässigen war, aber im *umgekehrten Sinne*. Der reelle Teil von s wird nämlich kleiner als k_1 , was einer Fortpflanzung längs der Oberfläche mit *Überlichtgeschwindigkeit* entspricht. Wir sehen dies befremdende Ergebnis und zugleich auch seine Aufklärung ein, wenn wir für den Augenblick nicht nur k_1 , sondern auch k_2 als reell voraussetzen (Glas statt Erde).

Dann ist s reell und nach Gleichung (17c) $\sqrt{s^2 - k_1^2}$ und $\sqrt{s^2 - k_2^2}$ rein imaginär. Berechnen wir also nach (27) den Winkel γ_1 , welchen die elektrische Kraftlinie im Medium 1 auf der Ebene $z = 0$ mit der Normalen zur Trennungsfäche bildet (wobei der reelle Teil der komplexen Ausdrücke für \mathfrak{E}_x und \mathfrak{E}_z zu rechnen ist), so ergibt sich einfach der zeitlich unveränderliche Wert (die Richtung des Feldes bleibt in diesem Falle konstant; Wechselfeld, nicht Drehfeld)

$$(56a) \quad \frac{\mathfrak{E}_{x_1}}{\mathfrak{E}_{z_1}} = \operatorname{tg} \gamma_1 = \sqrt{\frac{k_1^2 - s^2}{s^2}} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Wir bemerken noch, daß sich in gleicher Weise für den Winkel der Kraftlinie in 2 nahe bei $z = 0$ ergibt:

$$(56b) \quad \frac{\mathfrak{E}_{x_2}}{\mathfrak{E}_{z_2}} = \operatorname{tg} \gamma_2 = -\sqrt{\frac{k_2^2 - s^2}{s^2}} = -\frac{k_2}{k_1}.$$

Schreibt man also $\gamma_1 = \gamma$, wie in Fig. 4, so ist $\gamma_2 = -((\pi/2) - \gamma)$, d. h. der Winkel γ findet sich auch zwischen der Trennungsfäche und der Kraftlinie in 2. Ebenso zwischen dem Energiefluß in 1, der ja auf der Kraftlinie senkrecht steht, und der Trennungsfäche, sowie zwischen dem Energiefluß in 2 und ihrer Normalen.

Auf die optische Bedeutung dieses Umstandes gehen wir im nächsten Paragraphen ein. Hier benutzen wir ihn, um s (Gleichung 17a) folgendermaßen auszudrücken:

$$(56c) \quad s = k_1 \sqrt{\frac{1}{1 + k_1^2/k_2^2}} = k_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma)^{-1/2} = k_1 \cos \gamma.$$

Also ist in der Tat $s < k_1$ und die *Fortpflanzung längs der Oberfläche* $> c$. Indessen ist nicht die Oberfläche die eigentliche Fortpflanzungsrichtung, sondern die Normale zu den Kraftlinien oder der „Strahl“ \mathfrak{E} . Schreiten die Kraftlinien längs der Oberfläche um das Stück $1/s$, so schreiten sie längs \mathfrak{E}_1 um das entsprechende Stück $\cos \gamma / s$ vor (vgl. Fig. 4). Dies ist aber nach (56c) gleich $1/k_1$ und entspricht einer *Fortpflanzung der Energie in Luft mit der Geschwindigkeit c* , wie sie zu erwarten ist. Bei komplexem k_2 liegen die Verhältnisse nicht so einfach, weil hier die Winkel γ_1, γ_2 während jeder Schwingungsdauer zeitlich variieren.

Schließlich wollen wir noch in aller Kürze die Begriffe: *Widerstand*, *Kapazität* und *Selbstinduktion* auf unsere ebenen Oberflächenwellen übertragen. Dabei ist zu bemerken, daß diese Begriffe ebenso wie bei den Drahtwellen erst aus der Beschaffenheit des Feldes heraus definiert werden können, also nicht, wie bei den quasistationären Vorgängen zur Auffindung des Feldes selbst dienen können. Es kommt ihnen also hier nur eine erläuternde, sekundäre Bedeutung zu.

Wir benutzen für die drei genannten Größen R , K und L die energetische Definition und rechnen alle drei für die Flächeneinheit der Trennungsfäche. Q sei die Joulesche Wärme, die in der Zeiteinheit in einem Prisma erzeugt wird, das die Flächeneinheit zur Basis hat und sich nach der Seite von 2 ins Unendliche erstreckt. W_e bedeutet die elektrische Energie, die in einem entsprechenden Prisma enthalten ist, das aber beiderseits (nach 1 und 2) ins Unendliche reicht, ebenso W_m die magnetische Energie. Die beiden letzteren Energien kann man hiernach noch zerlegen in $W_e = W_{e1} + W_{e2}$ und $W_m = W_{m1} + W_{m2}$. Unter J verstehen wir den gesamten elektrischen Strom parallel der Trennungsfäche, also in der x -Richtung, unter ω die Ladungsdichte der Oberfläche. [] deutet das zeitliche Mittel an. Dann hat man bekanntlich die folgenden Definitionsgleichungen für R , K und L :

$$(57) \quad [Q] = R[J^2], \quad [W_e] = \frac{1}{2} \frac{[\omega^2]}{K}, \quad [W_m] = \frac{1}{2} L[J^2].$$

Bei der Ausrechnung beschränken wir uns der Kürze halber auf denjenigen Grenzfall, der z. B. bei Seewasser vorliegt, wo annähernd k_2^2 rein imaginär $= in\mu_2\sigma_2/c^2$ und $|k_2^2| \gg k_1^2$ ist, welches letzteres als reell angesehen wird. Aus dem Größenverhältnis der konstanten Koeffizienten in den Gleichungen (27) oder dem damit übereinstimmenden Verlauf der Kraftlinien in Fig. 4 ergibt sich dann:

$$(58) \quad |\mathfrak{E}_{x1}| \gg |\mathfrak{E}_{x2}| = |\mathfrak{E}_{x1}| \gg |\mathfrak{E}_{z2}|,$$

wobei das Gleichheitszeichen natürlich nur für die unmittelbare Nähe der Erdoberfläche gilt.

Der Gesamtstrom in der x -Richtung ist definiert durch

$$J = \sigma_2 \int_{-\infty}^0 \mathfrak{E}_{x2} dz = \frac{in\mu_2\sigma_2}{c k_1^2} a \sqrt{s^2 - k_2^2} \int_{-\infty}^0 e^{isx} + \sqrt{s^2 - k_2^2} z dz = ca e^{isx}.$$

Wir multiplizieren mit e^{-int} und gehen zum reellen Teil, der Hälfte dieses und des dazu konjugierten Ausdruckes, über (konjugierte Größen durch einen Balken angedeutet). Bei der zeitlichen Mittelbildung ergibt sich:

$$(59) \quad [J^2] = \frac{1}{2} c^2 a^2 e^{i(s-\bar{s})x}.$$

Die freie Oberflächenladung andererseits ist definiert durch die Brechung der elektrischen Kraftlinien bei $z = 0$ oder formelmäßig durch

$$\begin{aligned} \omega &= \mathfrak{E}_{z1} - \mathfrak{E}_{z2} = \mathfrak{E}_{z1} \quad (\text{wegen (58)}), \\ &= \frac{n\mu_1 s}{c k_1^2} a e^{isx}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit e^{-int} , Übergang zum reellen Teil und zeitliche Mittelbildung liefert dann:

$$(60) \quad [\omega^2] = \frac{1}{2} \frac{n^2 \mu_1^2 s \bar{s}}{c^2 k_1^4} a^2 e^{i(s-\bar{s})x}.$$

Der Widerstand R . Wir bilden

$$Q = \int_{-\infty}^0 \sigma_2 (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_z^2) dz = \int_{-\infty}^0 \sigma_2 \mathfrak{E}_x^2 dz \quad (\text{wegen (58)})$$

und

$$[Q] = \int_{-\infty}^0 \sigma_2 [\mathfrak{E}_x^2] dz = \frac{c^2}{2\sigma_2} \frac{\sqrt{s^2 - k_2^2} \sqrt{s^2 - k_2^2}}{\sqrt{s^2 - k_2^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} a^2 e^{i(s-\bar{s})x}.$$

Aus (57) und (59) folgt dann

$$R = \frac{1}{\sigma_2} \frac{\sqrt{s^2 - k_2^2} \sqrt{s^2 - k_2^2}}{\sqrt{s^2 - k_2^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}}.$$

Nach (25) ist wegen der vorausgesetzten Größe und Imaginärität von k_2^2 :

$$\sqrt{s^2 - k_2^2} = \sqrt{-k_2^2} = (1-i) \sqrt{\frac{\mu_2 \sigma_2 n}{2c^2}}$$

und daher

$$(61) \quad R = \sqrt{\frac{\mu_2 n}{2c^2 \sigma_2}}.$$

Gehen wir zu den gewöhnlichen elektromagnetischen Einheiten über, so haben wir zu setzen (vgl. p. 721):

$$\sigma_2 = 4\pi c^2 \sigma, \quad R_{\text{magn.}} = 4\pi c^2 R,$$

also mit $\mu_2 = \mu$:

$$(61') \quad R_{\text{magn.}} = \sqrt{\frac{2\pi \mu n}{\sigma}},$$

so daß jetzt $R_{\text{magn.}}$ und σ Widerstand und spezifische Leitfähigkeit im gewöhnlichen magnetischen C.G.S.-System sind.

Dies Ergebnis erinnert an den Rayleighschen Wert des Widerstandes bei Drahtwellen, nämlich

$$R'_{\text{magn.}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu n}{2\pi \sigma}},$$

gültig für die Längeneinheit eines Drahtes vom Radius a . Bezieht man ihn auch auf die Umfangseinheit, indem man eine Widerstandsgröße $R = 2\pi a R'$ definiert, die nunmehr pro Oberflächeneinheit des Drahtes berechnet ist, so wird dieses R mit unserem R aus Gleichung (61') völlig identisch.

Zu bemerken ist, daß unser Wert (61) bei eben begrenztem, gutem Leiter allgemein gilt, der Rayleighsche bei kreiszylindrisch begrenztem nur für sehr hohe Schwingungszahl.

Für unendlich langsamen Wechselstrom ($n = 0$) wird auch $R = 0$. Der Strom würde hier einen unendlich großen Querschnitt zur Verfügung haben.

Die Kapazität K . Bei der Berechnung von W_e dürfen wir W_{e2} gegen W_{e1} und \mathfrak{G}_{x1} gegen \mathfrak{G}_{z1} vernachlässigen, beides wegen (58). Wir bilden also

$$W_e = W_{e1} = \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^{\infty} \mathfrak{G}_z^2 dz$$

und

$$\begin{aligned} [W_e] &= \frac{\epsilon_1}{2} \int_0^{\infty} [\mathfrak{G}_z^2] dz \\ &= \frac{\epsilon_1}{4} \frac{n^2 \mu_1^2}{c^2 k_1^4} \frac{s \bar{s}}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_1^2}} a^2 e^{i(s - \bar{s})x}. \end{aligned}$$

Wegen (57) und (60) folgt also:

$$K = \frac{1}{\epsilon_1} (\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_1^2}).$$

Nach (25) ist aber bei großem $|k_2|$

$$\sqrt{s^2 - k_1^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_1^2}{\sqrt{-k_2^2}} = (1 + i) \frac{\mu_2}{\mu_1} k_1^2 \sqrt{\frac{c^2}{2\mu_2 \sigma_2 n}}.$$

und schließlich

$$(62) \quad K = n \sqrt{\frac{2n\mu_2}{\sigma_2 c^2}}.$$

Für eine unendlich langsame Schwingung ($n = 0$) wäre beim ebenen Leiter auch $K = 0$ (die Energiemenge im Raum bei endlicher Ladung unendlich). Unsere Kapazität (62) ist also nicht statischen, sondern rein dynamischen Ursprunges. Wir vergleichen sie etwa mit der statischen Kapazität der Erde, als Kugel vom Radius a aufgefaßt. Diese ist in unseren Einheiten $4\pi a$, also auf die Einheit der Oberfläche bezogen, um sie mit (62) vergleichen zu können, $1/a = (\pi/2)10^{-9} \text{ cm}^{-1}$. Dagegen ergibt sich bei einer Wellenlänge von 2 km oder $n = 3\pi \cdot 10^5$ und bei der Leitfähigkeit von Seewasser (vgl. § 9 Anfang) nach (62) $K = (\pi/\sqrt{6})10^{-7}$. Diese elektrodynamische Kapazität ist also rund 100mal größer als die entsprechend gemessene elektrostatische der Erdkugel. Bei schnelleren Schwingungen (kleineren Wellenlängen) wird das Verhältnis noch größer. Wir schließen daraus, daß es keinen Wert hat, bei der drahtlosen Telegraphie mit der statischen oder quasi-statischen Ladungsverteilung auf der Erdkugel zu rechnen; offenbar wäre dies nur zulässig bei Schwingungen, deren Wellenlänge groß gegen den Durchmesser der Erde ist.

Selbstinduktion L. Der Vollständigkeit wegen teilen wir auch das Ergebnis der Rechnung für L mit. Als Hauptglied findet sich (W_{m_2} gegen W_{m_1} vernachlässigt):

$$(63) \quad L = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1 n} \sqrt{\frac{\sigma_3}{2\mu_2 n c^2}}.$$

Bei verschwindendem n liefert unsere Formel, wie es sein muß, $L = \infty$ (die magnetische Energie, die zu einem endlichen Gleichstrom gehört, wird unendlich groß).

§ 11. Zusammenhang mit der Optik.

Wir beginnen damit, die allgemeine Lösung des § 4 (Gleichung (14)) so zu schreiben, daß sie als Superposition ebener (homogener und inhomogener) Wellen aufgefaßt werden kann.

Zu dem Zwecke tragen wir für J seine Integraldarstellung ein

$$J(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda r \cos \psi} d\psi$$

und setzen $\psi = \alpha - \varphi$, wo α eine neue Integrationsvariable und φ den Winkel im Polarkoordinatensystem r, φ, z bedeutet, der zum Aufpunkte x, y, z gehört, derart, daß $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Dann haben wir auch

$$J(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\alpha.$$

Wir nehmen k_1 als reell an und zerlegen die Integration für Π_1 in (14) in zwei Teile: $0 < \lambda < k_1$ und $k_1 < \lambda < \infty$. Die entsprechenden Teile von Π_1 nennen wir Π_h und Π_i ; es erscheint nämlich Π_h als ein Aggregat homogener, Π_i als ein solches inhomogener ebener Wellen.

Für Π_h ergibt sich zunächst:

$$\Pi_h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{k_1} \frac{x_1^2 + x_2^2}{N} e^{i\lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda.$$

Setzen wir jetzt $\lambda/k_1 = \sin \beta$, so ist β wegen $\lambda < k_1$ reell und $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = i k_1 \cos \beta$; daher

$$(64) \quad \Pi_h = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta A e^{i k_1 (x \cos \alpha \sin \beta + y \sin \alpha \sin \beta - z \cos \beta)}$$

mit der Abkürzung

$$A = \frac{k_1^2}{2\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{N} \sin \beta \cos \beta.$$

Der Integrand in (64) bedeutet nun in der Tat eine gewöhnliche ebene Welle, die unter dem Winkel β gegen die Normale zur Erdoberfläche einfällt und deren Einfallsebene durch das Azimut α gegeben ist. Ihre Amplitude A variiert in bestimmter Weise mit dem Einfallswinkel β . Diese Wellen sind nach dem Vorgange von Voigt als *homogen* zu bezeichnen, da für jede derselben die *Ebene konstanter Phase* zugleich eine *Ebene konstanter Amplitude* ist. Das System dieser Wellen

beginnt mit senkrechter Inzidenz ($\lambda = 0$, $\beta = 0$) und geht schließlich in streifende Inzidenz über ($\lambda = k_1$, $\beta = \pi/2$).

Betrachten wir nun den zweiten Bestandteil

$$(65) \quad \Pi_i = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{k_1}^{\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\pi N} e^{i\lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda.$$

Auch in dieser Formel ist der Integrand als ebene Welle zu deuten, aber nicht mehr als gewöhnliche homogene, sondern als *inhomogene*: die Ebenen konstanter Phase sind, da jetzt $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ reell ist,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \text{const.},$$

stehen also auf der Erdoberfläche senkrecht, die Ebenen konstanter Amplitude werden

$$z = \text{const.},$$

sind also zur Erdoberfläche parallel. Definieren wir die „Inzidenz“ durch die Normale zu den Ebenen konstanter Phase, so kommt allen diesen inhomogenen Wellen „streifende Inzidenz“ zu, so daß sich dieses inhomogene Wellensystem stetig an das vorige homogene anschließt.

Ihr wesentliches Interesse haben die inhomogenen Wellen in der Optik für das Problem der Totalreflexion. Auch dort pflanzen sich die Wellen im optisch dünneren Medium, was ihre Phase betrifft, parallel der Trennungsfläche fort, d. h. die Ebenen konstanter Phase sind dort wie hier senkrecht auf der Trennungsfläche, die Ebenen konstanter Amplitude parallel dazu.

Unsere strenge Lösung zerlegt sich also in ein Bündel ebener Wellen vom Charakter der gewöhnlichen sichtbaren Wellen der Optik und ein Bündel inhomogener, parallel der Erdoberfläche fortschreitender vom Charakter der bei der Totalreflexion auftretenden, unter gewöhnlichen Umständen unsichtbaren Wellen.

Es liegt nahe, das erste Bündel der oberen, im Medium 1 gelegenen „Hälfte unseres leuchtenden Punktes“, das zweite Bündel der unteren, im optisch dichteren Medium 2 enthaltenen Hälfte“ zuzuschreiben. Zu dieser Ausdrucksweise wäre indessen zu bemerken, daß eine solche Trennung des im Grunde einheitlichen und untrennbaren Vorganges physikalisch nicht zu realisieren ist.

Ebenso wie in unserer vollständigen Lösung des § 3 treten in den Bestandteilen P , Q derselben (§ 4 u. ff.) inhomogene Wellen auf. Bei den ebenen Wellen (27), in die P für große Entfernung übergeht, sind z. B. die Ebenen konstanter Phase, gegeben durch

$$s_r x - \sqrt{s^2 - k_1^2} z = \text{const.},$$

von den Ebenen konstanter Amplitude, gegeben durch

$$s_i x + \sqrt{s^2 - k_1^2} z = \text{const.}$$

verschieden; hierbei meinen die Indizes r und i den reellen und imaginären Teil der betreffenden Größe und ist k_2^2 als komplex vorausgesetzt. Wie im allgemeinen bei inhomogenen Wellen wechselt auch bei unserem P die Richtung des Energieflusses mit der Zeit.

Ebenfalls zu den inhomogenen Wellen gehören unsere Wellen Q_1 im zweiten und unsere Wellen Q_2 im ersten Medium (Gleichung (35a und b)). Diese Lösungen sind sogar von allgemeinerem Charakter, als man sie in der Optik betrachtet, wegen Auftretens der Koordinate z in der Amplitude, welcher eine eigentümliche Form krummliniger Energiestrahlung mit sich bringt.

Zum Schlusse bringen wir noch unsere Oberflächenwellen P , Gleichung (27), in einen interessanten Zusammenhang mit der wohlbekannten optischen *Tatsache des Polarisationswinkels und des Brewsterschen Gesetzes*. Wir werden dabei im Interesse der bequemerem Ausdrucksweise k_2 als reell ansehen (z. B. Glas statt Erde), ebenso wie im vorigen Paragraph, p. 728, an den wir anknüpfen; doch gilt Analoges auch bei komplexem Brechungsverhältnis.

Die Gleichungen (56a und b) besagten, daß der (bei reellem k_2 konstante) Winkel der elektrischen Kraftlinie gegen die Normale in 1. komplementär ist zu dem entsprechenden Winkel in 2. oder, anders ausgedrückt (vgl. Fig. 4) daß der Strahl \mathcal{S}_1 mit der Trennungsfäche denselben Winkel γ bildet, wie der Strahl \mathcal{S}_2 mit der Normalen zur Trennungsfäche. Nennen wir \mathcal{S}_1 den *einfallenden*, \mathcal{S}_2 den *gebrochenen Strahl*, so können wir uns einen *reflektierten Strahl* \mathcal{S}_1' hinzudenken (in Fig. 4 punktiert), der denselben Winkel γ mit der Trennungsfäche bildet wie \mathcal{S}_1 . *Dieser steht nach dem Gesagten auf dem*

gebrochenen Strahl \mathfrak{E}_2 senkrecht. Der Winkel $\pi/2 - \gamma$ zwischen Normale und einfallendem Strahl ist also nichts anderes als der *Polarisationswinkel* und die senkrechte Lage von \mathfrak{E}_2 und \mathfrak{E}_1' entspricht dem *Brewsterschen Gesetz*. Übereinstimmend drücken die Gleichungen (56a und b) nichts anderes als das für den Polarisationswinkel spezialisierte *Snellsche Brechungsgesetz* aus: Der Sinus des Einfallswinkels ($= \cos \gamma$) geteilt durch den Sinus des Brechungswinkels ($= \sin \gamma$) ist gleich dem Brechungsindex ($= k_2/k_1$).

Die Gleichungen (27) zeigen ferner, daß unsere einfallende (bei reellem k_2 homogene) Welle senkrecht zur Einfallsebene (Zeichenebene der Fig. 4) polarisiert ist, da die elektrische Kraft ($\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_z$) in dieser Ebene liegt. *Die reflektierte Intensität ist also Null und wir verstehen auf Grund dieser elementaren Tatsachen der Optik die Möglichkeit unseres Wellenvorganges P, bestehend lediglich aus einer unter dem Polarisationswinkel einfallenden Welle in 1. und einer gebrochenen in 2.*

Nicht unerwähnt möge bleiben, daß in dieser optischen Auffassung unsere „Oberflächenwelle“ P zu einem System zweier gewöhnlicher ebener Raumwellen wird, und daß die Beziehung zur Oberfläche nur noch in der Bevorzugung des Polarisationswinkels als Einfallswinkel zum Ausdruck kommt. Wir sehen hierin wiederum die Bestätigung einer in der Einleitung vorausgeschickten Bemerkung, daß schematische Einteilungen wie die Trennung in Oberflächenwellen und Raumwellen nie ohne Willkür möglich und mehr unserem Vorstellungsvermögen wie der Wirklichkeit der Dinge angepaßt sind. Physikalisch berechtigter und sicherer fundiert würde diese Trennung bei dem Problem der Kugel erfolgen können, welches also auch aus diesem Grunde in Angriff zu nehmen sein wird.

Hrn. Kollegen Zenneck danke ich für freundlichen sachkundigen Rat in den technischen Fragen des Problems.

(Eingegangen 15. Januar 1909.)