

**6. Über den Einfluß
der molekularen Bewegung auf die Dispersions-
erscheinungen in Gasen;
von J. Laub.**

In der folgenden Abhandlung soll untersucht werden, welchen Einfluß die Molekularbewegung auf die Dispersion ausübt. Da man es bei der molekularen Bewegung mit verhältnismäßig sehr großen Geschwindigkeiten ($v = 10^5 - 10^6$ cm/sec) zu tun hat, scheint es a priori nicht ausgeschlossen, daß ihre Berücksichtigung zu Resultaten führt, die dem Experiment zugänglich sind. Außerdem schien mir die Behandlung dieses Problems vom prinzipiellen Standpunkt aus interessant zu sein.

Es mögen sich Lichtwellen in einem gasförmigen Körper fortpflanzen. Die Gasmoleküle bewegen sich nach den Anschauungen der kinetischen Theorie nach allen Richtungen mit allen möglichen Geschwindigkeiten, man hat daher in dem Falle Licht, welches sich in einem System von verschieden bewegter Materie fortpflanzt. Wird das Gas von einer Lichtwelle durchzogen, dann sollen die an den Molekülen haftenden Elektronen zum Mitschwingen angeregt werden, das ganze Molekül soll aber elektrisch neutral bleiben, so, daß weder die Richtung noch der Betrag der *Molekulargeschwindigkeit* durch das Licht geändert wird. Wir fragen nach dem Vorgang der Dispersion im Gase, wie er sich einem ruhenden Beobachter darstellt. Um das zu beantworten, fassen wir zunächst die Moleküle ins Auge, die sich in *einer bestimmten* Richtung und zwar in der des Vektors \mathbf{v} mit *einer* bestimmten Geschwindigkeit vom Betrage v bewegen, und fragen, wie groß ist der Anteil, den diese Moleküle zur elektrischen Polarisation liefern, wenn der Verlauf des elektromagnetischen Feldes gegeben ist.

Zu dem Zwecke führen wir zwei Koordinatensysteme $K(X, Y, Z)$ und $K'(X', Y', Z')$ ein, welche beide beschleunigungsfrei, jedoch relativ zueinander bewegt sind. Ist im Raume Materie vorhanden, welche relativ zu K' ruht, und von der

wir zur Vereinfachung annehmen, daß sie nur eine Art von Elektronen (Eigenschwingung) enthält, so mögen für das System K' die in der Theorie der Dispersion fundamentalen Gleichungen gelten:

$$(1) \quad \frac{d^2 p'}{dt'^2} = -n_0^2 p' - 2h \frac{dp'}{dt'} + \frac{\varepsilon^2 N'}{\mu} \mathfrak{E}',$$

wobei p' den Vektor der elektrischen Polarisation bedeutet, \mathfrak{E}' ist der Vektor der elektrischen Kraft in der erregenden Welle, ε die elektrische Ladung des Elektrons, μ die Masse, n_0 die Frequenz der freien Schwingung, h ein konstanter Koeffizient.

Wir betrachten nun ein zweites rechtwinkliges Bezugssystem K . Der Anfangspunkt von K' soll sich mit der konstanten Geschwindigkeit vom Betrage v in der Richtung des Vektors \mathfrak{b} (v_x, v_y, v_z) bewegen. Es mögen ferner \mathfrak{r} und \mathfrak{r}' Vektoren bezeichnen, welche sich auf K bzw. K' beziehen, deren Komponenten nach den X, Y, Z - und X', Y', Z' -Achsen r_x, r_y, r_z bzw. r'_x, r'_y, r'_z sind. Wir wollen ferner unter h bzw. h' die Komponente des Vektors \mathfrak{r} bzw. \mathfrak{r}' nach der Richtung v verstehen. Dann gelten nach der Relativitätstheorie für jedes Punkteignis folgende Transformationsgleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} h' = \beta(h - vt), \\ t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2} h\right), \end{cases} \quad \left(\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

wobei h und t (Zeit) sich auf das System K beziehen.

Wir wollen im folgenden immer v^2/c^2 gegen 1 vernachlässigen. Dann hat man ferner für die elektrischen und magnetischen Vektoren: \mathfrak{E}' , \mathfrak{b}' , \mathfrak{H}' , \mathfrak{b}' des Systems K' die Transformationsgleichungen:¹⁾

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{b}}{c} \mathfrak{b} \right], \\ \mathfrak{b}' = \mathfrak{b} + \left[\frac{\mathfrak{b}}{c} \mathfrak{H} \right], \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \left[\frac{\mathfrak{b}}{c} \mathfrak{b} \right], \\ \mathfrak{b}' = \mathfrak{b} - \left[\frac{\mathfrak{b}}{c} \mathfrak{E} \right]. \end{cases}$$

1) Vgl. H. Minkowski, Gött. Nachr. p. 11. 1908; A. Einstein u. J. Laub, Ann. d. Phys. 26. p. 534. 1908.

Aus den Beziehungen (3) und (4) erhält man leicht die Transformationsgleichungen für die elektrische Polarisation p' , und zwar:

$$p' = b' - \mathfrak{E}' = b + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{H} \right] - \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} b \right] \right\},$$

oder

$$(5) \quad p' = p - \left[\frac{v}{c} q \right],$$

wobei

$$p = b - \mathfrak{E},$$

$$q = b - \mathfrak{H}$$

die Vektoren der elektrischen bzw. magnetischen Polarisation in K bedeuten.

Führt man die in (2) bis (5) angegebenen Transformationen an der Gleichung (1) aus, so erhält man:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \left\{ p - \left[\frac{v}{c} q \right] \right\}}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial^2 \left\{ p - \left[\frac{v}{c} q \right] \right\}}{\partial h^2} + 2v \frac{\partial^2 \left\{ p - \left[\frac{v}{c} q \right] \right\}}{\partial h \partial t} \\ & = -n_0^2 \left\{ p - \left[\frac{v}{c} q \right] \right\} - 2k \frac{\partial \left\{ p - \left[\frac{v}{c} q \right] \right\}}{\partial t} \\ & - 2kv \frac{\partial \left\{ p - \left[\frac{v}{c} q \right] \right\}}{\partial h} + \frac{\varepsilon^2 N}{\mu} \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} b \right] \right\}. \end{aligned} \right. \quad 1)$$

Die magnetische Polarisation q läßt sich aus der letzten Gleichung leicht eliminieren. Berücksichtigen wir nämlich, daß für das mitbewegte System die magnetische Polarisation gleich Null ist, d. h.

$$(7) \quad q' = b' - \mathfrak{H}' = 0$$

und transformieren diese Beziehung auf das System K , so erhalten wir:

$$(8) \quad q = - \left[\frac{v}{c} p \right].$$

Setzen wir (8) in (6) ein, so verschwindet²⁾ das Vektorprodukt $[v/c q]$ und wir haben:

$$(1a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial^2 p}{\partial h^2} + 2v \frac{\partial^2 p}{\partial h \partial t} \\ & = -n_0^2 p - 2k \frac{\partial p}{\partial t} - 2kv \frac{\partial p}{\partial h} + \frac{\varepsilon^2 N}{\mu} \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} b \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

1) $N' = N$, da wir v^2/c^2 gegen 1 vernachlässigen.

2) bei Vernachlässigung von v^2/c^2 gegen 1.

Es möge die Fortpflanzungsrichtung der Lichtwellen in die u -Richtung fallen, es sei ferner α der Kosinus des Winkels zwischen der Wellennormale und der Bewegungsrichtung der Materie. Wir wollen im folgenden annehmen, daß die Vektoren \mathfrak{p} , \mathfrak{E} , \mathfrak{b} sämtlich den Faktor enthalten:

$$(9) \quad e^{i n (t - \gamma u)},$$

wobei γ eine komplexe Konstante ist und n die Schwingungsfrequenz des einfallenden Lichtes bedeutet. Wenn wir (9) als den veränderlichen Teil der Ausdrücke für \mathfrak{p} , \mathfrak{E} und \mathfrak{b} annehmen, so führt (1a) auf die wichtige Beziehung:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \{n_0^2 - n^2 + 2 k i n + 2 v \alpha \gamma n^2 + 2 v \alpha \gamma k i n - v^2 \alpha^2 \gamma^2 n^2\} \mathfrak{p} \\ & = \frac{\varepsilon^2 N}{\mu} \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{b} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Transformiert man \mathfrak{b}' und \mathfrak{E}' auf das System K mit Berücksichtigung von (7), so zeigt sich, daß man bei Vernachlässigung von $\frac{v^2}{c^2}$ gegen $1 \left[\frac{v}{c} \mathfrak{b} \right]$ durch $\left[\frac{v}{c} \mathfrak{E} \right]$ ersetzen kann. Die letzte Gleichung kann also auch geschrieben werden:

$$(10a) \quad \mathfrak{p} F(v, \alpha) = \frac{\varepsilon^2 N}{\mu} \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{E} \right] \right\},$$

wobei gesetzt ist:

$$F(v, \alpha) = n_0^2 - n^2 + 2 k i n + 2 v \alpha \gamma n^2 + 2 v \alpha \gamma k i n - v^2 \alpha^2 \gamma^2 n^2.$$

Die Gleichung (10a) gilt für den Fall, daß alle Moleküle sich in derselben Richtung mit derselben Geschwindigkeit v bewegen. N bedeutet die Anzahl pro Volumeneinheit derjenigen Elektronen, welche an mit der Geschwindigkeit v bewegten Molekülen haften. Wir können kurz sagen, daß wir bis jetzt die *v-Elektronengattung* betrachten.

Um das Problem der Fortpflanzung des Lichtes in Gasen zu lösen, wo man es mit nach allen Richtungen und allen möglichen Geschwindigkeiten bewegten Molekülen zu tun hat, ist es zweckmäßig, der Gleichung (10a) ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde zu legen. Wir wollen ferner und können ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes in die X -Achse legen, dann wird α einfach der Richtungskosinus zwischen der X -Achse und Bewegungsrichtung v . Betrachtet man etwa die Y -Komponente von (10a), so hat man:

$$(10c) \quad p_y = \frac{\epsilon^2 N}{\mu F(\alpha, v)} \left(\mathfrak{E}_y + \frac{v_z}{c} \mathfrak{H}_x - \frac{v_x}{c} \mathfrak{H}_z \right).$$

Man sieht, daß falls N gleich Null ist, d. h. falls *keine* Elektronengattung vorhanden ist, dann ist $p_y = 0$, ist die v -Elektronengattung vorhanden, d. h. falls nur Elektronen vorhanden sind, welche den mit der Geschwindigkeit v bewegten Molekülen angehören, dann ist die elektrische Polarisation durch (10c) ausgedrückt. Wir nehmen daher an, daß falls Moleküle vorhanden sind, die sich mit allen möglichen Geschwindigkeiten bewegen, die gesamte sich einstellende Polarisation \mathfrak{P} erhalten wird, indem man $\epsilon^2 N / \mu F(\alpha, v) (\mathfrak{E}_y + \dots)$ für alle Elektronengattungen bildet. Mit anderen Worten, die von allen Elektronengattungen herrührende Polarisation \mathfrak{P}_y ist gleich:

$$(11) \quad \mathfrak{P}_y = \sum_v \sum_{\mathfrak{A}} \frac{\epsilon^2 N(v)}{\mu F(\alpha, v)} \left(\mathfrak{E}_y + \frac{v_z}{c} \mathfrak{H}_x - \frac{v_x}{c} \mathfrak{H}_z \right),$$

wobei die Summierung über alle Richtungen und alle Geschwindigkeiten zu erstrecken ist. Bei gegebenem elektrischen Felde soll also die Gesamtpolarisation \mathfrak{P} durch Summierung der Polarisationen der einzelnen Elektronengattungen entstehen. N wird eine Funktion von v und wir erhalten mit Hilfe des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes die Anzahl der Elektronen in der Volumeneinheit, welche Molekülen angehören, deren Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ liegen.

Wir wollen zuerst die Integration über alle Richtungen ausführen. Wir setzen:

$$J_1 = \frac{\epsilon^2 N(v)}{\mu F(\alpha, v)} \mathfrak{E}_y,$$

$$J_2 = \frac{\epsilon^2 N(v)}{\mu F(v, \alpha)} \left\{ \frac{v \cos(v, x)}{c} \mathfrak{H}_x - \frac{v \cos(v, x)}{c} \mathfrak{H}_z \right\}.$$

Entwickelt man $F(v)$ in eine Potenzreihe nach v und beschränkt sich auf quadratische Glieder in v , so erhält man:

$$J_1 = \mathfrak{E}_y \frac{\epsilon^2 N(v)}{\mu l} \{ 1 - p v \cos(v, x) + (p^2 + r) v^2 \cos^2(v, x) \},$$

$$J_2 = \frac{\epsilon^2 N(v)}{\mu l} \left\{ \left(\frac{v \cos(v, x)}{c} \mathfrak{H}_x - \frac{v \cos(v, x)}{c} \mathfrak{H}_z \right) \right. \\ \left. (1 - p v \cos(v, x) + (p^2 + r) v^2 \cos^2(v, x)) \right\},$$

wobei gesetzt ist:

$$l = n_0^2 - n^2 + 2 k i n,$$

$$p = \frac{2 n^2 \gamma + 2 k i n \gamma}{(n_0^2 - n^2 + 2 k i n)},$$

$$r = \frac{\gamma^2 n^2}{(n_0^2 - n^2 + 2 k i n)}.$$

Mit Hilfe des Kosinussatzes der sphärischen Trigonometrie läßt sich der Winkel (v, z) durch (v, x) ausdrücken. Es ist nämlich:

$$\cos(v, z) = \sin(v, x) \cos \eta,$$

wobei η ein Winkel ist, den eine Ebene, die parallel ist zu v , mit der xy -Ebene bildet.

Ferner ist:

$$N(v) dv = M \frac{d\tau}{4\pi} \Phi(v) dv,$$

wobei M die Anzahl der Elektronen in der Volumeneinheit bedeutet, $d\tau$ ein Kegelelement vom Inhalt $\sin(v, x) d(v, x) d\eta$ und $\Phi(v) dv$ die Maxwell'sche Wahrscheinlichkeitsfunktion ist, so daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v) dv = 1$$

ist. Setzt man den Wert für $N(v)$ in J_1 und J_2 ein, so muß man, um alle Richtungen zu erhalten, eine doppelte Integration ausführen und zwar über alle (v, x) in den Grenzen von 0 bis π und über alle η von 0 bis 2π . Da

$$\int_0^{2\pi} \cos \eta d\eta = 0$$

ist, so sieht man sofort, daß von dem Doppelintegral J_2 nur bleibt:

$$\begin{aligned} A_2 &= \oint_z \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{s^2 M \Phi(v) dv}{4\pi \mu l c} p v^2 \cos^2(v, x) \sin(v, x) d(v, x) d\eta \\ &= \oint_z \frac{1}{3c} \cdot \frac{s^2 M \Phi(v) dv}{\mu l} p v^2. \end{aligned}$$

Das Integral über J_1 liefert:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \mathfrak{E}_y \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 M \Phi(v) dv}{4 \pi \mu l} \{1 - p v \cos(v, x) + (p^2 + r) v^2 \cos^2(v, x)\} \\
 &\hspace{20em} \sin(v, x) d(v, x) d\eta \\
 &= \mathfrak{E}_y \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 M \Phi(v) dv}{4 \pi \mu l} \sin(v, x) d(v, x) d\eta \\
 &\quad - \mathfrak{E}_y \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 M \Phi(v) dv}{4 \pi \mu l} p v \cos(v, x) \sin(v, x) d(v, x) d\eta \\
 &\quad + \mathfrak{E}_y \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 M \Phi(v) dv}{4 \pi \mu l} (p^2 + r) v^2 \cos^2(v, x) \sin(v, x) d(v, x) d\eta.
 \end{aligned}$$

Nach der Integration erhält man:

$$A_1 = \mathfrak{E}_y \frac{\varepsilon^2 M \bar{\Phi}(v) dv}{\mu l} \left\{1 + \frac{1}{3}(p^2 + r)v^2\right\}.$$

Um die gesamte Polarisation \mathfrak{P}_y zu erhalten, müssen wir noch über alle v integrieren, d. h. es ist zu bilden:

$$\mathfrak{P}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A dv = \int_{-\infty}^{+\infty} (A_1 + A_2) dv.$$

Führt man die Integration aus, so wird:

$$\mathfrak{P}_y = \mathfrak{E}_y \left\{ \frac{\varepsilon^2 M}{\mu l} + \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^2 M}{\mu l} (p^2 + r) \bar{v}^2 \right\} + \mathfrak{E}_z \frac{1}{3c} \frac{\varepsilon^2 M}{\mu l} p \bar{v}^2,$$

wobei \bar{v}^2 das Mittel des Quadrates der Molekulargeschwindigkeit des Gases ist. Setzt man die Werte für l, p, r ein, so hat man:

$$(11) \left\{ \begin{aligned}
 \mathfrak{P}_y &= \mathfrak{E}_y \left\{ \frac{\varepsilon^2 M}{\mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)} + \frac{4}{3} \bar{v}^2 \frac{\varepsilon^2 M \gamma^2 (n^4 - k^2 n^2 + 2k i n^3)}{\mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \bar{v}^2 \frac{\varepsilon^2 M \gamma^2 n^2}{\mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)^2} \right\} + \mathfrak{E}_z \frac{2 \bar{v}^2}{3c} \frac{\varepsilon^2 M (n^2 \gamma + k i n \gamma)}{\mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)^2}.
 \end{aligned} \right.$$

Auf diese wichtige Gleichung werden wir gleich unten zurückkommen.

Betrachten wir eine Lichtwelle, deren Normale in die X -Achse fällt, so liefern uns andererseits die Grundgleichungen

der Elektrodynamik, indem wir noch ähnlich wie früher $(v/c)\mathfrak{B}_z$ durch $(v/c)\mathfrak{S}_z$ ersetzen, die Beziehungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}, \end{cases}$$

welche man leicht auf die Form bringt:

$$(13) \quad c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2}.$$

Nimmt man wieder an, daß \mathfrak{P} , \mathfrak{E} und \mathfrak{S} den Faktor

$$e^{i n (t - \gamma x)}$$

enthalten, so liefern (13) und (12) die Beziehungen:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_y = c^2 \gamma^2 - 1, \\ \mathfrak{S}_z = c \gamma \mathfrak{E}_y. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (11) hat man dann:

$$(15) \quad \begin{cases} c^2 \gamma^2 - 1 = \frac{\varepsilon^2 M}{\mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)} + \frac{4 \gamma^3 \bar{v}^3 \varepsilon^2 M (n^4 - k^2 n^2 + 2k i n^3)}{3 \mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)^3} \\ \quad + \frac{1 \gamma^2 \bar{v}^2 \varepsilon^2 M n^2}{3 \mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)^2} + \frac{2 \gamma^2 \bar{v}^2 \varepsilon^2 M (n^3 + k i n)}{3 \mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)^2}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(16) \quad c \gamma = v - i \kappa,$$

so wird \mathfrak{E}_y nur von

$$(17) \quad e^{\left\{ -\frac{2\pi \kappa x}{\lambda} + i n \left(t - \frac{v x}{c} \right) \right\}}$$

abhängen, wobei λ die Wellenlänge im Vakuum bedeutet, auf die sich n bezieht. Aus (17) geht hervor, daß κ der Extinktionskoeffizient und v der Brechungsindex des Gases sind. Aus (16) und (15) folgt:

$$(18) \quad \begin{cases} (v - i \kappa)^2 \left\{ 1 - \frac{4 \frac{\bar{v}^2}{c^2} (n^4 - k^2 n^2 + 2k i n^3) \varepsilon^2 M}{3 \mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)^3} - \frac{1 \frac{\bar{v}^2}{c^2} \varepsilon^2 M (3 n^2 + 2k i n)}{3 \mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)^2} \right\} \\ \quad = 1 + \frac{\varepsilon^2 M}{3 \mu (n_0^2 - n^2 + 2k i n)}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} a_1 &= \frac{\varepsilon^2 M}{\mu} \cdot \frac{n_0^2 - n^2}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2}, \\ a_2 &= \frac{\varepsilon^2 M}{3\mu} \cdot \frac{n^2 \{3(n_0^2 - n^2)^2 + 8k^2(n_0^2 - n^2) - 12k^2 n^2\}}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2)^2}, \\ a_3 &= \frac{4\varepsilon^2 M}{3\mu} \\ &\cdot \frac{n^4(n_0^2 - n^2)^2 + k^2 n^2 \{-(n_0^2 - n^2)^3 + 12n^2(n_0^2 - n^2)^2 - 12n^4(n_0^2 - n^2) + 12k^2 n^2(n_0^2 - n^2) - 16k^2 n^4\}}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2)^3} \end{aligned} \right.$$

$$(20) \left\{ \begin{aligned} b_1 &= \frac{\varepsilon^2 M}{\mu} \cdot \frac{2kn}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2}, \\ b_2 &= \frac{\varepsilon^2 M}{3\mu} \cdot \frac{2kn \{ (n_0^2 - n^2)^2 - 6n^2(n_0^2 - n^2) - 4k^2 n^2 \}}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2)^2}, \\ b_3 &= \frac{4\varepsilon^2 M}{3\mu} \\ &\cdot \frac{2kn^3 \{ (n_0^2 - n^2)^3 - 3n^2(n_0^2 - n^2)^2 + 3k^2(n_0^2 - n^2)^2 - 12k^2 n^2(n_0^2 - n^2) + 4n^4 - 4k^4 n^2 \}}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2)^3} \end{aligned} \right.$$

so kann man (18) in der Form schreiben:

$$(21) \quad (v - i\kappa)^2 \left\{ 1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2} (a_3 + i b_3) - \frac{\bar{v}^2}{c^2} (a_2 + i b_2) \right\} = 1 + a_1 - i b_1.$$

Entwickelt man

$$\frac{1}{1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2} (a_3 + i b_3) - \frac{\bar{v}^2}{c^2} (a_2 + i b_2)}$$

in eine Potenzreihe und beschränkt sich auf quadratische Glieder in v/c , so wird (21) gleich:

$$(22) \left\{ \begin{aligned} (v - i\kappa)^2 &= 1 + a_1 - i b_1 \\ &+ \frac{\bar{v}^2}{c^2} \{ a_3 + a_1 a_3 + b_1 b_3 + i(a_1 b_3 - a_3 b_1 + b_3) \} \\ &+ \frac{\bar{v}^2}{c^2} \{ a_2 + a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_2) \}. \end{aligned} \right.$$

Die letzte Gleichung ergibt nach der Trennung der reellen und imaginären Größen:

$$(23) \quad v^2 - \kappa^2 = 1 + a_1 + \frac{\bar{v}^2}{c^2} \{ a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + b_1 b_3 + b_1 b_2 \},$$

$$(24) \quad 2v\kappa = b_1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2} \{ b_2 + b_3 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_1 b_2 - a_2 b_1 \}.$$

Das sind die Gleichungen, die den Brechungsindex und Absorptionskoeffizienten als Funktion der Schwingungsperiode des

einfallenden Lichtes und der Molekulargeschwindigkeit ausdrücken. Für $\bar{v} = 0$ erhält man die aus der gewöhnlichen Theorie der Dispersion bekannten Formeln:

$$(24) \quad \begin{cases} v^2 - \kappa^2 = 1 + \alpha_1 = 1 + \frac{\epsilon^2 M}{\mu} \cdot \frac{n_0^2 - n^2}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2}, \\ 2v\kappa = b_1 = \frac{\epsilon^2 M}{\mu} \cdot \frac{2kn}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2}. \end{cases}$$

Die Molekulargeschwindigkeit liefert also das Zusatzglied mit $\bar{v}^2/c^2 \{ \}$. — Wir wollen uns in der Abhandlung nur auf die Dispersion beschränken.

Bekanntlich ist:

$$\bar{v}^2 = \frac{3RT}{m},$$

wobei R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur, m das Molekulargewicht ist.

Der von der Molekularbewegung ausgeübte Einfluß ist also proportional mit der absoluten Temperatur.

Um nun zu sehen, wie groß der prozentuelle Einfluß der Molekulargeschwindigkeit auf den Brechungsindex ist, wollen wir zunächst den Fall nehmen, daß k (Reibungskoeffizient) gleich Null gesetzt werden darf. Dann ist die Formel (23) sehr einfach, es wird:

$$(25) \quad v = 1 + a_1 + \frac{\bar{v}^2}{c^2} \{ a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 \},$$

wobei aber:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\epsilon^2 M}{\mu} \cdot \frac{n_0^2 - n^2}{(n_0^2 - n^2)^2}, \\ a_2 &= \frac{\epsilon^2 M}{\mu} \cdot \frac{n^2 (n_0^2 - n^2)^2}{(n_0^2 - n^2)^4}, \\ a_3 &= \frac{4\epsilon^2 M}{3\mu} \cdot \frac{n^4 (n_0^2 - n^2)^3}{(n_0^2 - n^2)^6} \end{aligned}$$

sind.

Bildet man das Verhältnis der in der Klammer $\{ \}$ von (25) stehenden Glieder zu a_1 , so erhält man das Resultat, daß der prozentuelle *Einfluß der Molekularbewegung mit der Dichte des Gases zunimmt.*

Ferner sieht man, daß der von der Molekularbewegung stammende Effekt desto größer ist, je weniger die Schwingungszahl der erregenden Welle von der Eigenschwingung der Elektronen entfernt ist.

In der unmittelbaren Nähe der Eigenschwingung der Elektronen, in der Umgebung, wo $n_0 - n$ weniger als 3 Ångström beträgt, kann die Formel (23) in Vergleich mit (24) verhältnismäßig beträchtliche Unterschiede je nach der Natur des Gases geben.

Es wäre vom theoretischen Standpunkte interessant, auch in den Fällen eine genaue Diskussion durchzuführen, bei welchen k nicht vernachlässigt werden darf. Zu dem Zwecke müßte man aber nähere Kenntnis von dem Wesen der Absorption (k) haben, was ja überhaupt zu den schwierigsten, aber auch lohnendsten Problemen der Spektralanalyse gehört.

In der Gleichung (1) haben wir zur Vereinfachung der Schreibweise die elektrische Kraft, welche auf ein einzelnes Elektron wirkend, es zu Schwingungen anregt, gleich $\varepsilon \mathcal{E}'$ gesetzt. Streng genommen ist die auf das Elektron ausgeübte ponderomotorische Kraft:

$$\varepsilon(\mathcal{E}' + \omega \nu'),$$

wobei

$$\omega = 4\pi\left(\frac{1}{\lambda} + s\right)$$

ist. Für Gase ist es gestattet mit Planck die Konstante s gleich Null zu setzen. Es ist natürlich nicht schwer, die strenge Dispersionsformel hinzuschreiben, welche man erhält, wenn das Glied $\omega \nu'$ berücksichtigt wird. In sehr vielen Fällen führt aber sicherlich die Annahme $\omega = 0$ zu Resultaten, die mit der Erfahrung übereinstimmen. (Vgl. z. B. L. Natanson: Bulletin Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, 1907.) —

(Eingegangen 17. Oktober 1908.)
