

6. *Studien über die Anomalien im Verhalten der Dielektrika*¹⁾;
 von *Egon Ritter v. Schweidler*.

Einleitung.

Vom Standpunkt der allgemeinen Theorie der elektrischen Erscheinungen ist ein homogenes und isotropes Dielektrikum durch *zwei* Materialkonstanten ausreichend zu charakterisieren: durch seine *Dielektrizitätskonstante* und durch sein *spezifisches Leitvermögen*.

Viele Dielektrika zeigen nun *Anomalien* ihres Verhaltens, die sich nicht ohne weiteres in den Rahmen der allgemeinen Theorie fassen lassen, ähnlich wie dies auf dem Gebiet des Magnetismus bei den ferromagnetischen Substanzen der Fall ist. Da sich ohne spezielle Hypothesen nachweisen läßt, daß die verschiedenen Arten der Anomalien in gegenseitigem Zusammenhange stehen, sind sie hier auch im Zusammenhange behandelt.

Die hier gegebene Darstellung zerfällt in *drei Hauptteile*.

Im *ersten Teile* werden die *Hauptformen* des anomalen Verhaltens der Dielektrika auf Grund der bisher vorliegenden experimentellen *Ergebnisse* ohne Anwendung einer speziellen Hypothese oder Theorie zusammengestellt; als solche Hauptformen werden unterschieden:

1. die *Rückstandsbildung*, das ist das Auftreten nach bestimmten Gesetzen zeitlich variabler Ströme in Dielektrikas unter der Einwirkung eines konstanten oder sehr langsam veränderlichen elektrischen Feldes;

2. die *Energieverluste* (Umwandlung elektrischer Energie in Wärme) in Dielektrikas unter dem Einfluß eines Wechsel- oder Drehfeldes;

1) Aus den Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Kl. **116**. p. 1055. 1907.

3. die *ponderomotorischen Kräfte*, die ein Dielektrikum im elektrischen Drehfeld erfährt;

4. die scheinbare *Abhängigkeit* der Kapazität eines Kondensators und somit auch der *Dielektrizitätskonstante* seines Dielektrikums von der *Ladungsdauer* bei konstanter Spannung, bzw. *Periodendauer* bei Wechselspannung.

Der Ausdruck „*Hysteresis*“, der für die unter 2. und 3. genannten Erscheinungen häufig gebraucht wird, ist hier vorläufig vermieden, da er bereits eine nicht allgemein angenommene Voraussetzung über die Natur dieser Phänomene zur Grundlage hat.

Der *zweite Teil* behandelt die *Theorie* der anomalen Erscheinungen. Es wird zunächst der oben erwähnte gegenseitige *Zusammenhang* der vier Hauptformen abgeleitet; hierauf wird die *Unvereinbarkeit* der Anomalien mit den einfachen Annahmen der allgemeinen Theorie nachgewiesen; es folgt eine Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten, diese Anomalien theoretisch zu behandeln durch Zurückführung auf *Anomalien der Struktur des Mediums* (Inhomogenität, Maxwell'sche Theorie der geschichteten Dielektrika) oder der *Leitungsvorgänge* (Ionenleitung) oder endlich des *dielektrischen Verhaltens* (Nachwirkung, Hysteresis, Viskosität).

Der Versuch einer *Modifikation* der einzigen bisher vorliegenden präzisen Formulierung einer solchen Theorie (der Pellatschen Theorie) bildet zusammen mit dem Nachweis, daß aus den Gesetzen der Rückstandsbildung die übrigen Formen des anomalen Verhaltens der Dielektrika quantitativ darstellbar sind, den *wesentlichsten* Bestandteil dieser Studien.

Der *dritte Teil* enthält die *Resultate* experimenteller Untersuchungen des Verfassers. Da nach seiner Ansicht die bisher vorliegenden, im ersten Teile besprochenen Ergebnisse ausreichen, um die im zweiten Teile dargelegten theoretischen Folgerungen zu stützen, bieten sie nichts prinzipiell Neues, sondern dienen bloß zur Erläuterung, Bestätigung und Ergänzung jener Ergebnisse und zur Aufstellung eines Schemas für die Charakterisierung eines Dielektrikums durch Angabe seiner Materialkonstanten.

Eine *Zusammenfassung der Ergebnisse* schließt die vorliegenden Studien ab.

Der *Anhang* enthält ein Verzeichnis der einschlägigen *Literatur*, auf das die Zitate innerhalb des Textes bezogen sind.

Erster Teil.

Die Hauptformen des anomalen Verhaltens der Dielektrika.

1. Die Rückstandsbildung.

Werden die Belegungen eines Kondensators mit den Polen einer Stromquelle konstanter elektromotorischer Kraft verbunden, so tritt in den Zuleitungen ein Strom auf, dessen Intensität mit der Zeit abnimmt. Bei einem idealen nichtleitenden Dielektrikum gilt nach der allgemeinen Theorie für den „normalen Ladungsstrom“ die Differentialgleichung:

$$S \frac{d^2 i}{dt^2} - W \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0,$$

wobei C die Kapazität des Kondensators, S den Selbstinduktionskoeffizienten und W den Widerstand des äußeren Leitungskreises darstellt. Je nach dem Verhältnis der numerischen Werte dieser drei Konstanten erfolgt die Ladung des Kondensators gedämpft oszillatorisch oder aperiodisch gedämpft. Bei nicht sehr großem Widerstande des äußeren Leitungskreises sinkt die Stromstärke in jedem der beiden Fälle sehr rasch ab, so daß in den praktisch realisierbaren Fällen der normale Ladungsstrom nach Zeiten von der Größenordnung eines kleinen Bruchteiles einer Sekunde gleich Null gesetzt werden kann.

Falls das Dielektrikum nicht vollkommen isolierend ist, so ist dem normalen Ladungsstrom ein „normaler Leitungsstrom“ a übergelagert, der gegeben ist durch die Formel

$$a = \frac{4\pi\lambda}{K} C E,$$

wobei λ das spezifische Leitvermögen, K die Dielektrizitätskonstante des Mediums, C die Kapazität des Kondensators und E die elektromotorische Kraft der Stromquelle bezeichnet (alle Größen sind in absoluten elektrostatischen Einheiten gemessen gedacht).

Tatsächlich nun beobachtet man bei vielen Dielektrikas, daß dem normalen Ladungsstrom i_1 und dem normalen Leitungs-

strom a noch ein „*anomaler Ladungsstrom*“ y_1 übergelagert ist, so daß der gesamte Strom darstellbar ist durch:

$$J_1 = i_1 + y_1 + a.$$

Dabei ist y_1 eine Funktion der Zeit, die asymptotisch auf Null absinkt, aber viel langsamer als der normale Ladungsstrom i_1 .

Werden die Belegungen des Kondensators, nachdem sie durch ein Zeitintervall δ auf konstanter Potentialdifferenz gehalten wurden, miteinander leitend verbunden, so sind bezüglich der Gesetze des Entladungsstromes *zwei Typen* zu unterscheiden:

a) Der Entladungsstrom J_2 entspricht dem *normalen* Entladungsstrom i_2 , der durch eine ganze analoge Differentialgleichung wie der normale Ladungsstrom i_1 bestimmt ist;

b) analog wie bei der Ladung ist ein „*anomaler Entladungsstrom*“ y_2 übergelagert und es ist y_2 wieder eine mit wachsender Zeit auf Null absinkende Funktion dieser. Dabei gilt noch die Beziehung zwischen y_1 und y_2 :

$$\int_0^{\delta} y_1 dt = - \int_0^{\infty} y_2 dt,$$

d. h. die gesamte Elektrizitätsmenge, die infolge des anomalen Entladungsstromes einen Querschnitt der Leitung passiert, ist entgegengesetzt gleich derjenigen, die während der Ladungsdauer δ durch den anomalen Ladungsstrom transportiert wurde. Während im Falle a), der besonders bei verschiedenen schlecht leitenden Flüssigkeiten realisiert ist (Koller, IV, 3; Schweidler, IV, 7, 8, 10; Gädeke, IV, 9), der Ladungsprozeß so verläuft, als ob das Leitvermögen des Mediums durch den Stromdurchgang zeitliche Änderungen erfahren würde, ist im Falle b) der Ladungsprozeß ein *reversibler*; das Medium verhält sich, als ob die dem Zeitintegral des anomalen Ladungsstromes $\int_0^{\delta} y_1 dt$ entsprechende Elektrizitätsmenge *absorbiert* wäre, um bei der Entladung allmählich wieder frei zu werden.

Diesen reversiblen Prozeß bezeichnet man gewöhnlich als *Bildung* bzw. *Freiwerden* des „*Rückstandes*“ und das Integral $\int_0^{\delta} y_1 dt$ als die in der Zeit δ gebildete „*Rückstandsladung*“.

Prinzipiell weniger einfach sind die Verhältnisse, wenn die Belegungen des Kondensators nicht auf konstanten Potentialen gehalten werden, sondern eine von ihnen isoliert ist; doch ist gerade diese Form der Rückstandserscheinungen die historisch primäre und bei dieser wurde man auf die oben erwähnte Bezeichnungsweise geführt. Wird ein Kondensator geladen und dann die eine der beiden Belegungen isoliert, so nimmt die Potentialdifferenz V der Belegungen und damit die durch das Produkt CV gegebene sogenannte „disponible Ladung“ ab. Diese Abnahme erfolgt rascher, als es dem stationären Leitungsstrom a entsprechen würde. Wird umgekehrt der geladene Kondensator durch vorübergehende leitende Verbindung der Belegungen entladen und hierauf die eine Belegung isoliert, so tritt allmählich eine neuerliche Ladung vom gleichen Vorzeichen wie die ursprüngliche auf, wächst bis zu einem Maximum an, um dann wieder (infolge der Leitung des Dielektrikums) asymptotisch auf Null zu sinken.

Bezüglich der Gesetze, die für den zeitlichen Verlauf der Rückstandserscheinungen sowie für ihre Abhängigkeit von anderen Nebenbedingungen gelten, haben die experimentellen Untersuchungen zu folgenden Resultaten geführt:

Der anomale Ladungsstrom oder rückstandsbildende Strom y_1 ist an einem gegebenen Kondensator bei gegebener elektromotorischer Kraft als Funktion der Zeit darstellbar durch:

$$y_1 = B \cdot t^{-n}.$$

Dabei ist $n < 1$.

Diese Formel kann nur als Annäherung betrachtet werden. Zunächst erhält man für $t = 0$, $y_1 = \infty$, wobei allerdings

$$\int_0^{\delta} y_1 dt = \frac{B \cdot t^{1-n}}{1-n}$$

für endliches δ endlich bleibt. Ferner wird für $t = \infty$,

$$\int_0^{\infty} y_1 dt = \infty.$$

was ebenfalls aus später zu besprechenden Gründen unwahrscheinlich ist. Der Verlauf des Stromes innerhalb des ersten unendlich kleinen Zeitelementes sowie nach unendlich langer

Zeit läßt sich natürlich nicht empirisch bestimmen. Innerhalb der der Beobachtung zugänglichen Zeitintervalle hat sich aber obige Formel gut bestätigt gezeigt (Kohlrausch, I, 1; Hopkinson, I, 9, 10, 11; Giese, I, 15; J. Curie, I, 21 u. a.) Versuche, welche über weit längere Zeiträume als in den zitierten Arbeiten die Gültigkeit dieser Formel prüfen, sind im dritten Teile angeführt.

Wird derselbe Kondensator unter der Einwirkung verschiedener elektromotorischer Kräfte untersucht, so ergibt sich, daß der Rückstandsstrom y_1 der elektromotorischen Kraft E *proportional* ist bei unveränderter Form des zeitlichen Verlaufes. Also

$$y_1 = B \cdot t^{-n} = b \cdot E \cdot t^{-n}$$

(Kohlrausch, I, 1; J. Curie, I, 21).

Wird ein bestimmtes Dielektrikum in verschiedenen Schichtdicken untersucht, so ist nach Hopkinson (I, 9, 10, 11) der Rückstandsstrom y_1 der Dicke umgekehrt proportional, wieder bei unveränderter Form des zeitlichen Verlaufes. Da Proportionalität des Stromes mit dem Querschnitt (Flächengröße der Belegung) selbstverständlich ist, kann man auch den Strom proportional der Kapazität des Kondensators setzen und man erhält die Formel:

$$y_1 = b \cdot E \cdot t^{-n} = \beta \cdot C \cdot E \cdot t^{-n},$$

wo jetzt β und n Konstanten des Mediums als solchen sind.

Bezüglich des Entladungsstromes y_2 gelten folgende Gesetze: Nach sehr langer Ladungsdauer des Kondensators ist der Entladungsstrom dem Ladungsstrom entgegengesetzt gleich:

$$y_2 = -y_1,$$

bei kürzerer Ladungsdauer δ ist $y_2 < y_1$, zeigt rascheren zeitlichen Abfall, und zwar darstellbar durch die Formeln:

$$y_1 = f'(t) = B \cdot t^{-n},$$

$$y_2 = -f'(t) + f'(t + \delta),$$

wobei t die vom Beginn der Ladung (bei y_1) bzw. Entladung (bei y_2) gerechnete Zeit, δ die Ladungsdauer bezeichnet.

Dieses Ergebnis kann so interpretiert werden: Der beobachtete Entladungsstrom y_2 entsteht aus der Superposition des dem Ladungsstrom $y_1 = f'(t)$ entgegengesetzt gleichen Stromes

— $f(t)$ und eines Stromes $f(t + \delta)$, der einfach als ungestörte Fortsetzung des Ladungsstromes auch nach der Entladung aufgefaßt werden kann.

Dieses sogenannte *Superpositionsprinzip* wurde experimentell gefunden von Hopkinson (I, 9, 10, 11) und J. Curie (I, 21).

Die oben erwähnte Formel

$$\int_0^{\infty} y_2 dt = - \int_0^{\delta} y_1 dt$$

ist eine Konsequenz desselben.

Das Superpositionsprinzip kann noch erweitert werden: Bei mehrmaligen sprungweisen Änderungen der Spannungsdifferenz der Belegungen superponieren sich die jeder Änderung entsprechenden Ströme, als ob sie unabhängig voneinander wären. Wenn also zu den Zeiten

$$t = \delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots \delta_k$$

Sprünge in der Potentialdifferenz um die (positiven oder negativen) Beträge:

$$E_1, E_2, E_3 \dots E_k$$

eintreten, so ist der resultierende Strom:

$$y = E_1 f(t - \delta_1) + E_2 f(t - \delta_2) + \dots + E_k f(t - \delta_k).$$

Eine Verallgemeinerung dieses empirisch gefundenen und bestätigten Superpositionsprinzipes führt zur Darstellung des Stromes bei beliebig variierender Spannungsdifferenz

$$E = \varphi(t)$$

durch die Formel

$$y_t = \int_{-\infty}^t \frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta} \cdot f(t - \vartheta) d\vartheta.$$

Darin ist $f(t)$ die Funktion, die den Verlauf nach einer einzigen sprungweisen Änderung im absoluten Betrage 1 darstellt, also nach dem oben Mitgeteilten:

$$\text{annähernd } f(t) = \beta \cdot C \cdot t^{-n}.$$

Wie alle Materialkonstanten sind auch die den Verlauf der Rückstandsbildung bestimmenden Konstanten β und n als

Funktionen der Temperatur zu betrachten. Die Angaben verschiedener Beobachter (Bedell und Kinsley, I, 26; Hopkinson und Wilson, I, 34; Naccari, IV, 6 und I, 37; Schweidler, I, 46) über den Einfluß der Temperatur zeigen Widersprüche, die aber vielleicht nur scheinbare sind. Gewöhnlich wird angegeben, daß der Rückstand mit steigender Temperatur abnehme; andere Beobachter geben an, daß mit steigender Temperatur die Konstante β zunehme, während der Exponent n nicht wesentlich von der Temperatur beeinflußt werde. Aus dieser letzteren Angabe würde folgen, daß die in gegebener Zeit δ gebildete Rückstandsladung

$$R = \beta \cdot C \cdot E \cdot \frac{t^{1-n}}{1-n}$$

mit der Temperatur wachse.

Wird aber nach längerer Ladungsdauer der Kondensator momentan entladen, hierauf die eine Belegung isoliert und nun mittels einer elektrometrischen Methode die bis zu einem Maximum ansteigende, dann wieder abnehmende Rückstandsladung messend verfolgt, so kann bei höherer Temperatur das beobachtete Maximum erniedrigt sein, wenn nämlich das Leitvermögen des Dielektrikums mit der Temperatur rascher ansteigt als die Größe β . Einige Versuche über diese Frage sind im dritten Teile besprochen.

Erwähnenswert sind noch zwei Beobachtungen über die Beeinflussung der Rückstandsbildung durch mechanische und elektrische Zustandsänderungen.

Nach Hopkinson (I, 10) werden die anomalen Ladungs- und Entladungsströme bei einer Leydnerflasche verstärkt durch gleichzeitige mechanische Erschütterungen.

Nach v. Hoor (VI, 2) kann die Rückstandsbildung eines Kondensators verringert werden durch oft wiederholtes „Formieren“, d. i. abwechselndes Laden und Entladen.

2. Energieumwandlung im Wechsel- oder Drehfelde.

Kondensatoren mit flüssigem oder festem Dielektrikum zeigen häufig eine *Erwärmung*, wenn ihre Belegungen durch Verbindung mit einer Wechselstromquelle alternierend geladen werden (Siemens, II, 1; Naccari und Bellati, II, 2; Borgmann, II, 3; Steinmetz, II, 6; Janet, II, 8; Kleiner,

II, 11; Fritz, II, 14; Düggelein, II, 21; Benischke, II, 24; Eisler, II, 25; Rosa und Smith, II, 35; Mercanton, II, 41; Moscicki und Altenberg, II, 49). Dasselbe findet statt, wenn ein Dielektrikum sich in einem elektrischen Drehfelde befindet (Guye und Denso, II, 50).

Bezüglich der verschiedenen Stärke dieser Wärmeproduktion in verschiedenen Substanzen sind besonders die Untersuchungen von Kleiner (II, 11), Fritz (II, 14) und Düggelein (II, 21) zu nennen. Kautschuk, Ebonit, Glas, Siegellack und Guttapercha zeigen diese Erscheinung in besonderer Intensität, Glimmer, Paraffin und viele isolierende Flüssigkeiten in schwachem bis unmerklichem Grade.

Eine Reihe von Untersuchungen betrifft die Abhängigkeit von der Effektivspannung des Wechselfeldes; die meisten Beobachter finden Proportionalität zwischen der pro Zeiteinheit entwickelten Wärme W und dem Quadrat der Effektivspannung E (Borgmann, II, 3; Steinmetz, II, 6; Hess, II, 23; Benischke, II, 24; Eisler, II, 25; Houllévigüe, II, 29); doch finden andere Beobachter (Mercanton, II, 41; Moscicki und Altenberg, II, 49) auch Abweichungen von diesem Gesetze.

Weitere Resultate betreffen die Abhängigkeit von der Periodenzahl n des angewandten Wechselstromes. Im allgemeinen steigt die Wärmemenge W mit der Periodenzahl an (Hess, II, 23; Eisler, II, 25; Beaulard, II, 36 und 37; Moscicki und Altenberg, II, 49; Guye und Denso, II, 50). Wird die entwickelte Wärmemenge auf die Dauer der Periode des Wechselstromes τ bezogen statt auf die Zeiteinheit, so ergibt sich, daß die Funktion $\tau W = f(n)$ bei einem gewissen Werte von n ein Maximum besitzt (Mercanton, II, 41; Rosa und Smith, II, 35).

Analog wie beim Rückstand kann bisweilen die Wärmeproduktion im Dielektrikum durch wiederholte Beanspruchung („Formieren“) herabgedrückt werden (Kleiner, II, 20; v. Hoor, VI, 2).

3. Ponderomotorische Kräfte im elektrischen Drehfelde.

Diese Erscheinungen treten auf bei *relativer* Rotation des Dielektrikums zu einem elektrischen Felde, also entweder wenn

ein ruhendes Dielektrikum sich in einem elektrischen Drehfelde befindet oder wenn ein Dielektrikum in einem ruhenden Felde rotiert. Es zeigt sich, daß in diesen Fällen Drehungsmomente auf das Dielektrikum ausgeübt werden, auch wenn es die Form eines Rotationskörpers mit zur Feldrichtung senkrechter Achse hat, also aus Symmetriegründen bei relativer Ruhe keine Drehungsmomente entstehen können (Arno, II, 7, 15—19, 27; Quincke, III, 2; Borel, II, 12; Threlfall, II, 30, 31; Schaufelberger, II, 32, 34; Heydweiller, III, 6; Graetz, III, 7; v. Lang, II, 52).

Ist das Dielektrikum von Luft umgeben, so entsteht ein Drehungsmoment, das es *im Sinne der Rotation des Feldes* zu drehen sucht: also *Mitnehmen* des ursprünglich ruhenden Dielektrikums im rotierenden Felde oder *Hemmung* des rotierenden Dielektrikums im ruhenden Felde.

Ist aber der Körper in eine sehr schlecht leitende Flüssigkeit eingetaucht, so kann sich das Vorzeichen des Drehungsmomentes umkehren: im ruhenden Felde wird eine vorhandene Rotation des Körpers *beschleunigt* (Quincke, III, 2), im Drehfelde eine der Feldrotation entgegengesetzte Rotation des Körpers hervorgerufen (v. Lang, II, 52).

Eine quantitative Bestimmung des Drehmomentes kann erfolgen im Drehfelde aus der Torsion einer elastischen Suspension, die dem elektrischen Drehmomente das Gleichgewicht hält, im ruhenden Felde aus der Dämpfung von Schwingungen (Arno, Threlfall, Schaufelberger). Für die Abhängigkeit des Drehmomentes D von der elektrischen Feldintensität F findet Schaufelberger die Beziehung:

$$D = k \cdot F^2,$$

Arno und Threlfall dagegen:

$$D = K \cdot F^n,$$

wobei n in verschiedenen Fällen verschieden (1,5 bis 1,96), aber immer kleiner als 2 war.

Bei konstanter Feldintensität nimmt das Drehungsmoment mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit zu (Arno, II, 27).

4. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Ladungsdauer bzw. Periodenzahl.

Sowohl wenn die Kapazität eines Kondensators bei kurzdauernder Verbindung mit einer Stromquelle konstanter Spannung bestimmt wird als auch bei Verwendung einer Wechselstrommethode ergaben viele Versuche eine Abhängigkeit des unmittelbar gefundenen Wertes für die Kapazität und somit auch des Wertes der Dielektrizitätskonstante von der Ladungsdauer bzw. von der Periodenzahl (Frequenz) des Wechselstromes (vgl. Literaturverzeichnis, Abteilung V).

Mit einer einzigen Ausnahme (Lecher, V, 6) fanden alle Beobachter, daß die Dielektrizitätskonstante um so kleiner wird, je kürzer die Ladungsdauer, bzw. je größer die Periodenzahl ist. Bisweilen sind die Unterschiede sehr bedeutend; z. B. findet J. J. Thomson (V, 5)

für *Glas*, bei Frequenz $n = \text{ca. } 100 \text{ }^1/\text{sec}$: $K = 9 \text{ bis } 11$,
 „ „ „ $n = 25 \cdot 10^6$: $K = 2,7$;

analog Northrup (V, 17)

für *Glas*, bei $n = 100$: $K = 6,25$,
 „ $n = 10^6 \text{ bis } 10^7$: $K = 5,86$;

und Beaulard (V, 15)

für *Glas*, bei Ladungsdauer $A = 0,008 \text{ sec}$: $K = 6,22$,
 „ „ „ $A = 0,0004$ „ : $K = 3,66$.

Zweiter Teil.

Die Theorie des anomalen Verhaltens der Dielektrika.

1. Zusammenhang der Hauptformen anomalen Verhaltens.

Die im ersten Teile dargestellten Hauptformen des anomalen Verhaltens sind nicht unabhängig voneinander, sondern es läßt sich nachweisen, daß aus dem Bestehen der ersten Hauptform, der Rückstandsbildung, das Auftreten von den anderen Hauptformen analogen Erscheinungen notwendig folgt.

Es ist bereits im Abschnitt I, 1 erwähnt worden, daß das zunächst experimentell gefundene *Superpositionsprinzip* verallgemeinert bei beliebiger zeitlicher Variation der angelegten

Spannung: $E = \Phi(t)$ zu folgender Formel für den Rückstandsstrom führt:

$$i_t = \int_{-\infty}^t d\vartheta \Psi'(\vartheta) f(t - \vartheta),$$

wobei $f(t)$ eine Funktion ist, die den zeitlichen Gang des Rückstandsstromes darstellt, falls zur Zeit $t=0$ an den vorher unendlich lange Zeit der Einwirkung elektrischer Kräfte entzogenen Kondensator plötzlich eine Spannungsdifferenz von der Größe 1 angelegt wird. Nach den bereits gegebenen Resultaten kann $f(t)$ annähernd dargestellt werden durch

$$f(t) = \beta \cdot C \cdot t^{-n} \quad (n < 1).$$

Es soll zunächst der Spezialfall untersucht werden, daß die Spannungsdifferenz der Kondensatorbelegungen eine einfache periodische Funktion der Zeit sei, also

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Aus obiger Formel folgt dann:

$$i_t = \frac{2\pi}{\tau} E_0 \int_{-\infty}^t d\vartheta \cos \frac{2\pi \vartheta}{\tau} f(t - \vartheta);$$

setzt man $(t - \vartheta) = u$, so ergibt sich daraus:

$$i_t = \frac{2\pi}{\tau} E_0 \left\{ A \cos \frac{2\pi t}{\tau} + B \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right\},$$

wobei

$$A = \int_0^{\infty} f(u) \cos \frac{2\pi u}{\tau} du,$$

$$B = \int_0^{\infty} f(u) \sin \frac{2\pi u}{\tau} du.$$

Dieser Strom i_t ist dem normalen Strome überlagert der sich wieder aus dem normalen Ladungsstrom und den normalen Leitungsstrom zusammensetzt und unter Vernachlässigung von Selbstinduktion und Widerstand im äußeren die Belegungen verbindenden Kreise dargestellt wird durch

$$\frac{2\pi}{\tau} C E_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{4\pi \lambda}{K} C E \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Der anomale, auf Rückstandsbildung beruhende Strom i , besteht somit aus zwei Gliedern, die einfach zum normalen Ladungs- bzw. Leitungsstrom hinzugerechnet werden können und sich durch eine scheinbare Änderung der Normalwerte von Kapazität und Widerstand des Kondensators interpretieren lassen.

Man erhält für die „scheinbare Kapazität“ den Wert:

$$C' = C + A,$$

für den reziproken „scheinbaren Widerstand“:

$$L' = L + \frac{2\pi}{\tau} B.$$

Führt man für die bisher unbestimmt gelassene Funktion $f(u)$ den experimentell gefundenen Näherungswert

$$f(u) = \beta \cdot C \cdot u^{-n}$$

ein, so wird mittels der Substitution $\omega = 2\pi u/\tau$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \cdot \beta C \int_0^{\infty} \omega^{-n} \cos \omega d\omega \\ &= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \cdot \beta C \cdot \Gamma(1-n) \cos \frac{(1-n)\pi}{2} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \cdot \beta C \int_0^{\infty} \omega^{-n} \sin \omega d\omega \\ &= \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1-n} \cdot \beta \cdot C \frac{\pi}{2 \Gamma(n) \cos \frac{(1-n)\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Da $n < 1$, also $1 - n$ positiv ist, ergibt sich, daß die scheinbare Kapazität C' für unendlich rasche Schwingungen den Normalwert C besitzt, bei endlicher Periodendauer τ vergrößert ist und mit wachsender Periodendauer zunimmt, was mit den im Abschnitt I, 4 mitgeteilten Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Analog erhält man für die scheinbare Leitfähigkeit den Ausdruck:

$$L' = L + \frac{2\pi}{\tau} B = L + \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{-n} \beta C \cdot \frac{\pi}{2 \Gamma(n) \cos \frac{(1-n)\pi}{2}},$$

d. h. die scheinbare Leitfähigkeit *steigt* mit *abnehmender* Periodendauer an. Dementsprechend ist also auch im Dielektrikum eine Wärmeentwicklung zu erwarten, die größer ist als die aus dem stationären (wahren) Leitvermögen berechnete und die mit zunehmender Frequenz des Wechselstromes wächst, unter sonst gleichen Bedingungen aber wie die wahre Joulesche Wärme dem Quadrat der Effektivspannung proportional ist. Auch hier besteht also Übereinstimmung mit den im Abschnitt I, 2 besprochenen experimentellen Resultaten.

Daß bei vorübergehender Verbindung eines Kondensators mit einer Stromquelle konstanter elektromotorischer Kraft (z. B. bei Kapazitätsmessungen mittels des ballistischen Galvanometers) der Rückstandsstrom ebenso wie der normale Leitungsstrom den unmittelbar gefundenen Wert der Kapazität erhöht, und zwar um so mehr, je länger die Ladungszeit war, ist unmittelbar ersichtlich.

Es sind also *Wärmeproduktion* im Dielektrikum im Wechselfelde und *Abhängigkeit* der scheinbaren Dielektrizitätskonstante von Frequenz des Wechselstromes, bzw. von der Ladungszeit bei Gleichstrom *notwendige* Folgeerscheinungen, *wenn Rückstandsbildung vorliegt*. Es sind aber nicht auch umgekehrt die ersteren Erscheinungen notwendig auf Rückstandsbildung zurückzuführen, sondern können ohne Rückstandsbildung des Mediums durch andere Ursache (z. B. Leitung) bedingt sein.

Die ponderomotorischen Kräfte, die ein Dielektrikum im relativen Drehfelde erfährt, sind vorläufig nicht berücksichtigt worden. Der gegenseitige Zusammenhang aber von ponderomotorischen Kräften und Wärmeproduktion kann unabhängig von jeder speziellen Hypothese aus allgemeinen energetischen Prinzipien abgeleitet werden.

Erfährt ein ursprünglich ruhendes Dielektrikum im rotierenden Felde ein Drehungsmoment im Sinne der Rotation des Feldes und wird es durch äußere Kräfte in seiner Ruhelage erhalten, so ist die Arbeit, die das elektrische Drehungsmoment an dem relativ zu ihm rotierenden Dielektrikum leistet, äquivalent der im Dielektrikum entstehenden Wärme. Analog ist bei durch äußere Kräfte konstant erhaltener Rotation des Dielektrikums im ruhenden Felde die Arbeit dieser äußeren Kräfte das Äquivalent der entwickelten Wärme. Bezeichnet

also W die pro Zeiteinheit im Dielektrikum entwickelte Wärme, D das Drehungsmoment der elektrischen Kräfte, ω die Winkelgeschwindigkeit der relativen Rotation von Feld und Dielektrikum, so können die Größen W und D wechselseitig aus einander bestimmt werden nach der Formel:

$$W = D \cdot \omega.$$

Falls D negativ ist (der Feldrotation entgegengerichtetes Drehungsmoment im Drehfelde, bzw. beschleunigendes Drehungsmoment bei im ruhenden Felde rotierendem Dielektrikum) wird Arbeit gewonnen; das Äquivalent muß dann im verminderten Energieverbrauch in der den stationären Zustand aufrecht erhaltenden Stromquelle liegen.

2. Die Unvereinbarkeit der Anomalien mit der Annahme normalen Verhaltens der Dielektrika.

Es soll nun eingehender untersucht werden, inwieweit die im ersten Teil geschilderten Anomalien wirklich unvereinbar mit den Annahmen der allgemeinen Theorie sind, die ein homogenes isotropes Dielektrikum durch die Angabe von zwei Materialkonstanten: Dielektrizitätskonstante K und spezifisches Leitvermögen λ als ausreichend charakterisiert annimmt.

Die Erscheinungen des anomalen Ladungsstromes und der Rückstandsbildung fallen sofort als unvereinbar mit diesen Annahmen heraus.

Bezüglich der Erscheinungen der Energieverluste, der Drehungsmomente im Drehfelde und der Variabilität der scheinbaren Kapazität mit Ladungsdauer oder Periodenzahl ist dies nicht auf den ersten Blick ersichtlich; es wurde oben nachgewiesen, daß in einem Medium, das Rückstandsbildung zeigt, auch diese Erscheinungen auftreten müssen, daß sie aber auch ohne Rückstandsbildung denkbar wären.

a) Die Wärmeproduktion kann einfach als Joulesche Wärme des schwach leitenden Dielektrikums aufgefaßt werden. Viele Beobachter haben sich begnügt, die Abhängigkeit der pro Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge W von der Effektivspannung E des Wechselfeldes zu untersuchen und aus dem Resultate, daß W proportional E^2 sei, auf Leitung als Ursache zurückgeschlossen. Diese Schlußweise ist nicht bindend;

als Joulesche Wärme müßte die Größe W unabhängig von der Frequenz des Wechselstromes sein, was tatsächlich nicht der Fall ist, und auch im konstanten elektrischen Felde denselben Betrag zeigen. Mehrfache Untersuchungen haben aber das Resultat ergeben, daß die aus dem Leitvermögen im stationären Zustande berechnete Joulesche Wärme viel kleiner ist als die im Wechselfelde direkt beobachtete. So finden Moscicki und Altenberg (II, 49), daß bei Glas nur etwa 2 Proz. der im Wechselfelde erzeugten Wärme dem stationären Leitvermögen entsprechen, und Corbino (II, 51), daß die an einem Paraffinpapierkondensator ermittelten Energieverluste einem Widerstande des Dielektrikums von 1400 Ω entsprechen würden, während natürlich der wahre Wert des Widerstandes enorm viel größer ist.

Unter Berücksichtigung der quantitativen Verhältnisse sind daher die beobachteten Energieverluste in Dielektrika mit der Annahme einer normalen Leitung *nicht* vereinbar.

b) Daß ein leitender Körper in einem relativen Drehfelde Drehmomente erfährt, ist bereits von Hertz (III, 1) theoretisch nachgewiesen worden. Verallgemeinerungen dieses Beweises rühren von Heydweiller (III, 3) und Schweidler (III, 5) her. Das Resultat ist folgendes: Rotiert eine Vollkugel vom Radius R und dem spezifischen Leitvermögen (im statischen Maße) λ_i , die von einem Medium mit dem Leitvermögen λ_a umgeben ist, um eine zu der Richtung eines homogenen elektrischen Feldes von der Stärke F senkrechte Achse mit der konstanten relativen Winkelgeschwindigkeit $2\pi/\tau$ (also τ gleich Umlaufdauer), so ist das Drehungsmoment gegeben durch die Formel:

$$D = R^3 F^2 \frac{\frac{2}{3} \tau (\lambda_a - \lambda_i)}{1 + \frac{4}{3} \tau^2 (2\lambda_a + \lambda_i)^2}.$$

Das Drehungsmoment ist *positiv* (beschleunigend im ruhenden Felde, entgegen der Feldrotation gerichtet im Drehfelde), wenn $\lambda_a > \lambda_i$, *negativ* (hemmend im ruhenden Felde, im Sinne der Feldrotation im Drehfelde), wenn $\lambda_i > \lambda_a$; der absoluten Größe nach hängt D auch von der Winkelgeschwindigkeit ab, und zwar derart, daß bei sonst konstanten Verhältnissen einer bestimmten Geschwindigkeit ein *Maximum* von D entspricht.

Qualitativ sind also die beobachteten Formen des Auftretens ponderomotorischer Kräfte im relativen Drehfeld auf

Leitung zurückzuführen. Zur quantitativen Darstellung erweist sich aber wieder diese Annahme als unzureichend. Die experimentellen Ergebnisse von Arno (II, 7, 15 bis 19, 27) und Threlfall (II, 30, 31) liefern zwischen Drehungsmoment und Feldstärke eine Beziehung: D proportional F^n , wo $n < 2$, statt der theoretischen Beziehung D proportional F^2 .

Bei einigen Versuchen v. Langs (II, 52) ist sogar der Sinn der Rotation der umgekehrte, als es nach dem Betrage von $\lambda_i - \lambda_a$ zu erwarten wäre; schlecht leitende feste Körper in besser leitenden Flüssigkeiten rotieren bisweilen im Sinne des Drehfeldes statt entgegengesetzt.

c) Daß infolge der Leitung die Dielektrizitätskonstante eines Mediums scheinbar zu groß bestimmt wird, ist ein Umstand, der seit langem bei der Messung von Dielektrizitätskonstanten berücksichtigt und entweder durch die Wahl der Versuchsanordnung (sehr kurze Ladungszeiten oder sehr schnelle Schwingungen) oder rechnerisch durch separate Bestimmung der Leitung eliminiert wird. Wollte man die im Abschnitt I, 4 angeführten Beispiele auf diese Weise erklären, so würde man auf Werte des spezifischen Leitvermögens der Medien geführt werden, die von anderer Größenordnung sind als die tatsächlich beobachteten. So z. B. erhält man aus den Angaben Beaulards (vgl. p. 721) für Glas den spezifischen Widerstand $\sigma = 4 \cdot 10^{10} \Omega \text{ cm}$, während er tatsächlich mindestens zu 10^{14} bis 10^{15} , also rund etwa 10000 mal größer anzunehmen ist.

Obwohl also Erscheinungen von qualitativ gleicher Art wie die beobachteten durch bloße Leitung entstehen können, folgt aus den quantitativen Verhältnissen, daß diese Erklärung unzureichend ist. Dies sowie die überhaupt mit der allgemeinen Theorie unvereinbare Rückstandsbildung zwingen also, in irgend welcher Weise die Anomalien durch modifizierte Annahmen in die Theorie einzufügen.

3. Anomalien der Struktur (Inhomogenität).

Die erste Möglichkeit, die Anomalien theoretisch zu begründen, liegt darin, zwar die allgemeinen Grundannahmen der Theorie unverändert beizubehalten, aber jene Medien, die Anomalien zeigen, als *nicht homogen* aufzufassen.

In der Tat hat Maxwell (I, 5) gezeigt, daß ein „geschichtetes“ Dielektrikum, dessen einzelne Schichten sich durch aus normal verhalten, bei dem aber der Quotient λ/K nicht den gleichen Wert in jeder Schichte besitzt, als Ganzes die Erscheinungen der Rückstandsbildung zeigen müsse. Er hat ferner darauf hingewiesen, daß bei nicht blätteriger Struktur sondern beliebiger räumlicher Anordnung der nicht gleichartigen Bestandteile des Mediums analoge Resultate sich ergeben. Weitere Ausführungen dieser Maxwellschen Theorie der geschichteten Dielektrika finden sich in den Arbeiten von Hess (I, 24) und Houllevigue (I, 33).

In der Maxwellschen Darstellung werden folgende Größen als Funktionen der Materialkonstanten und der Anfangsbedingungen explizit berechnet:

1. Die „disponible Ladung“; 2. der stationäre Leitungsstrom nach unendlich langer Einwirkung einer konstanten elektromotorischen Kraft; 3. der zeitliche Verlauf der freien Rückstandsladung eines Kondensators, dessen Belegungen nach unendlich langdauernder Ladung durch eine konstante elektromotorische Kraft plötzlich entladen und hierauf voneinander isoliert werden; 4. die gesamte Elektrizitätsmenge (gesamte Rückstandsladung), die einen nach unendlicher Ladungsdauer angelegten Kurzschluß zwischen beiden Belegungen durchfließt.

Der Rückstandsstrom bei konstanter elektromotorischer Kraft als Funktion der Zeit wurde von Maxwell nicht berechnet. Dieses Problem führt auf große mathematische Schwierigkeiten und ist daher im folgenden nur so weit ausgeführt, daß die Gültigkeit des Superpositionsprinzips theoretisch abgeleitet werden kann.

Die Voraussetzungen der folgenden Ableitung sind gegenüber denen Maxwells einerseits eingeschränkt durch die Annahme, daß die Dielektrizitätskonstante K des inhomogenen Mediums durchwegs konstant sei, andererseits erweitert durch die Annahme, daß bei Fortschreiten in einer bestimmten Richtung (der X -Achse) das Leitvermögen λ nicht sprungweise eine endliche Anzahl von Änderungen, den Werten λ_1 bis λ_n entsprechend, sondern kontinuierlich sich ändere, also durch eine beliebige stetige Funktion $\lambda(x)$ darstellbar sei.

Es sei also gegeben eine unendlich ausgedehnte Platte eines Dielektrikums von der Dicke l , die zwischen zwei metallischen Belegungen mit konstanten Potentialen $V = E$ und $V = 0$ sich befindet.

Die Dielektrizitätskonstante habe den konstanten Wert K , das spezifische Leitvermögen sei eine gegebene Funktion $\lambda(x)$.

Für einen beliebigen Punkt im Dielektrikum gelten dann die Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{4\pi}{K} \rho,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x) X],$$

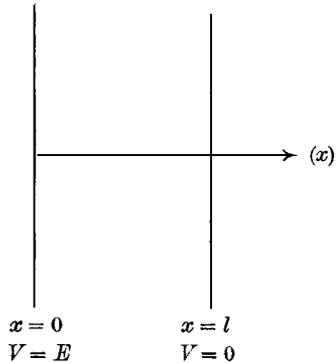


Fig. 1.

wobei X die elektrische Feldstärke, ρ die Raumdichte der wahren Ladung bezeichnet.

Daraus erhält man für die Feldstärke X die Differentialgleichung:

$$(3) \quad \frac{K}{4\pi} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial [\lambda(x) X]}{\partial x}$$

und durch Integration:

$$(4) \quad \frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} + \lambda(x) X = \psi(t).$$

$\psi(t)$ ist zunächst eine als Integrationskonstante bei der Integration nach x auftretende willkürliche Funktion der Zeit, die aber dadurch bestimmt ist, daß zu jeder Zeit die Bedingung erfüllt sein muß:

$$(5) \quad \int_0^l X dx = E.$$

Da

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 = \int_0^l \frac{\partial X}{\partial t} dx,$$

erhält man aus Gleichung (4):

$$(6) \quad \psi(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \lambda(x) X dx.$$

Diese Funktion $\psi(t)$ hat eine einfache physikalische Bedeutung: sie ist der Gesamtstrom pro Flächeneinheit in der Richtung der positiven x -Achse; in Gleichung (4) ist die Zerlegung in einen Verschiebungsstrom $\frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}$ und einen Leitungsstrom $\lambda(x)X$ angedeutet.

Gleichung (4) liefert nach abermaliger Integration die Formel¹⁾:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= e^{-\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t} \left\{ \frac{E}{l} + \int_0^t \psi(t) e^{+\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t} dt \right\} \\ &= e^{-\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t} \left\{ \frac{E}{l} + \int_0^t dt \left[e^{+\frac{4\pi}{K}\lambda(x)t} \cdot \frac{1}{l} \int_0^l \lambda(x) X dx \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Durch diese Integralgleichung ist die Feldintensität X als Funktion von x und t bestimmt; eine explizite Darstellung von X oder $\psi(t)$ daraus zu gewinnen, ist dem Verfasser nicht gelungen. Immerhin genügen die erhaltenen Resultate zum Nachweis des Superpositionsprinzips.

Aus den Gleichungen (4) und (6) folgt, daß bei konstanter Potentialdifferenz die Differentialgleichung gilt:

$$\frac{K}{4\pi} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} + \lambda(x)X = \frac{1}{l} \int_0^l X \lambda(x) dx.$$

Wenn also an einem Kondensator, für den K , l und $\lambda(x)$ gegeben sind, in zwei Versuchen bloß die Anfangsbedingungen für $t=0$, $X=X_0(x)$ und $X'=X'_0(x)$ sowie die Größen E und E' verschieden sind, so ist in beiden Fällen obige Differentialgleichung erfüllt. Setzt man daher $X'_t = X_t + \Delta_t$, so gilt auch für die Differenz Δ_t die Gleichung:

$$\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \Delta_t}{\partial t} + \lambda(x)\Delta_t = \frac{1}{l} \int_0^l \Delta_t \cdot \lambda(x) dx,$$

1) Anmerkung: Die Formel (7) enthält in der ursprünglichen Publikation (Wiener Sitzungsber. 116. p. 1075) zwei Druckfehler, indem in der ersten Zeile dx statt dt , in der zweiten Zeile

$$\int_0^l X dx \quad \text{statt} \quad \frac{1}{l} \int_0^l \lambda(x) X dx$$

eingesetzt ist.

d. h. der zeitliche Verlauf der Änderung der Feldintensität X' und damit auch der diese Änderung begleitende Rückstandsstrom kann aufgefaßt werden als Superposition der beiden Vorgänge, die sich abspielen würden, wenn zur Zeit $t = 0$ einmal die momentane Verteilung der elektrischen Kraft durch X_0 , das andere Mal durch Δ_0 gegeben wäre. Wird also in einem beliebigen Stadium der Rückstandsbildung die Potentialdifferenz der Belegungen plötzlich um den Betrag ΔE und damit die Feldstärke überall um den Betrag $\Delta E/l$ geändert, so ist der weitere Ablauf des Rückstandsstromes gegeben durch die Superposition jenes Stromes, der ohne Änderung der Potentialdifferenz weiter erfolgt wäre, und eines Rückstandsstromes, der durch Anschaltung der Spannung ΔE an den vorher unendlich lange Zeit ungeladenen Kondensator erzeugt worden wäre.

Die Maxwell'sche Theorie der inhomogenen Dielektrika gibt also Aufschluß über die wesentlichsten Eigenschaften, die an den anomalen Dielektrikas tatsächlich vorgefunden werden. Die explizite Darstellung der experimentell beobachtbaren Größen führt aber auf mathematische Schwierigkeiten, so daß eine Prüfung der Theorie durch Vergleich mit der Erfahrung bezüglich der quantitativen Verhältnisse nicht ausgeführt werden kann.

4. Anomalien der Leitung.

Eine zweite Möglichkeit der theoretischen Darstellung der Erscheinungen an Dielektrikas besteht darin, die Annahme eines *konstanten* spezifischen Leitvermögens fallen zu lassen und zu ersetzen durch eine solche, die kompliziertere Formen des Leitungsvorganges voraussetzt. Insbesondere in Anlehnung an die bei ionisierten Gasen beobachteten Erscheinungen können die Gesetze der *Ionenleitung* auf flüssige und feste Dielektrika übertragen werden.

Die Theorie der Elektrizitätsleitung in ionisierten Gasen geht von folgenden Voraussetzungen aus:

Durch Wirkung eines „Ionisators“ entstehen pro Volum- und Zeiteinheit q Ionenpaare; ein Teil der Ionen verschwindet durch Wiedervereinigung zu neutralen Molekülen („Molisierung“), und zwar ist dieser Betrag, pro Volum- und Zeiteinheit gerechnet, gegeben durch $\alpha n_1 n_2$, wo n_1 und n_2 die

Zahlen der in der Volumeinheit vorhandenen positiven bzw. negativen Ionen, α ein für eine bestimmte Gattung von Ionenpaaren charakteristischer sogenannter „Wiedervereinigungskoeffizienten“ ist. Es gilt also die Gleichung:

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n_1 n_2.$$

In einem elektrischen Felde ist in dieser Gleichung noch ein Glied einzufügen, daß die Differenz der Zahlen der durch den Strom zu- und abgeführten Ionen angibt, also:

$$\frac{dn_1}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 - s_1,$$

$$\frac{dn_2}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 - s_2.$$

Die positiven bzw. negativen Ionen bewegen sich nun in einem elektrischen Felde mit einer der Feldintensität proportionalen Geschwindigkeit $u_1 = c_1 X$, $u_2 = -c_2 X$, worin c_1 und c_2 die sogenannten spezifischen Geschwindigkeiten oder Beweglichkeiten der beiden Ionenarten sind.

Daraus ergeben sich für den Fall der Elektrizitätsleitung in einem von zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten (in der Distanz l) begrenzten ionisierten Gase — bei konstanter Potentialdifferenz E der beiden Platten — folgende Gleichungen:

$$(1) \quad [n_1 - n_2] \varepsilon = -4\pi \frac{\partial X}{\partial x},$$

$$(2) \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} = q - \alpha n_1 n_2 - \frac{\partial}{\partial x} [n_1 c_1 X],$$

$$(3) \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} = q - \alpha n_1 n_2 + \frac{\partial}{\partial x} [n_2 c_2 X],$$

$$(4) \quad \int_0^l X dx = E.$$

Die allgemeine Integration dieses Gleichungssystems ist bisher nicht durchgeführt (vgl. J. J. Thomson, *Conduction of electricity through Gases* p. 64—73, Cambridge 1903); doch sind folgende Resultate leicht ersichtlich:

Durch Einschalten eines elektrischen Feldes wird der ursprüngliche Ionengehalt $n_0 = \sqrt{q/\alpha}$ verringert, die Stromstärke nimmt mit der Zeit ab und erreicht einen stationären

Grenzwert, der bei Anwendung verschiedener Werte der elektromotorischen Kraft nicht dieser proportional ist; das spezifische Leitvermögen eines ionisierten Gases ist also nach Stromschluß zeitlich variabel und im stationären Endzustand eine Funktion der Stromdichte, und zwar eine mit steigender Stromdichte abnehmende.

Die zeitliche Variation erfolgt in Gasen sehr schnell, so daß sie in den meisten Fällen experimentell nicht verfolgt werden kann; die Abhängigkeit des stationären Leitvermögens von der Stromdichte bzw. von der elektromotorischen Kraft zeigt sich in bekannter Weise durch die „Charakteristik“, d. i. die Kurve $i = f(\mathcal{E})$, welche zu der Unterscheidung „Ohmscher Strom“ (dem Ohmschen Gesetz gehorchender Strom) für kleine Feldintensitäten oder Spannungen, „unvollständig gesättigter Strom“ für mittlere und „Sättigungsstrom“ (von der elektromotorischen Kraft unabhängiger konstanter Strom) für große Feldintensitäten oder Spannungen geführt hat.

Ferner folgt aus den Gleichungen, daß im stationären Zustande die Ionenzahl pro Volumeinheit nicht mehr räumlich konstant ist: in den den Elektroden benachbarten Schichten sind Ionen des einen (und zwar dem der Elektrode entgegengesetzten) Vorzeichens im Überschusse vorhanden; dadurch ist auch das ursprünglich homogene elektrische Feld gestört, in der Nähe der Elektroden über den Mittelwert erhöht, in der Mitte unter denselben erniedrigt.

Es ist ein naheliegender Gedanke, diese Annahmen auch auf flüssige und feste Dielektrika zu übertragen, die Leitung in diesen Medien als *Ionenleitung* aufzufassen.

Einige anomale Erscheinungen bei der Leitung flüssiger Dielektrika (vgl. im Literaturverzeichnis Abteilung IV), so die zeitliche Abnahme der Stromstärke und die Nichtproportionalität von Stromstärke und elektromotorischer Kraft im stationären Zustande, wurden auch bereits in dieser Weise gedeutet, ja an einigen flüssigen Dielektrika wurden der Größenordnung nach Ionenbeweglichkeiten und Ionenzahlen bestimmt (Schweidler, IV, 7, 8, 10).

Aber auch die Erscheinungen der Wärmeproduktion, der Rotationen und der Rückstandsbildung lassen sich qualitativ auf diesem Wege ableiten.

Bezüglich der Wärmeproduktion, von der oben nachgewiesen wurde, daß sie nicht als die einem *konstanten* Leitvermögen entsprechende Joulesche Wärme gedeutet werden könne, ist zunächst ersichtlich, daß bei Anwendung alternierender Felder (Wechselstrom) nicht der infolge des Stromdurchganges verringerte Wert des Leitvermögens im stationären Zustande, sondern jener Wert einzusetzen ist, der kurz nach Stromschluß vorhanden ist; es wird damit auch begreiflich, daß das mittlere Leitvermögen abhängig ist von der Dauer der Einwirkung des Feldes in bestimmter Richtung, daß mit abnehmender Periodendauer des Wechselstromes das Leitvermögen immer näher an den — im feldlosen Raume gültigen Wert —

$$(c_1 + c_2) \varepsilon n_0 = (c_1 + c_2) \varepsilon \sqrt{\frac{q}{a}}$$

heranrückt.

Bezüglich der Rotationserscheinungen und Drehungsmomente, die nach der im Abschnitt II, 2 angegebenen Formel auf die Leitungskonstanten zurückführbar sind, gilt dasselbe. Insbesondere wird es verständlich, daß das Drehungsmoment D langsamer wächst als F^2 , da das spezifische Leitvermögen mit steigender Feldintensität abnimmt.

Auch die Rückstandsbildung im engeren Sinne kann zurückgeführt werden auf die durch die Stauung der Ionen in der Nähe der Elektroden bedingten Feldstörungen. Es läßt sich hier einfach die im vorigen Abschnitt behandelte Maxwellsche Theorie der geschichteten Dielektrika anwenden:

Ein Medium mit Ionenleitung ist zwar nicht von vornherein inhomogen, aber es *wird inhomogen* bezüglich seiner Leitfähigkeit infolge des Stromdurchganges; die ursprüngliche Leitfähigkeit im feldlosen Raume wird — wie oben erwähnt — verändert, und zwar in der Nähe der Elektroden stärker erniedrigt als in der Mitte. Somit muß ein derartiges Medium nach einiger Dauer der Einwirkung des elektrischen Feldes das Verhalten eines geschichteten Dielektrikums zeigen.

Wenn so die Annahme von Ionenleitung auch in flüssigen und festen Dielektrika genügt, die anomalen Erscheinungen in qualitativer Hinsicht zu erklären, so ergeben sich doch Bedenken bei der Anwendung dieser Theorie zur Darstellung der quantitativen Verhältnisse.

Zunächst sind, wie oben erwähnt, Schwierigkeiten mathematischer Natur vorhanden, welche die exakte Lösung des Problems verhindern: in einem Medium, dessen Ionenkonstanten (Ionisierungsstärke g , Koeffizient der Wiedervereinigung α , Beweglichkeiten c_1 und c_2) gegeben sind, den Strom als Funktion der Zeit und der elektromotorischen Kraft darzustellen. Diese Schwierigkeiten nun beeinträchtigen wohl die Anwendbarkeit der Theorie, ohne natürlich gegen ihre Richtigkeit etwas zu beweisen.

Aber auch in bezug auf die Richtigkeit ergeben sich Bedenken. Wäre die Abnahme des Rückstandsstromes von seinem Anfangswerte auf einen hierzu relativ kleinen Endwert bedingt durch die Entionisierung infolge des Stromdurchganges, so müßte man annehmen, daß der stationäre Strom der unvollkommen oder vollkommen gesättigten Phase angehört (vgl. Fig. 2).

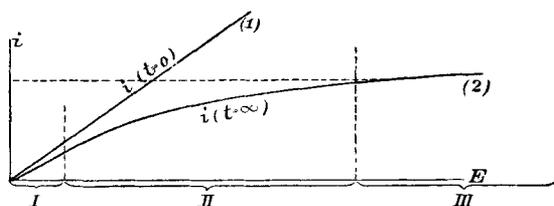


Fig. 2.

- I. Phase: Ohmscher Strom.
- II. Phase: Unvollständig gesättigter Strom.
- III. Phase: Sättigungsstrom.

Es zeigt sich aber tatsächlich, daß der stationäre Endwert des Stromes in einem rückstandbildenden Dielektrikum (z. B. Glas) innerhalb weiter Grenzen dem Ohmschen Gesetze entspricht, d. h. der elektromotorischen Kraft proportional ist (man vergleiche die experimentellen Resultate von E. Warburg, Wied. Ann. 21. p. 622, und F. M. Exner, Verh. d. D. Phys. Ges. 3. p. 26. 1901, sowie E. v. Schweidler (I, 46)). Für den „Ohmschen Strom“ (Phase I) aber ist wiederum die Differenz zwischen dem Anfangswerte des Stromes für $t = 0$ (in der Figur durch die Gerade 1 dargestellt) und dem stationären Endwerte (in der Figur Kurve 2) gering.

Die Annahme bloß *einer* Gattung von Ionenpaaren ist also *nicht zulässig*.

Man könnte nun annehmen, daß von jedem Vorzeichen Ionen mit sehr verschiedenen Werten der spezifischen Geschwindigkeit gleichzeitig im Dielektrikum vorhanden seien, so daß bei bestimmter elektromotorischer Kraft für die eine Gattung (die leicht beweglichen) bereits Sättigungsstrom eintritt, während für die anderen (schwer beweglichen) noch Ohmscher Strom herrscht. Aber auch diese kompliziertere Annahme ist vollkommen unvereinbar mit folgender Tatsache:

Nach Einschaltung einer elektromotorischen Kraft vom Werte E_1 zur Zeit $t = 0$ beobachtet man einen Strom, darstellbar durch $i_1 = a_1 + f(t)$, wobei $f(t)$ von einem hohen Anfangswerte asymptotisch auf Null absinkt und a_1 den stationären Endwert darstellt; wird nach hinreichend langer Zeit T , so daß $f(T)$ praktisch gleich Null gesetzt werden kann, die elektromotorische Kraft plötzlich vergrößert, z. B. auf den Wert $E_2 = k E_1$, so beobachtet man tatsächlich einen Strom i_2 , der als Funktion der Zeit gegeben ist durch die Formel:

$$i_2 = k a_1 + (k - 1)f(t - T),$$

entsprechend der früher erwähnten Proportionalitätsbeziehung zwischen stationärem Teil der Strömung und elektromotorischer Kraft, sowie dem Superpositionsprinzip für den zeitlich variablen Bestandteil des Stromes. Da $f(0)$ groß gegen a_1 ist, setzt also unmittelbar nach der Vergrößerung der elektromotorischen Kraft der Strom i_2 mit einem Werte ein, der nahezu $(k - 1)$ mal größer ist als der Anfangswert von i_1 für $t = 0$.

Der auf Ionenleitung beruhende Strom könnte aber unmittelbar nach Einschaltung der elektromotorischen Kraft E_2 höchstens den Wert $k a_1$ erreichen, da ja die Leitfähigkeit des Mediums durch den langdauernden Strom i_1 bereits auf den mittleren Betrag von a_1/E_1 herabgedrückt wurde.

Es ist also resumierend über die Anwendung der *Theorie der Ionenleitung* auf flüssige und feste Dielektrika zu sagen, daß die von ihr geforderten anomalen Eigenschaften des spezifischen Leitvermögens (zeitliche Variabilität, Abhängigkeit von Stromdichte) zwar an den tatsächlich beobachteten Erscheinungen *mitbeteiligt* sein können, daß sie aber für sich

allein *nicht ausreichend* ist, die wesentlichen Eigentümlichkeiten der beobachteten Phänomene, vor allem die Gesetze der Rückstandsbildung zu erklären.

5. Anomalien des dielektrischen Verhaltens.

Eine dritte Möglichkeit der theoretischen Behandlung liegt in der Annahme von Anomalien des dielektrischen Verhaltens. An Stelle der Voraussetzung, daß die dielektrische Verschiebung (oder Polarisation) zu jeder Zeit der elektrischen Feldstärke proportional sei und daß dieser Proportionalitätsfaktor eben durch den konstanten Wert der Dielektrizitätskonstante gegeben sei, treten kompliziertere Bedingungen, nach denen der jeweilige Wert des Verschiebungsvektors \mathfrak{D} nicht allein eine Funktion des simultanen der Feldstärke \mathfrak{E} , sondern auch der vorhergegangenen Zustände des Mediums sein soll. Mit anderen Worten: analog wie in bezug auf Elastizität und Magnetismus zeigen viele Medien auch in bezug auf dielektrische Vorgänge *Nachwirkungserscheinungen* oder *Hysteresis* im weiteren Sinne des Wortes.

Allgemein gehaltene Sätze analogen Inhaltes sind oftmals ausgesprochen worden, doch nur wenige Versuche liegen vor, die funktionelle Beziehung zwischen Momentanwert der Verschiebung und der „Vorgeschichte“ des Mediums präzise zu formulieren und damit das Fundament für eine eigentliche Theorie der Hysteresiserscheinungen zu schaffen.

a) Hysteresis im engeren Sinne.

Unter Hysteresis im engeren Sinne („hysteresis proprement dit“) bezeichnen manche Autoren, speziell Beaulard (II, 37) jene Form der Nachwirkungserscheinungen, wie sie an ferromagnetischen Substanzen, besonders an weichem Eisen, experimentell gründlich untersucht und auch theoretisch bis zu einem gewissen Grade befriedigend dargestellt wurden (vgl. Winkelmann, Handbuch der Physik, Bd. V, 1, p. 217—222). Es ist naheliegend, die Gesetze der magnetischen Hysteresis einfach auf die dielektrische zu übertragen: bei variabler Feldintensität ist die einem bestimmten Werte derselben zugeordnete Verschiebung größer bei abnehmendem als bei zunehmendem Gange der Feldintensität; infolgedessen tritt bei zyklischer

Elektrisierung (Wechselspannung) in der graphischen Darstellung eine geschlossene Kurve auf (Hysteresisschleife), deren Flächeninhalt bekanntlich die pro Periode im Wärme umgesetzte Energie angibt. Außerdem führt diese Anschauung zu den Begriffen „dielektrische Koerzitivkraft“ (durch OA) und „remanente Elektrisierung“ (durch OB) dargestellt.

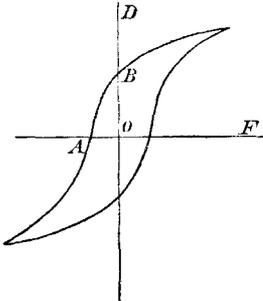


Fig. 3.

Für die Abhängigkeit der Hysteresisarbeit von der Amplitude der periodischen Magnetisierung haben die Versuche im allgemeinen eine Formel ergeben von der Form:

$$W = \eta \cdot H^n, \text{ wo } n = \text{ca. } 1,6.$$

Die Übereinstimmung der von Arno (l. c.) gefundenen Beziehung zwischen der elektrischen Hysteresisarbeit und der Effektivspannung (W proportional E^n , wo n zwischen 1,5 und 1,96) mit obiger Formel wurde oftmals als Beweis für die Analogie der magnetischen und der dielektrischen Hysteresis betrachtet.

Insbesondere Beaulard (II, 37) hat die Unanwendbarkeit dieser Theorie nachgewiesen. Bei der magnetischen Hysteresis ist die *Amplitude* der periodisch wechselnden magnetischen Feldintensität \mathcal{H} in erster Linie maßgebend, die *Periodendauer* von minder wesentlichem und noch nicht ganz sicher festgestelltem Einfluß. Die Abhängigkeit der dielektrischen „Hysteresisarbeit“ von der Dauer der Periode (vgl. Abschnitt I, 2 und 3) stört die Analogie bedeutend.

Ferner ist darauf hinzuweisen, daß „Remanenz“ und „Koerzitivkraft“ auf elektrischem Gebiete noch nicht experimentell sichergestellt werden konnten (Germanischskaja, VI, 3) und endlich, daß die Rückstandserscheinungen, bei denen der zeitliche Verlauf des anomalen Stromes das erste Problem bildet, in dieser der magnetischen Theorie nachgebildeten überhaupt nicht darstellbar sind.

b) Viskose Hysteresis.

b₁). Auf Grund der oben angeführten Überlegungen hat eine Reihe von Forschern die Theorie der elektrischen Hysteresis

im engeren Sinne — analog der magnetischen Hysterisis — verworfen und „viskose Hysterisis“ (auch „elektrische Viskosität“ genannt) angenommen (Schaufelberger, II, 32, 34; Beaulard, II, 36, 37; Arno in seinen späteren Arbeiten, II, 27; Porter und Morris, II, 22 u. a.).

Hierunter versteht man die Tatsache, daß bei plötzlicher Erregung eines elektrischen Feldes die dielektrische Verschiebung nicht momentan den durch $K\mathfrak{E}$ gegebenen Wert annimmt, sondern ihn erst allmählich ansteigend asymptotisch erreicht. Bei kontinuierlicher (eventuell periodischer) Änderung des Feldes \mathfrak{E} bleibt daher die Verschiebung \mathfrak{D} stets hinter ihrem „Sollwerte“ zeitlich zurück.

Diese, als „dielektrische Nachwirkung“ auch auf dem Gebiete der Rückstandsbildung versuchte Annahme (Boltzmann, Romich und Nowack, I, 7; Hopkinson, I, 9—11; Wüllner, I, 12 u. a.) erfordert nun eine schärfere Fassung.

b₂) Pellats Theorie.

Die einzige bisher tatsächlich erfolgte präzise Formulierung rührt von Pellat her (I, 39, 41 identisch mit II, 33, 39). Der Grundgedanke ist folgender:

Wird an einer Stelle eines dielektrischen Mediums, das hinreichend lange Zeit der Einwirkung eines elektrischen Feldes entzogen war, plötzlich zur Zeit $t=0$ ein Feld von der Intensität \mathfrak{E}_0 erzeugt und für $t>0$ konstant erhalten, so nimmt die Verschiebung \mathfrak{D} ebenfalls plötzlich zur Zeit $t=0$ den Wert $K\mathfrak{E}_0$ an, steigt aber dann allmählich an nach der Formel:

$$\mathfrak{D}_t = K\mathfrak{E}_0 + (1 - e^{-\alpha t})\varepsilon K\mathfrak{E}_0,$$

wo α und ε zwei Materialkonstanten sind.

Es wird für

$$t = \infty, \quad \mathfrak{D}_t = \mathfrak{D}_\infty = (1 + \varepsilon) K\mathfrak{E}_0.$$

Somit gilt allgemein die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = \alpha e^{-\alpha t} \cdot \varepsilon K\mathfrak{E}_0 = -\alpha(\mathfrak{D}_t - \mathfrak{D}_\infty),$$

d. h., die Verschiebung strebt einem stationären Endwerte \mathfrak{D}_∞ zu und ihre Änderungsgeschwindigkeit ist jederzeit proportional der Differenz dieses Endwertes und des momentanen Wertes.

Bei beliebiger zeitlicher Variation der Feldintensität $\mathfrak{E}_t = f(t)$ gilt ebenfalls die Differentialgleichung:

$$\frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = K \frac{d\mathfrak{E}_t}{dt} + \alpha [\varepsilon K \mathfrak{E}_t - \mathfrak{D}_t]$$

oder wenn man $\mathfrak{D}_t = K \mathfrak{E}_t + \mathfrak{D}'_t$ setzt:

$$\frac{d\mathfrak{D}'_t}{dt} = \alpha [K \mathfrak{E}_t - \mathfrak{D}'_t].$$

Pellat bezeichnet die Größe K als „wahre Dielektrizitätskonstante“, $K\mathfrak{E}$ als „fiktive Polarisierung“ und \mathfrak{D}' als „wahre Polarisierung“.

An Stelle dieser — vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie aus etwas willkürlich gewählten — Bezeichnungsweise Pellats soll im folgenden $K\mathfrak{E}$ „normale Verschiebung“ und \mathfrak{D}' „viskose Verschiebung“ genannt werden.

Auf Grund obiger Annahmen ist also ein Dielektrikum im allgemeinen durch vier Materialkonstanten zu charakterisieren: zu Dielektrizitätskonstante K und spezifischem Leitvermögen λ treten noch die Größen ε und α ; ε ist von der Dimension einer reinen Zahl und gibt das Verhältnis des stationären Endwertes der viskosen Verschiebung zu der normalen Verschiebung an; α ist von der Dimension einer reziproken Zeit und $1/\alpha$ bedeutet die Relaxationszeit der viskosen Verschiebung.

Es ergeben sich ferner folgende Konsequenzen:

1. Bei konstanter Feldintensität \mathfrak{E}_0 ist

$$\mathfrak{D} = K \mathfrak{E}_0 + (1 - e^{-\alpha t}) \varepsilon K \mathfrak{E}_0$$

und daher der Verschiebungsstrom pro Flächeneinheit

$$y_1 = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\alpha}{4\pi} e^{-\alpha t} \varepsilon K \mathfrak{E}_0.$$

Ein diesem Verschiebungsstrom entsprechender Leitungsstrom zirkuliert in der Zuleitung. Hat das Dielektrikum eines Kondensators die Flächengröße der Belegung f und die Dicke d , so daß die Potentialdifferenz der Belegungen gegeben ist durch $E = d \cdot \mathfrak{E}_0$, so gilt für den Gesamtstrom in der Zuleitung:

$$J = \alpha \varepsilon C E \cdot e^{-\alpha t}.$$

Wird der Kondensator nach unendlich langer Ladungsdauer entladen, indem zur Zeit $t = 0$ die Belegungen ohne

Einschaltung einer elektromotorischen Kraft direkt leitend verbunden werden, so ist

$$\mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 e^{-\alpha t},$$

$$y_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = -\frac{\alpha}{4\pi} e^{-\alpha t} \varepsilon K \mathfrak{E}_0 = -y_1,$$

d. h. der durch „Freiwerden des Rückstandes“ entstandene Strom y_2 ist dem rückstandsbildenden Strom y_1 entgegengesetzt gleich. Wird der Kondensator nach der endlichen Ladungsdauer T entladen, so ist

$$\text{für } t = 0; \mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T}),$$

$$\text{für } t > 0; \mathfrak{D} = \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha t},$$

$$y_2 = \frac{\alpha}{4\pi} \varepsilon K \mathfrak{E}_0 (1 - e^{-\alpha T}) e^{-\alpha t} = \frac{\alpha \varepsilon K \mathfrak{E}_0}{4\pi} [e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(t+T)}],$$

d. h. der nun auftretende Strom entspricht dem *Superpositionsprinzip*.

Qualitativ sind also die empirischen Gesetze der Rückstandsbildung aus der Pellatschen Theorie abzuleiten; in quantitativer Beziehung besteht Nichtübereinstimmung bezüglich der Form des zeitlichen Verlaufes, für den die Theorie eine Exponentialfunktion $e^{-\alpha t}$, die Erfahrung die Formel Bt^{-n} liefert. Pellat meint, die Versuche J. Curies zitierend (I, 21), daß die Beobachtung nicht hinreichend genau sei, um die Differenz zwischen der theoretischen und der empirischen Formel mit Sicherheit konstatieren zu können. Dies ist wohl ein Irrtum; außer J. Curies haben auch die von Pellat nicht zitierten Experimentaluntersuchungen von Kohlrausch (I, 1), Hopkinson (I, 9, 10, 11), Giese (I, 15), Dieterici (I, 18) u. a. das gleiche Resultat ergeben, und Beobachtungsfehler von der Größe der Differenz der nach beiden Formeln berechneten Stromstärken sind schlechthin ausgeschlossen.

Bezüglich der Gesetze der Rückstandsbildung bedarf also die Pellatsche Theorie jedenfalls einer Modifikation.

2. Für den Fall eines sinusförmigen Wechselfeldes

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

lassen sich die Erscheinungen übersehen, indem man in die im zweiten Teile, Abschnitt 1, angeführten Formeln (p. 722

und 723) für die unbestimmt gelassene Funktion $f(u)$ auf Grund der eben abgeleiteten Resultate setzt:

$$f(u) = \alpha \varepsilon C \cdot e^{-\alpha u}.$$

Man erhält also:

$$i = \frac{2\pi F_0}{r} \left\{ A \cos \frac{2\pi t}{r} + B \sin \frac{2\pi t}{r} \right\},$$

wobei

$$A = \int_0^{\infty} \alpha \varepsilon C e^{-\alpha u} \cos \frac{2\pi u}{r} du = \varepsilon C \frac{\alpha^2 r^2}{4\pi^2 + \alpha^2 r^2},$$

$$B = \int_0^{\infty} \alpha \varepsilon C e^{-\alpha u} \sin \frac{2\pi u}{r} du = \varepsilon C \frac{2\pi \alpha r}{4\pi^2 + \alpha^2 r^2}.$$

Somit — unter weiterer Anwendung der auf p. 723 abgeleiteten Formeln — für die *scheinbare Kapazität* des Kondensators:

$$C' = C \left[1 + \varepsilon \frac{\alpha^2 r^2}{4\pi^2 + \alpha^2 r^2} \right],$$

also mit zunehmender Periodendauer steigende Kapazität, und für den *reziproken Wert des scheinbaren Widerstandes*:

$$L' = L + \varepsilon C \frac{4\pi^2 \alpha}{4\pi^2 + \alpha^2 r^2},$$

also Zunahme des scheinbaren Leitvermögens und damit der in Wärme umgewandelten Energie mit abnehmender Periodendauer.

Die qualitative Übereinstimmung mit den empirischen Resultaten ist wieder vorhanden.

b₃) Modifikation der Pellatschen Theorie.

Eine Erweiterung der Pellatschen Theorie erhält man durch folgende Annahmen:

Die dielektrische Verschiebung besteht aus einem Bestandteil (normale Verschiebung), der jeweils der momentanen Feldintensität proportional ist, und einer *Summe von Gliedern*, deren jedes für sich nach einem analogen Gesetz, wie es die Pellatsche Theorie annimmt, einem Grenzwert zustrebt, bei denen aber die einer bestimmten Feldintensität entsprechenden Endbeträge und die Zeitkonstanten verschieden sind. Also:

$$\mathfrak{D} = K \mathfrak{E} + \sum \mathfrak{D}'_i,$$

wobei \mathfrak{D}_i' der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d\mathfrak{D}_i'}{dt} = \alpha_i [\varepsilon_i K \mathfrak{E} - \mathfrak{D}_i'].$$

Im stationären Endzustande bei $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$ und $t = \infty$ wird:

$$\mathfrak{D}_\infty = \mathfrak{E}_0 K \{1 + \sum \varepsilon_i\}.$$

Wird ein Kondensator zur Zeit $t = 0$ plötzlich geladen, so ist der Rückstandsstrom gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_t &= K \mathfrak{E}_0 \{1 + \sum \varepsilon_i (1 - e^{-\alpha_i t})\}, \\ i &= -\frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = \frac{K \mathfrak{E}_0}{4\pi} \sum \alpha_i \varepsilon_i e^{-\alpha_i t}. \end{aligned}$$

Die Zeitfunktion $f(t)$, die den Abfall des Rückstandsstromes darstellt, ist also durch eine Summe von einfachen Exponentialfunktionen gegeben. Da jede Funktion, die stetig abnimmt und deren sämtliche Ableitungen ebenfalls stetig abnehmen, mit beliebiger Annäherung durch eine solche Summe von Exponentialfunktionen darstellbar ist, genügt die modifizierte Theorie jeder empirisch gefundenen Form für $f(t)$, welche obiger Bedingung bezüglich der Derivierten entspricht.

Die Gesetze der Superposition bei beliebig veränderlicher Feldintensität \mathfrak{E}_i gelten natürlich für die Summe der Exponentialfunktionen ebenso wie für die einzelne im früheren Falle der Pellatschen Theorie. Speziell für einfach periodische Wechselfelder ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \sin \frac{2\pi t}{\tau} \cdot K \mathfrak{E}_0 \left\{ 1 + \sum \varepsilon_i \frac{\alpha_i \tau^2}{4\pi^2 + \alpha_i^2 \tau^2} \right\}, \\ &- \cos \frac{2\pi t}{\tau} \cdot K \mathfrak{E}_0 \sum \varepsilon_i \frac{2\pi \alpha_i \tau}{4\pi^2 + \alpha_i^2 \tau^2} \end{aligned}$$

und analog wie früher für die scheinbare Kapazität und die scheinbare Leitfähigkeit Ausdrücke, die nur durch die Einfügung des Summenzeichens modifiziert sind.

Diese Formeln lassen sich nun noch in anderer Weise darstellen. Statt einer endlichen Anzahl von Gliedern der Form $\mathfrak{D}_i = \varepsilon_i K \mathfrak{E}$ kann man eine unendliche Anzahl annehmen, deren Zeitkonstanten α_i kontinuierlich zwischen den Werten 0 und ∞ abgestuft sind. An Stelle der Sättigungswerte $\varepsilon_i K \mathfrak{E}$ tritt dann eine Funktion $K \mathfrak{E} \varepsilon(\alpha) d\alpha$, die angibt, welcher Betrag vom gesamten Verschiebungsvektor auf jene Bestandteile entfällt, deren

Zeitkonstanten zwischen den Grenzen α und $\alpha + d\alpha$ liegen, analog wie man z. B. in der Theorie der Strahlung die Intensitätsverteilung über verschiedene Wellenlängen λ darstellt durch eine Funktion $f(\lambda)$ und die Gesamtintensität setzt:

$$J = \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda.$$

Die obigen Gleichungen nehmen dann folgende Form an: Im stationären Zustande für $t = \infty$ bei konstanter Feldstärke \mathfrak{G}_0 :

$$\mathfrak{D}_{\infty} = K \mathfrak{G}_0 \left\{ 1 + \int_0^{\infty} \varepsilon(\alpha) d\alpha \right\};$$

bei plötzlicher Einschaltung eines Feldes \mathfrak{G}_0 zur Zeit $t = 0$:

$$\mathfrak{D}_t = K \mathfrak{G}_0 \left\{ 1 + \int_0^{\infty} \varepsilon(\alpha) [1 - e^{-\alpha t}] d\alpha \right\},$$

$$i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{D}_t}{dt} = f(t) = \frac{K}{4\pi} \mathfrak{G}_0 \int_0^{\infty} \alpha \cdot \varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha;$$

bei einfach periodischem Felde $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \sin 2\pi t/\tau$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \sin \frac{2\pi t}{\tau} \cdot K \mathfrak{G}_0 \left\{ 1 + \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon(\alpha) \alpha^2 \tau^2}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2} d\alpha \right\}, \\ &- \cos \frac{2\pi t}{\tau} \cdot K \mathfrak{G}_0 \int_0^{\infty} \frac{2\pi \varepsilon(\alpha) \alpha \tau}{4\pi^2 + \alpha^2 \tau^2} d\alpha. \end{aligned}$$

Man kann nun auch umgekehrt die Forderung stellen, die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ zu bestimmen, wenn z. B. der zeitliche Verlauf des Rückstandsstromes $i = f(t)$ empirisch ermittelt ist.

Es wurde bereits erwähnt, daß empirisch mit großer Annäherung sich die Formel $i = f(t) = b \mathfrak{G}_0 \cdot t^{-n}$ ergibt.

Aus der Gleichung:

$$\frac{K}{4\pi} \int_0^{\infty} \alpha \cdot \varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha = b \cdot t^{-n}$$

erhält man dann ¹⁾:

$$\alpha \cdot \varepsilon(\alpha) = \frac{4\pi b}{K} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \alpha^{-(1-n)}$$

oder

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{4\pi b}{K} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \alpha^{-(2-n)}.$$

Da $n < 1$, also $(2-n)$ positiv ist, wird für $\alpha=0$ die Funktion $\varepsilon(\alpha) = \infty$; auch müßte im stationären Zustande die durch

$$\mathfrak{D}_\infty = K \mathfrak{E}_0 \left(1 + \int_0^\infty \varepsilon(\alpha) d\alpha \right)$$

gegebene Verschiebung unendlich groß werden, und zwar durch die Integration von Null bis zu einem beliebig kleinen α_1 , während \int_0^∞ endlich bleibt. Es wurde bereits im Teile I, Abschnitt 1, ¹⁾ p. 715, erwähnt, daß die Annahme exakter Gültigkeit der empirischen Näherungsformel $i = b \cdot t^{-n}$ zu unwahrscheinlichen Konsequenzen führt. Nimmt man an, daß für sehr große Zeiten diese Formel nicht mehr gilt, sondern daß dann die wirkliche Stromstärke rascher absinkt und daß $\int_0^\infty i dt$ endlich bleibt, so ist dann auch die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ zu modifizieren, und zwar gerade in jenem Gebiet, für welches $\alpha = 0$ oder sehr klein ist; denn der Rückstandsstrom nach sehr langer Zeit (t groß) ist bedingt durch jene Bestandteile der viskosen Verschiebung, die sich sehr langsam ändern (α sehr klein). Es genügt also im Intervalle von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_1$, wo α_1 sehr klein sein kann, $\varepsilon(\alpha)$ durch eine andere Funktion als die oben angegebene zu ersetzen, die der Bedingung genügt: $\int_0^{\alpha_1} \varepsilon(\alpha) d\alpha =$ endlich, für $\alpha < \alpha_1$ aber die obige Form beizubehalten; das Resultat ist, daß $\int_0^\infty \varepsilon(\alpha) d\alpha$ endlich bleibt und daß die Stromstärke $i = \int_0^\infty \alpha \varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha$ bis zu großen Werten von t durch die Formel $i = b \cdot t^{-n}$ dargestellt wird, erst dann rascher als nach dieser Formel gegen Null konvergiert und daß die „Rückstandsladung“ $\int_0^\infty i dt$ endlich bleibt. Für die Vorgänge, die

1) Vgl. Serret, Differential- und Integralrechnung, III/1, p. 190.

sich im periodisch wechselnden Felde abspielen, ist die Form der Funktion $\varepsilon(\alpha)$ für kleine Werte des Argumentes unwesentlich, solange die Periodendauer τ nicht sehr groß wird, da die dabei auftretenden Koeffizienten A und B durch Integration von Produkten $\alpha \varepsilon(\alpha)$, bzw. $\alpha^2 \varepsilon(\alpha)$ entstehen, somit die Integration im Intervall von 0 bis α_1 (α_1 sehr klein) Beträge liefert, die unendlich klein von der ersten, bzw. zweiten Ordnung sind.

Die Charakterisierung eines Dielektrikums erfolgt also nach der modifizierten Pellatschen Theorie folgendermaßen:

Außer der Dielektrizitätskonstante K und dem spezifischen Leitvermögen λ des Mediums ist noch eine Funktion $\varepsilon(\alpha)$ im Bereich $\alpha = 0$ bis $\alpha = \infty$ anzugeben; das Integral

$$\int_0^{\infty} \alpha \cdot \varepsilon(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha = f(t)$$

liefert dann das Gesetz des zeitlichen Verlaufes des Rückstandsstromes; umgekehrt kann die Funktion $\varepsilon(\alpha)$ aus der empirisch gefundenen Funktion $f(t)$ ermittelt werden. Vermöge der Gültigkeit des Superpositionsprinzipes, die sich aus den Annahmen der Theorie ergibt, lassen sich dann die Gesetze des Stromverlaufes bei beliebig variierender Feldintensität prinzipiell ableiten, also insbesondere die Vorgänge im Wechselfelde: die scheinbare Kapazitätsänderung bei Variation der Periode und die in Wärme umgewandelte Energie, ferner die damit zusammenhängenden ponderomotorischen Kräfte, die ein Dielektrikum bei relativer Rotation zu einem konstanten elektrischen Felde erfährt.

Die Fassung dieser erweiterten Theorie ist also allgemein genug, um beliebige empirisch gefundene oder noch zu findende Formen des zeitlichen Verlaufes der Rückstandsbildung darstellen zu können und präzisiert genug, um die quantitative, nicht bloß qualitative Ableitung der übrigen Hauptformen anomalen Verhaltens aus der Rückstandsbildung zu ermöglichen.

Bloß in einem Detail ergibt sich ein Widerspruch zwischen den Resultaten der theoretischen Ableitung und dem direkten Ergebnis des Experimentes; die im Wechselfelde umgewandelte Energie und damit die Drehungsmomente im rotierenden Felde

müssen nach der Theorie proportional dem Quadrat der Feldintensität sein, während von einigen Beobachtern eine andere Beziehung (proportional \mathcal{E}^n , wo $n = 1,5$ bis $1,96$, vgl. p. 720) gefunden wurde. In diesen Fällen spielt vielleicht die anomale Art der Leitung mit, deren Effekte sich über die der dielektrischen Nachwirkung überlagern.

b) Molekulartheoretische Bedeutung der modifizierten Pellatschen Theorie.

Die Zerlegung des tatsächlich vorhandenen Verschiebungsvektors \mathcal{D} in eine beliebig große Anzahl von Teilbeträgen, die alle einer bestimmten Differentialgleichung genügen, aber für die darin enthaltenen Parameter α und ε verschiedene Werte aufweisen, erscheint auf den ersten Blick als eine gekünstelte, rein mathematische Fiktion, die schließlich nur darauf hinausläuft, für die Darstellung einer komplizierten empirisch gegebenen Funktion beliebig viele Konstanten einzuführen. Es soll nun gezeigt werden, wie diese Fiktion einer einfachen physikalischen Interpretation fähig ist.

In der vormaxwellschen Zeit wurden die dielektrischen Erscheinungen gedeutet als bedingt durch die Einlagerung kleiner (molekularer) *leitender* Teilchen; diese Anschauung gipfelt in der bekannten Clausius-Mosottischen Theorie.

Eine Zeitlang wurden durch die Maxwellsche Formulierung der Grundgleichungen die molekularphysikalischen Betrachtungsweisen auf dem Gebiete der Dielektrika ganz zurückgedrängt.

Die Anschauungen der modernen Ionen- und Elektronentheorie führten aber solche wieder ein, und zwar konnten die Vorstellungen der alten Theorie mit leichten Modifikationen wieder verwendet werden. An Stelle des *leitenden* Partikels oder Moleküls — grob versinnlicht durch eine kleine Metallkugel in einem isolierenden Medium eingebettet — tritt das aus entgegengesetzt geladenen *Ionen* (negatives Elektron und positives Restatom) bestehende Molekül. Die relative Verschiebbarkeit der beiden Bestandteile ersetzt die Leitung im alten Sinne. Die Moleküle als Ionenkomplexe können nun auch als „*Resonatoren*“ aufgefaßt werden, indem die aus der Gleichgewichtslage gebrachten Ionen eine bestimmte Dauer der

Eigenschwingung besitzen. Die Erscheinungen der normalen und anomalen Dispersion elektrischer Wellen, sowie die damit zusammenhängende Absorption werden in der modernen Theorie von diesem Gesichtspunkte aus behandelt.

Es liegt nun nahe anzunehmen, daß neben Molekülen, deren Ionen eine Eigenschwingung von bestimmter Dauer und bestimmtem Dämpfungsverhältnis bedingen, auch solche vorhanden seien, bei denen die Dämpfung so groß ist, daß an Stelle einer Schwingung eine *aperiodisch gedämpfte* Bewegung auftritt. Unter dem Einfluß eines plötzlich auftretenden, dann konstant bleibenden elektrischen Feldes stellt sich dann der neue Gleichgewichtszustand derart her, daß die Abweichung von diesem nach einer Exponentialfunktion $e^{-\alpha t}$ abnimmt.

Die molekularphysikalische Deutung der Pellatschen Theorie wäre daher folgende: Neben den Molekülen, die als Resonatoren mit bestimmter (sehr kleiner) Schwingungsdauer einem relativ langsam veränderlichen elektrischen Felde ohne merkliche Phasendifferenz folgen, sind in einem anomalen Dielektrikum auch Moleküle vorhanden, in denen die Verschiebung der Ionen aperiodisch gedämpft erfolgt, und zwar so, daß die Konstante α der obigen Formel für alle Moleküle den gleichen Wert besitzt. Die Größe ϵ gibt an, in welchem Verhältnis der Verschiebungsfluß dieser aperiodisch gedämpften Moleküle zu dem der oszillatorisch beweglichen steht.

In der modifizierten Theorie wird angenommen, daß nicht *eine* Gattung solcher aperiodisch gedämpfter Ionenkomplexe mit bestimmter Zeitkonstante α vorhanden sei, sondern eine große Anzahl verschiedener Gattungen mit verschiedenen Werten ihrer Zeitkonstanten α_i , die in verschiedener Anzahl (proportional ϵ_i) pro Volumeinheit vorhanden sind.

Eventuell kann man die möglichen Werte der Dämpfung als kontinuierlich abgestuft auffassen und die Funktion $\epsilon(\alpha)$ gibt an, nach welchem Gesetze die Häufigkeit der von 0 bis ∞ variierenden α -Werte verteilt ist.

Die Zerlegung einer empirisch gegebenen Funktion in eine Summe einfacher Exponentialfunktionen entspricht daher physikalisch einer Sonderung der Wirkungen, die von verschiedenen Gruppen unter sich gleichartiger Moleküle hervorgerufen werden.

Dritter Teil.

Experimentelle Beiträge zur Untersuchung der Rückstandsbildung.

1. Versuchsanordnung.

Um den Rückstandsstrom bezüglich seines zeitlichen Verlaufes, seiner Abhängigkeit von Ladungsdauer, elektromotorischer Kraft, Temperatur usw. zu untersuchen, wurde die Methode der direkten galvanometrischen Messung angewendet. Das benutzte Instrument war ein hoch empfindliches Drehspulengalvanometer, dessen Reduktionsfaktor $3,19 \cdot 10^{-10} \frac{A}{\text{pars}}$ betrug; hieraus und aus der Schwingungsdauer und Dämpfung der Spule berechnete sich der ballistische Reduktionsfaktor zu $1,34 \cdot 10^{-9} \frac{Cb}{\text{pars}}$.

Nebenstehende Fig. 4 zeigt die Schaltung an; der zu untersuchende Kondensator K ist einerseits mit einem Punkt von konstantem Potential $+E$ verbunden, andererseits über das Galvanometer G zur Erde abgeleitet. Um den heftigen Ausschlag des Galvanometers beim Ein- oder Ausschalten der elektromotorischen Kraft E zu vermeiden, ist ein Schlüssel S_I als Kurzschluß der Galvanometerleitung angebracht; zugleich gestattet es dieser Schlüssel in Verbindung mit dem Schlüssel S_{II} jederzeit, ohne Unterbrechung des den Kondensator durchfließenden Stromes, den Nullpunkt zu prüfen. Bei Anwendung kleiner Werte von E konnte bei geöffnetem Schlüssel S_I aus dem ballistischen Ausschlage die Kapazität des Kondensators K bestimmt werden.

Da in verschiedenen Versuchsreihen sehr verschiedene Meßbereiche nötig waren, wurden diese nach Bedarf geändert. Eine Erhöhung des Meßbereiches (Erniedrigung der Empfindlichkeit) auf das Zehn-, Hundert- oder Tausendfache des normalen Wertes wurde in der üblichen Weise durch Anlegen

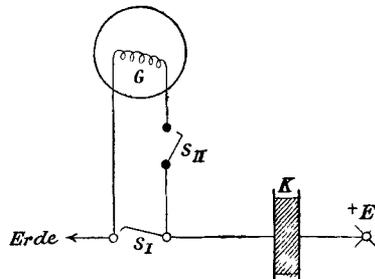


Fig. 4.

von Shunts zur Galvanometerspule bewerkstelligt. Um den Meßbereich auch auf schwache Ströme (von etwa 10^{-9} Amp. abwärts bis 10^{-11} Amp.), die einen für genauere Messung zu geringen Ausschlag erzeugten, auszudehnen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen: Die über das Galvanometer zur Erde führende Stromleitung kann durch einen Schlüssel S_{III} unterbrochen werden. Parallel zu dieser Leitung ist eine zweite geschaltet, die einen Glimmerkondensator GK von 1 Mikrof. Kapazität enthält. Der Glimmerkondensator nimmt dann während der Unterbrechungsdauer T infolge des (als konstant vorausgesetzten) Stromes i die Ladung iT an, welche durch

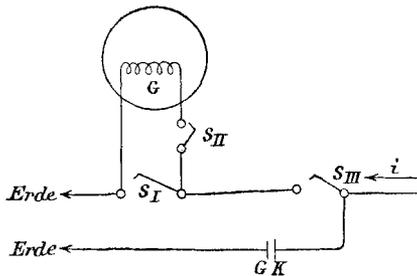


Fig. 5.

Schließen von S_{III} aus dem ballistischen Ausschlag ermittelt werden kann. Ein Strom, der einen Dauerausschlag von 1 pars bewirkt, gibt pro Sekunde der Unterbrechungszeit einen ballistischen Ausschlag von $1/4,21$ partes, also bei 500 Sek. Unterbrechungszeit einen Ausschlag von 119 partes, d. i. eine Erhöhung der Empfindlichkeit auf das rund 120fache der normalen. Infolge der großen Kapazität des Glimmerkondensators bleibt das Potential der aufgeladenen Belegung auch nach längerer Zeit klein, z. B. 0,16 Volt nach 500 Sek. im früheren Beispiel, so daß die den Strom i unterhaltende elektromotorische Kraft E (gewöhnlich 100—300 Volt) praktisch als konstant betrachtet werden kann. Der Ladungsverlust durch Leitung und Rückstandsbildung im Glimmerkondensator selbst war zu vernachlässigen.

Unmittelbar nach der Ein- oder Ausschaltung der elektromotorischen Kraft ist die zeitliche Änderung des Rückstandstromes eine so rapide, daß das infolge seiner starken Dämpfung

träge Galvanometer eine Messung der zu einer bestimmten Zeit vorhandenen Stromstärke durch den gleichzeitig beobachteten Ausschlag unmöglich macht; erst nach etwa einer halben Minute kann der — nun langsamer abnehmende — Ausschlag als Maß des Stromes angesehen werden. Um nun auch kurz nach Stromschluß wenigstens *einen* Wert der Stromstärke zu bestimmen, wurde folgende Schaltung angewendet:

Parallel dem Galvanometer liegt eine Leitung, die den Schlüssel S_1 und einen Widerstand W_1 ($W_1 = 1$ Ohm) enthält. An den Enden des Widerstandes W_1 liegt wieder eine Leitung, die einen Akkumulator A und einen Regulierwiderstand R

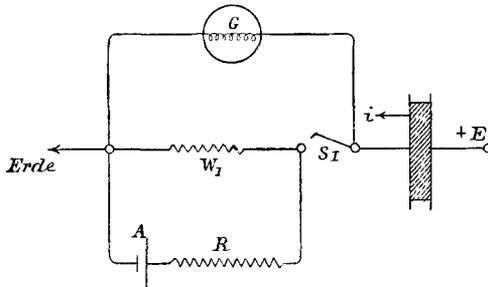


Fig. 6.

enthält. Das Verfahren ist folgendes: Durch einen Vorversuch wird auf dem Wege der Extrapolation *ungefähr* ermittelt, welche Stromstärke zu einer bestimmten Zeit t_1 nach Einschaltung der elektromotorischen Kraft im Galvanometer zu erwarten ist. Beim zweiten definitiven Versuche bleibt S_1 zunächst geschlossen; der Akkumulator A entsendet einen Zweigstrom (Hilfsstrom) in das Galvanometer, der durch Variation des Regulierwiderstandes R auf eine beliebige Größe gebracht werden kann und einen konstanten Ausschlag a hervorruft. Nun wird zur Zeit $t = 0$ im Hauptkreis die elektromotorische Kraft E eingeschaltet; da S_1 geschlossen ist und W_1 (1 Ohm) gegenüber dem Widerstande der Galvanometerspule (10000 Ohm) immer noch als Kurzschluß aufgefaßt werden kann, geht der normale Ladungsstrom und der mit hohen Anfangswerten einsetzende Rückstandsstrom i zunächst über S_1

und W_1 zur Erde, während im Galvanometer der Hilfsstrom den konstanten Ausschlag a erhält. Zu jener Zeit $t = t_1$, für welche auf Grund des Vorversuches zu erwarten ist, daß $i = a$ ist, wird der Schlüssel S_1 geöffnet. Es wird damit gleichzeitig der Hilfsstrom a unterbrochen und der zu messende Strom i über das Galvanometer geleitet. War wirklich im Momente der Unterbrechung $i = a$, so bleibt in diesem Momente die abgelenkte Galvanometerspule im Gleichgewichte, um dann der Abnahme von i entsprechend ihren Ausschlag zu verringern; war aber im Momente der Unterbrechung i größer oder kleiner als a , so erfolgt auch eine stoßartige Vergrößerung oder Verkleinerung des Ausschlages. Auf diese Weise kann also die Stromstärke i bestimmt werden für eine relativ kurze Zeit (in praxi etwa 10 Sek.) nach Stromschluß.

2. Versuchsergebnisse.

Zunächst soll in drei Beispielen (Versuchsreihen 1, 2 und 3) der auf p. 714 besprochene Unterschied der beiden Typen anomalen Ladungsstromes gezeigt werden.

Versuchsreihe 1.

Zylinderkondensator mit *Petroleum* gefüllt; t Zeit in Sekunden von Stromschluß an gerechnet, E Potentialdifferenz in Volt, i beobachteter Strom in Skalenteilen, a stationärer Endwert desselben, y gegeben durch $i - a$.

Von $t = 0$ bis $t = 1000$: $E = 300$ Volt; für $t > 1000$: $E = 0$.

t	i	y	t	i	y
0	—	—	180	126,3	0,8
15	240	114,5	240	126	0,5
30	188	62,5	300	126,2	0,7
45	168	42,5	660	125,5	0,0
60	151	25,5	900	125,5	0,0
90	134	8,5	1000	—	—
120	129	3,5	1020	-0,2	-0,2
150	127	1,5	1060	-0,1	-0,1

Versuchsreihe 2.

Plattenkondensator mit *Toluol* gefüllt; Bezeichnung wie bei 1. $t = 0$ bis $t = 3600$ sec: $E = 200$ Volt; $t > 3600$ sec: $E = 0$ Volt.

t	i	y	t	i	y
0	—	—	300	110	32
30	375	297	360	105	27
60	260	182	420	101	23
90	182	104	480	99	21
120	155	77	540	95	17
150	140	62	600	94	16
180	130	52	3600	78	0,0
240	117	39	3650	-0,5	0,5

Versuchsreihe 3.

Glaskondensator (Eprouvette, als Belegungen innen und außen Schwefelsäure); Bezeichnung wie früher.Von $t = 0$ bis $t = 900$ sec: $E = 300$ Volt; für $t > 900$ sec: $E = 0$ Volt.

t	i_1	$y_1 = i_1 - a$	t	$i_2 = y_2$
0	—	—	900	—
10	22	16	910	-18
20	16	10	920	-9,8
30	12,6	6,6	930	-7,3
50	11,1	5,1	950	-5,0
80	9,1	3,1	980	-3,9
100	9,0	3,0	1000	-3,1
150	8,0	2,0	1050	-2,0
600	6,0	0,0	1500	-0,0
890	6,0	0,0	1800	-0,0

Das Resultat ist also, daß in den Versuchsreihen 1 und 2 der Strom allmählich auf einen stationären Endwert abnimmt, nach Ausschaltung der elektromotorischen Kraft aber ein Strom merklicher Intensität überhaupt nicht vorhanden ist, daß dagegen in der Versuchsreihe 3 zunächst analog wie in den ersten beiden Fällen eine Abnahme des Stromes erfolgt, nach Ausschaltung der elektromotorischen Kraft aber ein *entgegen-*

gesetzt gerichteter Strom auftritt, dessen Stärke innerhalb der Beobachtungsfehler der Größe y_1 , d. i. dem Überschusse des Stromes i_1 über seinen stationären Endwert, gleich ist.

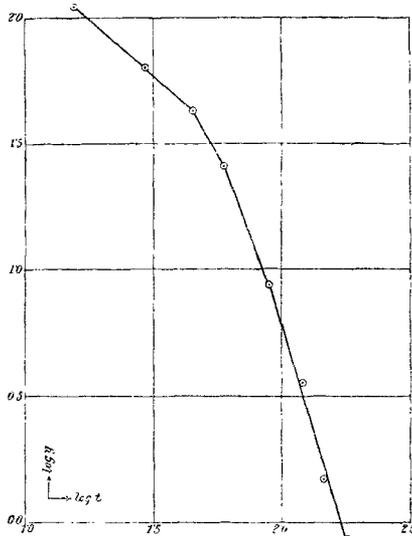


Fig. 7 zu Versuchsreihe 1, Petroleumkondensator.

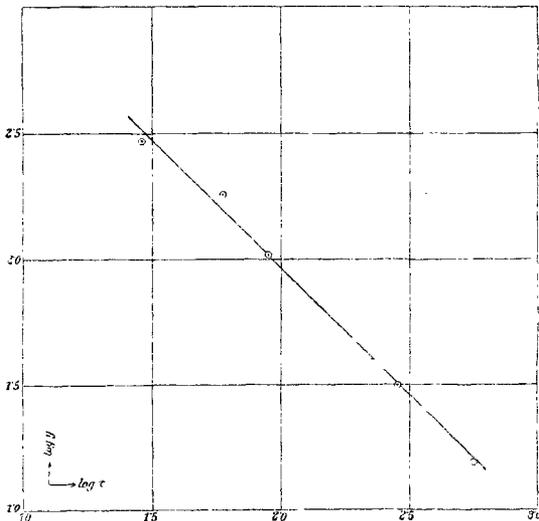


Fig. 8 zu Versuchsreihe 2, Toluolkondensator.

Die Kurven, Figg. 7, 8, und 9 geben ein Bild von den Gesetzen des zeitlichen Verlaufes der variablen Bestandteile

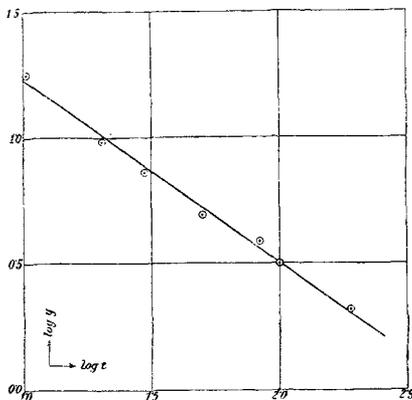


Fig. 9 zu Versuchsreihe 3, Glaskondensator.

$y = i - a$; die Abszissen stellen $\log t$, die Ordinaten $\log y$ dar; für Figg. 8 und 9 erhält man angenähert Gerade: also da

$$\log y = \text{Const.} - n \log t,$$

daraus

$$y = B \cdot t^{-n}.$$

Für Fig. 7 dagegen tritt an Stelle einer Geraden eine stark nach abwärts gekrümmte Kurve, die allerdings dann in eine Gerade überzugehen scheint.

Trotz der mehr oder weniger großen Analogie in der Form des zeitlichen Ganges sind die Fälle 1 und 2 scharf zu sondern von 3. Bei 1 und 2 liegt ein *nicht reversibler* anomaler Ladungsstrom vor, der theoretisch auf die Eigenschaften eines Mediums mit *Ionenleitung* zurückgeführt werden kann. Bei 3 liegt ein *reversibler* anomaler Strom, also eigentliche *Rückstandsbildung* vor. Bei *flüssigen* Dielektrika ist vom Verfasser immer nur der erste Typus konstatiert worden, bei *festen* Dielektrika der zweite.

Die von vielen Beobachtern (vgl. p. 716) gefundene und durch den oben angeführten Versuch 3 bestätigte Formel:

$$i_1 - a = -i_2 = B \cdot t^{-n}$$

für den zeitlichen Verlauf der Rückstandströme wurde bisher

immer nur für relativ kleine Zeitintervalle (bis zu einer Stunde etwa) experimentell geprüft.

Die beiden folgenden Versuchsreihen erstrecken sich über weit längere Zeiten.

Versuchsreihe 4.

Glimmerkondensator von 1 Mikروفarad Kapazität, durch 69 Stunden = 248400 Sek. auf 300 Volt geladen; zur Zeit $t=0$ entladen; für den Entladungsstrom i_2 wurde gefunden:

t (sec)	i_2 (partes)	Temp. ϑ ($^{\circ}$ C.)	t (sec)	i_2 (partes)	Temp. ϑ ($^{\circ}$ C.)
0	—	19,2	3000	8,8	19,6
40	(149)	—	4000	7,0	19,7
60	104	—	6150	5,30	19,8
100	73	—	10000	3,92	20,0
150	56	—	25000	2,06	20,4
200	46,5	—	100000	0,64	21,2
300	36,0	—	110000	0,58	20,6
600	23,2	—	346500	0,130	21,6
1000	17,0	19,4	520000	0,080	22,8
2000	11,3	19,5			

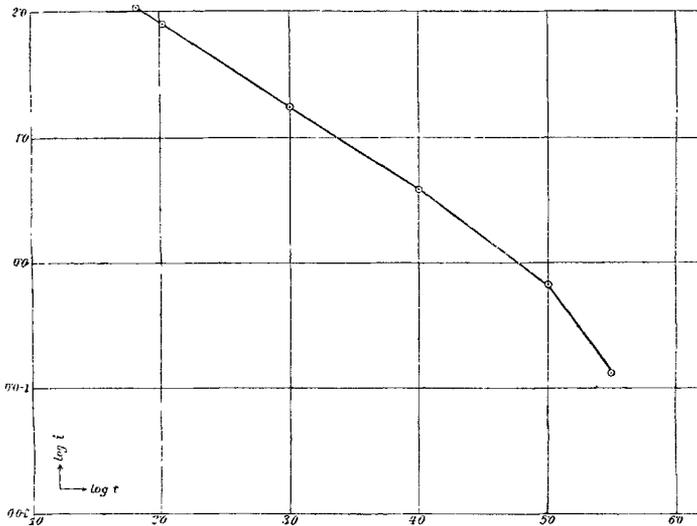


Fig. 10 zu Versuchsreihe 4, Glimmerkondensator.

Die graphische Darstellung gibt bis zu ca. $t = 10000$ sec ($\log t = 4,0$) einen linearen Verlauf, also Gültigkeit der obigen Formel; für $t > 100000$ fällt der Strom rascher, als es der Formel entspricht. Doch kann daraus noch nicht auf ihre Ungültigkeit für hohe Werte von t geschlossen werden.

Der Voraussetzung nach sollte die Formel $i = B t^{-n}$ gelten für den anomalen *Ladungsstrom* sowie für den *Entladungsstrom* dann, wenn der Kondensator *unendlich* lange Zeit vorher auf konstanter Potentialdifferenz geladen gehalten wurde. Nach *endlicher* Ladungsdauer δ ist nach dem Superpositionsprinzip zu erwarten, daß der Entladungsstrom

$$i_2 = f(t) - f(t + \delta) = B[t^{-n} - (t + \delta)^{-n}].$$

Da im vorliegenden Falle δ zwar groß (rund 250000 sec), aber nicht unendlich ist, so wird beim Entladungsstrom das Glied $(t + \delta)^{-n}$ für kleine Werte von t zu vernachlässigen, für große Werte von t aber merklich sein.

Eine Beobachtung des über den eventuellen konstanten Leitungsstrom übergelagerten *Ladungsstromes*, die direkt $f(t)$ gegeben hätte, mußte aus praktisch-technischen Gründen unterbleiben: die elektromotorische Kraft — durch Abzweigen vom Straßenstrom erhalten — war nicht vollkommen konstant, so daß ihren Variationen entsprechende normale Ladungs- und Entladungsströme sich über den zu beobachtenden Strom überlagerten und unregelmäßige, sehr bedeutende Schwankungen des Ausschlages hervorriefen.

Versuchsreihe 5.

Paraffinpapierkondensator von 5 Mikrof. Kapazität, durch 6 Tage und 5 Stunden = 450000 Sek. auf 300 Volt geladen; zur Zeit $t = 0$ entladen; für den Entladungsstrom i_2 wurde gefunden:

t (sec)	i_2 (partes)	Temp. ϑ ($^{\circ}$ C.)	t (sec)	i_2 (partes)	Temp. ϑ ($^{\circ}$ C.)
0	—	20,4	180	8580	—
60	22500	—	200	8080	—
100	19000	—	300	6360	—
120	11200	—	600	4550	—

t (sec)	i_2 (partes)	Temp. ϑ ($^{\circ}$ C.)	t (sec)	i_2 (partes)	Temp. ϑ ($^{\circ}$ C.)
1000	3640	—	$2,17 \cdot 10^6$	139	19,0
1500	3090	—	$2,33 \cdot 10^6$	186,5	22,8
3000	2420	21,0	$2,42 \cdot 10^6$	201,5	23,6
10000	1640	20,6	$2,51 \cdot 10^6$	213	24,2
93000	748	19,8	$2,68 \cdot 10^6$	202	24,4
250000	596	22,6	$3,11 \cdot 10^6$	202	26,0
332000	491	21,4	$3,19 \cdot 10^6$	209	27,0
503500	403	22,4	$3,72 \cdot 10^6$	170	—
768600	287	—	$10,89 \cdot 10^6$	17,0	17,2
$1,20 \cdot 10^6$	186,5	19,8	$11,69 \cdot 10^6$	16,0	18,0
$1,48 \cdot 10^6$	154,5	18,4	$12,11 \cdot 10^6$	13,1	14,0
$1,72 \cdot 10^6$	162	20,2	$15,97 \cdot 10^6$	8,2	12,8
$1,80 \cdot 10^6$	155	19,7	$15,98 \cdot 10^6$	18,0	18,8
$2,08 \cdot 10^6$	155	20,0			

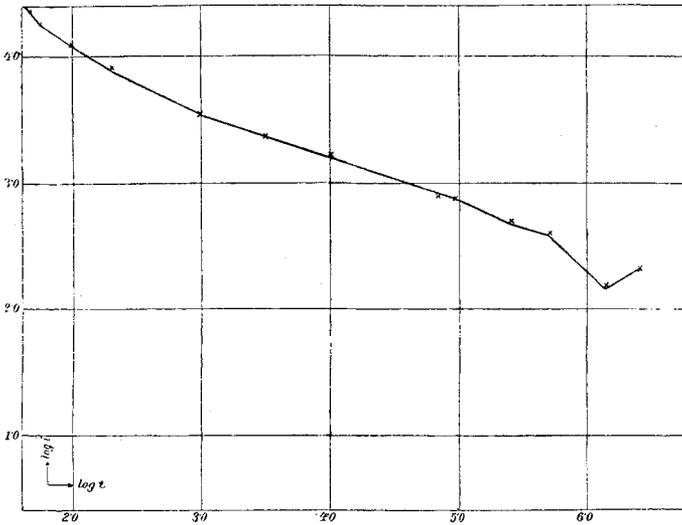


Fig. 11 zu Versuchsreihe 5, Paraffinpapierkondensator.

Wie die graphische Darstellung (Fig. 11) zeigt, ist hier die obige Formel weniger gut erfüllt; $\log i$ fällt zuerst rascher (entsprechend $n=0,86$), dann langsamer (entsprechend $n=0,34$). für große Werte von t ($t > 100000$) wird der Gang ganz unregelmäßig, in offenbarem Zusammenhang mit Temperatur.

schwankungen. Erhöhter Temperatur entsprechen höhere Stromwerte. Nach mehr als einem halben Jahre ($t = 16$ Millionen Sekunden) ist der Rückstandsstrom noch sehr merklich; da die zeitliche Änderung nun eine sehr langsame ist, kommen die Temperatureinflüsse rein zur Geltung. Einer Erhöhung der Temperatur von $12,8^{\circ}$ C. auf $18,8^{\circ}$ C. entspricht ein Anwachsen der Stromstärke von 8,2 auf 18,0 partes.

Im Anschluß hieran seien einige Versuche über die Beeinflussung der Rückstandsbildung in *Glas* durch die Temperatur mitgeteilt.

Versuchsreihe 6.

Glaskondensator, bestehend aus Kochkolben, Belegungen innen und außen Schwefelsäure; in fünf Versuchen bei verschiedenen Temperaturen wurde der Entladungsstrom gemessen, nachdem der Kondensator in allen fünf Fällen durch eine Zeit $\delta = 1800$ sec auf 300 Volt geladen worden war. Die Temperaturen betragen:

- bei a) $\vartheta = 18^{\circ}$ C.
- „ b) $\vartheta = 30$ „
- „ c) $\vartheta = 38$ „
- „ d) $\vartheta = 40$ „
- „ e) $\vartheta = 47$ „

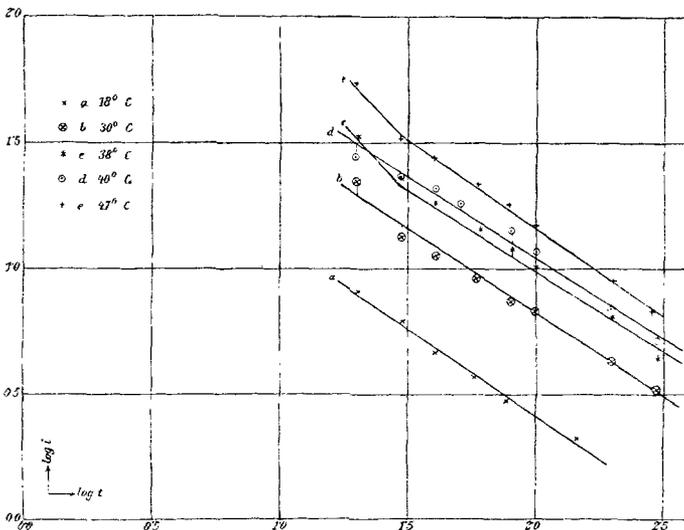


Fig. 12 zu Versuchsreihe 6, Glaskondensator.

Unter Hinweglassung der zugehörigen Zahlentabellen sei direkt auf die graphische Darstellung in Fig. 12 verwiesen.

Es ergibt sich, daß die Kurven $\log i = f(\log t)$ angenähert Gerade von gleicher Neigung sind, aber um so höher liegen, je größer die zugeordnete Temperatur ist. Es gilt also auch angenähert die Formel $i = B \cdot t^{-n}$, und zwar ist n durch die Temperatur *nicht wesentlich* beeinflusst, während B mit *steigender* Temperatur *zunimmt*.

Mit *steigender* Temperatur nimmt also der Rückstandsstrom zu, ohne die Form des zeitlichen Verlaufes erheblich zu ändern.

Die folgende Versuchsreihe enthält eine *Prüfung des Superpositionsprinzips*. Wird ein Kondensator unter sonst gleichen Bedingungen (gleiche elektromotorische Kraft, gleiche Temperatur) bei *variabler Ladungsdauer* δ geladen und dann der Entladungsstrom gemessen, so sollte bei Gültigkeit des Superpositionsprinzips die Gleichung erfüllt sein:

$$i = B t^{-n} - B(t + \delta)^{-n}.$$

Versuchsreihe 7.

Glimmerkondensator von 1 Mikrof. Kapazität; $E = 300$ Volt, δ bzw. gleich 2, 10, 60, 600, 1800, 250000 Sek. Die graphische Darstellung in Fig. 13.

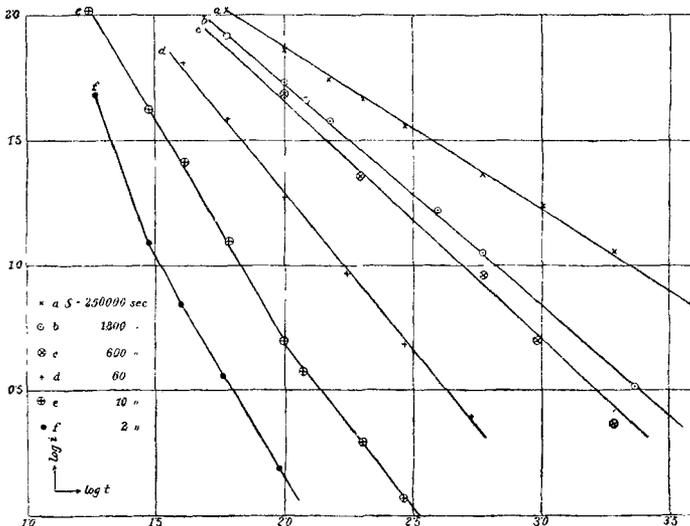


Fig. 13 zu Versuchsreihe 7, Glimmerkondensator.

Tabelle zur Versuchsreihe 7.

t	$\delta = 2 \text{ sec}$		$\delta = 10 \text{ sec}$		$\delta = 60 \text{ sec}$		$\delta = 600 \text{ sec}$		$\delta = 1800 \text{ sec}$		$\delta = 250000 \text{ sec}$	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
0	∞	—	∞	—	∞	—	∞	—	∞	—	∞	—
10	34	—	112	—	128	—	283	—	305	—	316	—
30	6	12	26	40	78	—	134	—	146	—	157	—
40	3,5	6,8	17,5	25	59	62	109	112	120	120	131	(149)
60	1,4	3,5	9,1	12	35,3	36	79,4	77	90,2	81	101	104
100	0,9	1,5	4,3	4,8	18,3	17,5	51,9	49	62,3	53	73,3	73
150	—	—	1,6	—	10,9	10,0	35,6	34,5	45,6	37,5	56,6	56
200	0,3	—	1,5	1,8	5,9	—	27,7	23,0	36,2	—	47,2	46,5
300	—	0,3	0,6	1,1	3,9	3,8	—	—	26,0	20,0	36,5	36,0
600	—	—	—	—	1,5	2,0	8,4	9,0	14,0	11,1	23,5	23,2
1000	—	—	—	—	0,8	0,7	—	—	8,3	—	17,0	17,0
2000	—	—	—	—	—	—	1,83	2,2	4,7	—	11,0	11,3
3000	—	—	—	—	—	—	1,03	1,5	1,2	—	8,5	8,8

Eine tabellarische Zusammenstellung der beobachteten und der berechneten Werte von i gibt die Tabelle auf p. 761.

Die beobachteten und die berechneten Werte stimmen für $\delta = 60$ sec und $\delta = 600$ sec gut überein (für $\delta = 250000$ sec ist die ausgeglichene Kurve der beobachteten Werte als berechnete eingesetzt, daher die Übereinstimmung selbstverständlich); im übrigen ist zwar die Größenordnung dieselbe, die Abweichung aber doch eine die Beobachtungsfehler übersteigende.

Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß für kleine Ladungszeiten ($\delta = 2$ sec und 10 sec) der eingesetzte Wert von δ ungenau ist, ferner daß in den verschiedenen Messungsreihen nicht dieselbe Temperatur zu erzielen war, was ebenfalls Voraussetzung der exakten Übereinstimmung ist.

Weitere Versuche prüfen die Richtigkeit der Annahme, daß bei verschiedenen Werten E der elektromotorischen Kraft die zugehörigen Werte von B in der Formel $i = B \cdot t^{-n}$ der elektromotorischen Kraft *proportional* sind.

Versuchsreihe 8.

Glimmerkondensator von 1 Mikrof. Kapazität, Ladungsdauer $\delta = 600$ sec, E variabel.

Die Versuchsergebnisse sind zusammengestellt in der folgenden Tabelle.

t (sec)	$E =$				
	10 Volt	20 Volt	50 Volt	100 Volt	300 Volt
0	—	—	—	—	—
30	4,8	8,5	22	47	—
50	2,9	5,3	13,8	29	94
60	—	4,3	11,6	24,1	77
100	1,5	2,6	8,0	15,0	47
250	0,53	1,09	2,83	—	19
500	0,24	0,56	1,54	2,99	9,3
1000	0,13	0,21	0,60	1,20	4,7

Die Abweichungen liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; die obige Annahme erweist sich also berechtigt bei Variationen der elektromotorischen Kraft im Verhältnis von 1 : 30.

Anwendung der experimentell gefundenen Resultate.

Im folgenden soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie aus der Untersuchung des Rückstandsstromes die dadurch bedingten Anomalien anderer Art numerisch berechnet werden können.

Aus Versuchsreihe 4 ergibt sich für einen Glimmerkondensator von 1 Mikrof. Kapazität bei $E = 300$ Volt für den Rückstandsstrom:

$$i = B \cdot t^{-n}; \quad B = 1370 \text{ partes} = 4,38 \cdot 10^{-7} A \\ n = 0,64.$$

Setzt man $B = C E \beta$, so erhält man:

$$\beta = 1,46 \cdot 10^{-8} \left(\frac{1}{\text{sec}} \right)$$

Die Rückstandsladung $R_t = \beta C E \frac{t^{1-n}}{1-n}$ ist somit für

$t = 1$ sec	4,3	Promille	der	disponiblen	Ladung
10 "	9,5	"	"	"	"
100 "	20,9	"	"	"	"
1000 "	46,0	"	"	"	"

Für die Änderung der scheinbaren Kapazität C' mit der Periodendauer τ erhält man aus der Formel (vgl. p. 723)

$$C' = C \left[1 + \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^{1-n} \beta \Gamma(1-n) \cos \frac{(1-n)\pi}{2} \right]$$

folgende Werte:

$\tau = 0,0001$ sec,	Frequenz = 10000,	$C' = 1,000021 C$
0,001	1000	1,000046
0,01	100	1,000106
0,1	10	1,000243
1,0	1	1,000556

Analog ergibt sich aus der Formel für den reziproken scheinbaren Widerstand:

$$L' = L + \left(\frac{\tau}{2\pi} \right)^{-n} \beta C \frac{\pi}{2 \Gamma(n) \cos \frac{(1-n)\pi}{2}}$$

für den scheinbaren Widerstand des Kondensators infolge seiner Rückstandsbildung $\omega = 1/(L' - L)$ für

$\tau = 0,0001$ sec,	Frequenz = 10000,	$\omega = 14000$ Ohm
0,001	1000	61000
0,01	100	267000
0,1	10	1180000
1,0	1	5150000

Diesem scheinbaren Widerstand entspricht dann die analog wie die Joulesche Wärme berechnete Energievergeudung im Kondensator.

Eine Zusammenstellung der Werte von β und n , die in analoger Weise für andere Substanzen die auf Rückstandsbildung beruhenden Phänomene numerisch berechnen läßt, ergibt:

Glimmer (Versuch 4) bei ca. 20° C.:

$$\beta = 1,46 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}} \right); \quad n = 0,64.$$

Glas (Epruvette, Versuch 3) bei ca. 20° C.:

$$\beta = 78 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}} \right); \quad n = 0,74.$$

Glas (Kochkolben, Versuch 6) bei ca. 18° C.:

$$\beta = 15,4 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}} \right); \quad n = 0,70.$$

Paraffinpapier (Versuch 5) bei ca. 20° C.:

$$\beta = 128 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{\text{sec}} \right); \quad n = 0,34.$$

Vierter Teil.

Zusammenfassung der Resultate.

I. Es wurde zunächst auf Grund der bisher vorliegenden experimentellen Ergebnisse eine Darstellung der *Hauptformen* anomalen Verhaltens der Dielektrika und der dabei gefundenen Gesetzmäßigkeiten gegeben. Als solche Hauptformen werden unterschieden:

1. die *Rückstandsbildung*;
2. die *Energieverluste* (Wärmeproduktion) in Dielektrikas unter dem Einfluß eines Wechselfeldes;
3. die *ponderomotorischen Kräfte*, die ein Dielektrikum in einem relativ zu ihm rotierenden Felde erfährt;

4. die scheinbare *Abhängigkeit der Kapazität* eines Kondensators von *Ladungsdauer* bei konstanter Spannung, bzw. *Periodendauer* bei Wechselspannung.

II. Es wurde hierauf gezeigt, daß das Vorhandensein von Rückstandsbildung in einem Medium notwendig auch die unter 2. bis 4. genannten Formen anomalen Verhaltens bedingt und daß aus den empirisch gefundenen Gesetzen der Rückstandsbildung auch die Gesetze für diese Formen quantitativ ableitbar sind.

Es wird ferner gezeigt, daß zwar ohne Rückstandsbildung diesen anderen Formen analoge Erscheinungen durch Leitung des Dielektrikums zustande kommen können, daß aber eine Berücksichtigung der bisher gefundenen Ergebnisse quantitativen Charakters diese Erklärung als unzureichend erscheinen läßt.

Die Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten, die Anomalien der Dielektrika theoretisch zu behandeln, führt auf folgende Resultate:

Die Annahme *inhomogener Struktur* des Dielektrikums (Maxwellsche Theorie der geschichteten Dielektrika) führt zu qualitativ richtigen Folgerungen, doch ist infolge mathematischer Schwierigkeiten eine exakte Lösung der gestellten Probleme und damit ein Vergleich von Theorie und Erfahrung in quantitativer Beziehung vorläufig undurchführbar.

Die Annahme *anomaler Leitung* (Ionenleitung) führt teilweise zu qualitativ richtigen Ergebnissen, teilweise aber zu Konsequenzen, die mit der Erfahrung im Widerspruch stehen. Anomale Leitung kann daher in manchen Fällen an den beobachteten Erscheinungen *mitbeteiligt* sein, ohne eine ausreichende Erklärung zu liefern.

Die Annahme *anomaler Vorgänge dielektrischer Natur* (*dielektrische Nachwirkung, Hysteresis*) ist unzureichend in der Form, wie sie bei den Erscheinungen der magnetischen Hysteresis mit Erfolg verwendet wurde. Die von Pellat präzisierte Annahme einer dielektrischen Nachwirkung (viskosen Hysteresis), daß die dielektrische Verschiebung nach einem bestimmten einfachen Gesetz ihres zeitlichen Verlaufes einem der jeweiligen Feldintensität proportionalen stationären Endwert zustrebe

$$\left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = K \frac{d\mathfrak{E}}{dt} - \frac{d}{dt} [\mathfrak{D} - \epsilon K \mathfrak{E}] \right)$$

gibt im allgemeinen eine gute Annäherung an die beobachteten Erscheinungen, doch bleiben in einzelnen Punkten Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung bestehen.

Es wird nun eine Modifikation dieser Theorie durchgeführt, die darin besteht, daß die dielektrische Verschiebung in eine Summe beliebig vieler Glieder zerlegt wird, von denen jedes einzelne demselben einfachen Gesetz folgt wie nach der Pellatschen Theorie, doch unter Variation der in der Formel enthaltenen Parameter.

Es folgt eine Interpretation der dieser Theorie zugrunde liegenden Annahmen vom molekularphysikalischen Standpunkte aus.

III. Experimentelle Untersuchungen der Rückstandsbildung mittels einer galvanometrischen Methode bestätigen und ergänzen die schon von anderen Autoren gefundenen Resultate bezüglich des zeitlichen Ganges der Rückstandsbildung, der Gültigkeit des Superpositionsprinzips, des Einflusses der Temperatur und der Proportionalität zwischen Rückstandsstrom und Spannung.

An einem Beispiel wird gezeigt, wie aus zwei Konstanten, deren Werte aus der Untersuchung des Rückstandsstromes ermittelt wurden, die anderen Formen anomalen Verhaltens durch Angabe numerischer Werte dargestellt werden können.

Literatur.

I. Rückstand.

1. R. Kohlrausch, Pogg. Ann. **91**. p. 56. 1854.
2. W. v. Bezold, Pogg. Ann. **114**. p. 437. 1861.
3. A. Gaugain, Ann. chim. phys. (4) **2**. p. 276, 313. 1864.
4. R. Clausius, Abh. über mech. Wärmeth. II. p. 135—162. 1867.
5. J. C. Maxwell, Treatise I. p. 374. 1873.
6. A. Wüllner, Pogg. Ann. **153**. p. 22. 1874.
7. L. Boltzmann, Romich u. Nowack, Wiener Sitzungsber. **70**. p. 381. 1874.
8. B. Riemann, Ges. Werke p. 48, 345, 353. 1876.
9. J. Hopkinson, Phil. Trans. **166**. p. 489. 1876.
10. — Phil. Mag. (5) **2**. p. 314. 1876; auch Proc. Roy. Soc. **25**. p. 496. 1876/77.
11. — Phil. Trans. **167**. p. 599. 1877/78.
12. A. Wüllner, Wied. Ann. **1**. p. 247. 1877.

13. H. A. Rowland, *Americ. J. of Math.* **1**. p. 53. 1878.
14. W. E. Ayrton u. J. Perry, *Proc. Roy. Soc.* **27**. p. 238. 1878.
15. W. Giese, *Wied. Ann.* **9**. p. 161. 1880.
16. H. A. Rowland u. E. L. Nichols, *Phil. Mag.* (5) **11**. p. 414. 1881.
17. H. Hertz, *Wied. Ann.* **20**. p. 279. 1883.
18. C. Dieterici, *Wied. Ann.* **25**. p. 545. 1885.
19. A. Wüllner, *Wied. Ann.* **32**. p. 19. 1887.
20. L. Arons, *Wied. Ann.* **35**. p. 291. 1888.
21. J. Curie, *Ann. chim. phys.* (6) **18**. p. 203. 1889.
22. H. Muraoka, *Wied. Ann.* **40**. p. 328. 1890.
23. E. Bouty, *Compt. rend.* **110**. p. 846, 1362. 1890; auch *Ann. chim. phys.* (6) **27**. p. 62. 1892.
24. A. Hess, *Lum. electr.* **46**. p. 401, 507. 1892; auch *Journ. de Phys.* (3) **2**. p. 145. 1893.
25. B. Dessau, *Rend. R. Acc. d. Linc.* (5) **2**. II. p. 86. 1893.
26. F. Bedell u. C. Kinsley, *Phys. Rev.* **2**. p. 170. 1894.
27. R. Lombardi, *Mem. R. Acc. Torino* (2) **44**. 1894.
28. A. S. Dunstan, *Electr. World* **26**. p. 3. 1895.
29. A. Hess, *Eclair. electr.* **4**. p. 205. 1895.
30. — *Eclair. electr.* **7**. p. 450. 1896.
31. H. V. Carpenter, *Phys. Rev.* **4**. p. 238. 1896.
32. Th. Wulf, *Wiener Sitzungsber.* **105**. p. 667. 1896.
33. L. Houllévigie, *Journ. de Phys.* (3) **6**. p. 113, 120, 153. 1897.
34. J. Hopkinson u. E. Wilson, *Proc. Roy. Soc.* **60**. p. 425. 1897.
35. F. Hasenöhr, *Wiener Sitzungsber.* **107**. p. 1035. 1898.
36. H. A. Rowland u. T. D. Penniman, *J. Hopk. Un. Circ.* **17**. p. 52. 1898.
37. A. Naccari, *Atti Torino* **34**. p. 1088. 1899.
38. L. M. Potts, *J. Hopk. Un. Circ.* **18**. p. 59. 1899.
39. H. Pellat, *Compt. rend.* **128**. p. 1312. 1899; auch *Ann. chim. phys.* (7) **18**. p. 150. 1899.
40. L. M. Potts, *J. Hopk. Un. Circ.* **19**. p. 62. 1900.
41. H. Pellat, *Journ. de Phys.* (3) **9**. p. 313. 1900.
42. C. V. Drysdale, *Electrician* **46**. p. 890. 1901.
43. A. W. Ashton, *Phil. Mag.* (6) **2**. p. 501. 1901.
44. J. Buchanan, *Phil. Mag.* (6) **3**. p. 240. 1902.
45. E. v. Schweidler, *Wiener Sitzungsber.* **111**. p. 573. 1902.
46. — *l. c.* p. 579.
47. U. Seiler, *Mitt. Phys. Ges. Zürich* Nr. 3. p. 12. 1902.

II. Hysteresis.

1. W. Siemens, *Pogg. Ann.* **125**. p. 137. 1864.
2. A. Naccari u. F. Bellati, *Journ. de Phys.* (2) **1**. p. 430. 1882.
3. J. Borgmann, *Journ. d. russ. phys.-chem. Ges.* (1) **18**. p. 6. 1886; auch *Journ. de Phys.* (2) **8**. p. 217. 1888.
4. J. Trowbridge u. W. C. Sabine, *Phil. Mag.* (5) **30**. p. 323. 1890; auch *Phys. Rev.* **1**. p. 183. 1892.

5. J. Trowbridge u. W. C. Sabine, Rep. Brit. Ass. Leeds p. 781. 1890.
6. C. P. Steinmetz, Electrician **28**. p. 384, 408, 425. 602. 1892; auch Lum. electr. **44**. p. 95. 1892; auch Elektrotechn. Zeitschr. **13**. p. 227. 1892.
7. R. Arno, Rend. R. Acc. dei Linc. **1**. p. 284. 1892.
8. P. Janet, Journ. de Phys. (3) **2**. p. 337. 1893.
9. A. Hess, Lum. electr. **47**. p. 466. 1893; auch Journ. de Phys. (3) **2**. p. 145. 1893.
10. G. Benischke, Wiener Sitzungsber. **102**. p. 1345. 1893.
11. A. Kleiner, Wied. Ann. **50**, p. 138. 1893.
12. C. Borel, Compt. rend. **116**. p. 1192. 1893; auch Arch. de Genève (3) **30**. p. 45. 1893.
13. W. Weiler, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unt. **7**. p. 1. 1893.
14. H. Fritz, Diss. Zürich 1893.
15. R. Arno, Cim. (3) **33**. p. 15. 1893.
16. — Rend. R. Acc. dei Linc. (5) **2**. I. p. 341. 1893.
17. — l. c. (5) **2**. II. p. 260. 1893.
18. — l. c. (5) **3**. I. p. 585. 1894.
19. — l. c. (5) **3**. II. p. 294. 1894.
20. A. Kleiner, Arch. de Genève (3) **32**. p. 282. 1894.
21. H. Düggelin, Vierteljahrsschr. d. naturf. Ges. Zürich **40**. p. 121. 1895.
22. A. W. Porter u. D. K. Morris, Proc. Roy. Soc. **57**. p. 469. 1895.
23. A. Hess, Eclair. electr. **4**. p. 205. 1895.
24. G. Benischke, Zeitschr. f. Elektrotechn. Heft 16. 1895.
25. H. Eisler, Zeitschr. f. Elektrotechn. Heft 16. 1895.
26. H. F. Weber, Arch. de Genève (4) **2**. p. 519. 1896.
27. R. Arno, Rend. R. Acc. de Linc. (5) **5**. I. p. 262. 1896; auch N. Cim. (4) **5**. p. 52. 1896.
28. A. Hess, Eclair. electr. **7**. p. 450. 1896.
29. L. Houllévigüe, Journ. de Phys. (3) **6**. p. 120. 1897.
30. R. Threlfall, Phys. Rev. **4**. p. 457. 1897.
31. — l. c. **5**. p. 21, 65. 1897.
32. W. Schaufelberger, Diss. Zürich 1898; auch Wied. Ann. **65**. p. 635. 1898.
33. H. Pellat, Compt. rend. **128**. p. 1312. 1899; auch Ann. chim. phys. (7) **18**. p. 150. 1899.
34. W. Schaufelberger, Wied. Ann **67**. p. 307. 1899.
35. E. B. Rosa u. A. W. Smith, Phys. Rev. **8**. p. 1. 1899; auch Phil. Mag. (4) **47**. p. 222. 1899.
36. F. Beaulard, Compt. rend. **130**. p. 1182. 1900.
37. — Journ. de Phys. (3) **9**. p. 422. 1900.
38. H. Pellat u. F. Beaulard, Compt. rend. **130**. p. 1457. 1900.
39. — Journ. de Phys. (3) **9**. p. 313. 1900.
40. L. M. Potts, J. Hopk. Un. Circ. **19**. p. 62. 1900; auch Phys. Zeitschr. **2**. p. 301. 1900.
41. P. L. Mercanton, Bull. soc. vaud. Oktober 1901; auch Journ. de Phys. (4) **1**. p. 33. 1902.

42. C. P. Steinmetz, *Electric. World* **37**. p. 1065. 1901; auch *Eclair. electr.* **29**. p. 27. 1901; *Electrician* **47**. p. 412. 1901; *Nat. Rundsch.* **16**. p. 597. 1901.
43. W. E. Ayrton, *Electrician* **46**. p. 476. 1901.
44. A. W. Ashton, *Phil. Mag.* (6) **2**. p. 501. 1901.
45. F. Maccarone, *N. Cim.* (5) **2**. p. 88. 1901; auch *Physik. Zeitschr.* **3**. p. 57. 1901.
46. C. E. Skinner, *Electr. Rev.* **41**. p. 82. 1902.
47. F. Maccarone, *N. Cim.* (5) **4**. p. 313. 1902.
48. F. Beaulard, *Congrès d'Angers de l'assoc. franç. pour l'avance des sciences* 1903; auch *Eclair. electr.* **37**. p. 404. 1903.
49. J. Moscicki u. M. Altenberg, *Krak. Anz.* p. 46. 1904.
50. C. E. Guye u. P. Denso, *Arch. de Genève* **19**. p. 101. 1905; auch *Compt. rend.* **140**. p. 433. 1905.
51. O. M. Corbino, *N. Cim.* (5) **9**. p. 81. 1905; auch *Physik. Zeitschr.* **6**. p. 138. 1905.
52. V. v. Lang, *Wiener Sitzungsber.* **115**. p. 211. 1906.

III. Rotation und Drehmomente.

1. H. Hertz, *Wied. Ann.* **13**. p. 266. 1881.
2. G. Quincke, *Wied. Ann.* **59**. p. 417. 1896.
3. A. Heydweiller, *Verh. d. Physik. Ges. Berlin* **16**. p. 32. 1897.
4. A. Boltzmann, *Wied. Ann.* **60**. p. 399. 1897.
5. E. v. Schweidler, *Wiener Sitzungsber.* **106**. p. 526. 1897.
6. A. Heydweiller, *Wied. Ann.* **69**. p. 531. 1899.
7. L. Graetz, *Ann. d. Phys.* **1**. p. 530. 1900.
Vgl. auch Arno, II, 7, 15—19, 27; Weiler, II, 13; Threlfall, II, 30, 31; Schaufelberger, II, 32, 34; v. Lang, II, 52.

IV. Anomale Leitung.

1. H. Hertz, *Wied. Ann.* **20**. p. 279. 1883.
2. G. Quincke, *Wied. Ann.* **28**. p. 529. 1886.
3. H. Koller, *Wiener Sitzungsber.* **98**. p. 201. 1889.
4. R. Appleyard, *Phil. Mag.* (5) **38**. p. 396. 1894.
5. — *Phil. Mag.* (5) **42**. p. 148. 1896.
6. A. Naccari, *N. Cim.* (4) **8**. p. 259. 1898.
7. E. v. Schweidler, *Wiener Sitzungsber.* **109**. p. 964. 1900.
8. — *Ann. d. Phys.* **5**. p. 483. 1901.
9. H. Gädeke, *Diss. Heidelberg* 1901.
10. E. v. Schweidler, *Wiener Sitzungsber.* **113**. p. 881. 1904.
11. R. Appleyard, *Phil. Mag.* (6) **10**. p. 485. 1905.
12. P. Gouré de Villemontée, *Compt. rend.* **141**. p. 179. 1905.

V. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Ladungsdauer oder Wechselzahl.

1. N. Schiller, *Pogg. Ann.* **152**. p. 555. 1872.
 2. L. Boltzmann, *Wiener Sitzungsber.* **67**. p. 17. 1873.
- Annalen der Physik.* IV. Folge. 24. 50

3. L. Boltzmann, Wiener Sitzungsber. **68**. p. 81. 1873.
4. — Wiener Sitzungsber. **70**. p. 307. 1874.
5. J. J. Thomson, Proc. Roy. Soc. **46**. p. 292. 1889.
6. E. Lecher, Wiener Sitzungsber. **99**. p. 480. 1890; auch Wied. Ann. **42**. p. 142. 1891.
7. R. Blondlot, Compt. rend. **112**. p. 1058. 1891.
8. L. Arons u. H. Rubens, Wied. Ann. **42**. p. 581. 1891.
9. — — Wied. **44**. p. 206. 1891.
10. A. Perot, Compt. rend. **115**. p. 38, 165. 1892.
11. J. Sabulka, Wiener Sitzungsber. **102**. p. 773. 1893.
12. D. Mazotto, Rend. R. Acc. dei Linc. (5) **4**, I. p. 240. 1893.
13. B. W. Stankewitsch, Wied. Ann. **52**. p. 700. 1894.
14. L. Graetz u. L. Fomm, Münchener Ber. **24**. p. 184. 1894; auch Wied. Ann. **54**. p. 626. 1895.
15. F. Beaulard, Compt. Rend. **119**. p. 268. 1894.
16. C. Heinke, Wied. Ann. **54**. p. 577. 1895.
17. E. Northrup, Phil. Mag. (5) **39**. p. 78. 1895.
18. D. Mazotto, N. Cim. (4) **1**. p. 308. 1895.
19. A. Lampa, Wiener Sitzungsber. **105**. p. 587, 1049. 1896; auch Wied. Ann. **61**. p. 79. 1897.
20. E. S. Ferry, Phil. Mag. (5) **44**. p. 404. 1897.
21. P. Drude, Zeitschr. f. physik. Chem. **23**. p. 267. 1897.
22. J. Hanauer, Wied. Ann. **65**. p. 577. 1898.
23. F. Marx, Wied. Ann. **66**. p. 411. 1898.
24. W. C. Hormell, Phil. Mag. (6) **3**. p. 52. 1902.
25. J. Kosogonoff, Physik. Zeitschr. **3**. p. 207. 1902.
26. A. de Forest Palmer, Phys. Rev. **16**. p. 267. 1903.
27. H. C. Parker, Ann. New York Ac. **15**. p. 161. 1904.

VI. Varia.

1. E. Root, Pogg. Ann. **158**. p. 1, 425. 1876.
2. M. v. Hoor, Elektrotechn. Zeitschr. **22**. p. 170, 187, 213, 716, 749, 781. 1901.
3. K. Germanischskaja, Diss. Zürich 1903.
4. V. Cremieu u. L. Malcles, Compt. rend. **139**. p. 790. 1904.

(Eingegangen 15. Oktober 1907.)
