

**2. Elektromagnetische Wellen an einem Draht  
mit isolierender zylindrischer Hülle;  
von F. Harms.**

---

Von A. Sommerfeld<sup>1)</sup> ist das Problem der Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen längs eines Drahtes ganz streng behandelt und der Einfluß von Drahtmaterial und Drahtdicke auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit diskutiert worden. An nicht zu dünnen Drähten von gut leitendem Material pflanzen sich die Wellen fast genau mit Lichtgeschwindigkeit ( $c$ ) fort, wenn der Draht in Luft eingebettet ist. Ersetzt man die Luft durch ein unendlich ausgehntes Dielektrikum (D.E.K.  $\epsilon$ ), so sinkt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit natürlich auf  $c/\sqrt{\epsilon}$ . Läßt man das Dielektrikum sich auf eine äußerst dünne den Draht umschließende Schicht zusammenziehen, so muß sein Einfluß auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder verschwinden; für endliche Dicken des Dielektrikums (isolierte Leitungen, Hochspannungskabel<sup>2)</sup>) wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit demnach zwischen  $c$  und  $c/\sqrt{\epsilon}$  liegen müssen. Die Berechnung dieser Geschwindigkeit läßt sich durch eine Erweiterung des von Sommerfeld angewandten Verfahrens ebenfalls ganz streng ausführen. Es genügt jedoch fast immer, wenigstens für realisierbare Fälle, die Leitfähigkeit des Drahtes unendlich groß anzusetzen. Dadurch wird die Behandlung des Problems auch für die numerische Berechnung verhältnismäßig einfach.

**I. Die Differentialgleichungen des Problems.**

$r$  sei der Radius eines unendlich langen Drahtes mit geradliniger Achse,  $\rho$  der äußere Radius der isolierenden Hülle,  $\epsilon_2$  deren Dielektrizitätskonstante.

Wir führen Zylinderkoordinaten  $z, r, \varphi$  ein und lassen die  $z$ -Achse mit der Drahtachse zusammenfallen. Nehmen

---

1) A. Sommerfeld, Wied. Ann. **67**. p. 233—290. 1899. Diese Abhandlung wird im folgenden mit l. c. zitiert werden.

2) A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. **26**. p. 1003—1007. 1905.

wir nun noch an, daß rings um den Draht herum die Kräfte symmetrisch angeordnet sind<sup>1)</sup> (also  $\partial/\partial\varphi = 0$ ), so bleiben

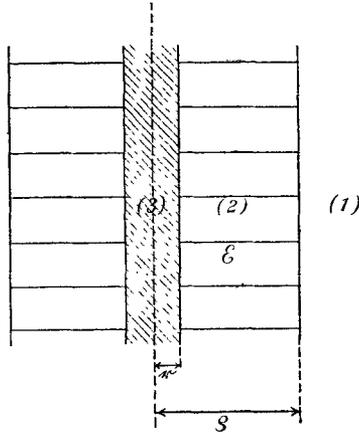


Fig. 1.

von den in Zylinderkoordinaten transformierten Maxwell'schen Gleichungen nur folgende drei übrig:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + 4\pi c^2 \sigma \mathfrak{E}_z = c \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{H}_\varphi}{\partial r}, \\ \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + 4\pi c^2 \sigma \mathfrak{E}_r = -c \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial x}, \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = c \left[ \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} \right] \end{cases}$$

Die Kraftkomponenten  $\mathfrak{E}_z$ ,  $\mathfrak{E}_r$ ,  $\mathfrak{H}_\varphi$  lassen sich nach Hertz<sup>2)</sup> darstellen als Differentialquotienten einer skalaren Funktion  $\Pi$ :

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Pi}{\partial r}; & \mathfrak{E}_r = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial x}; \\ \mathfrak{H}_\varphi = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} + 4\pi c \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial r}. \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke in das System (1) ein, so findet man für  $\Pi$  die Differentialgleichung<sup>1)</sup>

$$(3) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + 4\pi \mu \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \Delta \Pi.$$

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 238 u. 239.

2) H. Hertz, Wied. Ann. 36. p. 1—22. 1889.

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird wesentlich vereinfacht durch die Annahme, daß die Abhängigkeit von der Zeit eine harmonische sei<sup>1)</sup>, also ohne zeitliche Dämpfung. Dagegen hat man bei endlicher Leitfähigkeit des Drahtes<sup>2)</sup> eine örtliche Dämpfung einzuführen, die der im Draht als Joulesche Wärme vernichteten elektromagnetischen Energie entspricht. Diese Annahme ist nicht nötig, wenn die Leitfähigkeit des Drahtes unendlich groß genommen wird. Man kann dann schreiben<sup>3)</sup>

$$(4) \quad \Pi = e^{2\pi i \left( \frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda} \right)}. u = e^{i \frac{2\pi}{\tau} \left( t + \frac{z}{v} \right)}. u,$$

wenn unter  $u$  eine Funktion von  $r$  allein verstanden wird.  $\tau$  ist die Schwingungsdauer,  $\lambda$  die Wellenlänge der betrachteten Schwingung,  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der  $z$ -Achse. Für  $u$  ergibt sich durch Kombination von (3) und (4) die Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + (k^2 - \kappa^2) u = 0,$$

wenn man mit  $\kappa = 1/v$ <sup>4)</sup> den reziproken Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet und als Abkürzung einführt:

$$(6) \quad k^2 = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \left( \frac{2\pi}{\tau} \right)^2 - 4\pi\sigma\mu \frac{2\pi}{\tau} i.$$

Für den Luftraum, die isolierende Hülle und das Drahtinnere hat  $k^2$  demnach verschiedene Werte, die wir mit  $k_1^2$ ,  $k_2^2$ ,  $k_3^2$  bezeichnen wollen. Aus der bloßen Existenz von Grenzbedingungen für die Kräfte folgt schon, daß die Welle in den drei Medien mit derselben Geschwindigkeit ( $v$ ) fortschreiten muß;  $\kappa = 1/v$  ist also in den drei Medien das gleiche. Als Grenzbedingungen haben wir Stetigkeit der tangentialen Kraftkomponenten zu fordern, also  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{H}_\varphi$  gehen stetig durch die Grenzflächen  $\varrho$  und  $r$ ;  $\mathfrak{E}_r$  erleidet beim Durchgang durch jede Grenze einen

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 238 u. 239.

2) A. Sommerfeld, l. c. p. 250, 251.

3) A. Sommerfeld, l. c. p. 241.

4)  $\kappa$  ist komplex, wenn die Leitfähigkeit des Drahtes endlich ist, reell wenn  $\sigma = \infty$  gesetzt werden darf; A. Sommerfeld, l. c. p. 241.

Sprung. An den Grenzflächen werden also die elektrischen Kraftlinien gebrochen.

Zur Bestimmung der Funktion  $u$ , die wir in den drei Medien mit  $u_1, u_2, u_3$  bezeichnen wollen, haben wir schließlich folgende Gleichungen<sup>1)</sup>:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } r > \rho \quad \frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} + (k_1^2 - \kappa^2) u_1 = 0, \\ \text{,, } \rho > r > r \quad \frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_2}{dr} + (k_2^2 - \kappa^2) u_2 = 0, \\ \text{,, } r < r \quad \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_3}{dr} + (k_3^2 - \kappa^2) u_3 = 0. \end{array} \right.$$

Dazu kommen die Grenzbedingungen, die sich leicht in folgender Form ergeben<sup>1)</sup>:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } r = \rho \quad \left\{ \begin{array}{l} (k_1^2 - \kappa^2) u_1 = (k_3^2 - \kappa^2) u_2, \\ \frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{du_1}{dr} = \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{du_2}{dr}, \end{array} \right. \\ \text{,, } r = r \quad \left\{ \begin{array}{l} (k_2^2 - \kappa^2) u_2 = (k_3^2 - \kappa^2) u_3, \\ \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{du_2}{dr} = \frac{k_3^2}{\mu_3} \frac{du_3}{dr}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## II. Die Integrale der Differentialgleichung.

Von den Eigenschaften der die Differentialgleichung (5) integrierenden Besselschen Funktionen sei hier nur folgendes erwähnt.<sup>2)</sup>

Für kleine Werte des Argumentes lassen sich die Funktionen durch folgende Potenzreihen darstellen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(x) = 1 - \frac{1}{1!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \\ K(x) = J(x) \ln \frac{2i}{\gamma x} - 2 [J_2(x) - \frac{1}{2} J_4(x) + \frac{1}{3} J_6(x) - \dots], \end{array} \right.$$

woraus sich die Entwicklungen für  $J'(x)$  und  $K'(x)$  durch Differentiation ableiten lassen. [ $\ln \gamma$  ist die Eulersche Konstante  $C = 0,5772$ .]

1) Vgl. die entsprechenden Gleichungen bei A. Sommerfeld, l. c. p. 243.

2) Ausführlicheres vgl. A. Sommerfeld, l. c. § 4; E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen; A. Kalähne, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 54. p. 55—86. 1906.

Für sehr große Werte des Argumentes ( $1/8 x$  klein gegen 1) bedient man sich mit ausreichender Genauigkeit der Formeln:

$$(10) \quad \begin{cases} J(x) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [e^{i(x+\pi/4)} - e^{i(x+\pi/4)}], \\ K(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x+\pi/4)}. \end{cases}$$

Man sieht aus (9), daß

$$\lim_{x=0} K(x) = \infty,$$

aus (10), daß für Werte des Argumentes mit nicht verschwindendem imaginären Bestandteil

$$\lim_{x=\infty} J(x) = \infty$$

wird, und daß  $K(x)$  für unendlich wachsendes Argument mit positiv imaginärem Bestandteil verschwindet wie  $e^{-x}$ .

Außer diesen Funktionen  $J$  und  $K$  werden wir noch eine lineare Funktion desselben benutzen:

$$(11) \quad \begin{cases} Y(x) = J(x) \ln \frac{2i}{\gamma} - K(x) \\ \quad = J(x) \ln x + 2 [J_2(x) - \frac{1}{2} J_4(x) + \frac{1}{3} J_6(x) - + \dots]. \end{cases}$$

Für sehr kleine Werte des Argumentes gehen die Reihenentwickelungen über in

$$(12) \quad \begin{cases} J(x) = 1, & Y(x) = \ln x, & K(x) = \ln \frac{2i}{\gamma x}, \\ J'(x) = -\frac{x}{2}, & Y'(x) = \frac{1}{x}, & K'(x) = -\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Für reelles Argument sind  $J(x)$ ,  $J'(x)$ ,  $Y(x)$ ,  $Y'(x)$  reell. Für rein imaginäres Argument  $J(x)$  und  $K(x)$  reell,  $J'(x)$  und  $K'(x)$  rein imaginär.

Bei der numerischen Berechnung wurden die Tafeln von E. Meissel<sup>1)</sup> für  $J(x)$  und  $J'(x)$  reellen Argumentes, und die von B. A. Smith<sup>2)</sup> für  $Y(x)$  und  $Y'(x)$  reellen Argumentes benutzt. Für die Funktionen rein imaginären Argumentes wurde eine genügende Anzahl von Werten berechnet und die

1) E. Meissel, Abh. Berliner Akad. 1888.

2) B. A. Smith, Messenger of Mathematics 26. p. 98—101. 1897.

übrigen durch graphische Interpolation gewonnen. Zu dieser Berechnung dienten die Reihen:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(ix) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \dots, \\ J'(ix) = -i \frac{x}{2} \left[ 1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} + \dots \right], \\ K(ix) = J(ix) [0,11593 - \ln x] \\ \quad + \frac{x^2}{4} \left( 1 + \frac{3}{32} x^2 + \frac{1}{3460} x^4 + \dots \right), \\ K'(ix) = +i \frac{J(ix)}{x} + J'(ix) [0,11593 - \ln x] \\ \quad - i \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{3}{16} x^2 + \frac{3}{3460} x^4 + \dots \right), \end{array} \right.$$

die aus den oben angegebenen Reihenentwickelungen sich ohne weiteres ergeben.

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichungen werden wir eine lineare Verbindung von  $J$  und  $K$  bez.  $Y$  ansetzen; ob wir dabei  $K$  oder  $Y$  verwenden, ist prinzipiell gleichgültig, solange die Lösung für einen Bereich gelten soll, in dem  $x$  nicht unendlich werden kann. Anderenfalls verlangt die Bedingung, daß die Kräfte überall endlich bleiben, daß die betreffenden Funktionen auch für unendlich großes Argument endlich bleiben. Für nicht reelles Argument wird diese Bedingung nur durch die Funktion  $K(x)$  befriedigt.

Wir werden demnach die Lösungen der Differentialgleichungen (7) schreiben:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = A_1 K(r \sqrt{k_1^2 - x^2}) + B_1 J(r \sqrt{k_1^2 - x^2}), \\ u_2 = A_2 K(r \sqrt{k_2^2 - x^2}) + B_2 J(r \sqrt{k_2^2 - x^2}), \\ u_3 = A_3 K(r \sqrt{k_3^2 - x^2}) + B_3 J(r \sqrt{k_3^2 - x^2}), \end{array} \right.$$

wobei wir zunächst  $x$  als komplexe Größe betrachten.

Die Integrationskonstanten  $A B$  sind so zu bestimmen, daß  $u$  überall endlich bleibt. Im Außenraum ( $u_1$ ) kann das Argument mit  $r$  unendlich groß werden; da

$$\lim_{x=\infty} J(x) = \infty$$

ist, können wir der Forderung, daß  $u$  überall endlich bleiben

soll, nur dadurch genügen, daß wir  $B_1 = 0$  setzen. Im Innern des Drahtes kann das Argument mit  $r$  verschwinden; da

$$\lim_{x=0} K(x) = \infty$$

ist, so haben wir ebenso  $A_3 = 0$  zu setzen. In der isolierenden Hülle, wo das Argument weder 0 noch  $\infty$  werden kann, sind  $A_2$  und  $B_2$  von Null verschieden. Die Gleichungen (14) reduzieren sich dadurch auf folgende:

$$(14^*) \quad \begin{cases} u_1 = A_1 K(r \sqrt{k_1^2 - x^2}), \\ u_2 = A_2 K(r \sqrt{k_2^2 - x^2}) + B_2 J(r \sqrt{k_2^2 - x^2}), \\ u_3 = B_3 J(r \sqrt{k_3^2 - x^2}) \end{cases}$$

Setzt man jetzt noch zur Abkürzung:

$$(15) \quad \begin{cases} \varrho^2 (k_1^2 - x^2) = x_{\varrho_1}^2, \\ \varrho^2 (k_2^2 - x^2) = x_{\varrho_2}^2, \\ r^2 (k_2^2 - x^2) = x_{r_2}^2, \\ r^2 (k_3^2 - x^2) = x_{r_3}^2, \end{cases}$$

so liefert Kombination von (14\*) mit (8) die Grenzbedingungen in der Form:

$$\begin{aligned} A_1 x_{\varrho_1}^2 K(x_{\varrho_1}) &= x_{\varrho_2}^2 [A_2 K(x_{\varrho_2}) + B_2 J(x_{\varrho_2})], \\ A_1 \frac{k_1^2}{\mu_1} x_{\varrho_1} K'(x_{\varrho_1}) &= \frac{k_2^2}{\mu_2} x_{\varrho_2} [A_2 K'(x_{\varrho_2}) + B_2 J'(x_{\varrho_2})], \\ x_{r_2}^2 [A_2 K(x_{r_2}) + B_2 J(x_{r_2})] &= x_{r_3}^2 B_3 J(x_{r_3}), \\ x_{r_2} \frac{k_2^2}{\mu_2} [A_2 K'(x_{r_2}) + B_2 J'(x_{r_2})] &= x_{r_3} \frac{k_3^2}{\mu_3} B_3 J'(x_{r_3}). \end{aligned}$$

Elimination der Verhältnisse

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{B_2}{A_1}, \quad \frac{B_3}{A_1}$$

aus diesen vier Gleichungen liefert nach einigen Umformungen, wenn man noch  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$  setzt:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{x_{\varrho_2} J(x_{\varrho_2}) K'(x_{\varrho_1}) - \frac{x_{\varrho_1}}{k_1^2} K(x_{\varrho_1}) J'(x_{\varrho_2})}{\frac{x_{\varrho_1}}{k_1^2} K(x_{\varrho_1}) K'(x_{\varrho_2}) - \frac{x_{\varrho_2}}{k_2^2} K'(x_{\varrho_1}) K(x_{\varrho_2})} \\ &= \frac{\frac{x_{r_2}}{k_2^2} J'(x_{r_2}) J(x_{r_3}) - \frac{x_{r_3}}{k_3^2} J(x_{r_2}) J'(x_{r_3})}{\frac{x_{r_2}}{k_2^2} J(x_{r_2}) K'(x_{r_3}) - \frac{x_{r_3}}{k_3^2} J'(x_{r_2}) K(x_{r_3})} \end{aligned} \right.$$

Diese allerdings außerordentlich komplizierte Gleichung ist als Bestimmung für das in den  $x$  enthaltene  $x$  zu betrachten.

Eine für die numerische Berechnung wesentliche Vereinfachung erzielt man durch die Annahme, daß die Leitfähigkeit des Drahtes unendlich groß sei. Den Fehler, den man dabei begeht, kann man mit Hilfe der Sommerfeldschen Betrachtungen abschätzen. Bei einer normalen Wellenlänge von ca. 1 m wird die für einen Pt-Draht von  $\frac{1}{100}$  mm Durchmesser berechnete Wellenlänge um etwa 1 Proz. zu groß ausfallen; der Fehler wird schnell kleiner mit wachsender Leitfähigkeit und zunehmender Drahtdicke, so daß er für einen Cu-Draht von 1 mm Dicke unmerklich wird. Für  $\sigma = \infty$  wird auch  $k_3 = \infty$ , so daß auf der rechten Seite von (16) das zweite Glied im Zähler und das erste im Nenner verschwinden. Dadurch wird  $\kappa$  reell. Gleichung (16) geht dann nach einigen Umformungen über in:

$$(16^*) \quad \frac{x_{e_2}}{k_2^2} \frac{J(x_{e_2})K(x_{r_2}) - J(x_{r_2})K(x_{e_2})}{J'(x_{e_2})K(x_{r_2}) - J(x_{r_2})K'(x_{e_2})} = \frac{x_{e_1}}{k_1^2} \frac{K(x_{e_1})}{K'(x_{e_1})}.$$

Für die numerische Berechnung ist noch folgendes zu beachten:  $\kappa^2$  liegt zwischen  $k_1^2$  und  $k_2^2$ , so daß  $k_1^2 < \kappa^2 < k_2^2$ ; deshalb wird

$$x_{e_2} = \rho \sqrt{k_2^2 - \kappa^2} \quad \text{und} \quad x_{r_2} = r \sqrt{k_2^2 - \kappa^2}$$

reell werden, da  $\kappa$  jetzt reell ist. Dagegen wird

$$x_{e_1} = \rho \sqrt{k_1^2 - \kappa^2}$$

rein imaginär; das Vorzeichen der Wurzel wählen wir so, daß  $x_{e_1}$  positiv imaginär wird.

Führen wir  $Y$  statt  $K$  auf der linken Seite von (11\*) ein, so erhalten wir

$$(16^{**}) \quad \frac{x_{e_2}}{k_2^2} \frac{J(x_{e_2})Y(x_{r_2}) - J(x_{r_2})Y(x_{e_2})}{J'(x_{e_2})Y(x_{r_2}) - J(x_{r_2})Y'(x_{e_2})} = \frac{x_{e_1}}{k_1^2} \frac{K(x_{e_1})}{K'(x_{e_1})}.$$

Zu derselben Gleichung wären wir auch gekommen, wenn wir  $Y$  direkt als zweites partikulares Integral der Differentialgleichungen für  $u_2$  statt  $K$  eingeführt hätten; das ist erlaubt, da im Innern des Dielektrikums das Argument nicht unendlich werden kann.

### III. Näherungsformel für geringe Schichtdicke des Dielektrikums.

Ist die den Draht umgebende isolierende Schicht sehr dünn, so wird ihr Einfluß auf die Fortpflanzungsgeschwindig-

keit der Welle gering sein;  $\kappa^2$  wird nahezu gleich  $k_1^2$  sein; wir werden also statt  $k_2^2 - \kappa^2$  schreiben können  $k_2^2 - k_1^2$ , oder für

$$(17) \quad \begin{cases} x_{e_2} = \rho \sqrt{k_2^2 - \kappa^2} = \rho \sqrt{k_2^2 - k_1^2}, \\ x_{r_2} = r \sqrt{k_2^2 - k_1^2} = r k_1 \sqrt{\varepsilon - 1}. \end{cases}$$

Ist dann außerdem der Drahtradius nicht zu groß, die Wellenlänge nicht zu klein, so werden wir statt der Besselschen Funktionen deren Näherungswerte für kleines Argument setzen [Gleichung (12)]. Dann wird die Bestimmungsgleichung für  $\kappa^2$ :

$$\left( \varepsilon = \frac{k_2^2}{k_1^2} \right),$$

$$x_{e_2} \frac{\ln x_{r_2} - \ln x_{e_2}}{-\frac{x_{e_2}}{2} \ln x_{r_2} - \frac{1}{x_{e_2}}} = -\varepsilon x_{e_1}^2 \ln \frac{2i}{\gamma x_{e_1}} = \frac{2 \ln \frac{\rho}{r}}{\ln x_{r_2} + \frac{2}{x_{e_2}}}$$

und mit Berücksichtigung von (17):

$$-x_{e_1}^2 \ln \frac{2i}{\gamma x_{e_1}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{2 \ln \frac{\rho}{r}}{\frac{2}{\rho^2 k_1^2} + (\varepsilon - 1) \ln(r k_1 \sqrt{\varepsilon - 1})}$$

Die Substitution  $y = -\gamma^2 x_{e_1}^2 / 4$  führt diese Gleichung über in

$$(18) \quad -y \ln y = \gamma^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\ln \frac{\rho}{r}}{\frac{2}{\rho^2 k_1^2} + (\varepsilon - 1) \ln(r k_1 \sqrt{\varepsilon - 1})}$$

Für kleine Werte von  $\varepsilon$  kann man auch meist noch den zweiten Summanden im Nenner vernachlässigen, und erhält dann die einfache Gleichung:

$$(18^*) \quad -y \ln y = \frac{\gamma^2}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho^2 k_1^2 \ln \frac{\rho}{r}.$$

Die Näherungsformel (18) reicht aus, etwa solange

$$\rho k_2 < 0,2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon \frac{\rho^2}{\lambda_0^2} < 10^{-3}$$

ist.

#### IV. Beispiel: lange Wellen an einem Hochspannungskabel.

Wir wollen diese Näherungsformel benutzen, um die Länge sehr langer Wellen an isolierten Leitungen zu berechnen; wir

nehmen ein Hochspannungskabel von 1 mm starker Cu-Seele mit 2 mm dicker Guttaperchaisolation; die Schwingungsdauer der betrachteten Schwingungen sei eine solche, daß ihr eine normale Wellenlänge von 244 m, in Luft gemessen, entspreche. Dann ist

$$r=0,05, \quad \rho=0,25, \quad \varepsilon=2,5, \quad \lambda_0=2,44 \times 10^4, \quad k_1^2=6,63 \times 10^{-8}.$$

$$\varepsilon \frac{\rho^2}{\lambda_0^2} = 2,5 \frac{0,0625}{(2,44)^2} \cdot 10^{-8}$$

ist so klein, daß die Anwendung der Näherungsformel gestattet ist, wir kommen sogar mit (18\*) aus. Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$y \lg y = -2,77 \times 10^{-9},$$

woraus sich nach einem von Sommerfeld angegebenen Näherungsverfahren, oder noch bequemer durch eine graphische Methode, ergibt:

$$y = 2,9 \times 10^{-10}.$$

Nun war  $y$  gesetzt für

$$-\frac{\gamma^2}{4} x_{21}^2 = \frac{\gamma^2}{4} \rho^2 (\alpha^2 - k_1^2);$$

es wird also:

$$\alpha^2 - k_1^2 = \frac{2,9}{\gamma^2} \frac{4}{\rho^2} 10^{-10} = 5,8 \times 10^{-9}, \quad \alpha^2 = 7,21 \times 10^{-8}.$$

Daraus berechnet sich für die Wellenlänge am Draht der Wert:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = 234 \text{ m};$$

die an dem Kabel entlang laufende Welle ist also um etwa 4 Proz. kürzer als die derselben Schwingungszahl entsprechende freie Welle in Luft. [Ersatz der isolierenden Schicht durch ein Material von hoher Dielektrizitätskonstante (Wasser  $\varepsilon=80$ ) würde die Verkürzung der Welle nur auf  $6\frac{1}{2}$  Proz. erhöhen.]

A. Slaby<sup>1)</sup> hat ein Hochspannungskabel der angegebenen Dimensionen als einfachen Marconisender benutzt; er gibt an, daß sich die in Luft gemessene Viertelwellenlänge um 7 Proz. größer ergeben habe als die Kabellänge. Die Theorie würde, wie eben gezeigt wurde, nur 4 Proz. voraussehen lassen.

1) A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. 26. p. 1003—1007. 1905.

V. Graphische Lösung der Bestimmungsgleichung für  $\kappa^2$ .

Für eine experimentelle Prüfung der Ergebnisse der Theorie sind die eben betrachteten langen Wellen nicht gut geeignet, weil der unendlich lange Draht für diese auch nicht annähernd realisiert werden kann. Man wird zu dem Zwecke besser mit Wellen von der Größenordnung von 1 m experimentieren. Dann reichen aber die Näherungsformeln nur für sehr kleine Schichtdicken der isolierenden Substanz aus, wenigstens wenn man des größeren Effektes wegen eine Substanz mit hoher Dielektrizitätskonstante verwendet. Wir müssen deshalb auf die exaktere Gleichung (16\*\*) zurückgehen:

$$(16^{**}) \quad \frac{x_{\varrho_2}}{k_2^2} \frac{J(x_{\varrho_2}) Y(x_{r_2}) - J(x_{r_2}) Y(x_{\varrho_2})}{J'(x_{\varrho_2}) Y(x_{r_2}) - J(x_{r_2}) Y'(x_{\varrho_2})} = \frac{x_{\varrho_1}}{k_1^2} \frac{K(x_{\varrho_1})}{K'(x_{\varrho_1})}.$$

Wir betrachten die beiden Seiten der Gleichung als Funktionen von dem in den  $x$  enthaltenen  $\kappa^2$ , indem wir die linke Seite gleich  $f_2(\kappa^2)$ , die rechte gleich  $f_1(\kappa^2)$  setzen. Die Lösung der Gleichung erfolgt dann ziemlich bequem graphisch, dadurch, daß man die Kurven  $f_1(\kappa^2)$  und  $f_2(\kappa^2)$  in ihrer Abhängigkeit von  $\kappa^2$  zeichnet; die Schnittpunktsabszisse ist dann die Lösung der Gleichung (16\*\*). Bei der wirklichen Ausführung braucht man dabei nur kurze Stücke der beiden Kurven zu berechnen, weil die Näherungsformeln wenigstens einen Anhalt für den zu erwartenden Wert von  $\kappa^2$  liefern.

Die Art der Berechnung wird an einem dem folgenden Beispiel entnommenen Falle klar werden. Es sei

$$r = 0,05, \quad \varrho = 1,5, \quad k_1^2 = 0,0056, \quad k_2^2 = 0,448, \quad \varepsilon = 80, \quad \lambda_0 = 84.$$

Wir setzen zunächst  $\kappa^2 = 0,20$ ; dann wird

$$x_{\varrho_1} = 0,662 i; \quad x_{\varrho_2} = 0,746; \quad x_{r_2} = 0,0249;$$

und

$$f_1(\kappa^2) = + 72,9; \quad f_2(\kappa^2) = + 16,2;$$

setzt man für  $\kappa^2$  0,16 bez. 0,145, so werden die entsprechenden Werte:

$$f_1(\kappa^2) = + 62,2; \quad f_2(\kappa^2) = + 38,7;$$

bez.

$$f_1(\kappa^2) = + 57,1; \quad f_2(\kappa^2) = + 61,2.$$

Durch die den drei Werten von  $\kappa^2$  entsprechenden Kurvenpunkte lassen sich die Kurven  $f_1$  und  $f_2$  mit genügender Sicher-

heit konstruieren, um die Schnittpunktsabszisse 0,146 mit der erforderlichen Genauigkeit erkennen zu lassen.

VI. Beispiel: kurze Wellen an einem 1 mm starken Draht mit zylindrischer Wasserhülle von variabler Dicke.

Die normale Wellenlänge  $\lambda_0$  sei 84 cm; der Radius des Drahtes 0,05 cm; setzt man die Dielektrizitätskonstante des Wassers = 80, so wird

$$k_1^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = 0,0056; \quad k_2^2 = \varepsilon k_1^2 = 0,448.$$

Für diesen Fall wurde die Abhängigkeit der Drahtwellenlänge von der Dicke der Wasserschicht vollständig durchgerechnet. Das Resultat der Rechnung ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\varrho =$	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	1,0	1,20	1,25	1,5	2,0	$\infty$
$100 \frac{\lambda}{\lambda_0} =$	100	95	86	77	68	60	54,5	37,9	32,5	19,6	13,9	11,1

Die mit  $r = 0,05$  bezeichnete Kurve der Fig. 2 zeigt diese Abhängigkeit graphisch; in der Fig. 2 ist, um den Vergleich

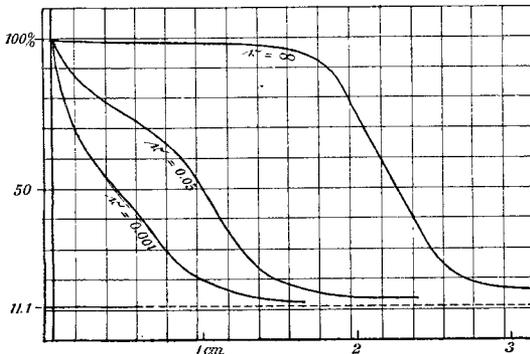


Fig. 2.

mit den übrigen Kurven zu erleichtern, nicht der äußere Radius der Wasserschicht, sondern die Schichtdicke als Abszisse eingetragen. Man sieht, daß eine Schicht von etwa 2 cm Dicke schon fast wie eine unendlich dicke Schicht wirkt. [Die punktierte horizontale Linie deutet die unendlich aus-

gedehntem Dielektrikum entsprechende Wellenlänge an; die Wellenlängen sind in Prozenten von  $\lambda_0$  angegeben.] Bemerkenswert ist der steile Abfall der Kurve bei Schichtdicken zwischen 0,9 und 1,3 cm; dieser Abfall wird um so steiler, je größer der Drahradius wird; für sehr große Radien ergibt sich die Kurve  $r = \infty$ , die also dem Fortschreiten einer Welle an einer gut leitenden mit einer Wasserschicht bedeckten unendlichen Ebene entspricht. Mit abnehmendem Drahradius nimmt bei gleicher Schichtdicke die Änderung der Wellenlänge zu; die Kurve  $r = 0,001$  kann ungefähr als Grenzkurve für verschwindende Drahtdicke betrachtet werden.

Über die Abhängigkeit von der Wellenlänge läßt sich ganz allgemein folgendes sagen: Die Gleichung (16\*\*), die zur Berechnung von  $\kappa^2$  dient, bleibt bestehen, wenn man alle in Betracht kommenden Längen im gleichen Verhältnis ändert, vorausgesetzt, daß das Dielektrikum beibehalten wird; die prozentuale Änderung der Wellenlänge wird dann also dieselbe bleiben. Nach Fig. 2 wird die normale Wellenlänge von 84 cm bei  $\frac{2}{100}$  mm Drahtdicke auf die Hälfte ihres Wertes herabgedrückt, wenn man die Wasserhülle 4 mm dick macht. Eine normale Wellenlänge von 100 m wird also auf 50 m sinken, wenn man die Welle an einem 2,4 mm dicken Drahte entlang gleiten läßt, der mit einer 48 cm dicken Wasserschicht umgeben ist.

#### VII. Verteilung der Kräfte in der Umgebung des Drahtes.

Solange die Dicke des den Draht umhüllenden Dielektrikums endlich ist, ist die Geschwindigkeit, mit der der elektromagnetische Zustand sich längs des Drahtes verschiebt, verschieden sowohl von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der freien Welle in Luft, als auch von der im Dielektrikum; und zwar ist diese Geschwindigkeit im Luftraume kleiner als Lichtgeschwindigkeit, im Dielektrikum größer als die Lichtgeschwindigkeit im Dielektrikum. Es ist deshalb eine von der normalen abweichende Verteilung der Kraftlinien zu erwarten. Die Konstruktion der Kraftlinien erfolgt am bequemsten nach der von Hertz angegebenen Methode, mit Benutzung der oben erwähnten Funktion II. Da rings um den Draht herum alles symmetrisch sein soll, so genügt es, die Kraftlinien in einer

Meridianebene zu zeichnen. Man erhält sie nach Hertz, indem man die Kurvenschar

$$r \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \text{const.}$$

zeichnet. Für den Außenraum nimmt diese Kraftliniengleichung nach (4) und (14\*) die Form an:

$$(19) \quad x K'(x) \cdot \sin(\kappa z) = \text{const.}$$

Für das Dielektrikum:

$$\left[ \frac{\alpha}{\beta} Y'(x) + J'(x) \right] x \cdot \sin(\kappa z) = \text{const.}$$

$\alpha$  und  $\beta$  sind konstante Faktoren, die sich aus  $J(x_{e_2})$ ,  $Y(x_{e_2})$ ,  $K(x_{e_1})$  und deren Differentialquotienten zusammensetzen. Durch eine elementare aber ziemlich umständliche Rechnung findet man noch, daß

$$\frac{\alpha}{\beta} = - \frac{J(x_{e_2})}{Y(x_{e_2})}$$

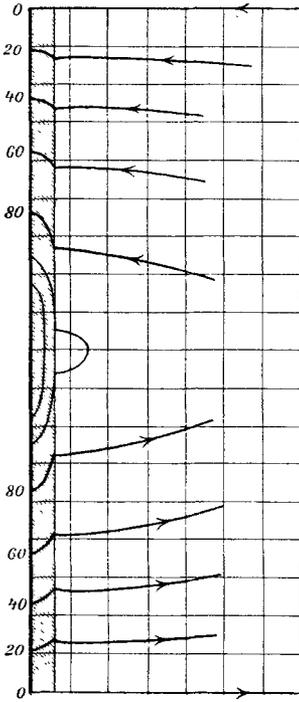
sein muß. Im Innern des Dielektrikums sind also die Kraftlinien die Kurven:

$$(20) \quad x \left[ J'(x) - \frac{J(x_{e_2})}{Y(x_{e_2})} Y'(x) \right] \cdot \sin(\kappa z) = \text{const.}$$

Für  $\rho = r$  und  $\rho = \infty$  sind die Kraftlinien auf der Drahtoberfläche senkrecht stehende parallele Gerade, deren Dichte längs des Drahtes wie  $\sin(\kappa z)$  variiert, wenn der Draht frei in Luft; wie  $\sin(\sqrt{\epsilon} \kappa z)$ , wenn der Draht am unendlichen Dielektrikum liegt. Außer diesem Grenzfall sind noch Kraftliniendiagramme gezeichnet für den im vorigen Paragraphen ausführlich behandelten Fall  $r = 0,05$ ;  $\lambda_0 = 84$ ;  $\epsilon = 80$ ; und zwar für eine verhältnismäßig dünne Wasserschicht ( $\rho = 0,5$ ) und eine verhältnismäßig dicke ( $\rho = 1,5$ ). Im zweiten Falle schließen sich fast alle Kraftlinien (92 Proz.) im Dielektrikum paarweise zusammen, so daß nur sehr wenige in den Luftraum heraustreten; auch diese schließen sich, wenn auch erst nach langen Wegen, zusammen, bis auf die von den Punkten maximaler momentaner Ladung ausgehenden, die ins Unendliche verlaufen bez. aus dem Unendlichen herankommen. Der erste Fall bildet das entgegengesetzte Extrem. Hier verlaufen nur wenige Kraftlinien völlig im Dielektrikum (weniger als 10 Proz.), die übrigen treten mit meist nur geringen Richtungsänderungen durch das

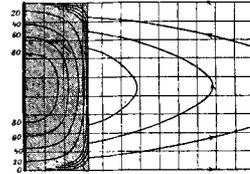
Dielektrikum hindurch in den Luftraum, wo sie sich — bis auf die von den Punkten maximaler Ladung ausgehenden — ebenfalls nach langen Wegen paarweise zusammenschließen.

In den Figg. 3 *a*, *b*, *c* sind die mit den Ziffern 80, 60, 40, 20 bezeichneten Kraftlinien so gezeichnet, daß ihre Dichte



$\rho = 0,5$

Fig. 3 a.



$\rho = 1,5$

Fig. 3 b.



$\rho = \infty$

Fig. 3 c.

der elektrischen Kraft proportional ist; die nicht bezeichneten sind hinzugenommen, um den Verlauf der übrigen Kraftlinien zu skizzieren. Die Dicke des Dielektrikums ist im richtigen Verhältnis zur Wellenlänge gezeichnet; für  $\rho = r$  hat man sich Fig. 3 *c* auf das Neunfache vergrößert zu denken. Das ganze System der Kraftlinien verschiebt sich am Draht mit der Geschwindigkeit

$$v = c \frac{k_1}{\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \frac{k_2}{\alpha}.$$

Aus dem Verlauf der Kraftlinien sieht man, daß die Fortpflanzung der elektromagnetischen Störung nur unmittelbar am Draht und im Unendlichen in reinen Transversalwellen erfolgt; überall sonst im Raume ist auch eine elektrische Kraftkomponente in der Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit vorhanden. Das liegt natürlich daran, daß die Wellen, um die es sich hier handelt, nicht beiderseits unendlich ausgedehnt, sondern einseitig begrenzt sind.

Die Bewegung der Energie können wir uns mit Hilfe des Poyntingschen Satzes klar machen. Wir berechnen den Energiefluß durch eine den Draht koaxial umschließende Zylinderfläche vom Radius  $r$  und der von einem beliebig auf der  $z$ -Achse gewählten Nullpunkte aus gerechneten Länge  $z$ . Der Energiefluß durch diese Fläche wird dann sein:

$$\frac{c}{4\pi} \int_0^z \mathfrak{H}_\varphi \mathfrak{E}_z 2r\pi dz = \frac{cr}{2} \int_0^z \mathfrak{H}_\varphi \mathfrak{E}_z dz.$$

Hierin setzen wir die Werte von  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{H}_\varphi$  aus (2) ein und erhalten dann, von Konstanten abgesehen, den Wert

$$\mathfrak{S} \sim r(k^2 - \kappa^2) u \frac{du}{dr} \int_0^z \sin 2\pi \left( \frac{t}{\tau} + \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \left( \frac{l}{\tau} + \frac{x}{\lambda} \right) dz;$$

daraus folgt zunächst für unendlich großen Radius  $\mathfrak{S} = 0$ , da sowohl  $u$  wie  $du/dr$ , die hier durch  $K(x)$  und  $K'(x)$  zu ersetzen sind, für  $r = \infty$  verschwinden wie die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten,  $ru(du/dr)$  also ebenfalls verschwindet; aus dem Unendlichen wird also in radialer Richtung keine Energie zugeführt. Für endliche Werte von  $r$  verschwindet  $\mathfrak{S}$  im allgemeinen nicht; man sieht aber aus der Formel für  $\mathfrak{S}$  sofort, daß es verschwindet, wenn man die Länge des betrachteten Zylinders gleich einer ganzen Zahl von halben Wellenlängen macht; ebenso ist die gesamte Energiemenge, die während der Dauer einer ganzen Schwingungsperiode in einen beliebig langen Zylinder in radialer Richtung einströmt, gleich Null. Zufuhr von Energie kann also nur in axialer Richtung erfolgen; es war ja auch vorausgesetzt worden, daß die Fortpflanzungsrichtung der Wellen der Drahtachse parallel sei.

**Zusammenfassung.**

Elektromagnetische Wellen an gut leitenden Drähten mit zylindrischer isolierender Hülle pflanzen sich mit einer Geschwindigkeit fort, die kleiner ist als Lichtgeschwindigkeit. Die Abweichung vom normalen Werte ist um so größer, je größer die Dielektrizitätskonstante und der Radius der isolierenden Hülle ist; je größer die Schwingungsdauer der Schwingungen und je kleiner der Drahtradius ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit läßt sich nach der angegebenen Methode exakt berechnen, solange man die Leitfähigkeit des Drahtes sehr groß annehmen darf. Das numerisch durchgerechnete Beispiel zeigt, daß sich diese Resultate verhältnismäßig leicht experimentell werden prüfen lassen.<sup>1)</sup>

Würzburg, Physik. Institut, 4. März 1907.

---

1) Hr. stud. H. Weiss ist zurzeit im hiesigen Institut mit der experimentellen Prüfung der Theorie beschäftigt. Orientierende Versuche unter den Verhältnissen des § 6 haben bei einer Schichtdicke von 0,6 cm Wasser eine Verkürzung der normalen Wellenlänge um 27,7 bis 28,7 Proz. ergeben; die Übereinstimmung mit dem berechneten Werte (28,5 Proz.) ist sehr gut. (*Anmerkung bei der Korrektur.*)

(Eingegangen 5. März 1907.)

---