3. *Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum; von Kurd von Mosengeil* †.

(Gekürzter und mit einer Korrektur von M. Planck versehener Abdruck der Berliner Dissertation.)

§ 1. Historische Einleitung.

Im Vordergrunde des Interesses der theoretischen Physik steht unter anderem seit längerer Zeit die Elektrodynamik und Optik bewegter Körper, die bis jetzt noch zu keinem endgültigen Abschlusse gelangt ist.

Alle Versuche, einen Einfluß der Erdgeschwindigkeit auf die elektrodynamischen Erscheinungen festzustellen, haben ein negatives Resultat ergeben. Um dies zu erklären, haben H. A. Lorentz[1]) und in noch allgemeinerer Fassung A. Einstein[2]) das „Prinzip der Relativität“ eingeführt, nach welchem es prinzipiell unmöglich ist, einen derartigen Einfluß aufzufinden.

Eine Stütze für die Lorentzsche Theorie glaubte nun Hr. Fritz Hasenöhrl in einer „Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern“ betitelten Arbeit[3]) gefunden zu haben. Er meinte dort nämlich zu einem Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gelangt zu sein, den er aber mit Hilfe der Lorentzschen Hypothese beseitigen konnte.

Gegen die Hasenöhrlsche Arbeit muß ich aber Stellung nehmen, weil sich im Laufe seiner Untersuchung ein Fehler eingeschlichen hat, auch abgesehen von dem Rechenfehler, dessen Aufdeckung Hr. Abraham veranlaßt hat, und der in

1) H. A. Lorentz, Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 1904. p. 809.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**. p. 891. 1905.

3) F. Hasenöhrl, Ann. d. Phys. **15**. p. 344. 1904 u. **16**. p. 589. 1905.

der zweiten Arbeit von Hasenöhrl seine Berichtigung gefunden hat. Um dies klar zu legen, ist es erforderlich, auf den Hasenöhrlschen Gedankengang näher einzugehen.

Hr. Hasenöhrl führt zunächst die Begriffe „absolute Strahlung", „totale" und „wahre relative Strahlung" ein, deren Bedeutung hier (zum größten Teil wörtlich) wiedergegeben werden möge:

„Unter absoluter Strahlung versteht man die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer senkrecht zur absoluten Strahlenrichtung gelegenen, absolut ruhenden Ebene durchsetzt."

„Unter totaler relativer Strahlung versteht man die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer (gedachten) Ebene durchsetzt, welche sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die emittierende Materie bewegt, und welche senkrecht zur relativen Strahlenrichtung orientiert ist. Ersetzt man diese gedachte Ebene durch eine materielle, schwarze (gleich bewegte und orientierte) Ebene, so ist diese totale relative Strahlung nicht identisch mit dem Betrag der von letzterer absorbierten Wärme; denn es kommt hier noch die Arbeit des Strahlungsdruckes oder die (äußere) Arbeit gegen denselben in Betracht, je nachdem sich die schwarze Ebene in negativem oder positivem Sinne bewegt. Vermindert bez. vermehrt man die totale relative Strahlung um den Betrag dieser Arbeit, so erhält man den Betrag der von der schwarzen Ebene absorbierten Wärme, welcher Betrag die wahre relative Strahlung heißen soll."

Um die Beziehung zwischen der totalen und wahren relativen Strahlung aufzusuchen, betrachtet Hr. Hasenöhrl einen zylindrischen Hohlraum, dessen Basisflächen A und B zwei schwarzen Körpern angehören sollen, während die Mantelfläche des Zylinders, sowie die äußere Begrenzung der beiden schwarzen Körper nach innen vollkommen spiegelnde Flächen sein sollen. Dieses System soll sich mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung der Erzeugenden des Zylinders bewegen.

Hr. Hasenöhrl greift diejenige totale relative Strahlung heraus, deren relative Richtung (d. h. deren Richtung in bezug auf ein mit dem Hohlraum bewegtes Bezugssystem) mit der

Bewegungsrichtung Winkel zwischen ψ und $\psi + d\psi$ einschließt. Ihren Betrag bezeichnet er mit:

$$2\pi i \cos\psi \sin\psi \, d\psi,$$

die entsprechende wahre relative Strahlung bezeichnet er mit:

$$2\pi i_0 \cos\psi \sin\psi \, d\psi.$$

Er wird dann zu dem Schlusse geführt, daß die wahre relative Strahlung allein für den Wärmetransport zwischen den Körpern A und B maßgebend ist.

Weiter folgert er ganz richtig: „Sind die beiden Flächen A und B auf derselben Temperatur, so fordert der zweite Hauptsatz, daß ihre gesamte gegenseitige wahre relative Zustrahlung gleich sei; denn nur dann bleiben ihre Temperaturen einander gleich."

Nun aber heißt es weiter:

„Damit dasselbe auch von zwei beliebigen, beliebig gegen einander orientierten Flächenelementen gelte, muß für die wahre relative Strahlung das Kosinusgesetz gelten; d. h. es muß i_0 von ψ unabhängig sein und muß ferner für A und B, also für eine positiv und negativ bewegte Fläche, denselben Wert haben. Wir erhalten also den für das Folgende wichtigen Satz: Die wahre relative Ausstrahlung eines bewegten schwarzen Körpers befolgt (im relativen Strahlengange) das Lambertsche Kosinusgesetz."

In dieser Schlußweise liegt ein Fehler. Es darf nur geschlossen werden, daß die gegenseitige wahre relative Zustrahlung der beiden Flächenelemente einander gleich ist; d. h. es muß i_0 für ψ und $\psi + \pi$ denselben Wert haben.

Wenn nun auch die Schlußweise des Hrn. Hasenöhrl nicht stichhaltig ist, so könnte doch die These, daß i_0 von ψ unabhängig sei, richtig sein.

Es wird im folgenden, wie ich glaube, in einwandfreier Weise eine Theorie der stationären Hohlraumstrahlung für bewegte Körper entwickelt werden, die zu einem anderen Resultat führt[1]). Damit verlieren auch alle weiteren Folgerungen der Hasenöhrlschen Arbeit ihre Bedeutung.

---

1) Vgl. Ende von § 3, p. 875.

§ 2. Die Unabhängigkeit der stationären Strahlung in einem bewegten Hohlraum von den in ihm befindlichen materiellen Substanzen.

Wir denken uns einen beliebig gestalteten Hohlraum, in dem sich auch beliebige materielle Substanzen befinden können; nur muß er von einer vollkommen spiegelnden Fläche eingeschlossen sein, damit keine Strahlung nach außen dringen kann. Dieser Hohlraum bewege sich (in einem strahlungfreien Vakuum) mit der konstanten Geschwindigkeit v. Im allgemeinen wird es nötig sein, um die Geschwindigkeit konstant zu halten, eine äußere Kraft auf das System wirken zu lassen. Wenn wir hinreichend lange warten, wird schließlich ein stationärer Zustand eintreten.

Es sind von vornherein zwei Fälle denkbar: Entweder ist zur Aufrechterhaltung dieses Zustandes eine äußere Kraft erforderlich oder nicht. Im ersteren Falle würde dauernd an dem System (positive oder negative) Arbeit geleistet werden; seine Energie und daher auch seine Temperatur müßte dauernd zu- bez. abnehmen. In diesem Falle könnten wir das System mit einem großen Wärmereservoir in Verbindung setzen, dann ändert sich die Temperatur nicht merklich, und infolgedessen bleibt auch der Strahlungszustand konstant.

Nun ist nach Hrn. M. Abraham[1]) die an irgend einem System angreifende Kraft gleich der zeitlichen Änderung der Summe der mechanischen und elektromagnetischen Bewegungsgröße. Beide sind aber in unserem Falle konstant. Unser System bewegt sich daher kräftefrei.

Wir denken uns nun zwei mit gleicher Geschwindigkeit v parallel bewegte Systeme der beschriebenen Art I und II, deren Temperatur die nämliche ist. Diese sollen sich in folgender Weise gegenseitig Energie zustrahlen können. Wir machen an jedem in der äußeren spiegelnden Wand an beliebiger Stelle ein Loch, A_1 und A_2. Aus diesen Löchern könnten Strahlen nach allen möglichen Richtungen dringen. Wir wollen aber nur Strahlen von ganz bestimmter Richtung haben. Deshalb umgeben wir die Löcher außen mit einer vollkommen spiegelnden Hülle, die so orientiert und gestaltet

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. p. 29.

ist, daß sie alle durch A_1 bez. A_2 austretenden Strahlen ebendorthin zurückreflektiert. Durch die Löcher B_1 und B_2 in diesen Hüllen bewirkt man dann, daß nur Strahlen von der Richtung $\overrightarrow{A_1 B_1}$ bez. $\overrightarrow{A_2 B_2}$ herausdringen können. Wir vernachlässigen hierbei die Beugung, was erlaubt ist, wenn die Dimensionen sehr groß gegen die Wellenlängen sind.

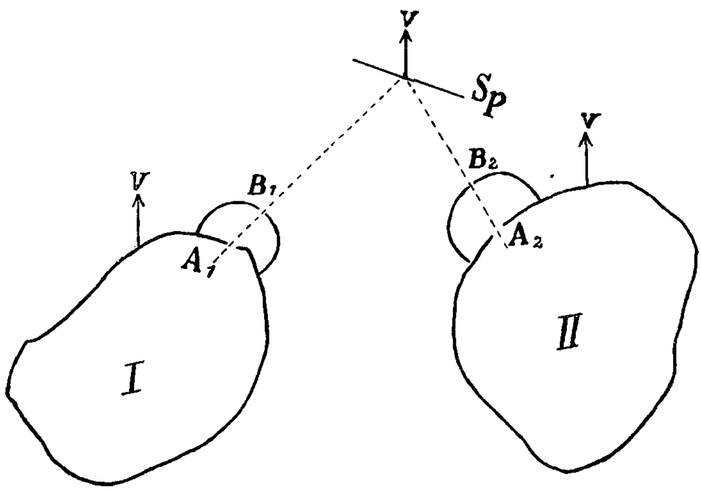

Fig. 1.

Wir stellen einen Spiegel[1]), der mit den beiden Systemen zusammen bewegt wird, derart auf, daß er die von $\overrightarrow{A_1 B_1}$ kommenden Strahlen des Systems I nach $\overrightarrow{B_2 A_2}$ reflektiert; nach dem Reziprozitätsgesetz reflektiert er dann die von $\overrightarrow{A_2 B_2}$ kommenden Strahlen des Systems II nach $\overrightarrow{B_1 A_1}$. Die vier Löcher müssen natürlich in gewisser Größenbeziehung zueinander stehen, derart, daß sie von den Strahlen gerade ausgefüllt werden. Falls sie nicht in einer Ebene, wie in der Figur angenommen, liegen, muß man statt der einen eine zweimalige Reflexion anwenden.

1) Wenn hier von Spiegeln die Rede ist, ist immer ein vollkommener Spiegel gemeint.

Wir nehmen an, daß sich in den Hohlräumen hinreichend absorbierende Substanz befindet, so daß die Strahlen, die von I nach II gelangen, dort so gut wie vollständig absorbiert werden und nicht wieder durch A_2B_2 herausgelangen. Der von dem System II durch A_2B_2 emittierte Strahl hat dann seinen Ursprung nur in der Emission der Substanzen des Systems II und ist daher unabhängig von dem einfallenden von I herkommenden Strahl.

Wenn nun die Intensität des von I emittierten Strahles von der Beschaffenheit und Lage der Substanzen abhinge, von denen er ausgeht, so würde er je nachdem dem System II mehr oder weniger Energie zuführen, so daß sich dessen Temperatur ändern könnte. Da aber die Temperaturen der beiden Systeme als gleich vorausgesetzt sind, darf dies nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht geschehen.

Wir werden daher zu dem Schlusse geführt, daß die Intensität der stationären Strahlung in einem bewegten Hohlraum nicht von der Beschaffenheit der emittierenden Substanzen abhängt.

§ 3. Die Abhängigkeit der spezifischen Strahlungsintensität von der Strahlungsrichtung.

Wir bezeichnen, wie vorher, die konstante Geschwindigkeit des Hohlraumes mit v; ferner sei c die Lichtgeschwindigkeit, ϑ der Winkel, den die (absolute[1])) Strahlenrichtung mit der Bewegungsrichtung bildet ($0 \leqq \vartheta \leqq \pi$), φ der Winkel, den die durch Strahlen- und Bewegungsrichtung gehende Ebene mit einer festen durch die Bewegungsrichtung gelegten Ebene bildet ($0 \leqq \varphi < 2\pi$).

Wir definieren die spezifische Strahlungsintensität $K(\vartheta, v)$ dadurch, daß die Intensität J eines Strahlenbündels vom Öffnungswinkel

$$d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

gegeben wird durch:

$$J = K(\vartheta, v)\, d\Omega.$$

1) Wir beziehen uns hier durchweg auf ein ruhendes Koordinatensystem, d. h. eines, für das die Maxwellschen Gleichungen gelten.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Aus dem Werte von K für einen bestimmten Wert von ϑ, K für einen anderen Wert von ϑ zu berechnen.

Wir untersuchen die Reflexion an einem in dem Hohlraum befindlichen Spiegel. Dessen von der Reflexionsseite abgewandte Normale n bilde mit der Bewegungsrichtung v den Winkel α. Es falle auf diesen Spiegel ein Strahl in einer Einfallsebene, die mit der v, n Ebene den Winkel ψ einschließt, unter dem Einfallswinkel χ von der Intensität $J = K(\vartheta, v)\, d\,\Omega$ auf, und werde unter dem Reflexionswinkel χ' mit der Intensität $J' = K(\vartheta', v)\, d\,\Omega'$ reflektiert.

Mit Hilfe der Reflexionsgesetze für bewegte Spiegel läßt sich diese berechnen; nach dem in § 2 gefundenen Resultat gilt dann der so berechnete Wert von $K(\vartheta', v)$ für alle Stellen des Hohlraums.

Es wird gut sein, die Reflexionsgesetze für bewegte Spiegel hier zusammenzustellen, um im Verlaufe der Untersuchung darauf zurückgreifen zu können [1]).

Bezeichnet man mit v' die Geschwindigkeitskomponente des Spiegels in Richtung seiner Normalen, positiv gerechnet, wenn sich der Spiegel von der einfallenden Strahlung weg bewegt, so gelten zwischen dem Einfalls- und dem Reflexionswinkel die Beziehungen:

$$\frac{\sin\chi'}{\sin\chi} = \frac{1 + \frac{v'}{c}\cos\chi'}{1 - \frac{v'}{c}\cos\chi} = \frac{\cos\chi' + \frac{v'}{c}}{\cos\chi - \frac{v'}{c}} = \frac{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}{1 - 2\frac{v'}{c}\cos\chi + \left(\frac{v'}{c}\right)^2}. \tag{1}$$

Für die Öffnungswinkel $d\,\Omega$ und $d\Omega'$ gilt:

$$\frac{d\,\Omega'}{d\,\Omega} = \frac{\sin^2\chi'}{\sin^2\chi}. \tag{2}$$

Ist ν die Schwingungszahl des einfallenden, ν' die des reflektierten Strahles, so ist

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\sin\chi}{\sin\chi'}. \tag{3}$$

Das Verhältnis der Intensitäten ist:

$$\frac{J'}{J} = \frac{\sin^2\chi}{\sin^2\chi'}; \tag{4}$$

1) Eine Ableitung dieser Gesetze findet sich z. B. bei M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. p. 343.

und daher nach (3) und (5) das Verhältnis der spezifischen Intensitäten:

$$(5) \qquad \frac{K(\vartheta', v)}{K(\vartheta, v)} = \frac{J' \, d\,\Omega}{J \, d\,\Omega'} = \frac{\sin^4 \chi}{\sin^4 \chi'}.$$

Nun sind α, χ, ϑ die Seiten eines sphärischen Dreiecks, in welchem α und χ den Winkel ψ einschließen. Nach dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie ist daher:

$$(6) \qquad \cos\alpha \cos\chi = \cos\vartheta - \sin\alpha \sin\chi \cos\psi.$$

Ebenso sind α, χ', $2R - \vartheta'$ die Seiten eines sphärischen Dreiecks, in welchem α und χ' den Winkel $2R - \psi$ einschließen. Es ist daher:

$$(7) \qquad \cos\alpha \cos\chi' = -\cos\vartheta' + \sin\alpha \sin\chi' \cos\psi.$$

Setzt man für v' seinen Wert

$$v' = v \cos\alpha$$

ein, so geht aus der Formel (1) die Formel:

$$\frac{\sin\chi}{\sin\chi'} = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\cos\chi}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha\cos\chi'}.$$

hervor. Setzt man hierin für $\cos\alpha\cos\chi$ und $\cos\alpha\cos\chi'$ die Werte aus (6) und (7) ein, so erhält man:

$$(8) \qquad \frac{\sin\chi}{\sin\chi'} = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta + \frac{v}{c}\sin\alpha\cos\psi\sin\chi}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta' + \frac{v}{c}\sin\alpha\cos\psi\sin\chi'},$$

woraus folgt:

$$(9) \qquad \frac{\sin\chi}{\sin\chi'} = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta'}.$$

Formel (5) geht darnach über in:

$$(10) \qquad \frac{K(\vartheta', v)}{K(\vartheta, v)} = \left(\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta'}\right)^4.$$

ψ und α kommen in dem Ausdruck, wie man sieht, nicht vor, der von der Form $f(v, \vartheta') / f(v, \vartheta)$ ist. Es ließ sich dies voraussehen, da nur in diesem Fall der nämliche Wert für

$K(\vartheta', v) / K(\vartheta, v)$ herauskommt, wenn der Strahl nicht durch eine einmalige, sondern durch eine mehrmalige Reflexion aus der einen Richtung in die andere übergeführt wird. Wir hätten uns unsere Aufgabe daher sehr erleichtern können, indem wir den Spiegel in speziellerer Weise gegen den einfallenden Strahl orientiert hätten. Es schien mir aber ganz nützlich, zu zeigen, daß die thermodynamischen Überlegungen des § 2 für den Fall, daß wir es nur mit spiegelnden Substanzen zu tun haben, durch die Geometrie bestätigt werden.

Wir wollen unsere Formel (10) in der für das Folgende zweckmäßigen Form schreiben, indem wir $\vartheta' = \pi/2$ setzen:

$$K(\vartheta, v) = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4}. \tag{11}$$

Berechnen wir nun die spezifische „wahre relative Strahlung“ i_0. Nach Hasenöhrl ist die absolute Strahlung, d. h. unser

$$K(\vartheta, v)\, d\,\Omega = i_0 \left(\frac{c}{c'}\right)^4 d\,\Omega\ ^{1)},$$

wo

$$c' = c\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 2\frac{v}{c}\cos\vartheta}\ ^{2)}.$$

Hieraus folgt in Hinblick auf (11):

$$i_0 = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\vartheta + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4}.$$

§ 4. Die Änderung der spezifischen Strahlungsintensität bei einer adiabatischen, isochorischen[3]), reversiblen Beschleunigung des Hohlraumes.

Um die Geschwindigkeit des Hohlraumes auf adiabatischem Wege ändern zu können, entfernen wir alle absorbierenden Substanzen; damit der Prozeß reversibel sei, soll er unendlich langsam verlaufen. Durch unregelmäßig im Hohlraum verteilte Spiegel sorgen wir dafür, daß sich die Strahlung in den

1) F. Hasenöhrl, Ann. d. Phys. **16.** p. 589. Gl. (1). 1905.
2) F. Hasenöhrl, Ann. d. Phys. **15.** p. 347. Gl. (1). 1904.
3) Das heißt bei konstant gehaltenem Volumen.

verschiedenen Richtungen ausgleichen kann. Daß dann auch die spektrale Energieverteilung bei dem Prozesse den Charakter der schwarzen Strahlung bewahrt hat, wird nachher eine einfache Überlegung zeigen.

Wir bringen die Geschwindigkeit des Hohlraumes plötzlich von v auf $v + \Delta v$ und warten, bis der stationäre Zustand eingetreten ist. War die spezifische Strahlungsintensität vorher:

$$K(\vartheta, v) = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}, \tag{11}$$

so ist sie dann:

$$K(\vartheta, v + \Delta v) = K\left(\frac{\pi}{2}, v + \Delta v\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos \vartheta\right)^4}. \tag{11*}$$

Wir betrachten nun ein Strahlelement, d. h. ein begrenztes, unendlich kleines Stück eines Strahlenbündels. Das Volumen des Strahlelementes sei dV, der Öffnungswinkel des Strahlenbündels:

$$d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Wir haben es also mit denjenigen Strahlen zu tun, deren Polarwinkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und deren Azimut zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegt, und die sich in dem Volumenelement dV befinden. Ihre spezifische Intensität ist (vor der Geschwindigkeitszunahme Δv) $K(\vartheta, v)$. Die Energie des Strahlelementes ist:

$$dE = \frac{1}{c} K(\vartheta, v) \, d\Omega \, dV. \tag{12}$$

Wir verfolgen nun das Strahlelement von dem Augenblick der Geschwindigkeitsänderung an bis zu dem Augenblick, wo der stationäre Zustand eingetreten ist. Während dieser Zeit erleidet das Strahlelement sehr viele Reflexionen. Bei jeder einzelnen Reflexion ändert sich die Richtung ϑ, φ, der Öffnungswinkel $d\Omega$, die spezifische Intensität K, das Volumen dV, die Energie dE. Die Änderung von $d\Omega$ und von K wird durch Gleichung (3) und (6) bestimmt. Einer besonderen Untersuchung bedarf es nur noch, um die Änderung von dV bei der Reflexion festzustellen.

Der Einfachheit halber geben wir dem Volumen eine spezielle Gestalt, was man unbeschadet der Allgemeinheit tun kann, da man sonst das Volumen in lauter Teile von dieser speziellen Gestalt einteilen kann, nämlich die eines schiefen Zylinders, dessen Erzeugende mit der Strahlenrichtung zusammenfällt, und dessen Endflächen zur Spiegelebene parallel sind.

Wenn die Reflexion gerade beginnt, möge das Strahlelement die Lage $ABCD$ haben; CD liegt dann in der Spiegelebene. Bis zum Ende der Reflexion möge die Zeit t vergehen.

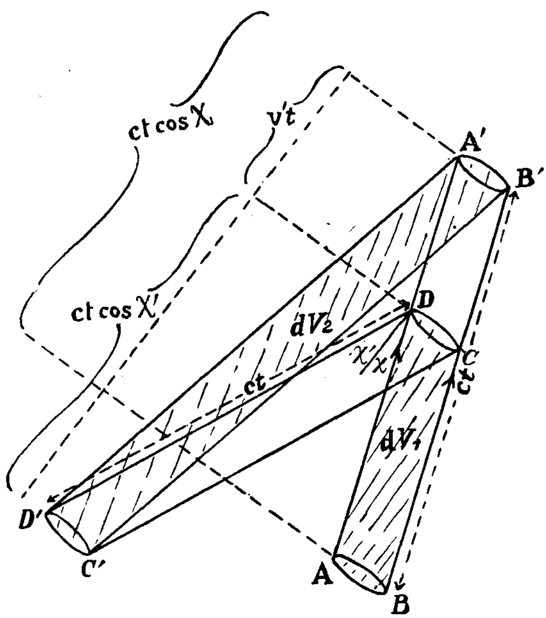

Fig. 2.

Der Spiegel hat sich dann um die Strecke $v't$ in Richtung seiner Normalen verschoben. Die eine Endfläche des Strahlelementes ist von AB nach $A'B'$ gelangt mit Lichtgeschwindigkeit, so daß $AA' = BB' = ct$. Die andere Endfläche hat sich unterdessen unter dem Reflexionswinkel χ' von CD nach $C'D'$ bewegt, so daß $CC' = DD' = ct$. Die Lage des Strahlelementes nach der Reflexion ist durch $A'B'C'D'$ gegeben. Die Volumina der beiden schiefen Zylinder dV_2 und dV_1 verhalten sich wie ihre Höhen, deren Betrag aus der Figur abzulesen ist. Man erhält:

$$\frac{d\,V_2}{d\,V_1} = \frac{c\,t\cos\chi' + v'\,t}{c\,t\cos\chi - v'\,t}$$

oder

$$\frac{d\,V_2}{d\,V_1} = \frac{\cos\chi' + \frac{v'}{c}}{\cos\chi - \frac{v'}{c}}.$$

Nach (2) erhält man:

$$\frac{d\,V_2}{d\,V_1} = \frac{\sin\chi'}{\sin\chi}. \tag{13}$$

Für das Verhältnis der Energie des Strahlelementes nach der Reflexion $d\,E_2$ zu der vor der Reflexion $d\,E_1$ erhält man nach (12), (4) und (13):

$$\frac{d\,E_2}{d\,E_1} = \frac{\sin\chi}{\sin\chi'}. \tag{14}$$

Wie wir sehen, ändern sich alle für das Strahlelement charakteristischen Größen bei einer Reflexion im Verhältnis $\sin\chi'/\sin\chi$ oder einer (positiven oder negativen) Potenz hiervon. Nun ist nach (9):

$$\frac{\sin\chi}{\sin\chi'} = \frac{1 - \frac{v + \varDelta v}{c}\cos\vartheta_1}{1 - \frac{v + \varDelta v}{c}\cos\vartheta_2}, \tag{15}$$

wo ϑ_1 den Polarwinkel der Strahlungsrichtung vor, ϑ_2 nach der Reflexion bedeutet. Wir mußten hier beachten, daß die Geschwindigkeit des Systems nicht mehr v, sondern $v + \varDelta v$ ist.

Wenn nun viele Reflexionen stattfinden, so sieht man leicht, daß die Änderungen der charakteristischen Größen nur von dem Polarwinkel ϑ vor den Reflexionen und dem Polarwinkel ϑ' nach den Reflexionen abhängen. So erhält man z. B. für das Verhältnis der Energie des Strahlelementes nach den vielen Reflexionen $d\,E'$ zu der vor den Reflexionen $d\,E$ entsprechend (14) und (15):

$$\frac{d\,E'}{d\,E} = \frac{1 - \frac{v + \varDelta v}{c}\cos\vartheta}{1 - \frac{v + \varDelta v}{c}\cos\vartheta'}. \tag{16}$$

Da es dagegen auf den Weg, den das Strahlelement inzwischen zurückgelegt hat, gar nicht ankommt, so können wir den in Wirklichkeit zurückgelegten, komplizierten Weg durch einen fingierten, einfachen ersetzen.

Wir haben nur dafür zu sorgen, daß die Verteilung der Strahlelemente am Schlusse eine derartige ist, wie sie der stationären Strahlung bei der Geschwindigkeit $v + \Delta v$ entspricht, d. h. wie sie durch (11*) vorgeschrieben wird.

Wir gehen in folgender Weise vor: Wir lassen jedes einzelne Strahlelement durch einen passend aufgestellten (mitbewegten) Spiegel in eine Richtung reflektieren, die senkrecht zur Bewegungsrichtung des Systems steht. Wir wollen die Energie E berechnen, die das System nach diesem Prozeß besitzt. Die Energie eines Strahlelementes vor der Reflexion beträgt nach (12):

$$\frac{1}{c} K(\vartheta, v)\, d\Omega\, d V,$$

nach der Reflexion in die zur Bewegung senkrechte Richtung nach (16):

$$\frac{1}{c} K(\vartheta, v)\, d\Omega\, d V\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos\vartheta\right).$$

Wir finden E durch Integration dieses Ausdruckes über $d\Omega$ und dV:

$$E = \int\!\!\int \frac{1}{c} K(\vartheta, v)\, d\Omega\, d V\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos\vartheta\right). \tag{17}$$

Setzen wir für $d\Omega$ seinen Wert $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ und den Wert von $K(\vartheta, v)$ aus (11) ein, so wird nach Ausführung der Integration nach φ und V:

$$E = \frac{2\pi V}{c} \int_0^\pi K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos\vartheta\right)}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos\vartheta\right)^4} \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Führt man auch noch die Integration nach ϑ aus, so wird:

$$E = \frac{4\pi V}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \left\{ \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2} - \frac{4}{3} \frac{\frac{v\,\Delta v}{c^2}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3} \right\}. \tag{18}$$

Wir lassen nun die Strahlelemente durch passend aufgestellte Spiegel aus der zur Bewegung senkrechten Richtung nach allen möglichen Richtungen reflektieren, und zwar in der

Verteilung auf die einzelnen Richtungen, wie sie der stationären Strahlung und Gleichung (11*) entspricht. Die Energie eines Strahlelementes wird alsdann betragen:

$$\frac{1}{c} K(\vartheta, v + \Delta v)\, d\,\Omega\, d\,V,$$

vor der Reflexion muß sie zufolge (16) gewesen sein:

$$\frac{1}{c} K(\vartheta, v + \Delta v)\, d\,\Omega\, d\,V\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta\right).$$

Durch Integration dieses Ausdruckes über Ω und V finden wir einen zweiten Ausdruck für E:

$$E = \int\!\!\int \frac{1}{c} K(\vartheta, v + \Delta v)\, d\,\Omega\, d\,V\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta\right). \tag{19}$$

Setzen wir für $d\,\Omega$ seinen Wert $\sin\vartheta\, d\,\vartheta\, d\,\varphi$ und den Wert von $K(\vartheta, v + \Delta v)$ aus (11*) ein, so wird nach Ausführung der Integration nach φ und V:

$$E = \frac{2\,\pi\, V}{c} \int\limits_0^\pi K\left(\frac{\pi}{2}, v + \Delta v\right) \frac{\sin\vartheta\, d\,\vartheta}{\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta\right)^2}.$$

Führt man auch noch die Integration nach ϑ aus, so wird:

$$E = \frac{4\,\pi\, V}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, v + \Delta v\right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v + \Delta v}{c}\right)^2\right)^2}. \tag{20}$$

Durch Vergleich von (18) und (20) erhält man, wenn man gleichzeitig nach Δv entwickelt:

$$\begin{aligned} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &\left\{\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2} - \frac{4}{3}\frac{v}{c}\frac{\Delta v}{c}\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\right\} \\ = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &\left\{\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2} + 4\frac{v\,\Delta v}{c^2}\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\right\} \\ &+ \frac{\partial K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Hieraus berechnet sich:

$$\frac{\partial K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial v} = -\frac{16}{3}\frac{v}{c^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)} K\left(\frac{\pi}{c}, v\right).$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2} K(0), \tag{21}$$

wo $K(0)$ die Strahlungsintensität des ruhenden Hohlraumes bezeichnet.

Für $K(\vartheta, v)$ erhalten wir dann nach (11):

$$K(\vartheta, v) = K(0)\frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4}. \tag{21*}$$

Setzen wir dem Stefan-Boltzmannschen Gesetze[1]) gemäß:

$$K(0) = \frac{a\,c}{4\,\pi} T_0^4,$$

so geht die Formel über in:

$$K(\vartheta, v) = \frac{a\,c}{4\,\pi} T_0^4 \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4}, \tag{22}$$

wobei T_0 die Temperatur des ruhenden Hohlraumes bedeutet.

Wir untersuchen jetzt, ob auch die spektrale Energieverteilung den Charakter der schwarzen Strahlung bewahrt hat. Zu dem Zwecke machen wir folgenden Kreisprozeß: Wir bringen den Hohlraum zuerst auf adiabatisch reversiblem Wege aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit v. Hierbei wird eine Arbeit geleistet, die gleich dem Unterschied der Strahlungsenergie nachher und vorher ist. Dann bringen wir den Hohlraum mit einem schwarzen Körper von solcher Temperatur in Verbindung, daß seine Strahlungsintensität durch

$$K(\vartheta, v) = \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} K(0)$$

bestimmt wird, dessen emittierte Strahlen aber möglicherweise eine andere spektrale Energieverteilung aufweisen als die Strahlen des Hohlraumes. Ist dieses der Fall, so wird eine Entropievermehrung stattfinden. Eine Arbeitsleistung oder

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 62 (76).

gewinnung oder eine Wärmeaufnahme oder -abgabe durch den schwarzen Körper findet hierbei nicht statt. Nach Entfernung des schwarzen Körpers bringen wir den Hohlraum wieder auf adiabatisch reversiblem Wege zur Ruhe. Hierbei wird dieselbe Arbeit, die vorher geleistet worden war, zurückgewonnen. Schließlich wird der Hohlraum wieder mit einem schwarzen Körper in Verbindung gebracht, dessen Strahlungsintensität durch $K(0)$ gegeben ist. Hierbei kann eventuell wieder eine Entropievermehrung stattfinden; Arbeit wird keine dabei geleistet, Wärme keine abgegeben. Der Prozeß ist jetzt vollständig rückgängig gemacht; es kann also während des Prozesses keine Entropievermehrung stattgefunden haben. Dieser Bedingung wird nur genügt, wenn auch die spektrale Energieverteilung der Hohlraumstrahlung bei der adiabatisch reversiblen Beschleunigung den Charakter der schwarzen Strahlung bewahrt.

§ 5. Eine zweite Herleitung des in § 4 gewonnenen Resultates.

Man kann zu der Gleichung (21) für die Änderung der spezifischen Strahlungsintensität bei adiabatischer, reversibler Beschleunigung auf einem anderen Wege gelangen, der weniger Anforderungen an das Anschauungsvermögen stellt.

Wir setzen das Volumen des Hohlraumes der Einfachheit halber gleich Eins.

Nach Hrn. Abraham[1]) ist die Kraft $\mathfrak{F}$, die an einem elektromagnetischen Systeme von außen angreift, gleich der zeitlichen Zunahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße $\mathfrak{G}$,

$$\mathfrak{F} = \frac{d\,\mathfrak{G}}{d\,t}; \tag{23}$$

$\mathfrak{G}$ ist hierbei definiert durch:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{S}, \tag{24}$$

wo $\mathfrak{S}$ den Poyntingschen Vektor bezeichnet. Da $\mathfrak{S}$ jedenfalls in die Richtung von v fällt, so brauchen wir nur die in diese Richtung fallende Komponente des Poyntingschen

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. p. 28.

Vektors für die einzelnen Strahlen zu berücksichtigen, die wir mit $d\mathfrak{S}$ bezeichnen wollen. Es ist:

$$d\mathfrak{S} = K(\vartheta, v)\, d\,\Omega \cos\vartheta\,,$$

oder nach (11):

$$d\mathfrak{S} = K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\cos\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} \sin\vartheta\, d\,\vartheta\, d\,\varphi\,.$$

Durch Integration über ϑ, φ erhalten wir:

$$\mathfrak{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\cos\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} \sin\vartheta\, d\,\vartheta\, d\,\varphi$$

$$= \frac{16}{3}\pi \frac{v}{c} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\,.$$

Dies in (24) und (23) einsetzend erhalten wir:

$$\text{(24*)} \qquad \mathfrak{G} = \frac{16}{3}\pi \frac{v}{c^3} \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\,,$$

$$\mathfrak{F} = \frac{16}{3}\frac{\pi}{c^3}\frac{d}{d\,t} \frac{v\,K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\,,$$

wofür wir auch schreiben können, da der zu differenzierende Ausdruck bei der adiabatisch reversiblen Beschleunigung nur von v abhängt:

$$\mathfrak{F} = \frac{16}{3}\frac{\pi}{c^3}\frac{\partial}{\partial\, v}\left\{\frac{v\,K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\right\}\frac{d\,v}{d\,t}\,.$$

Die in der Zeit $d\,t$ geleistete Arbeit $\varDelta A$ finden wir durch Multiplikation mit dem Wege $v\,d\,t$:

$$\text{(25)} \qquad \varDelta A = \frac{16}{3}\frac{\pi}{c^3}\, v\, \frac{\partial}{\partial\, v}\left\{\frac{v\,K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\right\}\frac{d\,v}{d\,t}\, d\,t\,.$$

Diese Arbeit muß gleich sein der Energiezunahme ΔU des Systems in der Zeit dt. Die Gesamtenergie U des Systems beträgt:

$$(25^*)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} \\ &= \frac{4\pi}{c} K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus ergibt sich die Änderung der Energie:

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta U &= \frac{\partial U}{\partial v}\frac{d v}{d t} d t \\ &= \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial v}\left\{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)\frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\right\}\frac{d v}{d t} d t. \end{aligned}\right.$$

Durch Vergleich von (25) und (26) findet man:

$$\frac{4}{3}\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{v K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\right\} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\right\};$$

hieraus folgt nach einigen Umformungen:

$$\frac{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3} = \frac{\partial\left\{\frac{K\left(\frac{\pi}{2}, v\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}\right\}}{\partial\left\{\log\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2}\right\}}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert die uns schon bekannte Gleichung (21):

$$K\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{8/3} K(0).$$

§ 6. Die Abhängigkeit der spektralen Energieverteilung von der Strahlungsrichtung.

Wir definieren die spezifische Intensität der monochromatischen Strahlung $\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v)$ damit, daß $\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v)\, d\nu$ derjenige

Teil von $K(\vartheta, v)$ ist, dessen Schwingungszahlen zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegen.

Wir gehen nun genau so wie in § 3 vor, indem wir einen Strahl von der Intensität $\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v)\, d\nu$ an einem im Hohlraum befindlichen Spiegel reflektieren lassen. Nach (3) und (9) hat dann der reflektierte Strahl die Schwingungszahl:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta'}, \tag{27}$$

und seine Intensität beträgt nach (10):

$$\mathfrak{K}(\nu', \vartheta', v)\, d\nu' = \mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v)\, d\nu \left(\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta'}\right)^4. \tag{28}$$

Durch Vergleich von (27) und (28) folgt:

$$\frac{\mathfrak{K}\left(\nu \dfrac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta'}, \vartheta', v\right)}{\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v)} = \left(\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta'}\right)^3. \tag{29}$$

Setzt man hierin $\vartheta' = \pi/2$, so läßt sich die Formel schreiben:

$$\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v) = \mathfrak{K}\left(\nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right), \frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^3}. \tag{30}$$

§ 7. Die Änderung der spektralen Energieverteilung bei der adiabatischen, isochorischen, reversiblen Beschleunigung des Hohlraumes.

Wir können hier wieder nach der in § 4 zur Bestimmung der Änderung der Gesamtintensität benutzten Methode vorgehen, weil auch die Änderung der Schwingungszahl eines Strahles bei einer oftmaligen Reflexion nur von der Anfangs- und Endrichtung des Strahles, aber nicht von dem inzwischen durchlaufenen Weg abhängt.

Wir bringen also wieder den Hohlraum von der Geschwindigkeit v auf die Geschwindigkeit $v + \Delta v$ und lassen dann jedes einzelne Strahlelement durch einen passend aufgestellten (mitbewegten) Spiegel in eine zur Bewegungsrichtung senkrechte Richtung reflektieren. Anstatt nun wie in § 4 die Gesamtenergie des Systems nach diesem Prozeß zu berechnen, berechnen wir jetzt nur die Energie $\mathfrak{E}$ der Strahlen, deren Schwingungszahlen zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegen.

Soll die Schwingungszahl eines Strahlelementes, dessen ursprüngliche Richtung durch ϑ gekennzeichnet ist, nach der Reflexion in die zur Bewegungsrichtung des Systems senkrechte Richtung ν betragen, so hat sie vorher gemäß (27) betragen:

$$\nu \frac{1}{1 - \frac{v + \Delta v}{c} \cos\vartheta}.$$

Wir erhalten daher $\mathfrak{E}$, wenn wir in der Formel (17) für E an die Stelle von $K(\vartheta, v)$

$$\mathfrak{K}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}, \vartheta, v\right) d\left\{\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}\right\}$$

setzen:

$$\mathfrak{E} = \int\int \frac{1}{c}\,\mathfrak{K}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}, \vartheta, v\right) d\nu\, d\Omega\, dV.$$

Setzen wir für $d\Omega$ seinen Wert $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ und den Wert von

$$\mathfrak{K}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}, \vartheta, v\right)$$

aus (30) ein, so wird nach Ausführung der Integration nach φ und V:

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi V}{c}\int\limits_0^\pi \mathfrak{K}\left(\nu\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}, \frac{\pi}{2}, v\right) d\nu \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^2}.$$

Um auch die Integration nach ϑ ausführen zu können, entwickeln wir nach Δv; man gelangt dann zur Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi V d\nu}{c} \left\{ \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^3} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial \nu} \frac{\nu}{c} \Delta v \int_0^\pi \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} \right\}.$$

Führt man jetzt die Integrale aus, so erhält man:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{c} V d\nu \Bigg\{ & \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2} \\ & + \frac{\partial \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial \nu} \frac{4}{3} \nu \frac{v}{c^2} \Delta v \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3} \Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

Wir stellen nun, wie in § 4 für E, so jetzt für $\mathfrak{E}$ einen zweiten Ausdruck auf, indem wir in (19) an die Stelle von $K(\vartheta, v + \Delta v)$

$$\mathfrak{K}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}, \vartheta, v + \Delta v\right) d\left\{\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}\right\}$$

setzen:

$$\mathfrak{E} = \int\!\!\int \frac{1}{c} \mathfrak{K}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}, \vartheta, v + \Delta v\right) d\nu\, d\Omega\, d V.$$

Setzt man für $d\Omega$ seinen Wert $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ und den Wert von

$$\mathfrak{K}\left(\frac{\nu}{1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta}, \vartheta, v + \Delta v\right)$$

gemäß (30) ein, so wird nach Ausführung der Integration nach φ und V:

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi V}{c} \int_0^\pi \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v + \Delta v\right) d\nu \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\left(1 - \frac{v + \Delta v}{c}\cos\vartheta\right)^3}.$$

Führt man auch noch die Integration nach ϑ aus, so erhält man:

$$\mathfrak{E} = \frac{4\pi}{c} V\, d\,v\, \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v + \varDelta v\right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v + \varDelta v}{c}\right)^2\right)^2}.$$

Durch Entwickelung nach $\varDelta v$ formt sich der Ausdruck um in:

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{c} V\, d\,v \Bigg\{ & \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2} \\ & + \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) 4 \frac{v}{c^2} \frac{\varDelta v}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3} \\ & + \frac{\partial\, \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial v} \frac{\varDelta v}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2} \Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Aus dem Vergleich von (31) mit (32) folgt dann:

$$\frac{\partial\, \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial \nu} \cdot \frac{\frac{4}{3}\, \nu\, \frac{v}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) \frac{4 \frac{v}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{\partial\, \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial v}.$$

Wir bringen diese Gleichung in die Form:

$$\frac{\partial\, \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial \nu} \frac{1}{\nu^2} - 3\, \frac{\mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\nu^3}$$
$$= \frac{3}{4} \frac{c^2}{v} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \frac{1}{\nu^3} \frac{\partial\, \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\partial v}.$$

Hierfür läßt sich schreiben:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\nu^3} \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)\right)}{\partial (\log \nu)} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\nu^3} \mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)\right)}{\partial\left(\log\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-2/3}\right)}.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$\frac{\mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right)}{\nu^3} = F\left(\log \nu + \log\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-2/3}\right),$$

wo F eine willkürliche Funktion seines Argumentes bedeutet.

Dies läßt sich anders schreiben:

$$\mathfrak{K}\left(\nu, \frac{\pi}{2}, v\right) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}\right), \tag{33}$$

wo jetzt F eine andere willkürliche Funktion ist.

Aus (30) folgt dann:

$$\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v) = \nu^3 F\left(\nu \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}\right). \tag{34}$$

Für $v = 0$ muß dieser Ausdruck in die Planck sche Formel[1]):

$$\mathfrak{K}(\nu, 0) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT_0}} - 1}$$

übergehen, in der h und k Konstanten, T_0 die absolute Temperatur bezeichnet. Wir erhalten daher:

$$\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT_0} \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}} - 1} \tag{35}$$

Wir haben hier sowie in Formel (22) an T den Index 0 geschrieben, um anzudeuten, daß es die Temperatur ist, die die Strahlung hatte, als das System in Ruhe war. Nach der adiabatischen, reversiblen Beschleunigung wird die Temperatur eine andere sein, deren Bestimmung unsere nächste Aufgabe bilden soll.

§ 8. Die Änderung der Temperatur bei der adiabatischen, isochorischen, reversiblen Beschleunigung.

Nach der Definition der Temperatur verhalten sich die absoluten Temperaturen zweier Körper wie die Wärmemengen, welche von den Körpern verloren oder gewonnen werden, wenn in einem umkehrbaren Carnotschen Kreisprozeß der eine die Rolle der Wärmequelle, der andere die Rolle des Kühlers spielt.

---

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 157 (232).

An dieser Definition der Temperatur halten wir fest auch in dem Falle, daß es sich um bewegte Körper handelt.

Als Wärmequelle wählen wir einen ruhenden schwarzen Körper von großer Wärmekapazität von der Temperatur T_0, dessen Emissionsvermögen $K(0)$ ist; als Kühler einen mit der Geschwindigkeit v bewegten schwarzen Körper von der zu bestimmenden Temperatur T_v, dessen Emissionsvermögen nach (21*) gleich:

$$K(0)\frac{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{5/2}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4}$$

ist.

Wir führen nun folgenden umkehrbaren Carnotschen Kreisprozeß aus: Wir bringen den Hohlraum mit dem ruhenden schwarzen Körper in Verbindung und expandieren ihn isotherm und reversibel von dem Volumen V_1 auf das Volumen V_2. Die vom schwarzen Körper hierbei abgegebene Wärmemenge möge Q_0 heißen. Hierauf trennen wir den Hohlraum von dem schwarzen Körper ab und bringen ihn auf adiabatischem, reversiblem Wege auf die Geschwindigkeit v. Dann wird seine Strahlung dieselbe wie die des bewegten schwarzen Körpers sein, also auch seine Temperatur die nämliche. Wir bringen ihn mit diesem in Verbindung und komprimieren ihn isotherm und reversibel von dem Volumen V_2 auf das Volumen V_1. Die vom bewegten schwarzen Körper hierbei aufgenommene Wärmemenge möge Q_v heißen. Schließlich trennen wir den Hohlraum wieder ab und bringen ihn auf adiabatischem, reversiblem Wege zur Ruhe. Hiermit ist er in seinen Anfangszustand zurückgekehrt.

Es verhält sich dann:

$$\frac{T_v}{T_0} = \frac{Q_v}{Q_0}. \tag{36}$$

Q_0 und Q_v setzen sich je aus der von der Strahlung bez. gegen sie geleisteten Arbeit und der Strahlungsenergie in dem Volumen $V_2 - V_1$ zusammen.

Da der Lichtdruck auf eine Fläche sowohl in dem ruhenden als auch in dem bewegten Hohlraum von der Orientierung der Fläche unabhängig ist, so wählen wir uns eine

Fläche zur Betrachtung, die auf der Bewegungsrichtung senkrecht steht.

Der Druck eines einzelnen Strahles im ruhenden Hohlraum beträgt[1]):

$$d p_0 = \frac{2\,K(0)}{c} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi .$$

Durch Integration über alle einfallenden Strahlen, d. h. über φ von 0 bis 2π und über ϑ von 0 bis $\pi/2$ erhält man den Gesamtdruck:

$$p_0 = \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{c} K(0) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi ,$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$p_0 = \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0) . \tag{37}$$

Durch Multiplikation mit $V_2 - V_1$ erhalten wir die bei der Dilatation des Hohlraumes gewonnene Arbeit:

$$\frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0) (V_2 - V_1) . \tag{38}$$

Die Energiedichte U_0 erhält man durch Integration über die durch c dividierten Strahlungsintensitäten:

$$U_0 = \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{c} K(0) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi ,$$

$$U_0 = \frac{4\pi}{c} K(0) . \tag{39}$$

Die in dem Volumen $V_2 - V_1$ enthaltene Energie ist daher:

$$\frac{4\pi}{c} K(0) (V_2 - V_1) . \tag{40}$$

Q_0 erhält man nun durch Addition von (38) und (40):

$$Q_0 = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c} K(0) (V_2 - V_1) . \tag{41}$$

---

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 56 (65).

Im bewegten Hohlraum beträgt der Druck eines einzelnen Strahles[1]):

$$d p_v = \frac{2}{c} K(\vartheta, v) \frac{\left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi .$$

Durch Integration über alle einfallenden Strahlen, d. h. über φ von 0 bis 2π und über ϑ von 0 bis $\arccos v/c$, erhält man den Gesamtdruck:

$$p_v = \int\limits_{\vartheta=0}^{\arccos\frac{v}{c}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{c} K(\vartheta, v) \frac{\left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi .$$

Setzt man für $K(\vartheta, v)$ seinen Wert nach (21*) ein und führt die Integration aus, so wird:

$$p_v = \frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{2/3} . \tag{42}$$

Durch Multiplikation mit $V_2 - V_1$ erhalten wir die bei der Kompression des bewegten Hohlraumes geleistete Arbeit:

$$\frac{4}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{2/3} (V_2 - V_1) . \tag{43}$$

Ferner ist die bei der Änderung der elektromagnetischen Bewegungsgröße $\mathfrak{G} V$ geleistete Arbeit nach (24*) und (21):

$$- v \mathfrak{G} (V_2 - V_1) = - \frac{16 \pi}{3 c} K(0) \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/3}} (V_2 - V_1) . \tag{43*}$$

Die Energiedichte in dem bewegten Hohlraum ist:

$$U_v = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{c} K(\vartheta, v) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi ,$$

oder, das Integral ausgeführt:

$$U_v = \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/3}} . \tag{44}$$

---

1) M. Abraham, Lehrbuch der Elektrizität 2. p. 351.

Die in dem Volumen $V_2 - V_1$ enthaltene Energie ist daher:

$$\frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} (V_2 - V_1). \tag{45}$$

Q_v erhält man nun durch Addition von (43), (43*), und (45):

$$Q_v = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2} (V_2 - V_1). \tag{46}$$

Durch Division von (41) in (46) erhalten wir nach (36) das Verhältnis der Temperaturen des bewegten und des ruhenden Hohlraumes:

$$\frac{T_v}{T_0} = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{47}$$

Führen wir nun in die Formeln (22) und (35) statt der Temperatur T_0 die eigene Temperatur des bewegten Hohlraumes T_v ein, so gehen sie über in:

$$K(\vartheta, v) = \frac{a\,c}{4\pi} \left(T_v \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}\right)^4, \tag{48}$$

$$\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v) = \frac{2\,h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k T_v}\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)} - 1}. \tag{49}$$

Wir können dies Resultat dahin aussprechen:

Um das **Stefan-Boltzmann**sche und das **Planck**sche Gesetz auch für bewegte Körper anwenden zu können, hat man die absolute Temperatur mit dem Faktor

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}$$

zu multiplizieren.

§ 9. Die Ausdrücke für die Energiedichte, die Beschleunigungsarbeit, die scheinbare Masse bei der adiabatischen und bei der isothermen Beschleunigung des Hohlraumes und die Wärmeabsorption bei der letzteren.

Die Energiedichte bei der adiabatischen Beschleunigung haben wir schon in (44) berechnet:

$$U_{\mathrm{ad}} = \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}.$$

Hieraus ergibt sich die Beschleunigungsarbeit, indem man die Energiedichte des ruhenden Hohlraumes (39) abzieht:

$$A_{\mathrm{ad}} = \frac{4\pi}{c} K(0) \left\{ \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} - 1 \right\}.$$

Durch Differentiation nach $v^2/2$ erhält man die scheinbare Masse:

$$m_{\mathrm{ad}} = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} K(0) \frac{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{4/3}}.$$

Die Energiedichte bei der isothermen Beschleunigung ist:

$$U_{\mathrm{is}} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{c} K(0) \left(\frac{1}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}\right)^4 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}.$$

Zur Berechnung der Arbeit bei der isothermen Beschleunigung wenden wir den Abrahamschen Satz an, daß die an dem Hohlraume angreifende Kraft gleich der zeitlichen Änderung der elektromagnetischen Bewegungsgröße ist. In Formel (25) steht der Ausdruck für das Differential der Arbeit. Für $K(\pi/2, v)$ haben wir hier nach Gleichung (48), da hier T_v konstant $= T_0$ ist,

$$\frac{a c}{4\pi} T_0^4 = K(0)$$

einzusetzen. Man erhält dann:

$$\Delta A = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} v \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{v K(0)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3} \right\} \Delta v$$

oder nach Ausführung der Differentiation:

$$\Delta A = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c^3} \frac{v\left(1 + 5\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^4} \Delta v K(0).$$

Dividiert man durch $v\,\Delta v = \Delta(v^2/2)$, so erhält man auf der linken Seite die scheinbare Masse:

$$m_{\text{is}} = \frac{16}{3}\frac{\pi}{c^3}K(0)\frac{1+5\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^4}.$$

Durch Multiplikation mit $d(v^2/2)$ und Integration von $v=0$ bis $v=v$ erhält man die Arbeit bei der isothermen Beschleunigung:

$$A_{\text{is}} = \frac{4}{3}\frac{\pi}{c}K(0)\left(\frac{v}{c}\right)^2\frac{2+3\left(\frac{v}{c}\right)^2-\left(\frac{v}{c}\right)^4}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^3}.$$

Die Wärmeabsorption schließlich bei der isothermen Beschleunigung bestimmt sich als Differenz der Änderung der Energiedichte und der geleisteten Arbeit:

$$Q = (U_{\text{is}} - U_0) - A_{\text{is}} = \frac{16}{3}\frac{\pi}{c}K(0)\left(\frac{v}{c}\right)^2\frac{2-\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}.$$

§ 10. **Die Erscheinungen der Wärmestrahlung vom Standpunkte eines bewegten Beobachters. Begriff der relativen Temperatur.**

Hr. Einstein hat gezeigt[1]), daß die Maxwellschen Gleichungen ihre Gültigkeit behalten für ein Koordinaten- und Zeitsystem x', y', z', t', das aus dem ursprünglichen x, y, z, t durch folgende Transformation hervorgeht:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x - v\,t),\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t - \frac{v\,x}{c^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Er hat auch die Beziehungen angegeben, die zwischen der Intensität eines Lichtstrahles, seinem Richtungswinkel, seiner Schwingungszahl, einmal gemessen im ruhenden System,

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

das andere Mal in dem transformierten System, bestehen. Die auf das letztere bezüglichen Größen seien durch einen Akzent bezeichnet.

Es gilt dann:

$$J' = J \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \tag{51}$$

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}, \tag{52}$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}. \tag{53}$$

Es ist nun leicht, auch die Beziehung zwischen dem Öffnungswinkel eines Strahlenbündels $d\,\Omega'$, bezogen auf das bewegte, und $d\,\Omega$, bezogen auf das ruhende System, zu berechnen. Es ist

$$d\,\Omega' = \sin \vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi',$$

$$d\,\Omega = \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Da nun φ' und φ identisch sind, so folgt mit Rücksicht auf (52):

$$d\,\Omega' = d\,\Omega \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}. \tag{54}$$

Dividiert man (51) durch (54), so erhält man die Beziehung zwischen den spezifischen Strahlungsintensitäten K' und K:

$$K' = K \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}. \tag{55}$$

Bei einem monochromatischen Strahl hat man für K' $\mathfrak{K}'(\nu')\,d\nu'$ und für K $\mathfrak{K}(\nu)\,d\nu$ einzusetzen:

$$\mathfrak{K}'(\nu')\,d\,\nu' = \mathfrak{K}(\nu)\,d\,\nu \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}.$$

Mit Rücksicht auf (53) geht dies über in:

$$(56)\qquad \mathfrak{K}'(\nu') = \mathfrak{K}'\left(\nu\frac{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}\right) = \mathfrak{K}(\nu)\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^3}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Wir wollen die Formeln (55) und (56) einmal auf die (schwarze) Strahlung eines ruhenden Körpers, dann auf die eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers anwenden. Wir werden dabei zu dem auf den ersten Blick überraschenden Resultat geführt werden, daß die Temperatur in bezug auf das bewegte System eine andere ist als in bezug auf das ruhende System.

Wir bezeichnen die Temperatur des ruhenden Körpers in bezug auf das ruhende System mit T_0, in bezug auf das bewegte System mit T_0'.

Die Strahlungsintensitäten K und $\mathfrak{K}(\nu)$ in bezug auf das ruhende System ergeben sich dann nach dem Stefan-Boltzmannschen und Planckschen Gesetze für ruhende Körper:

$$(57)\qquad \begin{cases} K = \dfrac{a\,c}{4\pi}\,T_0^4, \\[2ex] \mathfrak{K}(\nu) = \dfrac{2h}{c^2}\,\dfrac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT_0}}-1}. \end{cases}$$

In bezug auf das bewegte System hat der ruhende Körper die Geschwindigkeit $-v$. K' und $\mathfrak{K}'(\nu')$ finden wir daher, wenn wir in (48) und (49) v durch $-v$, ϑ durch ϑ', T_v durch T_0' ersetzen:

$$K' = \frac{a\,c}{4\pi}\,T_0'^4\left(\frac{1}{1+\frac{v}{c}\cos\vartheta'}\right)^4,$$

$$\mathfrak{K}'(\nu') = \frac{2h}{c^2}\,\frac{\nu'^3}{e^{\frac{h\nu'}{kT_0'}\left(1+\frac{v}{c}\cos\vartheta'\right)}-1}.$$

Drückt man gemäß (52) und (53) $\cos\vartheta'$ und ν' durch $\cos\vartheta$ und ν aus, so wird:

$$
(58)\quad \left\{
\begin{aligned}
K' &= \frac{a\,c}{4\,\pi}\,T_0'^4 \left(\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)^4, \\
\mathfrak{K}'(\nu') &= \frac{2\,h}{c^2}\,\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k\,T_0'}\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}} - 1}\,\frac{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^3}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Setzt man die Werte (57) und (58) in (55) und (56) ein, so erhält man aus jeder der beiden Formeln:

$$
(59)\qquad T_0' = T_0 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}.
$$

Betrachten wir jetzt den mit der Geschwindigkeit v bewegten Körper. Seine Temperatur in bezug auf das ruhende System bezeichnen wir mit T_v, in bezug auf das bewegte System mit T_v'.

K und $\mathfrak{K}(\nu)$ werden dann durch die Formeln (48) und (49) dargestellt.

K' und $\mathfrak{K}'(\nu')$ ergeben sich, da der Körper in bezug auf das bewegte System ruht, nach den Strahlungsgesetzen für ruhende Körper:

$$
(60)\quad \left\{
\begin{aligned}
K' &= \frac{a\,c}{4\,\pi}\,T_v'^4, \\
\mathfrak{K}'(\nu') &= \frac{2\,h}{c^2}\,\frac{\nu'^3}{e^{\frac{h\,\nu'}{k\,T_v'}} - 1},
\end{aligned}
\right.
$$

oder nach (53):

$$
(61)\qquad \mathfrak{K}'(\nu') = \frac{2\,h}{c^2}\,\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k\,T_v'}\,\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}} - 1}\,\frac{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^3}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}.
$$

Setzt man die Werte (48), (49), (60), (61) in (55) und (56) ein, so ergibt sich aus jeder der beiden Formeln:

$$
(62)\qquad T_v' = T_v\,\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}.
$$

Ein Vergleich mit (59) lehrt, daß zwei Körper, die der ruhende Beobachter als gleich heiß bezeichnet, einem bewegten Beobachter verschieden heiß erscheinen können, nämlich dann, wenn die Körper verschiedene Geschwindigkeit haben. Am höchsten wird die Temperatur eines Körpers immer dem Beobachter erscheinen, der relativ zu ihm ruht.

Lediglich um uns die Bedeutung der hier eingeführten relativen Temperatur recht klar zu machen, wollen wir den in § 8 beschriebenen Kreisprozeß, durch den wir die Temperatur eines bewegten Hohlraumes aus seiner Strahlungsintensität bestimmten, vom Standpunkte des bewegten Beobachters aus betrachten.

Wir berechnen die von den beiden schwarzen Körpern emittierte bez. absorbierte Wärmemenge Q_0' und Q_v', bezogen auf das bewegte System.

Betrug der Lichtdruck eines Strahles im ruhenden Hohlraum, auf das ruhende System bezogen:

$$d p_0 = \frac{2}{c} K(0)\, d\Omega \cos^2 \vartheta,$$

so beträgt er, auf das bewegte System bezogen:

$$d p_0' = \frac{2}{c} K'(0)\, d\,\Omega' \frac{\left(\cos\vartheta' + \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \tag{63}$$

oder nach (52) und (54):

$$d p_0' = \frac{2}{c} K(0)\, d\,\Omega \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^2} \cos^2\vartheta,$$

und daher der Gesamtdruck:

$$p_0' = \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{c} K(0)\, d\,\Omega \cos^2\vartheta = \frac{4}{3}\frac{\pi}{c} K(0).$$

Die auf das bewegte System bezogene Energiedichte U_0' beträgt:

$$(64)\quad \left\{ \begin{aligned} U_0' &= \int \frac{1}{c} K'(0)\, d\,\Omega' = \int \frac{1}{c} K(0)\, d\,\Omega \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \\ &= \frac{4\pi}{c} K(0) \frac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \end{aligned} \right.$$

War $V_2 - V_1$ das Kompressionsvolumen, bezogen auf das ruhende System, so ist es, auf das bewegte System bezogen:

$$(V_2 - V_1)_0' = (V_2 - V_1)\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Wir erhalten nun durch eine ähnliche Rechnung wie die, welche zur Gleichung (46) führte:

$$Q_0' = \frac{16}{3}\frac{\pi}{c} K(0)\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{65}$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung von Q_v' über. Wir erhalten den Lichtdruck p_v' und die Energiedichte U_v' in dem Hohlraum, wenn er auf adiabatischem Wege auf die Geschwindigkeit v gebracht ist, bezogen auf das bewegte System, wenn wir in (62) und (63) an die Stelle von $K(0)$

$$K(\vartheta, v) = K(0)\frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4},$$

und in (62) außerdem an die Stelle von

$$\frac{\left(\cos\vartheta' + \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$\cos^2\vartheta'$ setzen. Es wird dann:

$$d p_v' = \frac{2}{c} K(0)\frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} d\,\Omega \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\cos^2\vartheta'$$

oder nach (52):

$$d p_v' = \frac{2}{c} K(0)\frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{5/2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} d\,\Omega \left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right)^2$$

und:

$$p_v' = \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta = \operatorname{arc}\cos\frac{v}{c}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2}{c} K(0)\frac{\left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} d\,\Omega \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{5/2},$$

$$p_v' = \frac{4}{3}\frac{\pi}{c}\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{2/3} K(0).$$

Für U_v' erhalten wir:

$$U_v' = \int \frac{1}{c} K(0) \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} d\Omega \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

$$U_v' = \frac{4\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Das Kompressionsvolumen des bewegten Hohlraumes, bezogen auf das bewegte System, ist:

$$(V_2 - V_1)_v' = (V_2 - V_1) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Wir erhalten nun:

$$Q_v' = p_v'(V_2 - V_1)_v' + U_v'(V_2 - V_1)_v',$$

$$Q_v' = \frac{16}{3} \frac{\pi}{c} K(0) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/4}. \tag{66}$$

Durch Division von (65) in (66) finden wir das Verhältnis der Temperaturen des Hohlraumes vor und nach der adiabatischen Beschleunigung, bezogen auf das bewegte System:

$$\frac{T_v'}{T_0'} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/4}}, \tag{67}$$

während das Verhältnis der Temperaturen, auf ein ruhendes System bezogen, nach (47) dargestellt war durch:

$$\frac{T_v}{T_0} = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/4}.$$

Wie man sieht, stehen diese Formeln im Einklang mit (59) und (62).

Wir wollen einen mit Strahlung erfüllten, ruhenden Hohlraum vom Volumen V_0 auf adiabatischem, reversiblem Wege auf die Geschwindigkeit v bringen, gleichzeitig aber sein Volumen (ebenfalls auf adiabatische, reversible Weise) so weit komprimieren, daß es nach dem Prozeß, wenn man es auf ein gemäß (50) transformiertes System bezieht, denselben Wert hat, den es vorher, auf das ruhende System bezogen, hatte. Der Hohlraum befindet sich alsdann in bezug auf das bewegte System in ganz genau demselben Zustande wie vorher in bezug auf das ruhende System. Denn der Zustand hängt nur von zwei Variablen ab. Dafür, daß das Volumen in beiden Fällen dasselbe ist, haben wir gesorgt; aber auch die Entropie ist dieselbe, weil sie sich bei einem adiabatischen, reversiblen Vorgang nicht ändert, und ihr Wert vom Bezugssystem überhaupt unabhängig ist, da er allein durch die Wahrscheinlichkeit des Zustandes bestimmt ist. Sind die Strahlungsintensitäten des ruhenden Hohlraumes, auf das ruhende System bezogen, bekannt, so werden sie nach dem Prozeß, bezogen auf das transformierte System, denselben Wert haben. Wenn wir dann mit Hilfe von (55) und (56) auf das ruhende System zurücktransformieren, werden wir zu einer neuen Ableitung der Strahlungsgesetze für bewegte Körper gelangen [1]).

Ob wir bei dem Prozesse die Beschleunigung und die Kompression des Hohlraumes gleichzeitig oder hintereinander ausführen, ist gleichgültig. Wir wollen zuerst die Kompression von dem Volumen V_0 auf das Volumen V_1 ausführen, wo V_1 so zu wählen ist, daß es durch eine Transformation mit Hilfe von (50) wieder in V_0 übergeht.

$$V_1 = V_0 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{68}$$

Bei der adiabatischen, reversiblen Kompression steigt die Temperatur von T_0 auf T_1 gemäß der Gleichung [2]):

$$T_1^{\,3}\, V_1 = T_0^{\,3}\, V_0 .$$

Mit Rücksicht auf (68) folgt hieraus:

$$T_1 = T_0 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/6}. \tag{69}$$

Die spezifischen Strahlungsintensitäten K und $\mathfrak{K}(\nu)$ betragen zu Anfang, den Strahlungsgesetzen für ruhende Körper zufolge:

$$\left\{\begin{aligned} K &= \frac{a\,c}{4\,\pi}\, T_0^{\,4}, \\ \mathfrak{K}(\nu) &= \frac{2\,h}{c^2}\, \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k\,T_0}} - 1}. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

1) Auf diesen Weg hat mich Hr. Prof. Dr. M. Planck aufmerksam gemacht.

2) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung p. 66.

Nach dem (Gesamt-)Prozesse haben sie, auf das bewegte System bezogen, denselben Wert. Wir finden ihre Werte $K(\vartheta, v)$ und $\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v)$, bezogen auf das ruhende System, wenn wir in (55) und (56) für K' und $\mathfrak{K}'(\nu')$ die Werte aus (70) einsetzen:

$$
(71)\quad \left\{\begin{aligned}
K(\vartheta, v) &= \frac{a\,c}{4\,\pi}\, T_0^{\,4}\, \frac{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4}\,. \\
\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v) &= \frac{2\,h}{c^2}\, \frac{\nu'^{\,3}}{e^{\frac{h\,\nu'}{k\,T_0}}-1}\, \frac{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^3}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Ersetzt man in der zweiten Gleichung noch ν' durch ν gemäß (53), so erhält man:

$$
(72)\qquad \mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v) = \frac{2\,h}{c^2}\, \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k\,T_0}\cdot\frac{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}}-1}\,.
$$

Die Formeln (71) und (72) beziehen sich auf die adiabatische, reversible Beschleunigung des Hohlraumes, wenn gleichzeitig eine adiabatische, reversible Kompression entsprechend (68) stattfindet.

Wenn wir in den Formeln T_0 durch T_1 aus (69) ersetzen, so erhalten wir die Formeln für die adiabatische, reversible Beschleunigung bei konstantem Volumen:

$$
K(\vartheta, v) = \frac{a\,c}{4\,\pi}\, T_1^{\,4}\, \frac{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{8/3}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4}\,.
$$

$$
\mathfrak{K}(\nu, \vartheta, v) = \frac{2\,h}{c^2}\, \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\,\nu}{k\,T_1}\,\frac{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{2/3}}}-1}\,.
$$

Hierdurch haben wir für Formel (22) eine dritte und für (35) eine zweite Ableitung gefunden.

Schluß.

Man braucht also, wie wir gesehen haben, keinerlei neue Hypothese in bezug auf die Längenänderungen bewegter Körper einzuführen, um die Gesetze der stationären Strahlung in einem bewegten Hohlraum sowohl mit der Elektrodynamik als auch mit der Thermodynamik in Übereinstimmung zu bringen (wie das Hr. Hasenöhrl für notwendig hält). Ob das Prinzip der Relativität (auch für materielle Körper) richtig ist, bleibt eine noch offene Frage, welche die Resultate dieser Arbeit nicht berührt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit bin ich meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. M. Planck zu sehr großem Danke verpflichtet.

(Eingegangen 12. Februar 1907.)