4. *Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht;* *von W. v. Ignatowsky.*

§ 1. Einleitung.

Im folgenden wollen wir die an einem unendlich langen Draht reflektierten Wellen berechnen, welche durch eine einfallende ebene und geradlinig polarisierte elektromagnetische Welle bedingt sind.

Wir legen den Koordinatenanfang in die Achse des Drahtes, wobei die letztere mit der z-Achse zusammenfallen soll. Die einfallende Welle bewege sich längs der negativen Richtung der x-Achse.

Fall 1. Die elektrische Kraft der einfallenden Welle ist parallel zur Achse des Drahtes.

Bezeichnen wir die Amplitude der elektrischen Kraft Z durch A für $x = 0$, so haben wir:

$$Z = A\, e^{i(\omega t + \varkappa x)}, \tag{1}$$

wo $\omega = 2\pi/T$ und

$$\varkappa^2 = \frac{\mu\, \varepsilon\, \omega^2}{c^2} - i\, 4\, \pi\, \sigma\, \mu\, \omega \tag{2}$$

sind.

Es bedeuten weiter:

μ magnetische Permeabilität,

σ Leitfähigkeit.

Diese beiden Größen, ebenso wie Z sind im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt, welches System wir auch stets im folgenden annehmen werden.

ε Dielektrizitätskonstante,

c $3 \,.\, 10^{10}$ cm/sec Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Wir setzen

$$\frac{\mu\, \varepsilon\, \omega^2}{c^2} = \alpha\,, \quad 4\, \pi\, \sigma\, \mu\, \omega = \beta$$

und

$$\varkappa = a + i\, b\,. \tag{3}$$

Dann ist

$$a = \pm \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}},$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}.$$

Da aber $\varkappa^2$ stets (2) genügen muß, so haben wir entweder

$$a < 0 \quad \text{und} \quad b > 0,$$

oder

(4) $$a > 0 \quad \text{und} \quad b < 0.$$

Diese letztere Bedingung wollen wir annehmen.

Aus (1) folgt, daß bei komplexem $\varkappa$ für $x = +\infty$, Z unendlich groß wird. Dies hat aber keinen Einfluß auf die folgenden Berechnungen, denn wir können annehmen, daß in der Nähe des Drahtes Z durch (1) dargestellt werden kann und folglich können wir den Ausdruck (1) für Z beibehalten, weil jdoch die reflektierten Wellen nur von den Oberflächenbedingungen abhängen, d. h. von den Werten von Z an der Oberfläche des Drahtes.

Fall 2. Die elektrische Kraft der einfallenden Welle ist senkrecht zur Achse des Drahtes.

In diesem Falle erhalten wir aus (1) für die magnetische Kraft ζ, welche jetzt parallel der Achse des Drahtes sein wird, den Wert:

(5) $$\zeta = \frac{\varkappa A}{\mu \omega} \cdot e^{i(\omega t + \varkappa x)}.$$

(1) und (4) sind Lösungen der allgemeinen Maxwellschen Gleichungen (7). Ist $\sigma = 0$, so ist $\varkappa$ reell. Hätten wir direkt die Gleichungen (7) für ein reelles $\varkappa$ gelöst, so kämen wir zu demselben Resultat, als ob wir in (1) und (4) $\sigma = 0$ setzten. Vom physikalischen Standpunkte betrachtet, muß diese Kontinuität, augenscheinlich, stets bewahrt bleiben. Wenn wir also später mit Hilfe von (7) eine Lösung B für die reflektierten Wellen bei $\sigma \neq 0$ finden und eine solche B' für $\sigma = 0$, so muß demnach unbedingt sein:

(6) $$\underset{\sigma = 0}{B} = B'.$$

Wir heben diese anscheinend selbstverständliche Bedingung deshalb hervor, weil, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, bei der Lösung unseres Problems eine gewisse Unbestimmtheit existiert, indem es bei reellem $\varkappa$ zwei Funktionen (J_n und P_n) gibt, welche bei $r = \infty$ endlich bleiben, andererseits aber bei komplexen $\varkappa$ nur eine (Q_n). Deshalb nehmen wir diese letztere als Lösung an auch bei reellem $\varkappa$, eben wegen (6).

Diesbezüglich verweisen wir noch auf das am Schluß des § 7 Gesagte.

Die Gleichungen von Maxwell lauten, in Vektorform geschrieben:

$$
(7) \qquad \begin{cases} 4\pi\sigma\bar{E} + \dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \bar{H}, \\ -\mu \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \bar{E}, \end{cases}
$$

wo $\bar{E}$ und $\bar{H}$ der elektrische bez. magnetische Vektor sind.

Führen wir die Zylinderkoordinaten r und φ, welche mit x und y durch die Relationen

$$
(8) \qquad x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi
$$

verbunden sind, ein, so erhalten wir aus (7), da

$$
\frac{\partial}{\partial z} = 0
$$

ist, folgendes Gleichungssystem:

$$
(9) \qquad \begin{cases} 4\pi\sigma Z + \dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi r}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varrho}{\partial \varphi}, \\ 4\pi\sigma R + \dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial R}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \zeta}{\partial \varphi}, \\ 4\pi\sigma \Phi + \dfrac{\varepsilon}{c^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -\dfrac{\partial \zeta}{\partial r} \end{cases}
$$

und

$$
(10) \qquad \begin{cases} -\mu\dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi r}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial R}{\partial r}, \\ -\mu\dfrac{\partial \varrho}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Z}{\partial \varphi}, \\ -\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\partial Z}{\partial r}, \end{cases}
$$

wo Z, R, Φ und ζ, ϱ, ψ die Komponenten der elektrischen bez. magnetischen Kraft längs den positiven Richtungen von z, r und φ sind.

§ 2. Diskussion der notwendigen Lösungen.

Bei der Lösung unseres Problems werden wir zur folgenden Differentialgleichung kommen:

$$\frac{d^2 M}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d M}{d x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) M = 0\,, \tag{1}$$

wo $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots n$ ist.

Das eine partikulare Integral von (1) ist:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n . n!}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 . 4(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right\}, \tag{2}$$

welches als **Besselsche** Funktion erster Art und n^{ter} Ordnung des Argumentes x bekannt ist.[1])

Für die abgeleitete $J_n'(x)$ von $J_n(x)$ nach x haben wir:

$$J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x). \tag{3}$$ [2])

Für kleine Werte von x können wir setzen:

$$J_0(x) = 1\,, \quad J_n(x) = \frac{x^n}{2^n . n!} \tag{4}$$

und

$$\frac{J_0'(x)}{J_0(x)} = -\frac{x}{2}\,, \quad \frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x}\,. \tag{5}$$

Für große Werte von x ist:

$$\begin{cases} J_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi x}} \cdot \Big\{S_n(-8xi)\, e^{i\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)} \\ \qquad\qquad + S_n(8xi)\, e^{-i\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}\Big\}, \end{cases} \tag{6}$$

wo

$$\begin{cases} S_n(y) = 1 + \dfrac{4n^2 - 1}{y} + \dfrac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!\,y^2} \\ \qquad + \dfrac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!\,y^3} + \ldots \end{cases} \tag{7}$$

ist.

Diese Formeln gelten sowohl für reelle, als auch für komplexe x.

Da x stets die Form haben wird:

$$x = r\varkappa = r(a + ib)$$

---

1) Vgl. A. Gray u. G. Mathews, A treatise on Bessel functions. London 1895. p. 11.

2) l. c. p. 13ff.

und den Bedingungen (4), § 1 genügen muß, so können wir in (6) bei großen $r b$ das zweite Glied vor dem ersten vernachlässigen und erhalten, falls wir noch setzen $S_n = 1$:

$$J_n(x) = i^{-n}\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\cdot e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}, \tag{8}$$

da

$$i^{-n} = e^{-\frac{i n \pi}{2}}$$

ist und

$$\frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x} + i. \tag{9}$$

Wir sehen, daß bei komplexem $\varkappa$ und $r = \infty$ $J_n(x)$ unendlich wird. Deshalb können wir diese Funktion nicht als Lösung für die reflektierten Wellen gebrauchen, denn der Außenraum kann *eventuell* leitend sein und die Annahme $\sigma = 0$, d. h. auch $b = 0$ ist doch schließlich eine Annäherung.

Wir müssen deshalb ein Integral einführen, welches bei $r = \infty$ und komplexem $\varkappa$ endlich bleibt.

Zu dem Zwecke bedienen wir uns der Funktion:

(10)[1]
$$P_n(x) = Y_n(x) - (\lg 2 - C)\, J_n(x),$$

welche auch der Gleichung (1) genügt.

Hier ist $C = 0{,}5772\ldots$ die Eulersche Konstante und

(11)[1]
$$\left\{\begin{aligned} Y_n(x) &= J_n(x)\lg x - \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ldots\tfrac{1}{n}\right) J_n(x) \\ &\quad - \frac{n!}{2}\sum_0^{n-1}\frac{1}{n-s}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-s}\frac{J_s}{s!} - \sum_1^{\infty}(-1)^s\,\frac{n+2s}{s(n+s)}\,J_{n+2s}. \end{aligned}\right.$$

Für große Werte von x ist:

$$\left\{\begin{aligned} P_n(x) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot\Big\{ & S_n(-8xi)\, e^{i\left(x-\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)} \\ & - S_n(8xi)\, e^{-i\left(x-\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}\Big\}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

---

1) A. Gray, l. c. p. 23, 40, 66, 99. Wir haben in (11) $-C$ statt $+C$ gesetzt, wie letzteres bei Heine, Handbuch der Kugelfunktionen Bd. I. p. 245 geschehen ist, woselbst ein Druckfehler ist, auf welchen Gray, l. c. p. 88 hingewiesen hat.

Wir führen jetzt die Funktion

$$Q_n(x) = \frac{i\pi}{2} J_n(x) + P_n(x) \tag{13}$$

ein.

Ein Vergleich von (13), (12) und (6) liefert für große Werte von x:

$$Q_n(x) = i\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, S_n(8xi)\, e^{-i\left(x - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}, \tag{14}$$

oder angenähert

$$Q_n(x) = i^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}. \tag{14a}$$

Falls die Bedingungen (4), § 1 eingehalten werden, ist aus dem obigen erstens ersichtlich, daß bei $b = 0$, d. h. $\sigma = 0$, P_n laut (11) reell wird; zweitens ist bei $r = \infty$ Q_n endlich laut (14), drittens wird der Bedingung (6), § 1 genügt und viertens erhalten wir laut (14) bei großem r, *vom* Drahte fortschreitende Wellen.

Wir werden also Q_n als unser gesuchtes zweites Integral gebrauchen, unabhängig davon, ob $\varkappa$ reell ist oder nicht.[1])

Außerdem haben wir noch folgende Beziehungen:

$$Y_n' = \frac{n}{x} Y_n - Y_{n+1} \tag{15}$$

und

$$J_{n+1} \cdot Y_n - J_n \cdot Y_{n+1} = \frac{1}{x}. \tag{16}$$

Hieraus folgt:

$$J_{n+1} \cdot Q_n - J_n \cdot Q_{n+1} = \frac{1}{x}, \tag{17}$$

$$J_n \cdot Q_n' - J_n' \cdot Q_n = \frac{1}{x}, \tag{18}$$

$$Q_n' = \frac{n}{x} Q_n - Q_{n+1} \tag{19}$$

und

$$J_n \cdot P_n' - J_n' \cdot P_n = \frac{1}{x}. \tag{20}$$

---

1) Unser Q_n ist nichts anderes als

$$Q_n = \frac{i\pi}{2} H_2^n(x),$$

wo $H_2^n(x)$ die Hankelsche Zylinderfunktion zweiter Gattung n^{ter} Ordnung bedeutet. Vgl. N. Nielson, Handb. d. Theorie d. Zylinderfunktionen p. 16 u. 154. Leipzig, Teubner 1904.

Für kleine Werte von x können wir schreiben:

$$(21) \qquad \begin{cases} Q_0 = \lg \dfrac{x\gamma i}{2}, \\ Q_n = -\dfrac{n!}{2n} \cdot \dfrac{2^n}{x^n}, \end{cases}$$

wo $\lg \gamma = C$ und $\gamma = 1{,}7728$ ist. Und

$$(22) \qquad \frac{Q_0'}{Q_0} = \frac{1}{x \lg \dfrac{x\gamma i}{2}}, \qquad \frac{Q_n'}{Q_n} = -\frac{n}{x}.$$

Für große x haben wir noch:

$$(23) \qquad \frac{Q_n'}{Q_n} = \frac{n}{x} - i.$$

Außerdem wollen wir noch eine Beziehung anführen, die uns später von Nutzen sein wird:

$$(24) \qquad e^{i x \cos \varphi} = J_0(x) + 2 \sum_1^{\infty} i^n J_n(x) \cos n\varphi.$$

Wir müssen noch bemerken, daß die Ausdrücke (6) u. (12) nur bis zu solchen Werten von n gültig sind, solange die Funktionen S_n konvergent bleiben. Wir werden diesen Grenzwert von n, bei welchem auch noch (9) und (14a) gültig bleiben, mit s bezeichnen.

§ 3. Allgemeine Lösung des ersten Falles.

Wir müssen annehmen, daß überall

$$R = \Phi = 0$$

ist. Setzen wir

$$(1) \qquad \begin{cases} Z = Z_1 e^{i\omega t}, \\ \varrho = \varrho_1 e^{i\omega t}, \\ \psi = \psi_1 e^{i\omega t}, \end{cases}$$

wo Z_1, ϱ_1 und ψ_1 von t unabhängig sind, so erhalten wir aus (9) und (10), § 1:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 Z_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z_1}{\partial r} + \varkappa^2 Z_1 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z_1}{\partial \varphi^2} = 0$$

und

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho = -\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega r\mu}\dfrac{\partial Z_1}{\partial\varphi}, \\[2ex] \psi = \dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega\mu}\dfrac{\partial Z_1}{\partial r}. \end{cases}$$

Für Z_1 nehmen wir eine Funktion von folgender Form an:

$$(4)\qquad Z_1 = M\cos n\varphi,$$

wo M nur von r abhängt und $n = 0, 1, 2\ldots n$ ist.

Wir erhalten dann aus (2):

$$(5)\qquad \frac{d^2 M}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d M}{d r} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) M = 0.$$

Laut dem in den §§ 1 und 2 Gesagten müssen wir als Lösung für das Innere des Drahtes die Funktion $J_n(\varkappa' r)$, und für den Außenraum die Funktion $Q_n(\varkappa r)$ annehmen und erhalten dann für die reflektierten Wellen:

$$(6)\qquad \begin{cases} Z' = e^{i\omega t}\sum\limits_0^\infty B_n Q_n(\varkappa r)\cos n\varphi, \\[2ex] \psi' = \dfrac{e^{i\omega t}\varkappa}{i\omega\mu}\sum\limits_0^\infty B_n Q_n'(\varkappa r)\cos n\varphi. \end{cases}$$

Für die in den Draht eindringenden:

$$(7)\qquad \begin{cases} Z'' = e^{i\omega t}\sum\limits_0^\infty C_n J_n(\varkappa' r)\cos n\varphi, \\[2ex] \psi'' = \dfrac{e^{i\omega t}\varkappa'}{i\omega\mu'}\sum\limits_0^\infty C_n J_n'(\varkappa' r)\cos n\varphi, \end{cases}$$

wo μ' und $\varkappa'$ sich auf das Material des Drahtes beziehen und B_n und C_n Konstanten bedeuten.

Für die einfallenden Wellen bekommen wir laut § 1 und § 2 (24)

$$(8)\qquad \begin{cases} Z = A e^{i\omega t}\left\{J_0(r\varkappa) + 2\sum\limits_1^\infty \iota^n J_n(r\varkappa)\cos n\varphi\right\}, \\[2ex] \psi = \dfrac{A\varkappa e^{i\omega t}}{i\omega\mu}\left\{J_0'(r\varkappa) + 2\sum\limits_1^\infty \iota^n J_n'(r\varkappa)\cos n\varphi\right\}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Radius des Drahtes mit g, so erhalten wir für die Oberflächenbedingungen folgende Ausdrücke:

$$(9) \qquad \left\{ r = g \quad \begin{aligned} Z'' &= Z' + Z, \\ \psi'' &= \psi' + \psi. \end{aligned} \right.$$

Hieraus bestimmen sich die Konstanten B_n und C_n, mit Benutzung von (18), § 2, zu

$$(10) \qquad B_0 = A \cdot \frac{W_0}{U_0}, \quad B_n = 2\,\iota^n A \frac{W_n}{U_n}$$

und

$$(11) \qquad C_0 = \frac{A\,\mu'}{g} \cdot \frac{1}{U_0}, \quad C_n = \frac{2\,\iota^n A\,\mu'}{g} \cdot \frac{1}{U_n},$$

wo

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} W_n &= \mu\,\varkappa'\,J_n'(g\,\varkappa')\,J_n(g\,\varkappa) - \mu'\,\varkappa\,J_n(g\,\varkappa')\,J_n'(g\,\varkappa) \\ &\text{und} \\ U_n &= \mu'\,\varkappa\,J_n(g\,\varkappa')\,Q_n'(g\,\varkappa) - \mu\,\varkappa'\,J_n'(g\,\varkappa')\,Q_n(g\,\varkappa). \end{aligned} \right.$$

Wir können schreiben:

$$(13) \qquad \frac{W_n}{U_n} = \frac{J_n(g\,\varkappa)}{Q_n(g\,\varkappa)} \cdot \frac{\mu\,\varkappa' \dfrac{J_n'(g\,\varkappa')}{J_n(g\,\varkappa')} - \mu'\,\varkappa \dfrac{J_n'(g\,\varkappa)}{J_n(g\,\varkappa)}}{\mu'\,\varkappa \dfrac{Q_n'(g\,\varkappa)}{Q_n(g\,\varkappa)} - \mu\,\varkappa' \dfrac{J_n'(g\,\varkappa')}{J_n(g\,\varkappa')}}.$$

Oder laut (18), § 2, indem wir den Nenner von (13) durch F bezeichnen:

$$(14) \qquad \frac{W_n}{U_n} = -\frac{J_n(g\,\varkappa)}{Q_n(g\,\varkappa)} \left\{ 1 - \frac{\mu'}{g\,J_n(g\,\varkappa)\,Q_n(g\,\varkappa)\,.\,F} \right\}.$$

Außerdem ist leicht zu zeigen, daß W_n nicht anders ist als:

$$(15)^{1)} \qquad W_n = -\frac{(\varkappa'^2 - \varkappa^2)}{g} \int\limits_0^g r\,J_n(r\,\varkappa')\,J_n(r\,\varkappa)\,d\,r,$$

falls $\mu = \mu' = 1$ ist.

§ 4. Allgemeine Lösung des zweiten Falles.

Wir werden jetzt überall haben:

$$Z = \varrho = \psi = 0.$$

Setzen wir wieder:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= \zeta_1\,e^{i\,\omega\,t}, \\ R &= R_1\,e^{i\,\omega\,t}, \\ \Phi &= \Phi_1\,e^{i\,\omega\,t}, \end{aligned} \right.$$

---

1) A. Gray, l. c. p. 53.

so folgt aus (9) und (10), § 1:

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_1}{\partial r} + \varkappa^2 \zeta_1 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{2}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} R &= \frac{e^{i\omega t}}{r\left(4\pi\sigma + \frac{\varepsilon i \omega}{c^2}\right)}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} = -\frac{i\omega\mu}{r\varkappa^2} e^{i\omega t}\frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi}, \\ \Phi &= \frac{i\omega\mu}{\varkappa^2} e^{i\omega t}\frac{\partial \zeta_1}{\partial r}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Analog § 3 erhalten wir für die reflektierten Wellen:

$$\left\{\begin{aligned} \zeta' &= e^{i\omega t}\sum_0^\infty B_n' . Q_n(r\varkappa)\cos n\varphi, \\ \Phi' &= \frac{e^{i\omega t} i\omega\mu}{\varkappa}\sum_0^\infty B_n' Q_n'(r\varkappa)\cos n\varphi, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

für die in den Draht eindringenden:

$$\left\{\begin{aligned} \zeta'' &= e^{i\omega t}\sum_0^\infty C_n' J_n(r\varkappa')\cos n\varphi, \\ \Phi'' &= \frac{e^{i\omega t} i\omega\mu'}{\varkappa'}\sum_0^\infty C_n' J_n'(r\varkappa')\cos n\varphi \end{aligned}\right. \tag{5}$$

und für die einfallende Welle:

$$\left\{\begin{aligned} \zeta &= \frac{\varkappa A}{\mu\omega} e^{i\omega t}\left\{J_0(r\varkappa) + 2\sum_0^\infty \iota^n J_n(r\varkappa)\cos n\varphi\right\}, \\ \Phi &= i A e^{i\omega t}\left\{J_0'(r\varkappa) + 2\sum_0^\infty \iota^n J_n'(r\varkappa)\cos n\varphi\right\}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die Oberflächenbedingungen lauten:

$$\left\{ r = g \quad \begin{aligned} \zeta'' &= \zeta' + \zeta, \\ \Phi'' &= \Phi' + \Phi, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

woraus sich die Konstanten C_n' und B_n' bestimmen zu:

$$B_0' = \frac{A\varkappa}{\omega\mu}\cdot\frac{W_0'}{U_0'}, \qquad B_n' = \frac{2\iota^n A\varkappa}{\mu\omega}\cdot\frac{W_n'}{U_u'} \tag{8}$$

und

$$C_0' = \frac{A\varkappa'}{g\omega}\cdot\frac{1}{U_0'}, \qquad C_n' = \frac{2\iota^n A\varkappa'}{g\omega}\cdot\frac{1}{U_n'}, \tag{9}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} W_n' &= \mu'\varkappa J_n'(g\varkappa')J_n(g\varkappa) - \mu\varkappa' J_n(g\varkappa')J_n'(g\varkappa) \\ &\text{und} \\ U_n' &= \mu\varkappa' J_n(g\varkappa')Q_n'(g\varkappa) - \mu'\varkappa J_n'(g\varkappa')Q_n(g\varkappa). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Außerdem haben wir noch:

$$(11) \qquad \frac{W_n'}{U_n'} = - \frac{J_n'(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)} \cdot \frac{\mu'\varkappa \frac{J_n(g\varkappa)}{J_n'(g\varkappa)} - \mu\varkappa' \frac{J_n(g\varkappa')}{J_n'(g\varkappa')}}{\mu'\varkappa \frac{Q_n(g\varkappa)}{Q_n'(g\varkappa)} - \mu\varkappa' \frac{J_n(g\varkappa)}{J_n'(g\varkappa')}}$$

und falls wir den Nenner mit F_1 bezeichnen:

$$12) \qquad \frac{W_n'}{U_n'} = - \frac{J_n'(g\varkappa)}{Q_n'(g\varkappa)} \cdot \left\{1 + \frac{\mu'}{g\,J_n'(g\varkappa)\,Q_n'(g\varkappa).F_1}\right\}.$$

§ 5. Allgemeines Integral der Maxwellschen Gleichungen.

Wir nehmen von jetzt ab an, daß der Außenraum ein reines Dielektrikum ist und zwar Luft, d. h.

$$(1) \qquad \varkappa = \frac{\omega}{c}$$

Dann erhalten wir als allgemeinstes Integral der Maxwellschen Gleichungen, d. h. den Wert Z' für die reflektierte Welle im Außenraum:

$$(2)^{1)} \qquad Z' = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_V \left. \frac{4\pi\sigma \frac{\partial Z''}{\partial t} + \frac{(\varepsilon' - 1)}{c^2} \frac{\partial^2 Z''}{\partial t^2}}{R} \right|_{t = t - \frac{R}{c}} d\,v.$$

1) Das allgemeinste Integral überhaupt der Maxwellschen Gleichungen (7), § 1 ist, in Vektorform geschrieben:

$$(2\text{a}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{E} = &-\frac{1}{4\pi} \int\limits_V \left. \frac{4\pi\sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{(\varepsilon - 1)}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}}{R} \right|_{t = t - \frac{R}{c}} d\,\nu \\ &+ \frac{1}{4\pi c} \int\limits_L \left. \nabla \lg R \cdot \frac{\partial \bar{n}}{\partial t} (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \right|_{t = t - \frac{R}{c}} d\,\omega \\ &- \frac{1}{4\pi} \int\limits_L \left. \nabla \frac{1}{R} \cdot \bar{n} (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \right|_{t = t - \frac{R}{c}} d\,\omega, \end{aligned} \right.$$

wovon (2) ein Spezialfall ist. In (2a) bez. (2) bedeuten: V das Volumen der zu betrachtenden Körper, $d\,\nu$ das Volumenelement, L die entsprechenden Oberflächen, $d\,\omega$ Oberflächenelemente, $\bar{n}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)$ der Sprung der

Hieraus folgt, da $Z'' = e^{i\omega t} Z_1''$ ist:

$$(3) \qquad Z' = + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{g} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)} \cdot (\varkappa'^2 - \varkappa) Z_1'' r}{R} \, d r \, d \varphi \, d z .$$

Bezeichnen wir durch N den Punkt im Außenraum, für welchen wir Z' suchen, und durch h die Entfernung von N bis zu irgend einem Punkte N' im Querschnitt des Drahtes, welcher sich durch eine Ebene bestimmt, die senkrecht zur Achse des Drahtes ist und durch N geht, so ist

$$R^2 = z^2 + h^2,$$

und folglich

$$(4)^{1)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega R}{c}} \, d z}{R} = 2 \int_h^{\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega R}{c}} \, d R}{\sqrt{R^2 - h^2}} \\[2ex] \displaystyle\qquad = 2 \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega h \eta}{c}} \, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = - 2 Q_0 (\varkappa h), \end{cases}$$

wo $\eta = R/h$ ist. Demnach ist:

$$(5) \qquad Z' = - \frac{e^{i\omega t} (\varkappa'^2 - \varkappa^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{g} Q_0 (\varkappa h) Z_1'' r \, d r \, d\varphi .$$

Bezeichnen wir den Abstand von N bis zur Achse mit f und den Winkel zwischen f und der x-Achse mit ϑ, so folgt

$$h = \sqrt{f^2 + r^2 - 2 f r \cos(\varphi - \vartheta)},$$

normalen zur Oberfläche Komponente der elektrischen Kraft $\bar{E}$, und ∇ den Gradienten eines Skalars. R ist die Entfernung von dem Punkte, für welchen wir $\bar{E}$ berechnen wollen, bis zu dem entsprechenden Volumen-, bez. Oberflächenelement. Unter den Integralen muß statt t, $t - R/c$ gesetzt werden. Den Beweis von (2a) hat Verfasser in seiner Arbeit „Lösung einiger Fragen aus der Elektrostatik und Elektrodynamik mit Hilfe der Vektoranalysis" (auf russisch 1902 erschienen) gegeben. Diesen Beweis hier zu wiederholen würde uns zu weit führen, wir werden aber dafür die Richtigkeit von (2) indirekt beweisen.

1) A. Gray, l. c. p. 230.

wo r die Entfernung von der Achse bis N', und φ den Winkel zwischen r und der x-Achse bedeuten. Außerdem haben wir:

$$(6)^{1)} \quad Q_0(\varkappa h) = Q_0(\varkappa f) \,.\, J_0(\varkappa r) + 2\sum_1^{\infty} Q_n(\varkappa f)\, J_n(\varkappa r) \cos n(\varphi - \vartheta)\,.$$

Unter der Voraussetzung, daß

$$\mu = \mu' = 1\,.$$

erhalten wir aus (5), falls wir daselbst (6) und den Wert für Z_1'' aus (7), § 3 einsetzen, unter Berücksichtigung von (15), § 3, tatsächlich den Wert (6), § 3 für Z'. Damit ist bewiesen, daß (2) und folglich auch (5) das Integral der Gleichungen von Maxwell darstellt und uns die richtige Lösung für die reflektierten Wellen gibt.

Wir nehmen an:

$$\frac{\omega h}{c} = \frac{2\pi h}{\lambda} \text{ ist sehr groß}\,,$$

dann können wir laut § 2 setzen:

$$(7) \qquad Q_0\left(\frac{\omega h}{c}\right) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{h}} \cdot e^{-i\left(\frac{2\pi h}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right)}\,.$$

Setzen wir noch außerdem

$$\frac{g}{h} = \text{sehr klein}$$

voraus, so können wir schreiben

$$h = f - r\cos(\varphi - \vartheta)\,.$$

Der größte Fehler, welchen wir bei dieser Annahme bezüglich h machen, ist ca. $g^2/2h$ oder $g^2/2f$.

Damit wir also bei diesem Werte von h keinen großen Fehler für die Phase von Z' bekommen, muß sein:

$$(8) \qquad \lambda = \text{größer als } \frac{g^2}{2f}\,.$$

Da $\sqrt{\lambda/h}$ in (7) nur auf die Amplitude wirkt, so können wir diese Größe aus dem Integral (5) herausheben und f statt h schreiben und erhalten:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} Z' &= -\frac{i(\varkappa'^2 - \varkappa^2)}{4\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{f}} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi f}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{g} r\, Z_1''\, e^{\frac{i\omega r}{c}\cos(\varphi - \vartheta)}\, d\varphi \,.\, dr\,. \end{aligned} \right.$$

---

1) A. Gray, l. c. p. 92.

Aus (24), § 2 haben wir:

$$(10) \qquad \int_0^{2\pi} e^{i x \cos(\varphi - \vartheta)} \cos n \varphi \, d\varphi = 2 \pi \iota^n J_n(x) \cos n \vartheta .$$

Nehmen wir wieder $\mu = \mu' = 1$ an und setzen den Wert von Z_1'' in (9) ein und berücksichtigen (10) und (15), § 3, so erhalten wir:

$$(11) \qquad \begin{cases} Z' = \dfrac{i A}{2} \sqrt{\dfrac{\lambda}{r}} \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \qquad \left\{ \dfrac{W_0}{U_0} + 2 \sum\limits_1^\infty (-1)^n \dfrac{W_n}{U_n} \cos n \varphi \right\}, \end{cases}$$

wo wieder r und φ, statt f und ϑ gesetzt sind.

Wir wiederholen noch einmal die Bedingungen, unter denen (11) gültig ist:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{2\pi r}{\lambda} \text{ groß}; \quad r \text{ groß gegen } g, \\ \qquad \lambda \text{ groß gegen } \dfrac{g^2}{2r}. \end{cases}$$

Wir werden später (§ 7) sehen, daß, falls der Draht ein absoluter Leiter ist, sein wird:

$$(13) \qquad \frac{W_n}{U_n} = - \frac{J_n(g \varkappa)}{Q_n(g \varkappa)}$$

und wir erhalten dann aus (11):

$$(14) \qquad \begin{cases} Z' = - \dfrac{i A}{2} \sqrt{\dfrac{\lambda}{r}} \, e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \qquad \left\{ \dfrac{J_0(g \varkappa)}{Q_0(g \varkappa)} + 2 \sum\limits_1^\infty (-1)^n \dfrac{J_n(g \varkappa)}{Q_n(g \varkappa)} \cos n \varphi \right\}. \end{cases}$$

Ist $g \varkappa = 2 \pi g / \lambda$ klein, so folgt nach § 2:

$$(15) \qquad \frac{J_0(g \varkappa)}{Q_0(g \varkappa)} = \frac{1}{\lg \dfrac{g \varkappa \gamma i}{2}}, \qquad \frac{J_n(g \varkappa)}{Q_n(g \varkappa)} = - \frac{2 n (g \varkappa)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

und:

$$(16) \qquad \begin{cases} Z' = - \dfrac{i A}{2} \sqrt{\dfrac{\lambda}{r}} \, e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \qquad \left\{ \dfrac{1}{\lg \dfrac{g \varkappa \gamma i}{2}} - 4 \sum\limits_1^\infty \dfrac{(-1)^n \cdot n \cdot (g \varkappa)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \cos n \varphi \right\}. \end{cases}$$

Wir werden in § 8 denselben Ausdruck (16) in anderer Weise ableiten und dadurch zugleich die Richtigkeit des obigen Näherungsverfahrens beweisen.

Für den Fall eines absoluten Leiters ist $Z'' = 0$ und folglich das Integral (5) direkt nicht zu gebrauchen. Wir wollen jetzt ein analoges Integral ableiten für einen absoluten Leiter.

Wir haben laut (11) und (6), § 3:

$$(17)\quad Z' = -A\,e^{i\omega t}\left\{\frac{J_0(g\varkappa)\,Q_n(r\varkappa)}{Q_0(g\varkappa)} + 2\sum_1^{\infty}\frac{\iota^n\,.\,J_n(g\varkappa)\,Q_n(r\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)}\cos n\varphi\right\}.$$

Führen wir wieder die Bezeichnung h ein, wie am Anfang dieses Paragraphen, und schreiben g statt r, also:

$$h = \sqrt{f^2 + g^2 - 2fg(\cos(\varphi - \vartheta))},$$

so ist laut (6) leicht zu sehen, daß:

$$Z' = -\frac{A\,e^{i\omega t}}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_0(\varkappa h)\,X\,d\varphi$$

ist, wo

$$X = \left\{\frac{1}{Q_0(g\varkappa)} + 2\sum_1^{\infty}\frac{\iota^n\cos n\varphi}{Q_0(g\varkappa)}\right\}$$

ist. Bilden wir jetzt laut § 3 die Summe $\psi + \psi'$ für einen absoluten Leiter und berücksichtigen (18), § 2, so folgt für $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}$:

$$A\,e^{i\omega t}X = -\,i\,\omega\,g(\psi + \psi') = -\,g\,\frac{\partial(\psi + \psi')}{\partial t}$$

und demnach:

$$(18)\qquad Z' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_0(\varkappa h)\,\frac{\partial(\psi + \psi')}{\partial t}\,g\,d\varphi,$$

oder laut (4)

$$(19)\qquad Z' = -\frac{i\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R}\,g\cdot(\psi_1 + \psi_1')\,dz\,d\varphi,$$

wo also $\psi + \psi' = e^{i\omega t}(\psi_1 + \psi_1')$ die *gesamte* **magnetische Kraft** für $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}$ ist.

Nach Ausführung der Integration muß in (18) und (19) statt f und ϑ wieder r und φ gesetzt werden.

§ 6. Berechnung der im Drahte absorbierten Energie.

Da wir keine elektrische bez. magnetische Hysteresis voraussetzen, so müssen wir annehmen, daß die im Drahte absorbierte Energie E lediglich durch die Joulesche Wärme bedingt wird.

Wie wir schon angenommen hatten, ist der Außenraum ein reines Dielektrikum, und zwar Luft, d. h. $\varkappa = \omega/c$.

In diesem Falle wird die algebraische Summe der durch einen, dem Draht konzentrischen Zylinder vom Radius r ein- und ausströmenden Energie gleich dem oben genannten E sein. Wir brauchen aber die Berechnung nur für die Einheit der Länge des Drahtes auszuführen, da längs der Achse des letzteren keine Energie ein- bez. ausströmt.

Nach dem Satze von Poynting erhalten wir für die im Drahte auf der Einheit der Länge, in der Einheit der Zeit, in Form von Joulescher Wärme absorbierten Energie E den Ausdruck:

$$E = -\frac{r}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \bar{n} \,.\, V\bar{E}\bar{H}\, d\varphi\,, \tag{1}$$

wobei E unbedingt *positiv* oder Null sein muß.

Im Ausdruck (1) bedeutet $\bar{n}$ den Einheitsvektor längs der äußeren Normale zum Zylinder, und $V\bar{E}\bar{H}$ das Vektorprodukt zwischen der elektrischen Kraft $\bar{E}$ und der magnetischen $\bar{H}$.

Bezeichnen wir den Einheitsvektor der Komponente von $V\bar{E}\bar{H}$ längs der Normale durch $\bar{\gamma}$, so erhalten wir

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\bar{n}\, V\bar{E}\bar{H} = \bar{n}\bar{\gamma}\,.\,Z\psi\sin(EH) = \bar{n}\bar{\gamma}\,.\,Z\psi \\ &\text{und für den zweiten Fall} \\ &\bar{n}\, V\bar{E}\bar{H} = \bar{n}\bar{\gamma}\,.\,\zeta\,\Phi\,. \end{aligned}\right.$$

Außerdem müssen wir berücksichtigen, daß das skalare Produkt $\bar{\gamma}\bar{n}$ den Wert hat:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{Für den ersten Fall} \quad \bar{\gamma}\bar{n} = -1 \\ &\text{und für den zweiten} \quad \bar{\gamma}\bar{n} = 1. \end{aligned}\right.$$

Indem wir durch $\mathfrak{R}(y)$ den reellen Teil einer Größe y bezeichnen, erhalten wir aus (1), (2) und (3) für den mittleren Wert von E während einer Periode T für den ersten Fall:

$$(4) \qquad E = \frac{r}{4\pi T} \int_0^T \int_0^{2\pi} [\Re(Z) + \Re(Z')] \, . \, [\Re(\psi) + \Re(\psi')] \, dt \, d\varphi .$$

Diesen Ausdruck können wir in drei Teile spalten und zwar:

$$(5) \qquad \begin{cases} E_1 = \dfrac{r}{4\pi T} \displaystyle\int_0^T \int_0^{2\pi} \Re(Z) \, . \, \Re(\psi) \, dt \, d\varphi , \\ E_2 = \dfrac{r}{4\pi T} \displaystyle\int_0^T \int_0^{2\pi} \Re(Z') \, . \, \Re(\psi') \, dt \, d\varphi , \\ E_3 = \dfrac{r}{4\pi T} \displaystyle\int_0^T \int_0^{2\pi} [\Re(Z)\Re(\psi') + \Re(Z')\Re(\psi)] \, dt \, d\varphi \end{cases}$$

und

$$E = E_1 + E_2 + E_3 .$$

Da E_1 unverändert bleibt, ob der Draht da ist oder nicht, und da im letzteren Fall keine Energie absorbiert wird, so muß E_1 Null sein. E_2 ist die von den reflektierten Wellen in den Raum ausgestrahlte Energie und muß folglich stets eine *negative* Größe sein, und E_3 ist die zum Drahte strömende Energie und muß folglich eine *positive* Größe und dem absoluten Werte nach größer oder gleich E_2 sein.

Unter Berücksichtigung von (13) und (20), § 2 und der §§ 3 und 4 erhalten wir für die E nach einigen elementaren, aber langwierigen Rechnungen, da $P_n(x)$ und $J_n(x)$ für reelle positive x reell sind, und falls wir setzen:

$$(6) \qquad \frac{W_n}{U_n} = \alpha_n + i\beta_n ,$$

wo α_n und β_n reelle Größen sind, folgende Ausdrücke:

$$(7) \qquad \begin{cases} E_1 = 0 , \\ E_2 = - \dfrac{\pi A^2}{8\mu\omega} \left\{ \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \displaystyle\sum_1^\infty (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right\} , \\ E_3 = + \dfrac{\pi A^2}{8\mu\omega} \left\{ \dfrac{2}{\pi} \beta_0 + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_1^\infty \beta_n \right\} . \end{cases}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhalten wir für die im zweiten Falle absorbierte Energie $E' = E_1' + E_2' + E_3'$, nur daß in (7) statt α_n und β_n, α_n' und β_n' stehen werden, wo

$$\frac{W_n'}{U_n'} = \alpha_n' + i\beta_n' \tag{8}$$

ist.

Laut unserer Annahme: Außenraum = Luft, ist $\mu = 1$. Die Ausdrücke (7) gelten auch für $\varepsilon > 1$.

Wir sehen, daß E bez. E' von r unabhängig sind, wie es auch sein muß, da im Außenraum keine Energie absorbiert wird.

Wir erhalten also:

$$\left\{\begin{aligned} E = E_2 + E_3 = &\frac{\pi A^2}{8\mu\omega} \\ &\left\{\frac{2\beta}{\pi} - \alpha_0^2 - \beta_0^2 + 2\sum_1^\infty\left(\frac{2\beta_n}{\pi} - \alpha_n^2 + \beta_n^2\right)\right\} \end{aligned}\right. \tag{9}$$

und einen analogen Ausdruck für E'.

Da E bez. E' unbedingt positiv oder Null sein müssen, folgern wir aus (9), daß

$$\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} < 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{\alpha_n'^2 + \beta_n'^2} < 1 \tag{10}$$

sind.

Andererseits sehen wir, daß tatsächlich E_2 und E_2' negativ und E_3 und E_3' positiv sind, denn E und E' sind positiv.

Für die E können wir noch andere, mehr anschaulichere Ausdrücke bilden. Zu dem Zwecke benutzen wir (13), § 2 und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{W_n}{U_n} = -\frac{1}{\frac{i\pi}{2} + \gamma_n + i\delta_n}, \qquad \frac{W_n'}{U_n'} = -\frac{1}{\frac{i\pi}{2} + \gamma_n' + i\delta_n'}, \tag{11}$$

wo

$$\gamma_n + i\delta_n = \frac{\mu\varkappa' J_n'(g\varkappa')P_n(g\varkappa) - \mu'\varkappa J_n(g\varkappa')P_n'(g\varkappa)}{\mu\varkappa' J_n'(g\varkappa')J_n(g\varkappa) - \mu'\varkappa J_n(g\varkappa')J_n'(g\varkappa)}, \tag{12}$$

$$\gamma_n' + i\delta_n' = \frac{\mu'\varkappa J_n'(g\varkappa')P_n(g\varkappa) - \mu\varkappa' J_n(g\varkappa')P_n'(g\varkappa)}{\mu'\varkappa J_n'(g\varkappa')J_n(g\varkappa) - \mu\varkappa' J_n(g\varkappa')J_n'(g\varkappa)} \tag{13}$$

und γ und δ reelle Größen sind.

Hieraus erhalten wir:

$$(14)\quad\begin{cases} E_2 = -\dfrac{A^2\pi}{8\mu\omega}\left\{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_0\right)^2+\gamma_0^2}+2\sum\limits_1^\infty\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_n\right)^2+\gamma_n^2}\right\}, \\ E_3 = +\dfrac{A^2\pi}{8\mu\omega}\left\{\dfrac{\dfrac{2\delta_0}{\pi}+1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_0\right)^2+\gamma_0^2}+2\sum\limits_1^\infty\dfrac{\dfrac{2\delta_n}{\pi}+1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_n\right)^2+\gamma_n^2}\right\} \\ \text{und} \\ E = E_2 + E_3 = \dfrac{A^2}{4\mu\omega}\left\{\dfrac{\delta_0}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_0\right)^2+\gamma_0^2}+2\sum\limits_1^\infty\dfrac{\delta_n}{\left(\dfrac{\pi}{2}+\delta_n\right)^2+\gamma_n^2}\right\}. \end{cases}$$

Analoge Ausdrücke erhalten wir für E', E_1' und E_3', falls wir in (14) γ_n' und δ_n' statt γ_n und δ_n einsetzen.

§ 7. Das Material des Drahtes ist ein absolutes Dielektrikum oder ein absoluter Leiter.

Ist das Material des Drahtes ein absolutes Dielektrikum, so ist $\varkappa'$ reell und laut (12) und (13) des vorigen Paragraphen folgt $\delta_n = \delta_n' = 0$, und demnach

$$(1)\qquad E_2 = -\frac{A^2\pi}{8\mu\omega}\left\{\frac{1}{\dfrac{\pi^2}{4}+\gamma_0^2}+2\sum_1^\infty\frac{1}{\dfrac{\pi^2}{4}+\gamma_n^2}\right\},$$

und

$$E_3 = -E_2$$

$$E = 0\,.$$

Entsprechende Ausdrücke erhalten wir für E', E_2' und E_3'.

Ist das Material des Drahtes ein absoluter Leiter, so ist $\varkappa' = \infty$, und wir erhalten aus (14), § 3 und (12), § 4:

$$(2)\qquad B_0 = -\frac{A\,J_0(g\varkappa)}{Q_0(g\varkappa)}, \qquad B_n = -\frac{2\,\iota^n A\,J_n(g\varkappa)}{Q_n(g\varkappa)}$$

und

$$(3)\qquad B_0' = -\frac{A\varkappa}{\omega\mu}\cdot\frac{J_0'(g\varkappa)}{Q_0'(g\varkappa)}, \qquad B_n' = -\frac{2\,\iota^n A\varkappa J_n'(g\varkappa)}{\omega\mu\,Q_n'(g\varkappa)}$$

und deshalb aus (11), § 6:

$$\delta_n = \delta_n' = 0$$

und

$$(4)\qquad \gamma_n = \frac{P_n(g\varkappa)}{J_n(g\varkappa)}, \qquad \gamma_n' = \frac{P_n'(g\varkappa)}{J_n'(g\varkappa)}$$

und

$$E = 0\,,$$

$$E_2 = -E_3\,,$$

wobei wir für E_2 denselben Ausdruck (1) erhalten, nur, daß an Stelle der dortigen γ_n und γ_n' die Werte (4) treten.

Wir sehen, daß ein absoluter Leiter und ein absolutes Dielektrikum sich ganz gleich verhalten bezüglich der reflektierten und absorbierten Energien, d. h. in beiden Fällen wird keine Energie absorbiert und die zum Draht hinströmende Energie wird wieder vollständig in den Außenraum zerstreut. Der Unterschied ist nur der, daß, während beim absoluten Leiter die zum Drahte strömende Energie von der Oberfläche des letzteren sofort reflektiert wird, dringt sie beim absoluten Dielektrikum in den Draht, um von dort unvermindert zurückzukommen.

Anbei möchten wir noch einige Bemerkungen bezüglich der von J. J. Thomson „Notes on Recent Researches in Elektricity and Magnetism“ gemachten Berechnung der Reflexion an einem Draht aus absolutem Leiter machen.

Auf p. 263 des genannten Werkes führt Thomson die Heinesche Funktion $K_0(x)$ ein, welche nichts anderes ist als $-P_0(x)$ *bei reellem* x.

Wie wir in § 2 gesehen haben, ist $P_0(x)$ bei $x=\infty$ endlich nur bei reellem x. J. J. Thomson gibt weiter für große x einen Grenzwert für $-P_0(x)$ an, welcher der Funktion

$$\frac{i\pi}{2} J_0(x) - P_0(x)$$

entspricht. Diese letztere Funktion bezeichnet Heine auch durch $K_0(x)$, macht aber auf den Sprung aufmerksam, welchen $K_0(x)$ besitzt beim Übergang vom komplexen zum reellen x. Da wir aber beim Übergange zu $\sigma=0$ bei der Lösung unseres *physikalischen* Problems keinen Sprung annehmen konnten, so stellten wir an die Spitze die Bedingung (6), § 1.

Weiter gebraucht Thomson § 361, p. 429 bei der Lösung des Problems der Reflexion im Falle eines absoluten Leiters wieder die Funktion $K_0(x) = -P_0(x)$, was unseren Ausdrücken (2) und (3) dieses Paragraphen und der Bedingung (6), § 1 widerspricht. Auf p. 430 führt Thomson die Berechnungen mit Hilfe von $P_0(x)$, gibt aber p. 431, § 364 für die Grenze bei großem x einen Wert an, welcher der Funktion $Q_0(x)$ entspricht.

Wir kommen weiter unten noch einmal darauf zurück.

Gesetzt den Fall, wir hätten für den Außenraum bei $\varkappa$ reell die Funktion $P_n(x)$ gebraucht. Wir hätten dann bei *beliebigem* $\varkappa'$ erhalten:

$$E_2 = E_2' = 0\,,$$

d. h. die gesamte vom Draht reflektierte Energie ist Null. Außerdem wäre für einen absoluten Leiter oder absolutes Dielektrikum

$$E_3 = E_3' = 0\,,$$

d. h. die gesamte zuströmende Energie wäre Null.

Dieses rechtfertigt noch einmal, außer der Bedingung (6), § 1, die Einführung der Funktion Q_n.

§ 8. Die Wellenlänge ist groß im Verhältnis zum Durchmesser des Drahtes.

Wir nehmen wie früher für den Außenraum Luft an, also

$$\sigma = 0; \quad \varepsilon = \mu = 1\,,$$

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{1}$$

und λ groß gegen g.

Als Material des Drahtes wählen wir Kupfer und haben daher

$$\left\{\begin{array}{l} \mu' = 1 \text{ und } \sigma' = \text{ca. } 64 \,.\, 10^{-5}. \\ \text{Laut § 1} \qquad \varkappa' = a - i\,b\,, \\ \qquad a > 0, \quad b > 0\,, \\ a = \sqrt{\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}\,, \quad b = \sqrt{\dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}\,. \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\alpha = \frac{4\pi^2 \varepsilon'}{\lambda^2}\,, \quad \beta = \frac{8\pi^2 c\,\sigma'}{\lambda}\,. \tag{3}$$

Dann ist

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon' \,.\, \frac{1}{2\lambda c\,\sigma'}\,. \tag{4}$$

Um die Größenordnungen zu fixieren, nehmen wir z. B. an:

$\lambda = 10^3\,\text{cm}$; $g = 0{,}2\,\text{cm}$. Woraus folgt:

$\varkappa = 6{,}28 \,.\, 10^{-3}$; $g\varkappa = 1{,}26 \,.\, 10^{-3}$;

$\beta = 1{,}52 \,.\, 10^6$ und

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon' \,.\, 2{,}6 \,.\, 10^{-11}.$$

Wir können also, auch falls die sehr unbestimmte Größe s' bedeutend sein sollte, α gegen β vernachlässigen und schreiben:

$$(5) \qquad \varkappa' = \sqrt{\frac{\beta}{2}}(1 - i) = 2\pi\sqrt{\frac{c\,\sigma'}{\lambda}}(1 - i)$$

und in Zahlen, für unser Beispiel:

$$\varkappa' = 853{,}4\,(1 - i), \quad g\,\varkappa' = 170{,}7\,(1 - i).$$

Da die Wellenlänge groß im Vergleich zum Durchmesser des Drahtes ist, so können wir die einfallende Welle, in der Umgebung des Drahtes, sehr genau darstellen durch:

$$(6) \qquad \begin{cases} Z = A\,e^{i\,\omega\,t}\{J_0(r\,\varkappa) + 2\sum\limits_1^s \iota^n J_n(r\,\varkappa)\}, \\ \zeta = \dfrac{\varkappa\,A}{\omega}\,e^{i\,\omega\,t}\{J_0'(r\,\varkappa) + 2\sum\limits_1^s \iota^n J_n(r\,\varkappa)\}, \end{cases}$$

wo die Größe s dem am Schlusse des § 2 Gesagten entspricht. Infolgedessen sind alle Koeffizienten B_n, B_n' und C_n, C_n' für $n > s$ gleich Null.

Da $g\,\varkappa'$ groß ist und n bzw. s verhältnismäßig klein, so können wir statt (9), § 2 schreiben:

$$(7) \qquad \frac{J_n'(g\,\varkappa')}{J_n(g\,\varkappa')} = i.$$

Deshalb erhalten wir unter Benutzung der entsprechenden Formeln aus § 2 für kleine $x = g\,\varkappa$ für die Klammerwerte von (14), § 3 und (12), § 4:

$$(8) \qquad 1 - \frac{1}{g\,J_n(g\,\varkappa)\,Q_n(g\,\varkappa)\,F} = 1 - \frac{2\,n}{i\,\varkappa'\,g + n},$$

$$(9) \qquad 1 + \frac{1}{g\,J_n'(g\,\varkappa)\,Q_n'(g\,\varkappa)\,F_1} = 1 - \frac{4\,(n + 1)\,n}{i\,(\varkappa'\,g)^2\,n - \varkappa^2\,g^2},$$

$$0 < n \leqq s,$$

und für $n = 0$

$$(8\,\text{a}) \qquad 1 - \frac{1}{1 - i\,\varkappa'\,g\,\lg\dfrac{\gamma\,g\,\varkappa\,i}{2}},$$

$$(9\,\text{a}) \qquad 1 - \frac{4}{2\,g^2\,\varkappa^2\,\lg\dfrac{\gamma\,g\,\varkappa\,i}{2} + g^2\,\varkappa'^2}.$$

Wir können also, da die in (8), (8a), (9) und (9a) zu 1 zu addierenden Werte bei großem $\varkappa'$ sehr klein sind, statt der

Klammerwerte 1 schreiben und kommen so zu den Ausdrücken (2) und (3) § 7, d. h. unser Draht wird sich in bezug auf Reflexion wie ein absoluter Leiter verhalten.

Wir erhalten demnach für die unmittelbare Nähe des Drahtes, laut (15) § 5:

$$(10) \qquad Z' = - A\, e^{i \omega t} \left\{ \frac{\lg \frac{\lambda}{\pi r \gamma i}}{\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma i}} + 2 \sum_{1}^{s} \frac{\iota^n . g^{2n} . \pi^n}{n!\, r^n \lambda^n} \cos n \varphi \right\}.$$

Diese Reihe wird aber sehr schnell abnehmen und wir begnügen uns deshalb mit dem Gliede $n = 1$ und haben:

$$(10\text{a}) \qquad Z' = - A\, e^{i \omega t} \left\{ \frac{\lg \frac{\lambda}{\pi r \gamma i}}{\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma i}} + \frac{2 i \pi g^2}{r \lambda} \cos \varphi \right\}.$$

Mit derselben Annäherung ist für die einfallende Welle:

$$(11) \qquad Z = A\, e^{i \omega t} \left\{ 1 + \frac{2 i \pi \varepsilon}{\lambda} \cos n \varphi \right\},$$

und daher für die gesamte elektrische Kraft:

$$(12) \qquad Z' + Z = A\, e^{i \omega t} \left\{ \frac{\lg \frac{r}{g}}{\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma i}} + \frac{2 i \pi}{r \lambda} \cdot (r^2 - g^2) \cos \varphi \right\}.$$

Für $r = g$ muß, da sich der Draht wie ein absoluter Leiter verhält, $Z + Z' = 0$ sein. Dies folgt auch aus (12).

Für sehr große r erhalten wir aus (14a), § 2:

$$Q_n = \iota^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2 x}} \cdot e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$n \leqq s.$$

Mit Benutzung dieses und der Werte (15), § 5 erhalten wir den Ausdruck (16), § 5, mit nur dem Unterschiede, daß hier s statt ∞ stehen wird. Der Unterschied fällt aber sofort weg, falls wir tatsächlich zu einem absoluten Leiter übergehen und r genügend groß wählen.

Dies zeigt uns die Richtigkeit des im § 5 angewandten Näherungsverfahrens.

Indem wir auch hier mit dem Gliede $n = 1$ abbrechen, erhalten wir:

$$(13)\quad Z' = -\frac{i\,A}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)} \left\{ -\frac{1}{\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma r}} + \frac{4\pi^2 g^2}{\lambda^2}\cos\varphi \right\}$$

Dieser letzte Ausdruck ist für uns interessant wegen des Unterschiedes zwischen unserer Lösung und derjenigen von J. J. Thomson, l. c. p. 432.

Wir gehen jetzt weiter in unserer Berechnung und erhalten, falls wir uns wieder mit dem Gliede $n = 1$ beschränken, für unmittelbare Nähe des Drahtes:

$$(14)\qquad \Phi' = i\,A\,e^{i\omega t}\left\{\frac{g^2\pi}{\lambda r} - i\,\frac{g^2}{r^2}\cos\varphi\right\}$$

und

$$(15)\qquad \Phi = i\,A\,e^{i\omega t}\left\{-\frac{\pi r}{\lambda} + i\cos\varphi\right\}.$$

Also

$$(16)\quad \Phi + \Phi' = -\,i\,A\,e^{i\omega t}\left\{\frac{\pi}{\lambda r}(r^2 - g^2) - \frac{i}{r^2}(r^2 - g^2)\cos\varphi\right\}.$$

Weiter wird sein

$$(17)\qquad R + R' = -\,A\,e^{i\omega t}\left\{1 + \frac{g^2}{r^2}\right\}\sin\varphi.$$

Die gesamte elektrische Kraft Y ist:

$$(18)\quad \begin{cases} Y = (\Phi + \Phi')\cos\varphi + (R + R')\sin\varphi \\ \quad = -\,A\,e^{i\omega t}\left\{1 + \frac{i\pi}{\lambda r}(r^2 - g^2)\cos\varphi - \frac{g^2}{r^2}\cos 2\varphi\right\}. \end{cases}$$

Wie wir sehen, ist auch hier $\Phi + \Phi' = 0$ für $r = g$.

Die Quadrate der Amplituden von (18) und (12) werden gleich sein den Quadraten der entsprechenden Moduln. Und zwar unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$(19)\qquad |Z + Z'|^2 = A^2\left(\lg\frac{r}{g}\right)^2 \cdot \frac{1 + \dfrac{2\pi^2(r^2 - g^2)\cos\varphi}{\lambda r \lg\frac{r}{g}}}{\left(\lg\frac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}}$$

und

$$(20)\qquad |Y|^2 = A^2.\left\{1 - \frac{2g^2}{r^2}\cos 2\varphi\right\}.$$

Und da die Glieder, welche in (19) und (20) zu 1 addiert werden, sehr klein sind, so können wir mit genügender Annäherung schreiben:

$$\frac{|Z + Z'|^2}{|Y|^2} = \left(\lg \frac{r}{g}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}}, \tag{21}$$

und, unsere Zahlenwerte eingesetzt, erhalten wir:

$$\frac{|Z + Z'|^2}{|Y|^2} = \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2,3}\right)^2 \tag{22}$$

für $r = 5$ cm.

Das obige in Worte umgesetzt ergibt: Im zweiten Fall, d. h. die elektrische Kraft der einfallenden Welle ist senkrecht zur Achse des Drahtes, geht, wie aus (20) folgt, die Welle am Draht beinahe ungeschwächt vorbei, folglich ist in diesem Falle eine verschwindende Reflexion und ebenfalls verschwindend ist die Schirmwirkung des Drahtes.

Ganz anders liegen die Verhältnisse im ersten Falle, wo also die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zur Achse des Drahtes ist. Hier haben wir starke Reflexion und Schirmwirkung und die gesamte elektrische Kraft wird geschwächt, und zwar bei unserem Beispiel um 2,3 mal.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der im Drahte absorbierten Energie über.

Zu dem Zwecke kehren wir zum § 6 zurück. Bei der Ausrechnung der Energie werden wir uns mit den ersten Gliedern, d. h. mit den Größen γ_0, δ_0, γ'_0 und δ'_0 begnügen.

Wir erhalten nach einigen Vereinfachungen:

$$\tag{23}\left\{\begin{aligned}
\gamma_0 &= -\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma} - \frac{1}{4\pi g \sqrt{\frac{c\sigma'}{\lambda}}}, & \delta_0 &= \frac{1}{4\pi g \sqrt{\frac{c\sigma'}{\lambda}}},\\
\gamma'_0 &= +\frac{1}{2\pi g \sqrt{\frac{\sigma' c}{\lambda}}} \cdot \lg \frac{\lambda}{\gamma g \pi} - \frac{\lambda^2}{2\pi^2 g^2}, & \delta'_0 &= \frac{1}{2\pi g \sqrt{\frac{\sigma' c}{\lambda}}} \cdot \lg \frac{\lambda}{\gamma g \pi}.
\end{aligned}\right.$$

Daraus folgt:

$$E = \frac{A^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{3/2}}{32 \cdot \pi^2 g \sqrt{\sigma'}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} + \left(\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2} \tag{24}$$

und

$$E' = \frac{A^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{3/2}}{4 \cdot \sqrt{\sigma'}} \cdot \frac{\pi^2 g^3 \lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma}}{\lambda^4} . \tag{25}$$

Bei dieser Berechnung ist angenommen:

$$\gamma_0 = -\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma} \quad \text{und} \quad \gamma_0' = -\frac{\lambda^2}{2 \pi^2 g^2}$$

und in (25) ist $(\pi/2 + \delta_0')^2$ vor $\gamma_0'^2$ vernachlässigt worden. Aus (24) und (25) erhalten wir:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\lambda^4}{8 \pi^4 g^4 \cdot \lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} + \left(\lg \frac{\lambda}{\pi g \gamma}\right)^2\right)} . \tag{26}$$

Wir sehen also aus diesem Ausdruck, daß das Verhältnis E/E' sehr groß ist, so daß also im zweiten Falle verschwindend wenig absorbiert wird im Verhältnis zum ersten Falle.

Rekapitulieren wir das Vorhergehende, so müssen wir schließen, daß im ersten Falle viel reflektiert und viel absorbiert wird und im zweiten wenig reflektiert und wenig absorbiert wird.

§ 9. Zusammenfassung.

Wir setzten an die Spitze unserer Arbeit die Bedingung (6), § 1 und sahen, daß wir nur dadurch ein richtiges Resultat erhalten konnten, indem wir die Hankelsche Zylinderfunktion für die Lösung benutzten.

Die §§ 3 und 4 geben uns die allgemeinen Lösungen, von welchen man zu beliebigen Spezialfällen übergehen kann.

In § 5 führten wir ein von dem Verfasser gefundenes allgemeines Integral der Maxwellschen Gleichungen an, welches, auf den Fall 1 angewendet, uns zur Lösung des § 3 führt. Durch eine Annäherung erhalten wir eine Lösung (16), § 5 für große r, deren Richtigkeit durch direkte Ableitung in § 8 gezeigt wird. Das Integral (18), § 5 bietet auch ein gewisses Interesse.

In § 6 wird die im Drahte absorbierte Energie berechnet, ebenso die *zum* und *vom* Drahte strömende. Die Rechnung wird ganz allgemein geführt bei der Voraussetzung, daß das den Draht umgebende Medium ein Dielektrikum ist.

In § 7 werden zwei Spezialfälle in Betracht gezogen: 1. der Draht ist ein absoluter Leiter; 2. der Draht ist ein absolutes Dielektrikum. Es werden die Energien und die Koeffizienten B_n und B_n' berechnet. Weiter wird auf die Abweichung unserer Lösung von derjenigen von J. J. Thomson hingewiesen. Außerdem wird noch einmal die Einführung der Hankelschen Funktion bez. der Bedingung (6), § 1 als erforderlich gezeigt.

In § 8 wird die Berechnung für eine im Verhältnis zum Drahtdurchmesser große Wellenlänge ausgeführt, und zwar für einen Draht aus Kupfer. Dabei zeigt sicht, daß die Konstanten des Materials des Drahtes praktisch herausspringen, d. h. der Draht verhält sich in bezug auf Reflexion wie ein absoluter Leiter. Da er aber doch keiner ist, so muß er Energie absorbieren, obwohl sehr wenig. Diese Energie wird berechnet und es zeigt sich, daß das Verhältnis der absorbierten Energien bei den Fällen 1 und 2 sehr groß ist. Außerdem wird auf die Schirmwirkung hingewiesen und das am Schlusse des § 8 ausgesprochene Resultat ist auch sehr charakteristisch.

Wie leicht aus § 8 zu ersehen ist, berechnet sich die Wellenlänge λ_1 im Drahte für Fall 1 zu:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\Re(\varkappa')} = \sqrt{\frac{\lambda}{c\,\sigma'}} \tag{1}$$

und wenn wir die Zahlenwerte unseres Beispiels einsetzen:

$$\lambda_1 = 0{,}0072 \text{ cm.}$$

Aus (1) folgt weiter:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda\,c\,\sigma'}}\,. \tag{2}$$

Laut § 2 und § 3 erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} Z'' &= -\frac{i\,A\,.\,e^{i\omega t}}{\varkappa'\sqrt{g\,r}}\,.\,e^{-i\varkappa'(g-r)} \\ &\quad\left\{\frac{1}{\lg\dfrac{\lambda}{\pi g i \gamma}} + 4\sum_{1}^{s}\frac{i^n n\,.\,\pi^n\,.\,g^n}{n!\,\lambda^n}\,.\cos n\,\varphi\right\}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

welche Reihe sehr schnell abfällt und so lange gilt, bis man noch $\varkappa' r$ groß annehmen kann.

Der Abstand d von der Oberfläche, auf welchen sich die Amplitude um den e^{ten} Teil vermindert hat, ist:

$$d = g - r_1 = \frac{1}{\text{imag. Teil von } \varkappa'} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\sigma' c}} = \frac{\lambda_1}{2\pi} \tag{4}$$

und bei unseren Zahlenwerten:

$$d = \mathbf{0{,}023\ mm.}$$

Einer Verminderung um den a^{ten} Teil entspricht ein Abstand d_1:

$$d_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{Log} . a}{0{,}434}; \tag{5}$$

z. B. ist bei $a = 100$; $d_1 = \mathbf{0{,}11\ mm}$ ($0{,}434 = \operatorname{Log} e$).

Für $r = 0$ folgt aus § 3:

$$\underset{r=0}{Z'} = -\frac{i A}{\lg \dfrac{\lambda}{\pi g \gamma i}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{g \varkappa'}} \cdot e^{i \omega t} \cdot e^{-i \varkappa' g}. \tag{6}$$

Demnach folgt aus (3), falls wir uns mit dem ersten Gliede begnügen:

$$\frac{\underset{r=0}{Z''}}{\underset{r=g}{Z''}} = \sqrt{2 \pi g \varkappa'} . e^{-i \varkappa' g}, \tag{7}$$

d. h. dies Verhältnis wird eine verschwindend kleine Größe sein.

St. Petersburg, Juli 1905.

(Eingegangen 25. Juli 1905.)

Anmerkung. Ich möchte zu der Arbeit von W. Seitz (Ann. d. Phys. **16**. p. 747. 1905), welche mir leider erst nach Absendung des Manuskripts in die Hände gekommen ist und welche dasselbe Thema behandelt, folgendes bemerken.

Auf p. 751 (XII) gebraucht Seitz für den Außenraum als Lösung die Funktion:

$$K_n(p) = -P_n(p).$$

Laut meiner Arbeit müßte auch hier, d. h. bei reellem p, die von mir gebrauchte modifizierte Hankelsche Funktion:

$$Q_n(p) = \frac{i\pi}{2} J_n(p) - K_n(p).$$

benutzt werden.

Es folgt daraus mit anderen Worten, daß die Lösung von W. Seitz der Bedingung (6), § 1 meiner Arbeit widerspricht. Außerdem muß in den Klammern in (XII) und (XIII) vor der Eulerschen Konstante statt + ein − stehen. (Vgl. Anmerkung zu § 2 meiner Arbeit.)

St. Petersburg, September 1905.