5. *Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern; von Fritz Hasenöhrl.*[1])

Im folgenden ist der Versuch gemacht, einige Sätze aus der Theorie der Wärmestrahlung bewegter Körper, möglichst ohne Benutzung spezieller Vorstellungen über das Wesen der strahlenden Wärme, aus den thermodynamischen Hauptsätzen abzuleiten und anzuwenden. Dadurch unterscheidet sich diese Arbeit nach Methode und Ziel wesentlich von einigen in jüngster Zeit erschienenen Publikationen, welche dasselbe Thema vom Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie, speziell von der Lorentzschen Theorie ausgehend, behandeln. Gänzlich ausreichend sind jedoch die thermodynamischen Grundsätze für das Folgende nicht. Den Wert des Strahlungsdruckes auf eine bewegte Fläche, den wir im folgenden brauchen werden, liefern sie nämlich nicht. Zwar ist die Existenz eines solchen Druckes eine Forderung des zweiten Hauptsatzes, und kann auch der Wert desselben für eine ruhende Fläche aus dem Energiesatz abgeleitet werden[2]); doch versagt diese Methode, wenn man sie auf bewegte Körper anzuwenden versucht. Der Wert des Strahlungsdruckes auf eine bewegte Fläche muß also aus einer speziellen Hypothese über das Wesen der strahlenden Wärme abgeleitet werden; und zwar wollen wir den Wert benutzen, den Hr. Abraham[3]) aus der Lorentzschen Theorie abgeleitet hat. Derselbe Wert ergibt sich übrigens, wie weiter unten gezeigt werden soll, auch aus einer ganz anderen Betrachtung, die auf dem Boden der alten Lichttheorie fußt.

Sonst wollen wir von der strahlenden Wärme nichts anderes voraussetzen, als daß sie eine Energieart ist, welche sich

1) Der vorliegende Aufsatz ist eine teilweise gekürzte, gänzlich neue Bearbeitung des Inhalts mehrerer Abhandlungen, die der k. Akademie d. Wissenschaften in Wien (Abt. II a) in den Sitzungen vom 11. Februar, 28. April und 23. Juni 1904 vorgelegt wurden.

2) P. Drude, Lehrbuch der Optik p. 447.

3) M. Abraham, Boltzmann-Festschrift p. 87. 1904.

nach allen Richtungen mit der gleichen absoluten[1]) Geschwindigkeit c bewegt, und daß die Richtung des Energieflusses, des „Strahles", durch die Konstruktion nach dem Huyghensschen Prinzip bestimmt wird, auch wenn es sich um die Emission eines bewegten Körpers handelt.[2]) Ferner setzen wir natürlich die unbeschränkte Gültigkeit der thermodynamischen Hauptsätze voraus.

Trotz des wesentlich anderen Ausgangspunktes werden sich doch manche Berührungspunkte mit der elektromagnetischen Theorie, speziell mit einer Arbeit des Hrn. Abraham[3]) ergeben, welche kürzlich, als die vorliegende Arbeit schon im wesentlichen abgeschlossen war, erschienen ist. Es betrifft dies vor allem verschiedene, rein geometrische Betrachtungen, welche jedoch nicht immer so einfach sind, daß sie nicht zu Mißverständnissen Anlaß geben könnten. Soweit ich es übersehe, herrscht da zwischen Hrn. Abraham und mir vollständige Übereinstimmung.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit ist kurz folgender: In § 1 werden die geometrischen Beziehungen zwischen absoluter und relativer Strahlengeschwindigkeit und -richtung aufgestellt. Dieselben sind zum Teil, wie erwähnt, schon von anderen Autoren angegeben worden, mußten jedoch hier vollständig zusammengestellt werden.

§ 2 gibt die Definitionen für die Begriffe „absolute Strahlung", „totale" und „wahre relative Strahlung"; auch diese Begriffe sind, zum Teil in anderer Bedeutung, bereits von Hrn. Abraham[4]) gebildet worden. Es wird ferner der Satz abgeleitet, daß die „wahre relative" Ausstrahlung eines bewegten schwarzen Körpers das Lambertsche Kosinusgesetz befolgt.

In § 3 wird die Dichte der Strahlung in einem bewegten Hohlraum berechnet. Dieselbe setzt sich aus zwei Bestand-

---

1) Unter absolut soll natürlich stets nur „in bezug auf die Fixsterne" verstanden sein.

2) Es ist dies natürlich nicht a priori evident, wie Hr. Abraham l. c. (Anm. 3) p. 251 bemerkt, doch, wie ich glaube, eine sehr plausible Annahme.

3) M. Abraham, Ann. d. Phys. **14.** p. 236. 1904. (l. c.)

4) M. Abraham, l. c. p. 245.

teilen zusammen, von denen der eine aus dem Wärmevorrat der Begrenzung des Hohlraumes stammt, während der andere das Äquivalent der Arbeit ist, welche nötig ist, ein solches System in Bewegung zu setzen.

Bisher wurde nur die Existenz eines Druckes der Strahlung vorausgesetzt. Da wir im folgenden auch den Betrag desselben kennen müssen, wird in

§ 4 der Wert des Strahlungsdruckes den Arbeiten des Herrn Abraham entnommen und auch die erwähnte andere Ableitung dieses Wertes angegeben. Wir sind jetzt imstande, die Beziehung zwischen der totalen und wahren relativen Strahlung zahlenmäßig anzugeben.

In § 5 wird die Arbeit berechnet, welche aufgewendet werden muß, um die Geschwindigkeit eines mit Strahlung erfüllten Hohlraumes zu verändern. Die Arbeit, welche zur Vergrößerung der Geschwindigkeit geleistet werden muß, wird bei Verminderung derselben um den gleichen Betrag wieder gewonnen, falls die Geschwindigkeitsänderung unendlich langsam vorgenommen wird. Dann ist dieser Vorgang also reversibel; und zwar sowohl bei „isothermer" als auch bei „adiabatischer" Veränderung der Geschwindigkeit. Diese Verhältnisse geben Anlaß zur Bildung des Begriffes einer scheinbaren, durch Strahlung bedingten Masse, welche der sogenannten elektromagnetischen Masse ganz analog ist.

In § 6 beschäftigen wir uns mit der Wärmemenge, welche ein bewegter schwarzer Körper an einen mit ihm starr verbundenen Hohlraum abgibt, wenn die Geschwindigkeit dieses Systems verändert wird. Wir stoßen dabei auf einen Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, welcher dadurch gelöst werden kann, daß man annimmt, daß die Dimensionen der Materie von der Geschwindigkeit ihrer Translationsbewegung durch den Äther abhängig sind. Und zwar ergibt sich für diese Abhängigkeit genau der Betrag, der nach Lorentz und Fitzgerald zur Erklärung des negativen Resultates des Versuches von Michelson und Morley nötig ist.

§ 1.

Es ist bekanntlich zweckmäßig, in der Optik bewegter Körper zwei Bezugssysteme zu benutzen, von denen das eine in absoluter Ruhe ist, während das andere die Bewegung der Materie mit macht, also in relativer Ruhe ist.[1]) Dementsprechend hat man zwischen absoluter und relativer Geschwindigkeit und Richtung eines Strahles zu unterscheiden. Sei die Geschwindigkeit der Materie durch den Vektor $\mathfrak{w}$ gegeben, dessen Betrag $w = \beta c$ sei. (c ist die Lichtgeschwindigkeit.) Wir bezeichnen ferner den *spitzen* Winkel, den eine mit der *absoluten* Strahlenrichtung zusammenfallende Gerade mit dem Vektor $\mathfrak{w}$ einschließt mit φ; den *spitzen* Winkel, den eine mit der *relativen* Strahlenrichtung zusammenfallende Gerade mit $\mathfrak{w}$ einschließt, mit ψ. Sei ferner c' der Betrag der relativen Geschwindigkeit des Lichtes, so ergeben sich aus der Fig. 1 leicht die folgenden Beziehungen, in denen das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Bewegungsrichtung der Materie und des betrachteten Strahles denselben Sinn haben oder nicht:

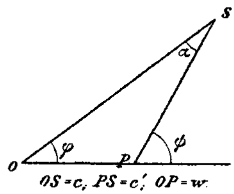

Fig. 1.

$$c' = c\sqrt{1 + \beta^2 \mp 2\beta\cos\varphi} \tag{1}$$

$$= c\left(\mp \beta\cos\psi + \sqrt{1 - \beta^2\sin^2\psi}\right). \tag{2}$$

Wir werden auch oft die Bezeichnungsweise:

$$c_- = c\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta\cos\varphi} = c\left(-\beta\cos\psi + \sqrt{1 - \beta^2\sin^2\psi}\right) \tag{3a}$$

$$c_+ = c\sqrt{1 + \beta^2 + 2\beta\cos\varphi} = c\left(\beta\cos\psi + \sqrt{1 - \beta^2\sin^2\psi}\right) \tag{3b}$$

verwenden. Ferner ergibt sich leicht:

$$\sin\psi = \sin\varphi\,\frac{c}{c'}, \tag{4}$$

$$\cos\psi = (\cos\varphi \mp \beta)\frac{c}{c'}, \tag{5}$$

$$\cos\varphi = \pm\beta\sin^2\psi + \cos\psi\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\psi}, \tag{6}$$

$$1 \mp \beta\cos\varphi = \sqrt{1 - \beta^2\sin^2\psi}\;\frac{c'}{c}. \tag{7}$$

---

1) Vgl. H. A. Lorentz, De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux. Arch. Néerl., **21.** p. 106. 1886.

Den Aberrationswinkel (Winkel zwischen absoluter und relativer Strahlenrichtung) bezeichnen wir mit α; es ist

$$\sin\alpha = \beta\sin\psi, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}. \tag{8}$$

Endlich ergibt sich durch Differentiation der Gleichung (6):

$$\sin\varphi\, d\varphi = \sin\psi\, d\psi \frac{c'^2}{c^2\cos\alpha}, \tag{9}$$

eine Gleichung, welche das Verhältnis des Öffnungswinkels eines Strahlenbündels im absoluten und relativen Strahlengange angibt.

Bewegt sich ein Spiegel mit beliebiger Geschwindigkeit in der Richtung seiner Normalen (oder auch senkrecht dazu), so ist für die relative Strahlenrichtung das Reflexionsgesetz streng erfüllt.[1])

Unter „relativ" werden wir stets relativ in bezug auf ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ bewegtes System verstehen. Wenn wir mit verschiedenen Geschwindigkeiten des Bezugssystems zu tun haben, werden wir kurz sagen: relativ „in bezug auf $\mathfrak{w}$".

§ 2.

Als positiven Sinn der Normalen, oder als Normale schlechtweg, des Oberflächenelementes eines materiellen Körpers wollen wir ein für alle Male die Richtung festsetzen, welche vom Körper nach außen (in den umgebenden Äther) weist. Dadurch ist auch der positive Sinn der Normalen an ein strahlendes oder reflektierendes Flächenelement gegeben. Bewegt sich nun das Flächenelement im Sinne der positiven oder negativen Normalen, so wollen wir im folgenden kurz von einer positiven oder negativen Bewegung desselben reden.

---

1) Es ergibt sich dies sowohl aus der elektromagnetischen Theorie (vgl. M. Abraham, Boltzmann-Festschrift p. 87. 1904) als auch aus dem Huyghensschen Prinzip (vgl. F. Hasenöhrl, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien II a **113.** p. 469. 1904). Bewegt sich der Spiegel in anderer Richtung, so ist dieses Gesetz nur bis auf Größen von der Ordnung β richtig. Das Reziprozitätsgesetz ist aber für die Relativstrahlen stets exakt gültig, d. h. ein Relativstrahl kann stets denselben Weg in beiden Richtungen durchlaufen; es ist dies eine Forderung der Thermodynamik (vgl. F. Hasenöhrl, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien IIa. **113.** p. 493. 1904).

Unter *absoluter Strahlung* versteht man die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer senkrecht zur absoluten Strahlenrichtung gelegenen, absolut ruhenden Ebene durchsetzt. Diese Energiemenge ist gleich der Wärme, welche von der Flächeneinheit einer gleich gelegenen schwarzen Ebene absorbiert wird.

Unter *totaler relativer Strahlung* verstehen wir die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer (gedachten) Ebene durchsetzt, welche sich mit der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ bewegt, und welche senkrecht zur relativen Strahlenrichtung orientiert ist. Ersetzt man diese gedachte Ebene durch eine materielle, schwarze (gleich bewegte und orientierte) Ebene, so ist diese totale relative Strahlung nicht identisch mit dem Betrag der von letzterer absorbierten Wärme; denn es kommt hier noch die Arbeit des Strahlungsdruckes oder die (äußere) Arbeit gegen denselben in Betracht, je nach dem sich die schwarze Ebene in negativem oder positivem Sinne bewegt. Vermindert bez. vermehrt man die totale relative Strahlung um den Betrag dieser Arbeit, so erhält man den Betrag der von der schwarzen Ebene absorbierten Wärme, welchen Betrag wir die *wahre relative Strahlung* nennen wollen.

Diese Anschauungsweise, nach welcher sich mechanische Arbeit direkt in Strahlungsenergie verwandelt und umgekehrt, ist, wie ich glaube, zuerst von Poynting[1]), dann von v. Türin[2]), unabhängig von jeder speziellen Vorstellung über das Wesen der strahlenden Wärme, rein als Folge des Energiesatzes ausgesprochen worden. Es ist dies auch in Einklang mit der Theorie von Abraham. Was wir hier wahre relative Strahlung nennen, deckt sich mit der „relativen Strahlung" schlechtweg des Hrn. Abraham.

Ganz analog liegen die Verhältnisse bei der Emission einer bewegten schwarzen Fläche. Dieselbe wird von einem gewissen Betrag totaler relativer Strahlung verlassen, welche gleich ist der wahren relativen Strahlung vermehrt bez. vermindert um den Betrag der Arbeit, welche gegen den Strahlungsdruck, bez. vom Strahlungsdruck geleistet wird, je nach dem

---

1) J. H. Poynting, Phil. Trans. **202** A. 1904.

2) Vl. v. Türin, Ann. d. Naturphil. **3**. p. 270. 1904.

sich die schwarze Fläche in positivem oder negativem Sinne bewegt. Nur die wahre relative Strahlung stammt aus dem Wärmevorrat des bewegten Körpers, wodurch unsere Terminologie gerechtfertigt werden mag.

Die Differenz zwischen der totalen und der wahren relativen Strahlung wollen wir die *scheinbare relative Strahlung* nennen.

Die Beziehung zwischen der absoluten und der totalen relativen Strahlung ergibt sich aus rein geometrischen Betrachtungen. Da die Dichte der Strahlungsenergie eine skalare Größe ist, hat sie natürlich für beide Bezugssysteme denselben Wert. Haben wir also mit paralleler Strahlung zu tun, so verhält sich die absolute Strahlung zur totalen relativen wie $c:c'$.

Betrachten wir nun ein Strahlenbündel, dessen absolute Strahlenrichtungen mit $\mathfrak{w}$ Winkel einschließt, deren Größe zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegt, und ist die absolute Strahlung dieses Bündels etwa durch $2\pi J \sin\varphi\, d\varphi$ gegeben, so ist die entsprechende totale Relativstrahlung nach obigem $2\pi J \sin\varphi\, d\varphi\, c' / c$; schreiben wir dies in der Form $2\pi J' \sin\psi\, d\psi$, so ist entsprechend Gleichung (9):

$$J' = J \frac{c'^3}{c^3 \cos\alpha}. \tag{10}$$

Betrachten wir also eine beliebige zerstreute Strahlung, so verhalten sich die „Strahlungsintensitäten“ der absoluten und der totalen relativen Strahlung wie $1 : c'^3 / c^3 \cos\alpha$; die Dichten der Strahlung, welche sich im absoluten und relativen Strahlengange in der Einheit des Öffnungswinkels bewegen, verhalten sich wie

$$\frac{J}{c} : \frac{J'}{c'} = 1 : \frac{c'^2}{c^2 \cos\alpha}. \tag{11}$$

Wir wollen nun daran gehen, die Beziehung zwischen der totalen und wahren relativen Strahlung aufzusuchen. Zu diesem Zwecke betrachten wir einen zylindrischen Hohlraum R, dessen Basisflächen A und B zwei schwarzen Körpern angehören sollen, während die Mantelfläche des Zylinders, sowie die äußere Begrenzung der beiden schwarzen Körper nach innen vollkommen spiegelnde Flächen sein sollen. Der Querschnitt des Raumes R sei gleich 1; seine Höhe gleich h. Sowohl der Raum R als auch der Außenraum soll ganz frei von ponderabler

Materie sein. Dieses System soll sich mit der Geschwindigkeit w in der Richtung des Pfeiles bewegen (Fig. 2). Der Außenraum soll sich auf der Temperatur 0^0 *A.* befinden (damit das System bei seiner Bewegung keinen äußeren Widerstand erfahre), dagegen sollen die schwarzen Flächen A und B eine bestimmte, von Null verschiedene Temperatur haben. (Wenn das beschriebene System ruht, ist es nach außen ganz abgeschlossen.)

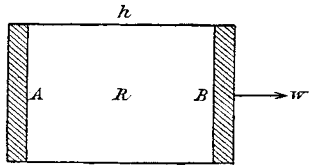

Fig. 2.

Die Fläche A wird nun in der Zeiteinheit von einem gewissen Betrag totaler relativer Strahlung verlassen; wir greifen die Strahlung heraus, deren relative Richtung mit der Normalen (und daher auch mit $\mathfrak{w}$) Winkel zwischen ψ und $\psi + d\psi$ einschließt. Ihr Betrag sei:

$$2\pi i \cos\psi \sin\psi \, d\psi \,. \tag{12a}$$

Diese Strahlung übt auf A einen gewissen Druck aus, dessen in die Richtung der negativen Normalen fallende Komponente wir mit .

$$2\pi p_1 \cos\psi \sin\psi \, d\psi \tag{13}$$

bezeichnen wollen. Da sich A in positivem Sinne bewegt, muß von außen her in der Zeiteinheit die Arbeit

$$w \,.\, 2\pi p_1 \cos\psi \sin\psi \, d\psi \tag{14}$$

geleistet werden, damit die gleichförmige Bewegung der Fläche A erhalten bleibe. Bezeichnen wir die wahre Strahlung von A mit

$$2\pi i_0 \cos\psi \sin\psi \, d\psi \,, \tag{15}$$

so ist nach dem früheren:

$$i = i_0 + w p_1 \,.$$

Die hervorgehobene totale Relativstrahlung (12a) trifft nun auf die in negativem Sinne bewegte Ebene B auf und wird dort zum Teil in mechanische Arbeit verwandelt, zum Teil absorbiert. Und zwar hängt das Verhältnis dieser beiden Teile von der Größe des Druckes ab, den die nun in B auffallende Strahlung (12a) auf diese Fläche ausübt. Denken wir uns nun für den

Augenblick B auf der Temperatur 0^{0} $A.$, so ist die von A ausgehende Strahlung die einzige in R vorhandene und es fordert das Reaktionsprinzip, das in diesem Falle zu leugnen wohl allen bisher geäußerten Ansichten widersprechen würde, daß die Strahlung (12a) in B denselben Druck wie in A, aber in entgegengesetzter Richtung ausübt.[1]) Da die entsprechende Arbeit, deren Betrag also wieder durch (14) gegeben ist, hier von der Strahlung geleistet wird, ist ihr Betrag von (12a) abzuziehen, um die von B absorbierte Strahlung zu erhalten, wofür wir also wieder die wahre Strahlung (15) erhalten.

Nehmen wir nun wieder an, daß sich auch B auf einer bestimmten von Null verschiedenen Temperatur befindet, so wird B unter einem gewissen Winkel mit der Normalen von der totalen Relativstrahlung

$$2\pi i' \cos\psi \sin\psi \, d\psi \tag{12b}$$

verlassen, zu welcher in diesem Falle der Arbeitsbetrag

$$w \, . \, 2\pi p_2 \cos\psi \sin\psi \, d\psi$$

zu addieren ist, um die wahre Strahlung zu erhalten, welche von B geliefert wird; sie gibt ebenso wie früher auch die Wärmemenge an, welche auf der anderen Seite des Hohlraumes von A absorbiert wird.

Es herrscht dann auf beiden Seiten der gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Druck

$$2\pi (p_1 + p_2) \cos\psi \sin\psi \, d\psi. \tag{16}$$

Wir sehen, daß die wahre relative Strahlung allein für den Wärmetransport zwischen den Körpern A und B maßgebend ist; denn sie stammt ganz aus dem Wärmevorrat des einen schwarzen Körpers und wird vollständig in Wärmevorrat des andern verwandelt. Die andere in R vorhandene Energie, die scheinbare Strahlung, ist aus mechanischer Arbeit gewonnen. Auf der einen Seite des Hohlraumes wird beständig Arbeit in Wärme verwandelt, welche denselben durchsetzt und an der anderen Seite wieder in Arbeit vom gleichen Betrag rückverwandelt wird, so daß im ganzen bei gleichförmiger Translation unseres Systems keine Arbeit geleistet oder gewonnen wird.

---

1) Die Ausführungen des § 4 werden dies bestätigen.

Sind die beiden Flächen A und B auf derselben Temperatur, so fordert der zweite Hauptsatz, daß ihre gesamte gegenseitige wahre relative Zustrahlung gleich sei; denn nur dann bleiben ihre Temperaturen einander gleich. Damit dasselbe auch von zwei beliebigen, beliebig gegeneinander orientierten Flächenelementen gelte, muß für die wahre relative Strahlung das Kosinusgesetz gelten; d. h. es muß i_0 von ψ unabhängig sein und muß ferner für A und B, also für eine positiv und negativ bewegte Fläche, denselben Wert haben. Wir *erhalten* also den für das Folgende wichtigen Satz:

Die wahre relative Ausstrahlung eines bewegten schwarzen Körpers befolgt (im relativen Strahlengange) das Lambertsche Kosinusgesetz.

Dagegen hat die totale relative Strahlungsintensität einer in positivem bez. negativem Sinne bewegten schwarzen Fläche den Betrag:

(17a) $$i = i_0 + w p_1$$

bez.

(17b) $$i' = i_0 - w p_2,$$

und zwar ist natürlich gar kein Grund vorhanden, auch von diesen Größen anzunehmen, daß sie von ψ unabhängig seien.

Es kann für den Strahlungszustand in R von keinerlei Einfluß sein[1]), wenn wir die eine der beiden schwarzen Flächen A oder B durch einen Spiegel (oder auch durch eine beliebige andere Fläche) ersetzen. Insbesondere gibt auch (16) den Wert des Druckes auf einen bewegten Spiegel an, wenn derselbe, in negativem bez. positivem Sinne bewegt, von der totalen Relativstrahlung (12a) bez. (12b) getroffen wird.

§ 3.

Wir wollen jetzt die Dichte der Energie in unserem bewegten Hohlraume berechnen. Die von A ausgehende Strahlung (12a) bewegt sich nach § 1 mit der Geschwindigkeit c_-, die Strahlung (12b) mit der Geschwindigkeit c_+ durch den Hohlraum. Da der Weg, den beide Strahlungen im Hohlraum R zurückzulegen haben, $h / \cos\psi$ ist, so ist die Zeit, während

1) Vgl. J. H. Poynting, l. c.

welcher sie sich in R befinden, gleich $h/c_- \cos\psi$ bez. $h/c_+ \cos\psi$; sie tragen daher zum Energieinhalte von R der Summanden

$$h \,.\, 2\pi \sin\psi \, d\psi \left(\frac{i}{c_-} + \frac{i'}{c_+}\right)$$

bei. Wenn wir diesen Ausdruck bezüglich ψ von 0 bis $\pi/2$ integrieren, ferner durch das Volumen h des Raumes R dividieren, so erhalten wir die Dichte ϱ der totalen Strahlung in R. Setzen wir für i und i' gleich ihre Werte aus (17a) und (17b) ein, so wird also:

$$\varrho = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \left(\frac{i_0 + w p_1}{c_-} + \frac{i_0 - w p_2}{c_+}\right).$$

Wir setzen nun

(18) $$\varrho = \varepsilon + \varepsilon',$$

worin

$$\varepsilon = 2\pi i_0 \int_0^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \left(\frac{1}{c_-} + \frac{1}{c_+}\right) \quad .$$

und

(19) $$\varepsilon' = 2\pi w \int_0^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \left(\frac{p_1}{c_-} - \frac{p_2}{c_+}\right)$$

ist. Setzen wir in den ersten dieser Ausdrücke für c_- und c_+ ihre Werte aus (3a) und (3b) ein, so wird

$$\varepsilon = \frac{4\pi i_0}{c(1-\beta^2)} \int_0^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}.$$

Wir setzen nun die Dichte der Energie in einem ruhenden Hohlraum

(20) $$\frac{4\pi i_0}{c} = \varepsilon_0 \left(= \frac{4e}{c}\right)$$

(e ist das „Emissionsvermögen") und

$$\varkappa = \frac{1}{1-\beta^2} \int_0^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}$$

oder nach Ausführung der Integration

(21) $$\varkappa = \frac{1}{2(1-\beta^2)} + \frac{1}{4\beta} \log\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Dann ist

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varkappa . \tag{22}$$

Wenn wir Größen von der Ordnung β^4 an vernachlässigen, so wird

$$\varkappa = 1 + \frac{2}{3}\beta^2 . \tag{23}$$

Es ist offenbar ε die Dichte der wahren Strahlung. Um ε', die Dichte der scheinbaren Strahlung, zu berechnen, müssen wir die Werte von p_1 und p_2 kennen, mit denen wir uns also im folgenden Abschnitt beschäftigen wollen.

§ 4.

Nach Hrn. Abraham ist der Strahlungsdruck auf eine bewegte Fläche gleich der in der Zeiteinheit auffallenden oder abgehenden Strahlung (nach unserer Terminologie ist dies die totale relative Strahlung) dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit; und zwar wirkt dieser Druck in der Richtung der absoluten Fortpflanzung im Sinne der negativen Normalen. Da wir unter p_1 und p_2 senkrechte Druckkomponenten verstanden, ist also:

$$2\pi p_1 \cos\psi \sin\psi \, d\psi = \frac{2\pi i \cos\psi \sin\psi \, d\psi}{c} \cdot \cos\varphi ,$$

$$2\pi p_2 \cos\psi \sin\psi \, d\psi = \frac{2\pi i' \cos\psi \sin\psi \, d\psi}{c} \cdot \cos\varphi .$$

Dividieren wir auf beiden Seiten die gleichen Faktoren weg und setzen für $\cos\varphi$ seinen Wert aus (6) ein, so wird unter Berücksichtigung des entsprechenden Vorzeichens:

$$p_1 = \frac{i}{c}\left(\beta \sin^2\psi + \cos\psi \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}\right), \tag{24a}$$

$$p_2 = \frac{i'}{c}\left(-\beta \sin^2\psi + \cos\psi \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}\right). \tag{24b}$$

Setzen wir dies in die Gleichungen (17) ein, so erhält man

$$i = \frac{i_0}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}\left(-\beta\cos\psi + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}\right)} = \frac{i_0\, c}{\cos\alpha \, . \, c_-}, \tag{25a}$$

$$i' = \frac{i_0}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}\left(\beta\cos\psi + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}\right)} = \frac{i_0\, c}{\cos\alpha \, . \, c_+} . \tag{25b}$$

Wir können daher auch setzen:

$$(26\text{a})\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{i_0\left(\beta \sin^2\psi + \cos\psi\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\right)}{c\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\left(-\beta\cos\psi + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\right)} \\ \qquad = \dfrac{i_0\left(\cos\psi + \beta\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\right)}{c(1-\beta^2)\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}}, \end{cases}$$

$$(26\text{b})\quad \begin{cases} p_2 = \dfrac{i_0\left(-\beta \sin^2\psi + \cos\psi\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\right)}{c\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\left(\beta\cos\psi + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\right)} \\ \qquad = \dfrac{i_0\left(\cos\psi - \beta\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}\right)}{c(1-\beta^2)\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke können nun, wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, auch aus einer anderen Hypothese abgeleitet werden; nämlich aus der Annahme, daß ein bewegter Körper in der Zeiteinheit gleich viele Wellen aussendet, wie in der Ruhe und daß auch die Amplitude dieser Wellen durch die Bewegung der Lichtquelle nicht geändert wird. Nur die Wellenlänge erfährt eine Änderung entsprechend dem Dopplerschen Prinzip. Nimmt man nun, der alten Lichttheorie entsprechend, an, daß die Energie eines Wellenzuges caeteris paribus per Längeneinheit dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional ist, daß also auf eine Welle eine Energiemenge fällt, welche der ersten Potenz ihrer Länge umgekehrt proportional ist, so steht, da ja die Zahl der ausgesandten Wellen in beiden Fällen dieselbe ist, die Ausstrahlung des bewegten Körpers zu der des ruhenden im umgekehrten Verhältnis der Wellenlängen. Da dieses Verhältnis nach dem Dopplerschen Prinzip gleich $(1 \mp \beta \cos\varphi)$ ist, so erhalten wir:

$$i = \frac{i_0}{1-\beta\cos\varphi} = \frac{i_0\, c}{\cos\alpha \,.\, c_-}$$

bez.

$$i' = \frac{i_0}{1+\beta\cos\varphi} = \frac{i_0\, c}{\cos\alpha \,.\, c_+},$$

wobei wir (7) benutzt haben. Diese Ausdrücke sind nun in der Tat mit den Gleichungen (25) identisch. Setzen wir sie in die Gleichungen (17) ein, so können wir natürlich auch die Gleichungen (24) und (26) ableiten.

Der hier angeführte Gedankengang wurde zuerst von Hrn. Larmor[1]) auf das Problem der Reflexion, dann von

1) J. Larmor, Rep. brit. Ass. 1900.

Hrn. Poynting[1]) auf die Emission einer bewegten Fläche angewendet. Die genannten Autoren beschränken sich jedoch auf den Fall senkrechter Inzidenz bez. Emission. Übrigens hat Hr. Poynting[1]) auch nach einer anderen Methode den Druck der Strahlung bei senkrechter Emission mit demselben Resultat berechnet.

Setzen wir in (16) die Werte (26) ein, so erhalten wir den Druck auf die Flächen A und B. Berechnen wir z. B. den Druck, der auf der Fläche B lastet und drücken diesen Wert etwa durch die Dichte der totalen einfallenden Strahlung

$$\frac{2\pi i \sin\psi\, d\psi}{c_-} = d$$

aus, so erhalten wir

$$(27) \qquad 2\, d \cdot \frac{c_-^2}{c^2} \frac{\cos^2\psi}{1-\beta^2} = 2\, d \frac{(\cos\varphi - \beta)^2}{1-\beta^2}\,,$$

welche Gleichung natürlich mit der entsprechenden des Hrn. Abraham übereinstimmt.[2])

Der Druck auf einen bewegten Spiegel läßt sich übrigens aus der erwähnten Hypothese sehr leicht direkt ableiten, wobei man auch mit einem Schlage das Reflexionsgesetz erhält.[3]) Aus derselben folgt ja unmittelbar, daß sich die Intensitäten des einfallenden und reflektierten Lichtes umgekehrt wie die Wellenlängen, direkt wie die Schwingungszahlen verhalten.[4])

§ 5.

Wir wollen uns nun mit dem Bestandteil der Energie in R beschäftigen, welcher der scheinbaren Strahlung verdankt wird und welcher aus mechanischer Arbeit gewonnen ist. Setzen wir in (19) für p_1 und p_2 ihre Werte aus (26) ein, so wird

$$\varepsilon' = \frac{4\pi w i_0}{c^2(1-\beta^2)^2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\psi\, d\psi\, \frac{\beta\cos^2\psi + \beta(1-\beta^2\sin^2\psi)}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}}\,.$$

Wir setzen

$$(28) \qquad \varepsilon' = \varepsilon_0\, \tau\,,$$

1) J. H. Poynting, l. c. Anhang.

2) M. Abraham, l. c. p. 257. Gl. (18).

3) F. Hasenöhrl, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien IIa. Sitzung vom 23. Juni 1904.

4) Vgl. M. Abraham, l. c. p. 252. Gl. (11c).

wobei ε_0 seine durch (20) gegebene Bedeutung hat, während wir für τ nach Ausführung der Integration erhalten:

$$\tau = \frac{1+\beta^2}{2(1-\beta^2)^2} - \frac{1}{4\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}. \tag{29}$$[1]

Wenn wir die Glieder von der Ordnung β^4 an vernachlässigen, so wird

$$\tau = \tfrac{4}{3}\beta^2. \tag{30}$$

Wie bereits mehrmals erwähnt, ist die im Raum R befindliche Energiemenge $h\varepsilon'$ aus mechanischer Arbeit gewonnen. Da aber bei gleichförmiger Translation unseres Systems im ganzen keine Arbeit geleistet wird, muß diese Energiemenge das Äquivalent einer Arbeit sein, welche bei der Beschleunigung desselben geleistet wurde und welche sich daher zur Arbeit gegen den gewöhnlichen Trägheitswiderstand addiert. Man kann sich dies leicht auf folgende Weise veranschaulichen: Denken wir uns unser System anfangs in absoluter Ruhe, und die Flächen A und B irgendwie gehindert Energie auszustrahlen, so daß der Raum R keine Energie enthält. Bringen wir nun das System plötzlich auf die Geschwindigkeit w und lassen gleichzeitig der Ausstrahlung von A und B freie Bahn, so muß sofort gegen die von A ausgehende Strahlung (12a) die Arbeit $w \,.\, 2\pi p_1 \cos\psi \sin\psi\, d\psi$ (14) per Zeiteinheit geleistet werden. Sobald diese Strahlung in B anlangt, wird dort der gleiche Arbeitsbetrag gewonnen; es vergeht aber die Zeit $h/c_- \cos\psi$ bis dies geschieht; während dieser Zeit ist also die äußere Arbeit (14) unkompensiert. Desgleichen leistet die von B ausgehende Strahlung sofort die Arbeit $w\,.\,2\pi p_2 \cos\psi \sin\psi\, d\psi$, und es vergeht jetzt die Zeit $h/c_+ \cos\psi$, ehe diese Arbeit durch eine gleich große Arbeit der äußeren Kräfte in A kompensiert wird. Es mußte also im ganzen die Arbeit

$$2\pi \cos\psi \sin\psi\, d\psi\, w \left(p_1 \frac{h}{c_- \cos\psi} - p_2 \frac{h}{c_+ \cos\psi}\right)$$

von außen her geliefert werden. Integrieren wir diesen Ausdruck von 0 bis $\pi/2$ und beachten wir (19), so erkennen wir, daß in der Tat die aufgewendete Arbeit den Betrag $h\varepsilon'$ hat.

1) Es fällt auf, daß τ mit der durch Gl. (21) gegebenen Größe $\varkappa$ durch die einfache Gleichung $\tau = \beta \dfrac{d\varkappa}{d\beta}$ verbunden ist.

Wenn nun unser System zwar anfangs in Ruhe war, die Flächen A und B jedoch nicht am Ausstrahlen gehindert waren, so herrscht zu Anfang in R die Energiedichte ε_0, und es fragt sich, was mit dieser Energiemenge geschieht, wenn das System plötzlich auf die Geschwindigkeit w gebracht wird. Die obige Überlegung deutet an, daß diese Energiemenge ganz von den Flächen A und B absorbiert werden muß; kein Teil derselben darf in mechanische Arbeit verwandelt werden. Zu diesem Resultat führt übrigens auch eine direkte Rechnung, welche von den im vorigen Abschnitt angeführten Werten der Größen p_1 und p_2 ausgeht. Diese Berechnung ist nur ein Spezialfall des folgenden, und will ich sie daher hier nicht durchführen, zumal dies bereits an anderem Orte geschehen ist.[1])

Würden wir dagegen unser System mit der oben gegebenen Energie im Hohlraume R plötzlich aus dem Stadium der Bewegung in das der Ruhe versetzen, so würde die ganze Energiemenge $h\,\varepsilon'$ (überhaupt der ganze durch die Bewegung bedingte Überschuß der Energie in R) von A und B absorbiert; denn an den nunmehr ruhenden Begrenzungsflächen des Raumes R kann ja keine Arbeit geleistet werden. Wird also die Bewegung unseres Systems plötzlich beschleunigt, so muß Arbeit geleistet werden, welche sich in (strahlende) Wärme verwandelt; bei plötzlicher Verzögerung der Bewegung wird diese Arbeit nicht wiedergewonnen, ihr Energiebetrag bleibt vielmehr in der Form von Wärme. Derartige rasche Änderungen der Geschwindigkeit der Bewegung sind daher von irreversibeln Vorgängen begleitet. Dagegen ist die Energieverwandlung bei unendlich langsamer Änderung der Geschwindigkeit, wie ich gleich zeigen werde, vollkommen umkehrbar. Es liegen die Verhältnisse ganz ähnlich, wie etwa bei der Kompression und Expansion eines Gases. Die Kompressionsarbeit verwandelt sich stets in Wärme, ob die Kompression langsam oder rasch geschieht; diese Wärmemenge verwandelt sich aber nur dann bei der Expansion wieder in Arbeit, wenn die Expansion ganz langsam, „reversibel" erfolgt.

Wir wollen also jetzt untersuchen, was geschieht, wenn

---

1) F. **Hasenöhrl**, Sitzungsber. d. k. Akad d. Wissensch. zu Wien IIa. Sitzung vom 23. Juni 1904.

wir die Geschwindigkeit w unseres Systems um die unendlich kleine Größe δw ändern. (Von dieser unendlich kleinen Änderung kann natürlich vorausgesetzt werden, daß sie plötzlich geschieht.)

Sei $$w + \delta w = w_1 = \beta_1 c = (\beta + \delta \beta) c.$$

Es befindet sich also zu Beginn in R eine totale relative Strahlung (in bezug auf w) von der Strahlungsintensität i bez. i'. Diese Strahlung entspricht nach (10) einer absoluten Strahlung von der Intensität

$$i \cdot \frac{c^3 \cos \alpha}{c_-^3} \quad \text{bez.} \quad i' \cdot \frac{c^3 \cos \alpha}{c_+^3}.$$

Und dieser absoluten Strahlung entspricht wieder eine totale relative Strahlung in bezug auf $w + \delta w$ von der Intensität

$$i \frac{c^3 \cos \alpha}{c_-^3} \cdot \frac{c_{-,1}^3}{c^3 \cos \alpha_1} \quad \text{bez.} \quad i' \frac{c^3 \cos \alpha}{c_+^3} \cdot \frac{c_{+,1}^3}{c^3 \cos \alpha_1},$$

wobei der den Größen c_-, c_+, α angehängte Index 1 bedeutet, daß diese Größen nun aus ψ_1 und β_1 zu bilden sind, anstatt aus ψ und β.

Wir können also sagen: Zu Beginn ist die totale relative Strahlung in R in bezug auf w_1 durch die Ausdrücke:

$$2 \pi \cos \psi_1 \sin \psi_1 \, d \psi_1 \, i \frac{c_{-,1}^3 \cos \alpha}{c_-^3 \cos \alpha_1}$$

bez.

$$2 \pi \cos \psi_1 \sin \psi_1 \, d \psi_1 \, i' \frac{c_{+,1}^3 \cos \alpha}{c_+^3 \cos \alpha_1}$$

gegeben. Die Dichte dieser Strahlungen erhalten wir durch Division durch $c_{-,1} \cos \psi_1$ bez. $c_{+,1} \cos \psi_1$. Es ist also der Energiebetrag dieser hervorgehobenen Strahlungen in R gleich (Dichte mal Volumen):

(31 a) $$2 \pi \sin \psi_1 \, d \psi_1 \, i \frac{c_{-,1}^2 \cos \alpha}{c_-^3 \cos \alpha_1} \cdot h$$

bez.

(31 b) $$2 \pi \sin \psi_1 \, d \psi_1 \, i' \frac{c_{+,1}^2 \cos \alpha}{c_+^3 \cos \alpha_1} \cdot h.$$

Nun war das Verhältnis der totalen zur wahren relativen Strahlung, welch letztere tatsächlich absorbiert wird, gleich i/i_0 bez. i'/i_0; wenn also die Geschwindigkeit gleich w ist

$c/c_- \cos\alpha$ bez. $c/c_+ \cos\alpha$. Wenn jetzt die Geschwindigkeit den Wert w_1 hat, so wird dieses Verhältnis gleich $c/c_{-,1} \cos\alpha_1$ bez. $c/c_{+,1} \cos\alpha_1$. Es wird also jetzt von der zu Beginn in R vorhandenen Strahlung (31) der Bruchteil

$$2\pi \sin\psi_1 \, d\psi_1 \, i\, h \frac{c^3_{-,1} \cos\alpha}{c \cdot c^3_-}$$

bez.

$$2\pi \sin\psi_1 \, d\psi_1 \, i'\, h \frac{c^3_{+,1} \cos\alpha}{c \cdot c^3_+}$$

absorbiert. Wollen wir den Teil Q der gesamten, zu Beginn in R enthaltenen Energie erhalten, welcher nach Änderung der Geschwindigkeit um δw von A und B absorbiert wird, so haben wir diese Ausdrücke bezüglich ψ_1 von 0 bis $\pi/2$ zu integrieren. Wir setzen vorerst für i und i' ihre Werte aus (25) ein und erhalten so:

$$Q = \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin\psi_1 \, d\psi_1 \, i_0 \, h \left(\frac{c^3_{-,1}}{c^4_-} + \frac{c^3_{+,1}}{c^4_+} \right).$$

Nun ist nach (1):

$$c^2_{-,1} = c^2 + (w + \delta w)^2 - 2c(w + \delta w)\cos\varphi = c^2_- - 2\,\delta w(c\cos\varphi - w),$$

oder, unter Benutzung von (5)

$$c^2_{-,1} = c^2_- - 2\,\delta w\, c_- \cos\psi.$$

Da wir in dem mit der unendlich kleinen Größe δw multiplizierten Ausdruck statt $c_- \cos\psi$ auch $c_{-,1} \cos\psi_1$ setzen können, wird endlich:

$$c_- = c_{-,1} \left(1 + \delta w \frac{\cos\psi_1}{c_{-,1}} \right).$$

Ganz analog ergibt sich:

$$c_+ = c_{+,1} \left(1 - \delta w \frac{\cos\psi_1}{c_{+,1}} \right).$$

Benutzen wir diese Gleichungen, so wird:

$$Q = 2\pi i_0 h \int_0^{\pi/2} \sin\psi_1 \, d\psi_1 \left(\frac{1 - 4\,\delta w \dfrac{\cos\psi_1}{c_{-,1}}}{c_{-,1}} + \frac{1 + 4\,\delta w \dfrac{\cos\psi_1}{c_{+,1}}}{c_{+,1}} \right).$$

oder

$$Q = 2\pi i_0 h \int_0^{\pi/2} \sin\psi_1 \, d\psi_1 \left(\frac{1}{c_{-,1}} + \frac{1}{c_{+,1}}\right)$$

$$- 8\pi i_0 h \delta w \int_0^{\pi/2} \sin\psi_1 \cos\psi_1 \, d\psi_1 \left(\frac{1}{c_{-,1}^2} - \frac{1}{c_{+,1}^2}\right).$$

Das erste Integral können wir mit Hilfe der Gleichung (21) bestimmen, das zweite hat den Wert:

$$\frac{2\beta_1}{c^2(1-\beta_1^2)^2} \int_0^{\pi/2} \sin\psi_1 \cos^2\psi_1 \, d\psi_1 \sqrt{1-\beta_1^2 \sin^2\psi_1}$$

$$= \frac{2}{c^2(1-\beta_1^2)^2}\left(\frac{1+\beta_1^2}{8\beta_1} - \frac{(1-\beta_1^2)^2}{16\beta_1^2} \log\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right),$$

also wird

$$Q = h\varepsilon_0 \varkappa_1 - h\varepsilon_0 \frac{\delta w}{c}\left(\frac{1+\beta_1^2}{2\beta_1(1-\beta_1^2)^2} - \frac{1}{4\beta_1^2}\log\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right),$$

wobei $\varkappa_1$ der Wert ist, der aus $\varkappa$ entsteht, wenn man β durch β_1 ersetzt (vgl. Gleichung (21)). Man überzeugt sich nun leicht, daß der Klammerausdruck in der letzten Gleichung den Wert $d\varkappa_1/d\beta_1$ hat; also wird

$$Q = h\varepsilon_0\left(\varkappa_1 - \delta\beta\frac{d\varkappa_1}{d\beta_1}\right) = h\varepsilon_0\varkappa = h\varepsilon.$$

Damit ist unsere frühere Behauptung bewiesen. Zu Anfang, als die Geschwindigkeit unseres Systems w war, hatte die in R enthaltene Energiemenge den Betrag $h(\varepsilon + \varepsilon') = h\varepsilon_0(\varkappa + \tau)$; wenn die Geschwindigkeit geändert wird, und sich das Gleichgewicht der Strahlung in R wiederhergestellt hat, hat diese Energiemenge den Betrag $h\varepsilon_0(\varkappa_1 + \tau_1)$ (wobei τ_1 aus β_1 wieder ebenso gebildet ist, wie τ aus β). Davon stammt, wie wir wissen, der Teil $h\varepsilon_0\varkappa_1$ aus dem Wärmevorrat der Körper A und B; da dieselben, wie eben bewiesen wurde, von der ursprünglich vorhandenen Strahlung den Teil $h\varepsilon_0\varkappa$ absorbieren, sehen wir, daß bei Veränderung der Geschwindigkeit von w auf w_1 die Begrenzung des Hohlraumes die Wärme

$$h\varepsilon_0(\varkappa_1 - \varkappa)$$

an letzteren abgibt, während die Differenz des Betrages der scheinbaren Strahlung, also die Energiemenge

$$h\,\varepsilon_0 (\tau_1 - \tau)$$

das Äquivalent der Arbeit ist, welche aufgewendet werden mußte, um unserem Systeme eine Beschleunigung zu erteilen. Und zwar hat das Vorzeichen von δw in unserer Beweisführung gar keine Rolle gespielt; der Vorgang ist also umkehrbar. Dasselbe gilt auch von einer endlichen Geschwindigkeitsänderung, die man sich ja durch öftere Wiederholung einer beliebig kleinen solchen Änderung entstanden denken kann. Nur muß dieselbe eben so langsam vorgenommen werden, daß die Strahlung in R stets in dem, dem momentanen Wert der Geschwindigkeit entsprechenden Gleichgewichtszustand ist. Nur dann sind die eine endliche Geschwindigkeitsänderung begleitenden Energieverwandlungen reversibel.

Diese Arbeit, welche bei jeder Geschwindigkeitsvermehrung geleistet, bei jeder Verminderung derselben gewonnen wird und die sich natürlich zur Arbeit gegen den Trägheitswiderstand im gewöhnlichen Sinne addiert, zeigt uns, daß die gewöhnliche kinetische Energie unseres Systems infolge der Strahlung im Hohlraum um den Betrag $h\,\varepsilon_0\,\tau$ vergrößert erscheint; es verhält sich die Sache so, als ob die Masse unseres Systems um den Betrag $2\,h\,\varepsilon_0\,\tau / w^2$ vermehrt worden wäre. Setzen wir hierin für τ seinen angenäherten Wert aus (30) ein, so wird diese scheinbare Massenvergrößerung unabhängig von der Geschwindigkeit, und zwar gleich:

$$\frac{8}{3}\,\frac{h\,\varepsilon_0}{c^2}\,. \tag{32}$$

Und zwar ist die Einführung dieses Begriffes einer scheinbaren, durch die Strahlung bedingten Masse vollkommen analog der Einführung der elektromagnetischen Masse. Wir erwähnen noch, daß das Verhältnis dieser scheinbaren Masse zur Energie des ruhenden Hohlraumes gleich $8/3\,c^2$ ist; das Verhältnis der elektromagnetischen Masse eines kugelförmigen Elektrons zur Energie des ruhenden Elektrons ist (im Falle der Oberflächenladung) gleich $4/3\,c^2$ [1]), also von derselben Größenordnung.

1) Vgl. etwa M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. p. 151. 1903.

Übrigens zeigen auch die exakten Werte der scheinbaren Masse (vgl. Gleichung (29)) in beiden Fällen Ähnlichkeit im Aufbau; sie sind jedoch nicht identisch.

Es ist zu erwähnen, daß wir bisher stillschweigend angenommen haben, daß die Größe i_0 und damit ε_0 nicht (explizit) vom Werte der Translationsgeschwindigkeit abhängig ist; wir werden darauf später zurückkommen.

Zur Angabe des Wertes der Größe τ und damit der eben eingeführten scheinbaren Masse war die Kenntnis der Größen p_1 und p_2 nötig. Jedoch kann man auch ohne dem aus dem Ausdruck (19) auf die Existenz derselben schließen; man erkennt überdies sofort, daß dieser Ausdruck in erster Näherung w^2 proportional sein muß.

Da der Wärmeinhalt eines jeden Körpers zum Teil aus strahlender Wärme besteht, gilt das, was wir hier bei einem Hohlraum zeigten, mutatis mutandis von jedem Körper, dessen Temperatur von 0^0 *A.* verschieden ist. Insbesondere muß jeder Körper eine scheinbare Masse besitzen, welche durch die innere Strahlung bedingt ist, und welche daher vor allem von der Temperatur abhängig sein muß.

Die eben betrachteten Änderungen der Geschwindigkeit und damit des Strahlungszustandes in unserem Hohlraume können wir als isotherme bezeichnen, da der Raum R dabei stets in Verbindung mit den Körpern A und B war, deren Wärmekapazität wir unendlich groß gegenüber der des Raumes R selbst annahmen.

Wollen wir den Vorgang bei „adiabatischen" Änderungen studieren, so wäre es am einfachsten, einen allseitig von Spiegeln umschlossenen, mit Strahlungsenergie in bestimmtem Betrage erfüllten Raum zu betrachten und denselben verschiedene Geschwindigkeiten annehmen zu lassen. Doch ergibt die Durchführung dieses Gedankens, daß sich in diesem Falle Strahlungszustände bilden, welche von den früher betrachteten wesentlich verschieden sind, und welche man als labil bezeichnen kann; denn bei der geringsten Änderung der Oberflächenbeschaffenheit der Begrenzungsflächen wird der Strahlungszustand gleich ein ganz anderer, während die früher betrachteten Zustände von der Beschaffenheit der Begrenzung des Hohlraumes ganz unabhängig waren.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wollen wir uns adiabatische Änderungen des Strahlungszustandes in unserem Hohlraum so vorgenommen denken, daß sich in dem allseitig von Spiegeln umgebenen Raume ein schwarzer Körper befindet, dessen Kapazität jedoch so klein sei, daß sein Wärmeinhalt gegenüber dem Energieinhalt des Raumes R vernachlässigt werden darf. Der Zweck desselben ist bloß der, die Verteilung der Strahlung nach verschiedenen Richtungen so zu regulieren, daß dieselbe in stabilem Gleichgewichte bleibt, wenn die Geschwindigkeit des Systems geändert wird; gleichzeitig kann er dazu dienen, die Temperatur der Strahlung im bewegten Hohlraum zu definieren, indem wir letztere gleich der Temperatur eben dieses kleinen Körpers zu setzen haben.

Wir betrachten nun einen solchen mit der Geschwindigkeit w bewegten Raum, der etwa früher mit einem ausgedehnten schwarzen Körper, der dieselbe Geschwindigkeit hatte (also mit einem Wärmereservoir von bestimmter Temperatur) in Verbindung war. Es herrscht dann in diesem Raume die Energiedichte

$$\varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon_0 \varkappa + \varepsilon_0 \tau .$$

Wird nun die Geschwindigkeit um δw auf w_1 geändert, so absorbiert das schwarze Körperchen von der ursprünglich vorhandenen Energie $h(\varepsilon + \varepsilon')$ den Teil $h\varepsilon = h\varepsilon_0 \varkappa$. ($h$ sei wieder das Volumen des Raumes.) Jetzt muß aber diese Wärmemenge wegen der verschwindenden Kapazität des Körperchens gleich sein der Wärme, welche es nun — bei der veränderten Geschwindigkeit abgibt. Letztere muß aber nach dem früheren jetzt proportional $\varkappa_1$[1]) sein; es muß sich also ε_0 verändert haben, etwa auf $\varepsilon_{0,1}$, so daß

$$\varepsilon_{0,1} \varkappa_1 = \varepsilon_0 \varkappa$$

ist. Der Betrag der wahren Strahlung bleibt also ungeändert, was ja eigentlich schon von vornherein klar war. Da sich aber $\varkappa$ mit der Geschwindigkeit ändert, muß sich auch ε_0 ent-

---

1) Der Index 1 soll wieder dieselbe Bedeutung haben, wie früher.

sprechend der obigen Gleichung und damit die Temperatur der Strahlung ändern.

Die aus Arbeit gewonnene scheinbare Strahlung hat jetzt, nach Veränderung der Geschwindigkeit, die Dichte $\varepsilon_{0,1}\tau_1$, also mußte jetzt zu dieser Veränderung die Arbeit:

$$h(\varepsilon_{0,1}\tau_1 - \varepsilon_0\tau)$$

geleistet werden. (In diesem Falle hätte also auch unsere früher eingeführte scheinbare Masse einen anderen Wert; doch kommt dem, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, keine reale Bedeutung zu.)

Ebenso wie früher spielt hier das Vorzeichen von δw keine Rolle, und können unsere Überlegungen auch auf endliche Geschwindigkeitsänderungen angewandt werden, wenn dieselben genügend langsam vorgenommen werden.

Wird speziell die Bewegung unseres Systems vollständig sistiert, so ist die gewonnene Arbeit gleich $h\varepsilon_0\tau$, da ja der Endwert von τ (für $\beta = 0$) Null ist. Diese Arbeit ist also gleich dem Überschuß der totalen Strahlungsenergie über die wahre. Der Betrag der letzteren ändert sich also nicht; ihre Dichte bleibt unverändert gleich $\varepsilon_0\varkappa$. Dagegen hat diese Strahlung jetzt offenbar eine Temperatur, die höher ist als die des Wärmereservoirs, mit dem der Hohlraum ursprünglich (bei der Geschwindigkeit w) in Verbindung war. Denn das Emissionsvermögen des letzteren war (vgl. Gl. 20) $e = \frac{c}{4}\varepsilon_0$; jetzt aber müssen wir den (ruhenden) Hohlraum mit einem schwarzen Körper vom Emissionsvermögen $e_1 = \frac{c}{4}\varkappa\varepsilon_0$ in Verbindung bringen, damit kein Wärmeübergang stattfindet. Da $\varkappa > 1$, also auch $e_1 > e$, ist also die Temperatur der Strahlung gestiegen. (Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz im Verhältnis $1:\varkappa^{1/4}$).

§ 6.

Es liegt nun nahe, diese Temperaturerhöhung dazu zu benutzen, um einen Kreisprozeß zu konstruieren, der Wärme von einem Körper tieferer Temperatur auf einen Körper höherer Temperatur schafft.

Denken wir uns wieder ein System, das aus einem (schwarzen) Wärmereservoir von der Temperatur T und einem von Spiegeln umgebenen Hohlraum vom Volumen v besteht. Sei anfangs das System in Ruhe, der Hohlraum in Verbindung mit dem Wärmereservoir, so daß also in ersterem die Strahlungsenergie $v\,\varepsilon_0$ vorhanden ist. Bringen wir nun das System auf die Geschwindigkeit w, so gibt das Wärmereservoir an den Hohlraum die Wärme $v(\varepsilon - \varepsilon_0) = v\,\varepsilon_0(\varkappa - 1)$ ab; gleichzeitig muß die Arbeit $v\,\varepsilon' = v\,\varepsilon_0\,\tau$ geleistet werden. Nun schließen wir den Hohlraum vom Wärmereservoir durch einen Spiegel ab und bringen die Geschwindigkeit unseres Systems wieder auf Null. Dabei wird von der Hohlraumstrahlung wieder die Arbeit $v\,\varepsilon_0\,\tau$ gewonnen, so daß also im ganzen Arbeit weder gewonnen noch verloren wurde. Die Dichte der wahren (im nunmehr ruhenden Hohlraum einzig vorhandenen) Strahlung ist aber gleich $\varepsilon_0\,\varkappa$ geblieben, ihre Temperatur ist aber jetzt höher als T, und sie kann daher von selbst auf einen Körper, dessen Temperatur auch höher als T ist, übergehen. Da sich sonst alles in demselben Stadium, wie zu Beginn befindet, involviert dies einen Widerspruch gegen den zweiten Hauptsatz.

Zur Lösung desselben bedarf es also einer neuen Hypothese. Eine solche wäre die Annahme, daß sich das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers mit der Geschwindigkeit seiner Translation ändert, so daß dasselbe stets caeteris paribus proportional $1/\varkappa$ ist. Dann hätte die Dichte der wahren Hohlraumstrahlung stets den Wert ε_0 und unser eben beschriebenes Verfahren, Wärme auf höhere Temperatur zu bringen, würde unmöglich. Wir müssen daran festhalten, daß diese Veränderung das wahre Emissionsvermögen treffen müßte, also den Betrag der inneren Energie des strahlenden Körpers, der sich in der Zeiteinheit in Strahlung verwandelt. Von dieser Größe nahmen wir bisher stets an, daß sie von der Bewegung unabhängig sei; falls dies unrichtig wäre, würde dies also auch von unseren früheren Betrachtungen gelten; so auch von unserer Ableitung des Strahlungsdruckes. Jedenfalls paßt also diese Annahme nicht in den Rahmen der hier vorgetragenen Theorie. Es müßte ferner diese Änderung die nach verschiedenen Richtungen ausgesandten Energiemengen in gleicher Weise treffen; es müßte also wohl die von den elementaren Oszillatoren ausgesandte Energie, *unabhängig von der Orien-*

tierung der letzteren, in gleichem Betrag durch die Bewegung geändert werden. Gerade dies scheint mir unwahrscheinlich. Doch muß die Möglichkeit dieser Hypothese jedenfalls zugelassen werden.

Es bietet sich nun aber auch eine andere Möglichkeit zur Lösung des Widerspruches, welche dadurch besonders bemerkenswert ist, daß es dieselbe ist, welche von Lorentz und Fitzgerald zur Erklärung des negativen Resultates des Versuches von Michelson und Morley aufgestellt wurde. Nämlich die Hypothese, daß die Dimensionen der Materie von ihrer absoluten Geschwindigkeit abhängig sind.

Der scheinbare Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz, auf den wir gestoßen sind, rührt ja daher, daß sich die Temperatur der wahren Hohlraumstrahlung bei adiabatischer Änderung der Geschwindigkeit ändert; oder, was dasselbe ist, daß sich die Dichte derselben nicht ändert. Durch eine entsprechende Änderung des Volumens kann dann natürlich erreicht werden, daß sich die Dichte der wahren Strahlung so ändert, daß die Temperatur dieselbe bleibt; daß sie also speziell im Falle, wo der Hohlraum wieder zur Ruhe gelangt, den Wert ε_0 annimmt.

Bezeichnen wir jetzt die (während der adiabatischen Geschwindigkeitsänderung) veränderliche Dichte der wahren Strahlung mit ε, so ist εv der momentane wahre Energieinhalt des Hohlraumes. Verändert sich das Volumen, so leistet die Strahlung dabei eine Arbeit, deren Betrag von der Größe des Druckes abhängt. Obwohl es wahrscheinlich keine Schwierigkeit hätte, diese Arbeit exakt zu berechnen, wollen wir uns doch hier auf eine Genauigkeit beschränken, die sich nur bis auf Glieder von der Ordnung β^2 inkl. erstreckt. Da, wie wir vorausschicken wollen, die betrachtete Änderung des Volumens von der Ordnung β^2 ist, können wir uns bei Angabe des Druckes auf das erste, von β unabhängige Glied beschränken; also den Druck gleich einem Drittel der Dichte der totalen Strahlung setzen. Da sich ferner totale und wahre Strahlung auch nur um Glieder von der Ordnung β^2 unterscheiden, können wir die von der wahren Strahlung geleistete Arbeit gleich

$$\frac{1}{3}\varepsilon\, d v$$

setzen. Da nun die Abnahme der Energie gleich der geleisteten Arbeit ist, haben wir

$$d(\varepsilon v) = -\frac{1}{3}\varepsilon\, d v$$

oder

$$v\, d\varepsilon + \frac{4}{3}\varepsilon\, d v = 0\,.$$

Unser Widerspruch ist gelöst, wenn die Dichte der wahren Strahlung nicht konstant bleibt, sondern (ebenso wie bei der isothermen Veränderung) stets gleich $\varepsilon_0 \varkappa$ ist, wo ε_0 konstant bleibt und $\varkappa$ die schon oft erwähnte Funktion der momentanen Geschwindigkeit ist. Dann bleibt eben die Temperatur konstant. Wir setzen also in die obige Differentialgleichung $\varepsilon = \varepsilon_0 \varkappa$ ein und dividieren durch die Konstante ε_0 weg, so bleibt

$$v\, d\varkappa + \frac{4}{3}\varkappa\, d v = 0\,,$$

woraus folgt:

$$v = v_0 \varkappa^{-3/4}\,.$$

Hierin ist v_0 das Volumen, wenn die Geschwindigkeit gleich Null, $\varkappa = 1$ ist. Und zwar ist dieses Resultat bis einschließlich auf Größen von der Ordnung β^2 richtig. Setzen wir für $\varkappa$ seinen Wert aus (23) ein, so wird

$$v = v_0\left(1 + \frac{2}{3}\beta^2\right)^{-3/4} = v_0\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right).$$

Die einfachste Annahme ist jetzt die, daß etwa die Dimensionen der Materie senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung unveränderlich sind, während die in die Bewegungsrichtung fallende Dimension durch den Faktor $1 - {}^1/_2\,\beta^2$ von der Translationsgeschwindigkeit abhängt.

Die Übereinstimmung mit der Annahme von Lorentz und Fitzgerald ist also eine vollständige.

Ich möchte mir noch erlauben, zu bemerken, daß ich dieses Resultat auch auf anderem Wege abgeleitet habe[1]), wobei die Kenntnis der Werte des Strahlungsdruckes nicht

---

1) F. Hasenöhrl, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien IIa. p. 469. 1904.

nötig war; doch mußte da auf umständlichem Wege gezeigt werden, daß die Summe der Arbeit, die bei einem Kreisprozeß mit bewegten strahlenden Körpern auf Beschleunigung und Verzögerung derselben geleistet werden muß, gleich Null ist.

Die Größe der scheinbaren Masse, die wir in § 5 berechnet haben, wird nun durch diese angenommen Änderung des Volumens modifiziert. Die Gleichung (23) bleibt jedoch unverändert, da diese Modifikation außerhalb der Genauigkeitsgrenze liegt, welche für diese Gleichung gilt.

Wien, im Juli 1904.

(Eingegangen 28. Juli 1904).