5. *Ueber das Kraftfeld einer sich gleichförmig bewegenden Ladung;*
von A. H. Bucherer.

Die Kräfte, welche durch die Bewegung eines geladenen Körpers erzeugt werden, beanspruchen besonderes Interesse, weil dieselben nicht nur bei den eigentlichen magnetischen und elektrischen Erscheinungen, sondern auch bei allen Strahlungsvorgängen eine wichtige Rolle spielen.

Von diesen Kräften habe ich speciell die sogenannte mechanische Kraft einer Untersuchung unterzogen, d. h. diejenige Kraft, welche auf eine an der Bewegung teilnehmende Einheitsladung im Felde des bewegten geladenen Körpers ausgeübt wird. Bevor ich die Feldgleichungen anschreibe, führe ich kurz die Hypothesen an, die ihnen zu Grunde liegen. Der Aether wird als ruhend angenommen. Entsprechend den von vielen Physikern und besonders von H. A. Lorentz entwickelten Anschauungen werden die elektrischen und magnetischen Erscheinungen als durch Elektronen bedingt erklärt. Abweichend von Lorentz werden sämtliche Arten von Strömen als Abarten von „Verschiebungsströmen" aufgefasst, wie näher erläutert werden soll. Dies geschieht im Bestreben einer einheitlichen Auffassung des Vorganges der Stromerzeugung. Bekanntlich hatte Fitzgerald die ursprüngliche Stromgleichung Maxwell's durch ein Zusatzglied erweitert; einerseits um dem Convectionsstrom Rechnung zu tragen, andererseits um der Bedingung einer solenoidalen Verteilung des Stromes zu genügen. Für den Fall einer Bewegung eines geladenen Körpers wäre die Stromgleichung nach Fitzgerald in leicht verständlichen Vectorsymbolen, wenn wir den Strom mit $\mathfrak{S}$, die elektrische Verschiebung mit $\mathfrak{D}$, die Geschwindigkeit mit $\mathfrak{u}$, die Dichte der wahren Elektricität mit ϱ bezeichnen:

$$\mathfrak{S} = \frac{d\,\mathfrak{D}}{d\,t} + \varrho\,\mathfrak{u}.$$

Es würde sich also der Verschiebungsstrom mit dem Convectionsstrom zu einem solenoidal verteilten Gesamtstrom vereinigen. Nun sind aber ein Verschiebungsstrom und die Convection einer Ladung zwei so heterogene Dinge, dass die Bemühung der Vorstellungskraft, diese zu einem einheitlichen Ganzen zu verbinden, nicht glücken kann. Die erweiterte Maxwell'sche Gleichung für den vollständigen Strom:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{c} + \frac{d\,\mathfrak{D}}{d\,t} + \varrho\,\mathfrak{u}\,,$$

wo $\mathfrak{c}$ den Leitungsstrom bedeutet, hat ausserdem den Nachteil, dass sie die von Röntgen experimentell nachgewiesenen Ströme nicht mit einschliesst, welche bei der Bewegung eines Dielektricums in einem ruhenden elektrischen Felde entstehen. In diesem Falle ist nämlich — wenigstens bei der von Röntgen getroffenen Anordnung — die zeitliche Aenderung der Verschiebung gleich Null, während weder eine Convection einer Ladung noch ein Leitungsstrom vorhanden ist. Diese Erwägungen führten mich dazu, das Wesen der Stromerzeugung in allen Fällen als durch eine bestimmte Bewegung der Verschiebungslinien in Aether bedingt zu erkennen, wobei unter Bewegung eine absolute, d. h. eine Ortsveränderung in einem im Aether ruhenden Coordinatensystem verstanden ist. Ist nämlich $\mathfrak{u}$ die Geschwindigkeit dieser Bewegung und ist $\mathfrak{D}'$ derjenige Teil der Verschiebung, welcher an der Bewegung teil nimmt, so ist in allen Fällen, also auch bei einem stationären Leitungsstrom, den wir uns durch die Bewegung der Elektronen erzeugt denken:

$$(1) \qquad \mathfrak{S} = \operatorname{curl}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{D}'] \,.$$

Bei einem gewöhnlichen Verschiebungsstrom kommt es daher nicht darauf an, dass in einem Punkte des dielektrischen Mediums eine zeitliche Aenderung der Grösse der Verschiebung stattfindet, sondern dass die Verschiebungslinien sich so bewegen, dass der Vector $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{D}']$ eine wirbelartige Verteilung erhält. Für die von Röntgen erzeugten Ströme ist:

$$(2) \qquad \mathfrak{S} = \operatorname{curl}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{D}'] = \frac{K-1}{K}\operatorname{curl}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{D}]\,,$$

wo K die dielektrische Constante bedeutet. In dieser Gleichung wäre zunächst ein Wort zur Erklärung der Einführung der Dielektricitätsconstante nötig. Denn wenn man sich auf den Standpunkt der Elektronentheorie stellt, erfordert diese Constante eine besondere physikalische Deutung, ebenso wie μ, die magnetische Permeabilität. Ein näheres Eingehen hierauf würde aber zur Erörterung der sehr complicirten Beziehungen zwischen Aether, Materie und Elektronen führen, weshalb ich mich hier darauf beschränke, bei K und μ nur an den durch Messungen festgestellten Zahlenwert zu denken. $\mathfrak{D}$ besteht aus zwei Summanden, wovon der eine dem ruhenden Aether an und für sich zukommt und numerisch der daselbst herrschenden elektrischen Kraft gleich ist und der andere Teil von der Anwesenheit des Dielektricums herrührt. Bewegt man nun ein Dielektricum in einem ruhenden elektrostatischen Feld, so wird angenommen, dass der vom Dielektricum herrührende Teil der Verschiebung an der Bewegung teil nimmt.

Die magnetische[1]) Kraft $\mathfrak{H}$, die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ und die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ sind durch die allgemein gültigen Gleichungen bestimmt:

$$\mathfrak{H} = 4\,\pi\,[\mathfrak{u}\,\vartheta'], \tag{3}$$

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \operatorname{curl}[\mathfrak{B}'\,\mathfrak{u}], \tag{4}$$

wo $\mathfrak{B}'$ denjenigen Teil der magnetischen Induction bedeutet, welcher an der absoluten Bewegung teil nimmt. Bewegt sich z. B. weiches Eisen im Kraftfelde $\mathfrak{H}$, so nimmt (4) die Form an:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E} = \frac{\mu - 1}{\mu}\operatorname{curl}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}] = (\mu - 1)\operatorname{curl}[\mathfrak{H}\,\mathfrak{u}]. \tag{4a}$$

Zum Schlusse haben wir noch:

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0. \tag{5}$$

Kehren wir nunmehr zum Falle der gleichförmigen Bewegung eines geladenen Leiters zurück, so können wir offenbar die Accente in den Gleichungen (3) und (4) fallen lassen. Die Integration von (4) liefert, wenn wir $\mathfrak{B}$ durch $\mu\,\mathfrak{H}$ ersetzen, durch Integration:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F} + \mu[\mathfrak{H}\,\mathfrak{u}], \tag{6}$$

---

1) Anm. bei d. Corr. Nach Gleichung (3) ist $\mathfrak{H}$ im allgemeinen nicht solenoidal. Doch scheint mir diese Schwierigkeit bei jedem Versuch aufzutreten, welcher eine theoretische Behandlung der von Röntgen entdeckten Ströme bezweckt.

wo $\mathfrak{F}$ einen von einem scalaren Potential ableitbaren Vector darstellt. H. A. Lorentz[1]) und G. F. C. Searle[2]), deren Theorien im vorliegenden Fall zu ganz analogen Resultaten führen, haben nachgewiesen, dass $\mathfrak{F}$ die mechanische Kraft bedeutet, welche von der bewegten Ladung auf eine an der Bewegung teilnehmende Einheitsladung ausgeübt wird. Dieser Vector spielt bei Convectionsströmen dieselbe Rolle wie bei elektrostatischen Problemen die elektrische Kraft. Vor allem ist die Verteilung einer Ladung auf den Leiter durch sie eindeutig bestimmt. Ferner lassen sich, wie zuerst von J. J. Thomson gezeigt wurde, gemäss Gleichung (3), (5) und (6) die Componenten der elektrischen und der magnetischen Kraft durch sie ausdrücken. Findet nämlich die Bewegung in Richtung der zunehmenden x statt, so ist, wenn wir setzen $\mu K v^2 = 1$ und $1 - (u^2/v^2) = s$ und wenn alles auf ein mitbewegtes Coordinatensystem bezogen wird:

$$E_x = F_x, \quad E_y = \frac{F_y}{s}, \quad E_z = \frac{F_z}{s}, \tag{7}$$

$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{K u F_z}{s}, \quad H_z = \frac{K u F_y}{s}. \tag{8}$$

Zur weiteren Untersuchung der Eigenschaften von $\mathfrak{F}$ bemühte ich mich, ein elektrostatisches Analogon zu finden, specieller, die Frage zu beantworten, wie muss man sich die Dimensionen des bewegten geladenen Körpers, das umgebende Medium, die Ladung geändert denken, damit $\mathfrak{F}$ der Kraft eines ruhenden geladenen Körpers entspricht. Um diese Frage allgemeiner zu behandeln, betrachte ich die Bewegung eines geladenen Rotationsellipsoides a, b, b. Die Bewegung findet längs der Rotationsaxe a statt. Man verdankt Searle[3]) eine eingehende Untersuchung der Energieverhältnisse eines solchen Ellipsoides. Zur Beweisführung der beiden von mir gefundenen folgenden Theoreme werde ich einige Resultate der Searle'schen Arbeit verwenden.

Zunächst beweise ich den Satz:

Bewegt sich das geladene Ellipsoid a, b, b mit gleichförmiger geradliniger Geschwindigkeit $u < v$ parallel a in einem

1) H. A. Lorentz, La theorie electromagn. de Maxwell, 1892.
2) G. F. C. Searle, Phil. Trans. 187. p. 675—713. 1896.
3) G. F. C. Searle, Phil. Mag. 44. p. 329. 1896.

Medium mit der Constanten K, so ist das Potential φ_0 auf der Oberfläche dieses Ellipsoides gleich dem Potential φ_0' eines im Medium mit der Constanten $K/s = K'$ ruhenden Ellipsoides a, $\sqrt{s}\,b$, $\sqrt{s}\,b$. Für das bewegte Ellipsoid a, b, b ist das zu $\mathfrak{F}$ gehörige Potential φ, wie von Morton[1]) gezeigt wurde:

$$\varphi = \frac{q\,s}{2\,K}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\,\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{a^2+s\,\lambda}}\,. \tag{8a}$$

Die Flächen constanten Potentiales sind, wenn wir $y^2 + z^2 = \varrho^2$ setzen:

$$\frac{x^2}{a^2+s\,\lambda} + \frac{\varrho^2}{b^2+\lambda} = 1\,. \tag{8b}$$

Für ein ruhendes Ellipsoid a, $\sqrt{s}\,b$, $\sqrt{s}\,b$ sind bekanntlich die entsprechenden Gleichungen, wenn die Dielektricitätsconstante K/s ist:

$$\varphi' = \frac{q\,s}{2\,K}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\,\lambda}{(s\,b^2+\lambda)\sqrt{a^2+\lambda}}\,, \tag{9}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{\varrho^2}{s\,b^2+\lambda} = 1\,. \tag{10}$$

Der Wert von φ_0' lässt sich durch Integration zwischen den Grenzen ∞ und a aus (9) ableiten. Er lässt sich aber auch als Function der elektrostatischen Energie W' des Ellipsoides ausdrücken; es ist nämlich:

$$\varphi_0' = \frac{2\,W'}{q} = \frac{2}{q}\cdot\frac{K}{s\,8\,\pi}\int\!\!\int\!\!\int F'^2\,d\,x\,d\,y\,d\,z\,, \tag{11}$$

für F'^2 kann auch gesetzt werden:

$$F'^2 = F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 = F_x'^2 + F_\varrho'^2\,. \tag{12}$$

Da wir im weiteren Verlauf der Untersuchung die Volumenintegrale von $F_x'^2$ und $F_\varrho'^2$ zu verwenden haben, so wählen wir Gleichung (11) zur Berechnung von φ_0', obwohl diese Methode an und für sich umständlicher ist.

Aus Gleichung (9) und (10) berechnen wir F_x' und F_ϱ'. Diese Gleichungen vereinfachen wir, indem wir für die lineare

---

1) M. B. Morton, Proc. Phys. Soc. August 1896.

Excentricität des Ellipsoides $\sqrt{a^2 - s\,b^2} = e$ setzen. Ferner setzen wir $a^2 + \lambda = m^2$. Man erhält dann

$$\varphi' = \frac{q\,s}{2\,K} \int_m^\infty \frac{d\,m}{m^2 - e^2}, \tag{9a}$$

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{\varrho^2}{m^2 - e^2} = 1. \tag{10a}$$

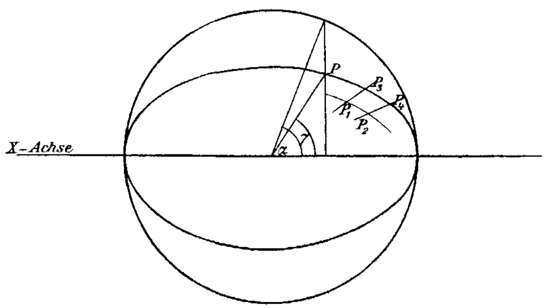
Setzt man ferner (vgl. Figur) $x = m \cos\alpha$ und demgemäss

$$\varrho = \sqrt{m^2 - e^2} \sin\alpha,$$

so erhält man:

$$F'_x = -\frac{\partial \varphi'}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{q \cos\alpha}{K'(m^2 - e^2\cos^2\alpha)}, \tag{13}$$

$$F'_\varrho = -\frac{\partial \varphi'}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial \varrho} = \frac{q\,m \sin\alpha}{K'\sqrt{m^2 - e^2}\,(m^2 - e^2\cos^2\alpha)} \tag{14}$$



Es seien nun in der Figur P_1 und P_2 durch m und P_3 und P_4 durch $m + dm$ bestimmt; ferner P_2 und P_4 durch α und P_1 und P_3 durch $\alpha + d\alpha$. Dann ist der Inhalt des Flächenelementes $P_1\,P_3\,P_4\,P_2$

$$d f = \left(\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \varrho}{\partial m}\right) d\,m\,d\,\alpha \tag{15}$$

und durch Einsetzen der Werte

$$d f = \frac{m^2 - e^2\cos^2\alpha}{\sqrt{m^2 - e^2}}\,d\,m\,d\,\alpha. \tag{16}$$

Lässt man das Flächenelement um die X-Axe rotiren, so schneidet dasselbe einen dünnen Ring aus, dessen Volumen ist:

$$d v = 2 \pi [m^2 - e^2 \cos^2 \alpha] \sin \alpha \, d m \, d \alpha . \tag{17}$$

Setzt man die Werte von F_x' bez. F_ϱ' und von $d v$ ein, so erhält man:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{K'}{8\pi} \int F_x'^{\,2} d v &= \frac{q^2}{4 K'} \int\limits_a^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{m^2 - e^2 \cos \alpha} \, d m \, d \alpha \\ &= \frac{q^2}{4 K' e^2} \left(a - \frac{a^2 - e^2}{2 e} \log \frac{a + e}{a - e} \right) \end{aligned} \right. \tag{18}$$

und weiter:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{K'}{8\pi} \int F_\varrho'^{\,2} &= \frac{q^2}{4 K'} \int\limits_a^\infty \int\limits_0^\pi \frac{m^2 \sin^3 \alpha \, d m \, d \alpha}{(m^2 - e^2)(m^2 - e^2 \cos^2 \alpha)} \\ &= \frac{q^2}{4 K' . e^2} \left(\frac{a^2 + e^2}{2 e} \log \frac{a + e}{a - e} - a \right) . \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Aus (18) und (19) findet man leicht, gemäss (11):

$$\varphi_0' = \frac{q s}{2 K} \log \frac{a + e}{a - e} .$$

Dies ist aber derselbe Wert, den G. F. C. Searle für φ_0 gefunden hat.

Die physikalische Deutung dieser Gleichheit von φ_0 und φ_0' ist die, dass dieselbe Arbeit erforderlich ist, um die Elektricitätsmenge q aus der Unendlichkeit auf das im Medium mit der Constanten K/s ruhende Ellipsoid a, $\sqrt{s}\, b$, $\sqrt{s}\, b$ zu bringen, wie um dieselbe Elektricitätsmenge auf das sich bewegende Ellipsoid a, b, b zu bringen, wenn während der Herbeiführung der Ladung q letztere eine constante Geschwindigkeit in der X-Richtung merklich beibehält.

Ferner lässt sich beweisen, dass der Ausdruck für die Gesamtenergie des bewegten Ellipsoides richtig bleibt, wenn in demselben

$$K, \; F_x, \; F_y, \; F_z \quad \text{durch} \quad K', \; F_x', \; F_y', \; F_z'$$

ersetzt wird.

Nach Maxwell ist die Gesamtenergie:

$$W = \frac{K}{8\pi}\iiint (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$+ \frac{\mu}{8\pi}\iiint (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Drückt man in dieser Gleichung die Componenten der elektrischen und der magnetischen Kraft nach (7) und (8) durch F_x, F_y und F_z aus, so wird:

$$(20) \qquad W = \frac{K}{8\pi}\iiint \left[F_x^2 + \frac{2-s}{s}(F_y^2 + F_z^2)\right] dx\,dy\,dz.$$

Es ist also zu beweisen, dass W den richtigen Wert erhält, wenn gesetzt wird:

$$(21) \qquad W = \frac{K'}{8\pi}\iiint \left[F_x'^2 + \frac{2-s}{s}(F_y'^2 + F_z'^2)\right] dx\,dy\,dz.$$

Die Richtigkeit von (21) ergiebt sich sofort, wenn man aus (18) und (19) die Volumenintegrale von $F_x'^2$ und $F_\varrho'^2$ einsetzt und das Resultat mit dem von Searle l. c. gefundenen Wert vergleicht. Man findet

$$(22) \left\{ \begin{aligned} &\frac{K'}{8\pi}\int \left(F_x'^2 + \frac{2-s}{s} F_\varrho'^2\right) dv \\ &\qquad = \frac{q^2}{4Ke}\left[\left(1 + \frac{u^2}{v^2}\frac{a^2}{e^2}\right)\log\frac{a+e}{a-e}\right] - \frac{q^2 u^2 a}{2K.v^2 e^2}. \end{aligned} \right.$$

Searle hat gezeigt, dass die Gesamtenergie sich darstellen lässt durch:

$$(23) \qquad W = \tfrac{1}{2} q\,\varphi_0 + 2\,T,$$

wo T die magnetische Energie bezeichnet. Die Berechnung von W nach Gleichung (23) führt in der That zu einem Werte, welcher mit (22) identisch ist.

Eine Eigenschaft der Kraft $\mathfrak{F}$, welche von besonderer Wichtigkeit ist, ist ihre symmetrische Verteilung bezüglich einer Ebene, welche man sich durch den Aequator des Ellipsoides gelegt denkt. Es wird genügen, die entsprechende Symmetrie für eine Punktladung zu zeigen. Setzt man nämlich in (8a) und (8b) $a = b = 0$, so findet man leicht

$$F_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{s\,q\,x}{K(x^2 + s\,\varrho^2)^{3/2}},$$
$$F_\varrho = -\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\varrho} = \frac{s^2\,q\,\varrho}{K(x^2 + s\,\varrho^2)^{3/2}}.$$

Es hat also $\mathfrak{F}$ für gleiche positive und negative x bei gleichem ϱ denselben Wert. Da $E_x = F_x$ und $E_\varrho = F_\varrho / s$, so ist auch die elektrische Kraft symmetrisch verteilt zu einer Ebene, welche man sich senkrecht zur Bewegungsrichtung durch den Punkt gelegt denkt. Dasselbe gilt für die Energieverteilung und für den Vector $[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]$. Die Thatsache, dass für einen Beobachter, welcher sich mit dem bewegten Körper bewegt, alles symmetrisch zur erwähnten Ebene beschaffen ist, legt die Frage nahe, ob diese Symmetrie auch dann noch besteht, wenn eine grosse Anzahl solcher Körper zu einem System vereinigt, Schwingungen ausführt, sodass sich zu der Schwingungsgeschwindigkeit eine constante Translationsgeschwindigkeit addirt. Ein Beispiel hierfür wäre die geradlinige gleichförmige Geschwindigkeit eines leuchtenden „Punktes", wenn wir uns die Strahlung desselben als durch die Schwingungen von Elektronen erzeugt denken. Wird der an der Bewegung teilnehmende Beobachter von zwei symmetrisch zur erwähnten Ebene liegenden Punkten das Licht an derselben Stelle sehen? Wird er ferner in beiden Punkten dieselbe Intensität[1]) wahrnehmen? Man hat diese Fragen auf Grund der Hypothese eines unbeweglichen Aethers verneinen zu müssen geglaubt, während im Gegenteil die sorgfältigen Experimente von Michelson und Morley einen die Symmetrie störenden Einfluss der Translation nicht zulassen.

Nach Maxwell ist die in der Volumeneinheit vorhandene Energie auch bei der Strahlung bestimmt durch

$$W = \frac{K}{8\pi} E^2 + \frac{\mu}{8\pi} H^2$$

und die Frage ist nun, in welcher Weise stört die Superposition einer constanten Translationsgeschwindigkeit über die Schwingungsgeschwindigkeit die symmetrische Verteilung der Kräfte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bez. des Vectors $[\mathfrak{E}_0\,\mathfrak{H}_0]$ bezüglich einer zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene, welche durch den leuchtenden Punkt geht. Indem ich mir eine eingehendere rechnerische Behandlung

1) Anm. b. d. Corr. Eine Symmetrie der Strahlung ist bedingt durch die symmetrische Verteilung des Vectors $[\mathfrak{E}_0\,\mathfrak{H}_0]$, wenn man mit $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ den periodisch veränderlichen Teil der Vectoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bezeichnet, welche als Functionen der Coordinaten des mitbewegten Coordinatensystems auszudrücken sind.

dieser Frage vorbehalte, möchte ich doch schon der Ueberzeugung Ausdruck geben, dass die Superposition der Translationsgeschwindigkeit, eben weil letztere an sich nur symmetrische Verhältnisse schafft, die Symmetrie der Strahlung nicht stören kann. Was mich in dieser Ueberzeugung noch verstärkt, ist die Bemerkung Heaviside's [1]), dass die Verschiebung bei einer gleichförmig bewegten Ladung sich gerade so verhielte, als ruhte dieselbe in einem äolotropen Medium, dessen Hauptdurchlässigkeiten in allen Richtungen senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert gleich K, aber in der Bewegungsrichtung zu Ks reducirt wäre. Ist daher diese, übrigens nur beschränkt gültige Analogie auch dann noch anwendbar, wenn die bewegte Ladung oscillirt, so folgt die erörterte Symmetrie ohne weiteres.

Bonn, den 18. März 1902.

1) O. Heaviside, Electrical Papers **2**. p. 499. 1892.

(Eingegangen 19. März 1902.)