2. *Ueber die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper; von Emil Cohn.*

(Aus den Nachrichten d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 1901, Heft 1; Sitzung vom 11. Mai 1901. Mit einer Aenderung p. 31.)

Ziel und Umfang der folgenden Darlegungen lassen sich am kürzesten angeben unter Bezugnahme auf die beiden Aufsätze von Hertz „Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende —“ und „— für bewegte Körper“: Es soll eine Erweiterung der Gleichungen des ersten Aufsatzes gegeben werden, welche für die Darstellung der im engeren Sinne elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern das gleiche leistet, wie der zweite Aufsatz, welche aber von den beiden Mängeln der Hertz'schen Erweiterung frei ist. Diese Mängel bestehen bekanntlich in Folgendem: Die Hertz'schen Gleichungen geben erstens keine Rechenschaft von dem beobachteten Einfluss der Bewegung auf die *optischen* Erscheinungen; sie liefern ferner unter gewissen Umständen Kräfte, „welche den Aether in Bewegung setzen müssten“ — mit anderen Worten: sie führen auf Bewegungen und auf bestimmte diesen Bewegungen entsprechende Energiewerte an Stellen des Raumes, wo wir ein bewegliches nicht kennen.

Unter den Theorien, welche diese Mängel der Hertz'schen Elektrodynamik zu vermeiden suchen, nimmt die Lorentz'sche die erste Stelle ein: sie ist ausgezeichnet durch consequente Durchführung ihrer einfachen Grundannahmen, und sie hat in ungewöhnlichem Maasse befruchtend gewirkt auf die experimentelle wie theoretische Forschung der letzten Jahre. Aber auch in der Lorentz'schen Theorie gehen die Erfahrungsthatsachen der Optik nicht ohne Rest auf: unerklärt bleibt, dass der Unterschied der Zeiten, deren ein Lichtstrahl zum Durchlaufen zweier verschiedener Wege zwischen den gleichen Endpunkten bedarf, von der Bewegung der Erde nicht abhängt, — auch nicht in den „Grössen zweiter Ordnung.“

Eine Umformung der Lorentz'schen Theorie, und zugleich eine Discussion anderer ähnlicher Formen der elektrodynamischen Grundgleichungen findet sich bei Walker.[1] Eine grosse Anzahl möglicher Modificationen der Grundgleichungen hat ferner Heaviside[2] kritisch durchmustert. Alle diese Versuche begnügen sich hinsichtlich der optischen Erscheinungen damit, die Aberration und den Fresnel'schen „Mitführungscoefficienten" theoretisch zu begründen. Sie führen nicht über Lorentz hinaus.

Wie Maxwell und Hertz behandeln wir ein chemisch und physikalisch homogenes Medium als ein Gebilde, welches auch elektromagnetisch in allen Punkten durch die gleichen Werte einiger Constanten vollständig charakterisirt ist. *Ein* solches Medium erfüllt jedes Element unseres Raumes; es kann eine bestimmte ponderable Substanz oder auch das Vacuum sein. Daneben noch von einem „Aether" zu sprechen, werden wir vermeiden. — Wir schliessen nach dem Gesagten jede mechanische oder elektrische Molecularhypothese ebenso, wie jede mechanische Deutung elektromagnetischer Vorgänge aus, und verzichten damit auf alle Folgerungen, welche nur aus solchen Hypothesen fliessen können. Unsere Absicht bei diesem Vorgehen ist, zu untersuchen, wie weit man den Thatsachen der Erfahrung mit einem Mindestmaass theoretischer Annahmen gerecht werden kann. Falls sich herausstellen sollte, dass in dieser Hinsicht die folgende Darstellung gegenüber den älteren einen Fortschritt bedeutet, so wird man vermuten dürfen, dass auch speciellere Vorstellungen — sei es über den Bau der Körper, sei es über die Eigenschaften des „Aethers" — zweckmässig an unsere Gleichungen anknüpfen werden.

§ 1. Die Grundgleichungen.

Die Maxwell'schen Grundgleichungen für *ruhende* Körper können wir in folgender Form schreiben:[3]

---

1) G. T. Walker, Aberration and the electromagnetic field (Cambridge 1900).

2) O. Heaviside, Electrician **45.** p. 636 u. 881. 1900.

3) Die Bezeichnungen stimmen überein mit denjenigen in meinem Lehrbuch „Das elektromagnetische Feld", Leipzig 1900, auf welches ich

Die elektromagnetische Energie des Feldes ist

$$(\mathrm{A}_0)\qquad W = \int\limits_{\infty} \tfrac{1}{2}(\mathsf{E}\,.\,\mathfrak{E} + \mathsf{M}\,.\,\mathfrak{M})\,d\tau\,,$$

und es bestehen zwischen den vier Vectoren E, M, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$ die Beziehungen:

$$(\mathrm{B}_0)\qquad \begin{cases} -\displaystyle\int\limits_{\bigcirc} \mathsf{E}_s\,d s = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S} \mathfrak{M}_N\,d S\,, \\ \displaystyle\int\limits_{\bigcirc} \mathsf{M}_s\,d s = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S} \mathfrak{E}_N\,d S + \int\limits_{S} \mathsf{\Lambda}_N\,d S\,, \end{cases}$$

oder in der Form von Differentialgleichungen:

$$(\mathrm{B}_0')\qquad \begin{cases} -\mathsf{P}(\mathsf{E}) = \dfrac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial t}\,, \\ \mathsf{P}(\mathsf{M}) = \dfrac{\partial\,\mathfrak{E}}{\partial t} + \mathsf{\Lambda}\,, \end{cases}$$

---

mir im Folgenden gestatten werde, durch „elm. Feld“ hinzuweisen. Die Uebereinstimmung erleidet *eine* Ausnahme: *Die Gleichungen des Lehrbuches enthalten eine universelle Constante V, durch deren Einführung es möglich wird, specialisirend in einfacher Weise zu einem beliebigen der „absoluten“ Maasssysteme überzugehen (vgl. dort die im Register angeführten Stellen über absolute Maasssysteme und Messungen, insbesondere p. 279 f.). Diese Constante ist hier gleich eins gesetzt. Die Gleichungen nehmen so die „rationelle“ Form Heaviside's an, welche sich durch ihre unübertreffliche Einfachheit empfiehlt. — Die Gültigkeit der Heaviside'schen Gleichungen ist nicht an die Verwendung eines bestimmten Maasssystems gebunden; erst durch eine zweite willkürliche Festsetzung würde ein solches definirt sein. Aber diese zweite Festsetzung lässt sich auf keine Weise mehr so treffen, dass eines der absoluten Maasssysteme entsteht. — Der Wunsch, in den allgemeinen Gleichungen der Elektrodynamik von dem Factor 4π frei zu werden, ist gegenwärtig wohl allgemein. Andererseits fordern historische Entwicklung und internationale Uebereinkunft für Unterricht und Praxis eine Bezeichnungsweise, die mit den absoluten Maasssystemen verträglich ist. Beiden Ansprüchen zugleich genügt, soviel ich sehe, nur das in dem genannten Lehrbuch eingeschlagene Verfahren. Es schützt zugleich vor den Irrungen, welche die conventionellen Festsetzungen der absoluten Systeme nachweislich herbeigeführt haben, — und es hält das Feld frei für jede Erfahrung, welche die Zukunft uns bezüglich der thatsächlichen Verknüpfung elektrischer und mechanischer Grössen bringen mag. (Der Text dieser Anmerkung ist gegen den des ersten Druckes geändert.)*

$$(C_0)\qquad \begin{cases} \mathsf{\Lambda} = \lambda(\mathsf{E} - \mathsf{K}), \\ \mathfrak{E} = \varepsilon\,\mathsf{E}, \\ \mathfrak{M} = \mu\,\mathsf{M}, \end{cases}$$

$$(D_0)\qquad \varepsilon_0\,\mu_0 = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

Hierin bedeutet t die Zeit; $d\tau$ ein Volumelement; dS ein Flächenelement; ds ein Curvenelement; N eine der Normalen von dS (für *geschlossene* Flächen die *äussere* Normale); $\circ$ den, bezüglich N positiven, vollständigen Umlauf um S; ε Dielektricitätsconstante, μ magnetische Permeabilität, λ Leitungsvermögen, scalare Körperconstanten; $-\mathsf{K}$ innere elektromotorische Intensität, einen in inhomogenen Leitern vorhandenen, constanten Vector; E elektrische Feldintensität, M magnetische Feldintensität; $\mathfrak{E}$ elektrische Polarisation; $\mathfrak{M}$ magnetische Polarisation; $\mathsf{\Lambda}$ elektrische Strömung; ε_0, μ_0 elektrische und magnetische Constante des Vacuums; $\omega_0 = 3 \,.\, 10^{10}$ cm/sec die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum.

Es bezeichnet ferner, bez. soll im Folgenden bezeichnen: $+$, $-$, $\frac{\partial}{\partial t}$ vor Vectoren: *Vector*-Addition, -Subtraction, -Differentiation; $A \,.\, B$ das scalare (geometrische) Product der Vectoren A und B; $[A\,B]$ oder $[A \,.\, B]$ das Vectorproduct der Vectoren A und B; $\mathsf{\Gamma}(A)$ die Divergenz des Vectors A; $\mathsf{P}(A)$ die Rotation (curl) des Vectors A; $\nabla\alpha$ den Gradienten des Scalars α; $A\nabla$ den Operator $A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}$.

Hieraus ergeben sich unter anderem die folgenden später zu benutzenden Rechnungsregeln:

(a) $\quad A \,.\, B = B \,.\, A,$

(b) $\quad [A\,B] = -[B\,A],$

(c) $\quad A \,.\, [B\,C] = B \,.\, [C\,A] = C \,.\, [A\,B],$

(d) $\quad A \,.\, [A\,B] = 0,$

(e) $\quad \big[A[B\,C]\big] = (C \,.\, A)B - (A \,.\, B)C,$

(f) $\quad \mathsf{\Gamma}[A\,B] = B \,.\, \mathsf{P}(A) - A \,.\, \mathsf{P}(B),$

(g) $\quad \mathsf{P}[A\,B] = \mathsf{\Gamma}(B) \,.\, A - \mathsf{\Gamma}(A) \,.\, B + B\nabla \,.\, A - A\nabla \,.\, B.$

Aus den Maxwell'schen Grundgleichungen folgt bekanntlich, dass wir dem Volum*element* $d\tau$ den Energiebetrag

$\frac{1}{2}(\mathsf{E}\cdot\mathfrak{E}+\mathsf{M}\cdot\mathfrak{M})\,d\tau$ zuschreiben können, wenn wir annehmen, dass eine *Strömung* der Energie stattfindet, welche nach Grösse und Richtung gegeben ist durch

$$(\mathrm{E}_0) \qquad \Sigma = [\mathsf{E}\,\mathsf{M}]\,.$$

Dieser Vector Σ ist identisch mit demjenigen, welcher in der Optik als *Strahlung* bezeichnet wird.

Wir stellen nunmehr den Maxwell'schen Grundgleichungen für *ruhende* Körper die Gleichungen gegenüber, welche wir für den Fall beliebiger *Bewegung* als gültig ansehen wollen.[1] Sie lauten, wenn u die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte bezeichnet:

$$(\mathrm{A}) \qquad W = \int\limits_{\infty} \left\{\tfrac{1}{2}(\mathsf{E}\cdot\mathfrak{E}+\mathsf{M}\cdot\mathfrak{M}) + \varepsilon_0\,\mu_0\,u\cdot[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]\right\} d\tau\,,$$

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{\begin{aligned} -\int\limits_{O} \mathsf{E}_s\,dS &= \frac{d}{dt}\int\limits_{S} \mathfrak{M}_N\,dS\,,\\ \int\limits_{O} \mathsf{M}_s\,ds &= \frac{d}{dt}\int\limits_{S} \mathfrak{E}_N\,dS + \int\limits_{S} \Lambda_N\,dS\,, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{C}) \qquad \left\{\begin{aligned} \Lambda &= \lambda(\mathsf{E}-\mathsf{K})\,,\\ \mathfrak{E} &= \varepsilon\,\mathsf{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\,[u\,\mathsf{M}]\,,\\ \mathfrak{M} &= \mu\,\mathsf{M} + \varepsilon_0\,\mu_0\,[u\,\mathsf{E}]\,, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{D}) \qquad \varepsilon_0\,\mu_0 = \frac{1}{\omega_0^2}\,.$$

Die Differentialquotienten der Flächenintegrale nach der Zeit in (B) sind so zu verstehen, dass während dt die Fläche S dauernd *durch dieselben materiellen Teilchen führt.*

Die Geschwindigkeiten u sollen bezogen sein auf ein räumliches System, welches durch die Fixsterne festgelegt ist, genauer: durch jene Fixsterne, deren „Eigenbewegung" die Astronomie gleich Null setzt. Die Frage, ob diese Fixsterne — und somit unser Bezugssystem — *absolut* ruhen, hat keinen

1) Für den speciellen Fall der *optischen* Erscheinungen in *gleichförmig* bewegten Medien habe ich die Gleichungen bereits in Archives Néerlandaises (2) 5. (Lorentz-Jubelband) p. 516 aufgestellt und discutirt. Dort habe ich auch den Weg angegeben, auf welchem ich zu den Gleichungen gelangt bin. Die *hier* folgenden Gleichungen sind nichts anderes, als die *einfachste* mögliche Verallgemeinerung der dortigen.

Inhalt. Ob wir sie *im Sinne unserer Gleichungen* dauernd als ruhend werden betrachten dürfen, ist eine Frage künftiger Erfahrung. Behauptet wird lediglich, dass wir zur Darstellung irgend welcher *bisher* beobachteter Erscheinungen eine gleichförmige gemeinsame so wenig, wie eine relative Bewegung dieser Himmelskörper heranzuziehen brauchen.

Der Wert von u ist überall dort, wo wir Materie vorfinden, unmittelbar durch die Bewegung dieser Materie gegeben. Hierunter verstehen wir ausschliesslich die beobachtbare Bewegung ausgedehnter Massen. Wo keine Materie vorhanden ist, da setzen wir $u = 0$.

Diese Festsetzungen lassen *theoretisch* eine Lücke: Denken wir uns ein sehr verdünntes Gas auf stetigem Wege in ein Vacuum übergeführt. Für jede Gasdichte $\varrho = \varrho_1$, bei welcher noch von einer bestimmten Strömungsgeschwindigkeit q des Gases in jedem Punkte gesprochen werden kann, haben wir $u = q$ zu setzen. Für $\varrho = 0$ aber soll der Wert $u = 0$ gelten. Es fehlt eine Vorschrift, welche den Wert von u stetig von q zu 0 überführt, während der Wert von ϱ stetig von ϱ_1 zu 0 übergeht. *Praktisch* aber bedürfen wir dieser Vorschrift nicht. Zwei Fälle kommen in Betracht: Wir können *experimentell* den Wert $\varrho = 0$ nicht erreichen. Ob für die äussersten Verdünnungen, welche wir herstellen können, in *jeder* physikalischen Beziehung noch ein einheitlicher Wert q angenommen werden darf, steht nicht in Frage. In dem Gebiet unserer Untersuchungen aber reichen wir mit einer solchen Annahme aus. Insbesondere — und das allein hat praktische Bedeutung — dürfen wir stets $u = q$ setzen für den beliebig verdünnten Gasinhalt eines Gefässes, welches eine constante Translationsgeschwindigkeit q besitzt. (Dies kommt zur Geltung in § 4.) — Ein absolutes Vacuum zum mindesten als möglich zuzulassen, sind wir lediglich genötigt ausserhalb der Atmosphären der Himmelskörper. Unsere Festsetzungen versagen für jene Schichten, welche den Uebergang aus der Atmosphäre in das Vacuum vermitteln. Aber um die Beobachtungen mit unserer Theorie zu vergleichen, brauchen wir das u dieser Schichten nicht zu kennen (vgl. § 2).

Der letzte Teil unserer Festsetzungen: „$u = 0$ im Vacuum" würde ferner unzulässig sein oder zum mindestens einer Rechtfertigung durch Nebenannahmen bedürfen, wenn aus unseren Gleichungen folgte, dass auf ein Raumteilchen im Vacuum, für welches $u = 0$ ist, unter irgend welchen Umständen mechanische Kräfte wirken könnten; denn diese Kräfte würden den Wert $u = 0$ aufzuheben suchen. Es wird sich aber zeigen, dass sie niemals auftreten.

Zu den Grundannahmen, welche in den Gleichungen (A) bis (D) ausgesprochen sind, fügen wir noch die weitere hinzu, dass auch in bewegten Körpern die Strahlung Σ normal zu E wie zu M sein soll. Das heisst wir setzen

$$\text{(E)} \qquad \Sigma = c\,.\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}],$$

wo c eine unbenannte Zahl bedeutet, deren Wert zunächst unbestimmt bleiben mag (vgl. § 7).

Aus den Gleichungen (B) ziehen wir sogleich eine Folgerung, indem wir sie auf eine *geschlossene* Fläche (O) anwenden. Es werden dann die linken Seiten gleich Null und somit

$$\frac{d}{d\,t}\int\limits_{\mathsf{O}} \mathfrak{M}_N\,d\,S = 0,$$

$$-\frac{d}{d\,t}\int\limits_{\mathsf{O}} \mathfrak{E}_N\,d\,S = \int\limits_{\mathsf{O}} \Lambda_N\,d\,S.$$

Wir nennen

$$\int\limits_{\mathsf{O}} \mathfrak{M}_N\,d\,S \quad \text{und} \quad \int\limits_{\mathsf{O}} \mathfrak{E}_N\,d\,S$$

die von der Fläche S eingeschlossene magnetische, bez. elektrische Menge, und entsprechend $\Gamma(\mathfrak{M})$ und $\Gamma(\mathfrak{E})$ die magnetische, bez. elektrische Dichte. Unsere Gleichungen sprechen dann die Continuitätseigenschaften aus, die wir mit diesen Begriffen zu verknüpfen gewöhnt sind.

Weiter geben wir, indem wir für S ein Flächen*element* wählen, den Grundgleichungen (B) die Form von Differentialgleichungen. Sie lauten:

$$\text{(B')} \qquad \left\{ \begin{aligned} -\,\mathsf{P}(\mathsf{E} - [u\,\mathfrak{M}]) &= \frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,t} + \Gamma(\mathfrak{M})\,.\,u\,, \\ \mathsf{P}(\mathsf{M} + [u\,\mathfrak{E}]) &= \frac{\partial\,\mathfrak{E}}{\partial\,t} + \Gamma(\mathfrak{E})\,.\,u + \Lambda\,, \end{aligned} \right.$$

wo $\partial / \partial t$ die zeitliche Aenderung in einem festen *Raum*punkt bezeichnet. (Die Ableitung findet man z. B. „elm. Feld" p. 535ff., die Gleichungen (B') in cartesischen Coordinaten unter (L') (M').)

Die Gleichungen (B') bilden nicht nur eine Folgerung, sondern zugleich einen *vollständigen* Ersatz der Gleichungen (B): die „Stetigkeitsbedingungen" für Unstetigkeitsflächen, welche man neben ihnen noch einzuführen pflegt, drücken lediglich aus, dass sie *allgemein* gelten sollen. Wir können daher sachlich nichts verlieren, wenn wir alle Grössen unserer Gleichungen als stetig veränderlich betrachten.

Endlich wollen wir noch eine Bezeichnung einführen: Alle bekannten Körpergeschwindigkeiten u sind sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ω_0; wir wollen eine Grösse, welche den Factor $(u/\omega_0)^n$ enthält, eine Grösse n^{ter} Ordnung nennen.

Im Folgenden soll nun ein Abriss der Elektrodynamik gegeben werden, welche aus unseren Gleichungen (A) bis (E) entwickelt werden kann. Wir betrachten zunächst in §§ 2—5 die räumlich-zeitlichen Verhältnisse des elektromagnetischen Feldes an sich; sodann in §§ 6—7 die mechanischen Kräfte elektromagnetischen Ursprunges. Erst in diesem letzten Abschnitt bedürfen wir des Energieausdruckes in (A).

Alle elektromagnetischen Vorgänge, welche wir experimentell beherrschen, spielen sich in der Nähe der Erdoberfläche ab. Daneben kommt für uns nur noch in Betracht die Ausbreitung des Lichtes von den Sternen bis zur Erde. Die beiden Gruppen von Erscheinungen verlangen eine verschiedene Behandlung; wir beginnen mit der zweiten.

§ 2. Aberration. Doppler'sches Princip.

Wir betrachten an dieser Stelle die Ausbreitung des Lichtes von den Sternen bis in die Nähe unserer optischen Instrumente. In diesem ganzen Gebiet handelt es sich um Isolatoren, deren Constanten von denen des Vacuums nicht merklich verschieden sind. Wir haben also

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0, \quad \Lambda = \Gamma(\mathfrak{E}) = \Gamma(\mathfrak{M}) = 0.$$

Ferner sind die in Betracht kommenden Erscheinungen nur bekannt bis zu den Grössen *erster* Ordnung, sofern für u die

Geschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche gesetzt wird. Wir wollen annehmen, dass *nirgends* die u solche Werte erreichen, welche eine Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung notwendig machen würden. Dann erhalten wir aus (C):

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{E}}{\varepsilon_0} = \mathsf{E} - [u\,\mathfrak{M}], \\ \dfrac{\mathfrak{M}}{\mu_0} = \mathsf{M} + [u\,\mathfrak{E}], \end{cases}$$

und somit aus (B′):

$$(2)\qquad \begin{cases} -\mathsf{P}\left(\dfrac{\mathfrak{E}}{\varepsilon_0}\right) = \dfrac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial t}, \\ \mathsf{P}\left(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu_0}\right) = \dfrac{\partial\,\mathfrak{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) sind identisch mit den Maxwell'schen Grundgleichungen der Lichtausbreitung in ruhenden Isolatoren, sofern man in diese die Polarisationen einführt. Sie sagen also wie diese aus, dass die Werte der beiden *Polarisationen* sich in transversalen Wellen fortpflanzen. *Aber die Feldintensitäten sind nicht mehr den Polarisationen gleichgerichtet.* — Betrachten wir insbesondere ein System ebener Wellen, deren Fortpflanzungsrichtung wir zur ξ-Axe wählen in einem ruhenden Coordinatensystem der (ξ, η, ζ). Eine entsprechende Lösung von (2) ist:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_\xi = 0, \quad \mathfrak{E}_\eta = \sqrt{\varepsilon_0}\,.\,F, \quad \mathfrak{E}_\zeta = 0 \\ \mathfrak{M}_\xi = 0, \quad \mathfrak{M}_\eta = 0, \quad \mathfrak{M}_\zeta = \sqrt{\mu_0}\,.\,F \end{cases} \quad \left|\quad \begin{aligned} F &= F(\xi - \omega_0 t), \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (1) und (E) ergeben dann weiter

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi &= -\quad (\omega_0 - u_\xi)^2 \frac{c\,.\,F^2}{\omega_0}, \\ \Sigma_\eta &= -\,u_\eta\,(\omega_0 - u_\xi)\,\frac{c\,.\,F^2}{\omega_0}, \\ \Sigma_\zeta &= -\,u_\zeta\,(\omega_0 - u_\xi)\,\frac{c\,.\,F^2}{\omega_0}, \end{aligned}$$

folglich

$$(4)\qquad \Sigma_\xi : \Sigma_\eta : \Sigma_\zeta = (\omega_0 - u_\xi) : (-\,u_\eta) : (-\,u_\zeta).$$

Also: in jedem Punkte P des Raumes weist die *Wellennormale* N von dem Orte her, an welchem sich der Stern zur Zeit der Lichtaussendung befand; die *Strahlrichtung* Σ in P aber erhalten wir, indem wir einen Vector von der Grösse ω_0

und der Richtung N mit dem Vector $(-u)$ zusammensetzen. In diesen Sätzen ist das Gesetz der Aberration sowohl für die Fixsterne, wie für die beweglichen Sterne vollständig enthalten, sofern wir uns die Beobachtung ohne Hülfe optischer Instrumente ausgeführt denken. Bei den wirklichen Beobachtungen verläuft ein letztes Stück des Strahlenweges in Körpern, für welche ε und μ von ε_0 und μ_0 verschieden sind. Dafür aber ist hier u constant nach Grösse und Richtung. (Vgl. unten § 4 c.) Hervorzuheben ist, dass — in den Grössen erster Ordnung — die Aberration lediglich abhängt von Grösse und Richtung der Geschwindigkeit *u am Beobachtungsorte P.*

Die Gleichungen (3) und (4) beziehen sich auf ein *ruhendes* Coordinatensystem. Wir führen zwei neue Systeme ein: eines der $\xi_0\,..$, welches die Geschwindigkeit u_0 des Sternes zur Zeit der Lichtaussendung teilt, eines der $\xi_1\,..$, welches die Geschwindigkeit u_1 des Beobachters zur Zeit der Beobachtung besitzt. Wir haben dann:

$$\xi = \xi_0 + u_{0\,\xi}\,.\,t\,,$$
$$\xi = \xi_1 + u_{1\,\xi}\,.\,t\,,$$

und die Feldgrössen werden proportional mit

$$F\{\xi_0 - (\omega_0 - u_{0\,\xi})\,t\}\,,$$

bez.

$$F\{\xi_1 - (\omega_0 - u_{1\,\xi})\,t\}\,.$$

Handle es sich um monochromatisches Licht, dann ist

$$F(\alpha) = \sin\left(\frac{\mathrm{N}}{\omega_0}\,\alpha\right),$$

wo $\mathrm{N}/2\pi$ die Schwingungszahl für einen ruhenden Beobachter bedeutet. Bezeichnet nun $\mathrm{N}_0/2\pi$ die Schwingungszahl für einen im System der $\xi_0\,..$ festen Punkt, also die wahre Schwingungszahl, und $\mathrm{N}_1/2\pi$ die scheinbare Schwingungszahl für den mit der Geschwindigkeit u_1 bewegten Beobachter, so folgt

$$\mathrm{N}_0 = (\omega_0 - u_{0\,\xi})\frac{\mathrm{N}}{\omega_0}\,,$$

$$\mathrm{N}_1 = (\omega_0 - u_{1\,\xi})\frac{\mathrm{N}}{\omega_0}\,,$$

also, in den Grössen erster Ordnung genau,

$$\frac{\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_0}{\mathrm{N}_0} = \frac{u_{0\,\xi} - u_{1\,\xi}}{\omega_0}\,. \tag{5}$$

Man kann $u_{0\xi} - u_{1\xi}$ als Annäherungsgeschwindigkeit des Sternes gegen den Beobachter bezeichnen, muss aber beachten, dass es sich um Lage und Geschwindigkeit des Beobachters zur *Beobachtungszeit*, dagegen um Lage und Geschwindigkeit des Sternes zur *Zeit der Lichtaussendung* handelt. Gleichung (5) spricht das Doppler'sche Princip aus.

§ 3. Bewegung der Erde. Umformung der Grundgleichungen.

Gegenstand unserer *Experimente* sind ausschliesslich Körper in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche. Die Geschwindigkeit u eines solchen Körpers setzt sich zusammen aus seiner relativen Geschwindigkeit v gegen die Erde und der Geschwindigkeit p, welche er bei starrer Verbindung mit der Erde besitzen würde. Dem Vector p dürfen wir für die räumliche und zeitliche Ausdehnung jedes einzelnen Versuches constante Grösse und Richtung zuschreiben. Den Hauptbeitrag zu p liefert die Bewegung der Erde in ihrer Bahn um die Sonne; sein Zahlwert ist sehr nahe $10^{-4} . \omega_0$.

Wir beziehen von jetzt an unsere Gleichungen auf ein Coordinatensystem, welches starr mit der Erde verbunden ist. Ruhe, Bewegung, Geschwindigkeit etc., bezogen auf dieses System, sollen im Folgenden *relative* Ruhe, . . . heissen. Eine Differentiation nach der Zeit, bei welcher die relativen Coordinaten des betrachteten Punktes als unverändert vorausgesetzt werden, soll durch $\delta / \delta t$ bezeichnet werden. Es ist dann

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + p \nabla .$$

$$u = p + v, \quad \text{wo } p = \text{const.,}$$

und folglich nach (g):

$$\begin{aligned} \mathsf{P}[u \mathfrak{E}] &= \mathsf{P}[v \mathfrak{E}] + \mathsf{P}[p \mathfrak{E}] \\ &= \mathsf{P}[v \mathfrak{E}] + \Gamma(\mathfrak{E}).p - p \nabla . \mathfrak{E}. \end{aligned}$$

Somit wird aus (B′) und (C):

$$(\mathrm{B}_1) \quad \left\{ \begin{aligned} -\mathsf{P}(\mathsf{E} - [v \mathfrak{M}]) &= \frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t} + \Gamma(\mathfrak{M}).v, \\ \mathsf{P}(\mathsf{M} + [v \mathfrak{E}]) &= \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} + \Gamma(\mathfrak{E}).v + \Lambda, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{C}_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda &= \lambda (\mathsf{E} - \mathsf{K}), \\ \mathfrak{E} &= \varepsilon \mathsf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 [(p + v) \mathsf{M}], \\ \mathfrak{M} &= \mu \mathsf{M} + \varepsilon_0 \mu_0 [(p + v) \mathsf{E}]. \end{aligned} \right.$$

§ 4. Relativ ruhende Körper.

Für den Fall relativer Ruhe aller Körper gegen die Erde gehen diese Gleichungen über in:

$$(\mathrm{B}_2) \qquad \begin{cases} -\mathsf{P}(\mathsf{E}) = \dfrac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t}, \\[2ex] \mathsf{P}(\mathsf{M}) = \dfrac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} + \Lambda, \end{cases}$$

$$(\mathrm{C}_2) \qquad \begin{cases} \Lambda = \lambda(\mathsf{E} - \mathsf{K}), \\ \mathfrak{E} = \varepsilon\,\mathsf{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\,[p\,\mathsf{M}], \\ \mathfrak{M} = \mu\,\mathsf{M} + \varepsilon_0\,\mu_0\,[p\,\mathsf{E}]. \end{cases}$$

Nun werden, soweit unsere bisherigen Erfahrungen reichen, sowohl die im engeren Sinne elektromagnetischen, wie die optischen Erscheinungen in relativ ruhenden Körpern vollständig dargestellt durch die Maxwell'schen Gleichungen (B_0'), (C_0). Wir haben also zu untersuchen, inwiefern sich die Folgerungen aus (B_2), (C_2) von den Folgerungen aus (B_0'), (C_0) unterscheiden.

a) Stationäre Felder.

Stationäre Erscheinungen — genauer: Erscheinungen, welche stationär bleiben für den mitbewegten Beobachter — sind dadurch charakterisirt, dass $\delta / \delta t = 0$ ist. Für sie gilt also:

$$(6) \qquad \begin{cases} -\mathsf{P}(\mathsf{E}) = 0, \\ \mathsf{P}(\mathsf{M}) = \Lambda. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$(7) \qquad \Gamma(\Lambda) = 0.$$

Die Gleichungen (6) stimmen überein mit den Gleichungen der Maxwell'schen Theorie für stationäre Felder. Durch sie ist das Feld eindeutig bestimmt, sobald noch die Werte $\Gamma(\mu\,\mathsf{M})$ überall, die Werte $\Gamma(\varepsilon\,\mathsf{E})$ durchweg im Dielektricum, und die Werte $\int \varepsilon\,\mathsf{E}_N\,dS$ für die Gesamtoberfläche jedes Leiters vorgeschrieben sind (vgl. „elm. Feld“ p. 375 ff.). Diese Werte bedeuten in der Maxwell'schen Theorie bez. die magnetische Dichte, die elektrische Dichte, die gesamte Elektricitätsmenge eines Leiters. Die gleichen Grössen sind in *unserer* Theorie dargestellt durch die Werte $\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{M})$, $\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{E})$, $\int \mathfrak{E}_N dS$ (vgl. oben p. 35). Wir wollen zeigen, dass sie infolge der Gleichungen (C_2) und (6) den obigen bez. gleich sind. Es ist nach (C_2) und (f)

$$\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{M}) = \mathsf{\Gamma}(\mu\,\mathsf{M}) - \varepsilon_0\,\mu_0\,p\,.\,\mathsf{P}(\mathsf{E}),$$

also nach (6)

$$\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{M}) = \mathsf{\Gamma}(\mu\,\mathsf{M}). \tag{8a}$$

Ebenso

$$\begin{aligned}\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{E}) &= \mathsf{\Gamma}(\varepsilon\,\mathsf{E}) + \varepsilon_0\,\mu_0\,p\,.\,\mathsf{P}(\mathsf{M})\\ &= \mathsf{\Gamma}(\varepsilon\,\mathsf{E}) + \varepsilon_0\,\mu_0\,p\,.\,\Lambda.\end{aligned} \tag{8b}$$

Daher im Dielektricum:

$$\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{E}) = \mathsf{\Gamma}(\varepsilon\,\mathsf{E}); \tag{8c}$$

und für einen Leiter von der Oberfläche S und dem Volumen τ:

$$\int \mathfrak{E}_N dS = \int \mathsf{\Gamma}(\mathfrak{E})\,d\tau = \int \varepsilon\,\mathsf{E}_N dS + \varepsilon_0\,\mu_0 \int p\,.\,\Lambda\,d\tau.$$

Das letzte Integral können wir schreiben, indem wir etwa $p // x$ wählen:

$$p \int dx \int\int \Lambda_x\,dy\,dz.$$

Aber wegen (7) ist

$$\int\int \Lambda_x\,dy\,dz = 0,$$

da jeder zu x normale Querschnitt durch den Leiter mittels eines in Isolatoren verlaufenden Flächenstückes zu einer geschlossenen Fläche ergänzt werden kann. Somit

$$\int \mathfrak{E}_N\,dS = \int \varepsilon\,\mathsf{E}_N\,dS. \tag{8d}$$

Die Gleichungen (6) und (8a, c, d) sagen zusammen aus: *das stationäre Feld ist bei gleicher elektrischer und magnetischer Verteilung das gleiche, welches auch die Maxwell'sche Theorie ergiebt.*

b) Quasistationäre Felder.

Als „quasistationär“ bezeichnen wir veränderliche Felder, welche ausreichend dargestellt werden durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} -\mathsf{P}(\mathsf{E}) &= \frac{\delta\,\mathfrak{M}}{\delta\,t},\\ \mathsf{P}(\mathsf{M}) &= \Lambda \end{aligned}\right. \tag{9}$$

(vgl. „elm. Feld“ p. 306 ff. und 379 ff.).

Aus der zweiten Gleichung folgt wieder (7):

$$\Gamma(\Lambda) = 0.$$

Die betrachteten Vorgänge sind also dadurch charakterisirt, dass erstens die Strömung in *geschlossenen* Stromfäden verläuft, in deren jedem sie in einheitlichem Rhythmus pulsirt, und dass zweitens das magnetische Feld in jedem Moment mit ausreichender Genauigkeit aus der jeweiligen Strömung berechnet werden kann in der gleichen Weise, wie wenn diese stationär wäre.

Die erste der Gleichungen (9) enthält das Gesetz der inducirten elektromotorischen Kräfte. Sie hat die *Form* des Faraday'schen Inductionsgesetzes; aber $\mathfrak{M}$ bedeutet nicht mehr die Grösse $\mu \mathsf{M}$, sondern den in (C_2) gegebenen Wert. Es tritt also in einer Curve s, welche die Fläche S umspannt, neben der Faraday'schen elektromotorischen Kraft

$$\mathcal{E} = -\frac{\delta}{\delta t}\int \mu\, \mathsf{M}_N\, d\,S$$

eine neue auf:

$$\mathcal{E}' = -\frac{\delta}{\delta t}\int \varepsilon_0\, \mu_0\, [p\, \mathsf{E}]_N\, d\,S.$$

Sie ist selbst für die stärksten herstellbaren E sehr klein, und könnte nur erkannt werden durch den Stromstoss in einem Leiter, der in der Curve s verläuft. Es sei etwa $p // x$, $\mathsf{E} // y$, $N // z$; dann ist

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}'\, \delta\, t = -\,\varepsilon_0\, \mu_0\, p \cdot \left\{\int\!\!\int \mathsf{E}_y\, d\,x\, d\,y\right\}_{t_0}^{t_1}. \tag{10}$$

Vor wie nach dem Inductionsstoss ist aber das Linienintegral von E zwischen zwei beliebigen Punkten des Leiters gleich Null, d. h. in (10) ist $\int \mathsf{E}_y\, d\,y = 0$ sowohl für $t = t_0$ wie für $t = t_1$, und daher ist die rechte Seite selbst gleich Null. *Die Correction am Faraday'schen Inductionsgesetz ergiebt somit keine wahrnehmbaren Folgen.*

c) Strahlungsvorgänge.

Es bleiben noch die Vorgänge zu besprechen, bei welchen die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feldes zur Geltung kommt. Auf diesem Gebiet geben bisher nur *optische* Methoden die Möglichkeit, über das Vorhandensein selbst der Grössen *erster* Ordnung zu entscheiden.

Nach dem Vorgange von Lorentz[1]) transformiren wir die Gleichungen (B_2) durch Einführung der „Ortszeit“

$$t' = t - \varepsilon_0 \mu_0 p \cdot r \tag{11}$$

an Stelle der allgemeinen Zeit t. Hier bedeutet r den Radiusvector des betrachteten Punktes P. In cartesischen Coordinaten also: statt der bisherigen unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t führen wir ein

$$x' = x, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = t - \varepsilon_0 \mu_0 (p_x . x + p_y . y + p_z . z). \tag{11'}$$

Bezeichnen wir die Rotation im neuen System durch P', so lautet das Resultat der Umformung:

$$\left\{ \begin{aligned} -\mathsf{P}'(\mathsf{E}) &= \frac{\delta(\mu \mathsf{M})}{\delta t'}, \\ \mathsf{P}'(\mathsf{M}) &= \frac{\delta(\varepsilon \mathsf{E})}{\delta t'} + \Lambda, \end{aligned} \right. \tag{12}$$

wo

$$\Lambda = \lambda(\mathsf{E} - \mathsf{K}).$$

Denkt man sich in (12) die Veränderliche t' durch t ersetzt, so hat man die Maxwell'schen Gleichungen (B_0') (C_0) vor sich. Es folgt also — und zwar in aller Strenge — der Satz:

Jedem im *ruhenden* System möglichen Vorgang entspricht ein möglicher Vorgang im *bewegten* System, bei welchem die *gleichen* Werte E, M, welche im Punkte P zur Zeit t stattfanden, jetzt zur Zeit t' eintreten. Der Zeitunterschied $t' - t$ ist eindeutige Function der Lage von P.

Richtung des Strahles ist die gemeinsame Normale von E und M. Sie wird nach dem Vorstehenden durch die Erdbewegung nicht beeinflusst. Also:

Der relative Strahlengang ist unabhängig von der Erdbewegung. Oder: die gesamte geometrische Optik bleibt von unserer Correction der Maxwell'chen Gleichungen unberührt.

Daraus folgt speciell: wenn uns der Weg der Lichtstrahlen von einem Stern bis in die Nähe der Erdoberfläche (in das Gebiet $u = p$ hinein) erst bekannt ist, so brauchen wir bei der

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie etc., Leiden 1895.

Behandlung des weiteren relativen Verlaufes auf die Bewegung der Erde keine Rücksicht mehr zu nehmen. Oder: *die beobachtete Aberration ist unabhängig von der Form und physikalischen Beschaffenheit der brechenden Körper in unseren Fernrohren* (Linsen, Füllung mit Wasser).

Weiter: die Zeit, welche das Licht braucht, um von P_1 nach P_2 zu gelangen, wird zwar durch die gemeinsame Geschwindigkeit von P_1 und P_2 geändert, aber für jeden Weg, der von P_1 nach P_2 führt, um denselben Betrag. Also: *die Erdbewegung bringt in keinem Interferenzbild eine Veränderung hervor.*

Alle Bestimmungen von Wellenlängen beruhen auf Ausmessung von Interferenzbildern; also: *was wir als Wellenlänge messen, das ist der bereits vom Einfluss der Erdbewegung befreite „normale" Wert dieser Grösse.*

Könnten und würden wir aber die Wellenlänge direct entsprechend ihrer Definition bestimmen als die Strecke, um welche eine bestimmte Phase einer Sinuswelle während der Zeit einer Periode fortschreitet, so müssten wir verschiedene Werte erhalten je nach dem Winkel, welchen die Fortpflanzungsrichtung mit der Richtung der Erdbewegung einschliesst.

Wir wollen die Rechnung durchführen für ebene Wellen in einem isolirenden Medium. Wir setzen also an: alle Feldcomponenten sollen proportional sein ein und derselben Function des Argumentes

$$\alpha = v_x . x' + v_y . y' + v_z . z' - t'.$$

Damit dieser Ansatz den Gleichungen (12), mit $\Lambda = 0$, genüge, muss

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \varepsilon \mu \tag{13}$$

und E, wie M normal zu v sein.

Es ist aber nach (11'):

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = n_x . x + n_y . y + n_z . z - t, \\ \text{wo} \\ n_x = v_x + \varepsilon_0 \mu_0 p_x, \quad n_y = v_y + \varepsilon_0 \mu_0 p_y, \quad n_z = v_z + \varepsilon_0 \mu_0 p_z. \end{array}\right. \tag{14}$$

Die Lösung stellt also eine ebene Welle dar, deren Normale die Richtung von n hat, während der Strahl parallel zu v ist.

Die „Strahlgeschwindigkeit" U ist ein Vector, der die Richtung des Strahles hat, und dessen Grösse durch die Länge des Strahles zwischen den Ebenen $\alpha(t) = 0$ und $\alpha(t+1) = 0$ dargestellt ist, d. h. U ist bestimmt durch die Gleichungen

$$(15) \qquad \begin{cases} n_x \,.\, U_x + n_y \,.\, U_y + n_z \,.\, U_z = 1\,, \\ U_x = \varkappa \,.\, \nu_x, \quad U_y = \varkappa \,.\, \nu_y, \quad U_z = \varkappa \,.\, \nu_z. \end{cases}$$

Daraus folgt als Zahlwert von U:

$$U = \frac{\nu}{\nu_x \,.\, n_x + \nu_y \,.\, n_y + \nu_z \,.\, n_z}\,,$$

oder

$$(16) \qquad \frac{1}{U} = \sqrt{\varepsilon\,\mu} + \varepsilon_0\,\mu_0\,p_\nu\,,$$

wo p_ν die Componente von p nach der Richtung des Strahles bedeutet.

Wenn wir noch durch

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon\,\mu}{\varepsilon_0\,\mu_0}}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ruhenden Medium und den Brechungsexponenten bezeichnen, so erhalten wir aus (16) für die Fortpflanzungszeit t, welche der Strahllänge s entspricht:

$$(17) \qquad t = \frac{s}{\omega} + \frac{p \,.\, s_p}{\omega_0^2}\,,$$

und zwar in aller Strenge. Genähert, d. h. richtig in den Grössen erster Ordnung, erhalten wir:

$$(18) \qquad U = \omega - \frac{p_\nu}{\beta^2}\,.$$

In (17) bedeutet s_p die Projection der Strahllänge auf die Richtung von p. Der Factor von s_p ist unabhängig von dem Medium, in welchem die Strecke s zurückgelegt wird; das von p abhängige Glied giebt daher *denselben* Gesamtbeitrag zur Fortpflanzungszeit, wenn mittels beliebiger Reflexionen und Brechungen eine gegebene anfängliche Wellenebene auf *verschiedenen* Wegen in eine ebenfalls gegebene Endlage übergeführt wird. Dies ist nochmals in speciellerer Form der Satz von der Unveränderlichkeit der Interferenzbilder; er ist als richtig — auch in den Grössen *zweiter* Ordnung — erwiesen durch die Versuche von Michelson und Morley.

Abhängig von der Erdbewegung muss nach (18) die Geschwindigkeit U sein. Die sogenannten „terrestrischen Methoden“ bestimmen aber die Lichtgeschwindigkeit aus der zum Durchlaufen einer *geschlossenen* Bahn verbrauchten Zeit. Sie müssten daher selbst bei beliebig gesteigerter Genauigkeit einen von der Erdbewegung unabhängigen Wert liefern.

Indem wir die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammenfassen, können wir die am Anfang desselben gestellte Frage dahin beantworten: *Von allen bisher beobachteten elektrischen und optischen Erscheinungen in relativ ruhenden Körpern geben unsere Grundgleichungen ebensowohl Rechenschaft wie die Maxwell'schen.*

§ 5. **Relative Bewegungen.**

Indem wir uns jetzt der Betrachtung des Feldes in relativ zur Erde *bewegten* Körpern zuwenden — und zwar zunächst unter Ausschluss der optischen Erscheinungen —, müssen wir auf die Gleichungen (B_1) (C_1) des § 3 zurückgreifen. Da wir nicht von den hypothetischen Bewegungen kleinster Teilchen, sondern ausschliesslich von den wahrnehmbaren Bewegungen ausgedehnter Massen handeln, so dürfen wir alle Geschwindigkeiten v als verschwindend klein gegen p und a fortiori gegen ω_0 annehmen. Wir vernachlässigen daher die Glieder, welche $v.(p+v)\varepsilon_0\mu_0$ als Factor enthalten, und haben so zunächst:

$$
(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\mathsf{P}(\mathsf{E}-[v.\mu\mathsf{M}]) &= \frac{\delta\mathfrak{M}}{\delta t} + \Gamma(\mu\mathsf{M}).v \\ \mathsf{P}(\mathsf{M}+[v.\varepsilon\mathsf{E}]) &= \frac{\delta\mathfrak{E}}{\delta t} + \Gamma(\varepsilon\mathsf{E}).v + \Lambda. \end{aligned} \right.
$$

Ferner aber durften wir, wie in § 4 gezeigt wurde, unter dem Zeichen $\delta/\delta t$ die mit dem Factor $\varepsilon_0\mu_0 p$ behafteten Glieder fortlassen, ohne dadurch Ungenauigkeiten hervorzurufen, welche für *elektromagnetische* Methoden erkennbar sind. Um so mehr gilt dies für die Glieder mit $\varepsilon_0\mu_0 v$. Vernachlässigen wir die einen, wie die anderen, so haben wir in (19) für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ an Stelle der in (C_1) gegebenen Werte zu setzen:

$$
(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \varepsilon\mathsf{E}, \\ \mathfrak{M} &= \mu\mathsf{M}. \end{aligned} \right.
$$

Aus den Gleichungen (19) (20) ist die gemeinsame Geschwindigkeit p vollständig verschwunden. Sie enthalten nur noch die *relativen* Geschwindigkeiten v, und stimmen völlig überein mit den Hertz'schen „Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper". Dass sie „die elektromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinne in dem Umfange darstellen, in welchem dieselben bisher mit Sicherheit untersucht worden sind", hat Hertz[1]) gezeigt.

Es bleibt uns also nur zu untersuchen, was unsere Gleichungen über die *Optik* bewegter Medien aussagen. Die wenigen vorliegenden Versuche (angestellt an strömendem Wasser von Fizeau, wiederholt von Michelson und Morley) lassen sich ausreichend discutiren, sofern man das Gesetz der Ausbreitung ebener Wellen in *gleichförmig* bewegten Medien kennt; der gleichförmigen Geschwindigkeit sind lediglich für die verschiedenen Teile des Apparates verschiedene Werte beizulegen. Diesen Fall haben wir bereits in § 4 c) behandelt, und zwar ohne alle Vernachlässigung auf Grundlage unserer Fundamentalgleichungen. Wir haben nur das p des § 4 jetzt durch $p+v$ zu ersetzen, und zu beachten, dass die so entstehenden Gleichungen für ein Coordinatensystem gelten, welches die Geschwindigkeit $p+v$ teilt. Die so verstandene Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nach (18):

$$\omega - \frac{p_\nu + v_\nu}{\beta^2}.$$

Zur Beobachtung gelangt ausschliesslich die Veränderung eines Interferenzbildes, welche durch Veränderung der v hervorgerufen wird. Diese ist unabhängig vom Werte des p; es verhält sich daher für die Beobachtung alles so, als ob $p=0$ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, bezogen auf das bewegte Medium,

$$\omega - \frac{v_\nu}{\beta^2}$$

wäre. Dies bedeutet für den Beobachter, welcher an der Bewegung des Mediums nicht teilnimmt, eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\omega + \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) v_\nu. \tag{21}$$

Diesen Wert bestätigen die Versuche; über die Grössen zweiter Ordnung, welche in (18) bereits vernachlässigt sind, geben sie keine Auskunft.

---

1) Vgl. die Hertz'sche Abhandlung oder etwa „elm. Feld", p. 541 ff.

§ 6. Mechanische Kräfte.

Soweit es sich um die Kräfte handelt, welche bei *unseren Versuchen* zur Geltung kommen, bilden die Grundgleichungen in der Form (B_1) (C_1) den geeignetsten Ausgangspunkt. In allen anderen Fällen aber können wir von den aus (B_1) (C_1) gezogenen Folgerungen leicht zu den Folgerungen übergehen, welche wir aus (B′) und (C) gewonnen haben würden, indem wir in unseren Resultaten

$$(22) \qquad p = 0, \quad v = u, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t}$$

setzen.

Wir multipliciren die erste der Gleichungen (B_1) mit $\mathsf{M} + [v\,\mathfrak{E}]$, die zweite mit $\mathsf{E} - [v\,\mathfrak{M}]$ und addiren; dann entsteht nach (f):

$$-\Gamma\Big[(\mathsf{E} - [v\,\mathfrak{M}])(\mathsf{M} + [v\,\mathfrak{E}])\Big] = \left(\frac{\delta\,\mathfrak{M}}{\delta t} + \Gamma(\mathfrak{M}).v\right).(\mathsf{M} + [v\,\mathfrak{E}])$$
$$+\left(\frac{\delta\,\mathfrak{E}}{\delta t} + \Gamma(\mathfrak{E}).v + \Lambda\right).(\mathsf{E} - [v\,\mathfrak{M}]).$$

Nun folgt aus (C_1) unter Benutzung von (c):

$$\mathsf{M}\cdot\frac{\delta\,\mathfrak{M}}{\delta t} + \mathsf{E}\cdot\frac{\delta\,\mathfrak{E}}{\delta t} = \mathsf{M}\cdot\frac{\delta(\mu\,\mathsf{M})}{\delta t} + \mathsf{E}\cdot\frac{\delta(\varepsilon\,\mathsf{E})}{\delta t}$$
$$+\varepsilon_0\,\mu_0(p+v)\cdot\frac{\delta[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]}{\delta t} + 2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\delta(p+v)}{\delta t}\cdot[\mathsf{E}\,\mathsf{M}],$$

und somit

$$(23)\left\{\begin{aligned}
&-\Gamma\Big[(\mathsf{E} - [v\,\mathfrak{M}])(\mathsf{M} + [v\,\mathfrak{E}])\Big] = \mathsf{E}\cdot\frac{\delta(\varepsilon\,\mathsf{E})}{\delta t} + \mathsf{M}\cdot\frac{\delta(\mu\,\mathsf{M})}{\delta t}\\
&+\varepsilon_0\,\mu_0(p+v)\cdot\frac{\delta[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]}{\delta t} + 2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\delta(p+v)}{\delta t}\cdot[\mathsf{E}\,\mathsf{M}] + \mathsf{E}\cdot\Lambda\\
&+v.\Big\{\Gamma(\mathfrak{E})\,\mathsf{E} + \Gamma(\mathfrak{M})\,\mathsf{M} + \frac{\delta}{\delta t}[\mathfrak{E}\,\mathfrak{M}] + [\Lambda\,\mathfrak{M}]\\
&\qquad + [\Gamma(\mathfrak{E})\,v.\mathfrak{M}] - [\Gamma(\mathfrak{M})\,v.\mathfrak{E}]\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Andererseits haben wir aus (A):

$$W = \int_\infty w\,d\tau,$$

wo

$$w = \tfrac{1}{2}(\mathsf{E}.\mathfrak{E} + \mathsf{M}.\mathfrak{M}) + \varepsilon_0\,\mu_0(p+v).[\mathsf{E}\,\mathsf{M}],$$

oder nach (C_1) auch

$$(24) \qquad w = \tfrac{1}{2}(\varepsilon\,\mathsf{E}^2 + \mu\,\mathsf{M}^2) + 2\,\varepsilon_0\,\mu_0(p+v).[\mathsf{E}\,\mathsf{M}].$$

Wir bilden $\delta w / \delta t$, und beachten dabei, dass die Werte von ε und μ an der bewegten Materie haften, dass also

$$0 = \frac{d\,\varepsilon}{d\,t} = \frac{\delta\,\varepsilon}{\delta\,t} + v\,.\,\nabla\,\varepsilon,$$

$$0 = \frac{d\,\mu}{d\,t} = \frac{\delta\,\mu}{\delta\,t} + v\,.\,\nabla\,\mu,$$

oder

$$\frac{\delta\,\varepsilon}{\delta\,t} = -\,v\,.\,\nabla\,\varepsilon, \quad \frac{\delta\,\mu}{\delta\,t} = -\,v\,.\,\nabla\,\mu$$

ist. So ergiebt sich aus (24):

$$(25) \begin{cases} \dfrac{\delta\,w}{\delta\,t} = \mathsf{E}\cdot\dfrac{\delta(\varepsilon\,\mathsf{E})}{\delta\,t} + \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}^2\,v\,.\,\nabla\,\varepsilon + \mathsf{M}\cdot\dfrac{\delta(\mu\,\mathsf{M})}{\delta\,t} + \tfrac{1}{2}\,\mathsf{M}^2\,v\,.\,\nabla\,\mu \\ \quad + 2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,(p+v)\cdot\dfrac{\delta\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]}{\delta\,t} + 2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\delta\,(p+v)}{\delta\,t}\cdot[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]. \end{cases}$$

Aus (23) und (25) folgt:

$$(26) \begin{cases} -\,\Gamma\Big[(\mathsf{E} - [v\,\mathfrak{M}])\,(\mathsf{M} + [v\,\mathfrak{E}])\Big] = \dfrac{\delta\,w}{\delta\,t} \\ \quad + \mathsf{E}\,.\,\Lambda - p\,.\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\delta\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]}{\delta\,t} + v\,.\,f, \end{cases}$$

wo

$$(27) \begin{cases} f = \Gamma(\mathfrak{E})\,\mathsf{E} - \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}^2\,\nabla\,\varepsilon + \Gamma(\mathfrak{M})\,\mathsf{M} - \tfrac{1}{2}\,\mathsf{M}^2\,\nabla\,\mu + [\Lambda\,\mathfrak{M}] \\ \quad + \dfrac{\delta}{\delta\,t}\{[\mathfrak{E}\,\mathfrak{M}] - \varepsilon_0\,\mu_0\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]\} + [\Gamma(\mathfrak{E})\,v\,.\,\mathfrak{M}] - [\Gamma(\mathfrak{M})\,v\,.\,\mathfrak{E}]. \end{cases}$$

Wir multipliciren die Gleichung (26) mit $d\,\tau$ und integriren über das ganze Feld. Dann bildet sich links ein Oberflächenintegral, dessen Integrand überall Null ist. Rechts entsteht aus dem ersten Glied:

$$\frac{\delta\,W}{\delta\,t} = \frac{\partial\,W}{\partial\,t}.$$

Also:

$$(28) \quad -\,\frac{\partial\,W}{\partial\,t} = \int\limits_{\infty} \mathsf{E}\,.\,\Lambda\,d\,\tau - p\cdot\frac{\partial}{\partial\,t}\int\limits_{\infty} \varepsilon_0\,\mu_0\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]\,d\,\tau + \int\limits_{\infty} v\,.\,f\,d\,\tau.$$

Zunächst fassen wir die Partialgeschwindigkeiten gemäss (22) in eine zusammen, indem wir $p = 0$, $v = u$ setzen. Wir erhalten so:

$$(29) \quad -\,\frac{\partial\,W}{\partial\,t} = \int\limits_{\infty} \mathsf{E}\,.\,\Lambda\,d\,\tau + \int\limits_{\infty} u\,.\,f_0\,d\,\tau,$$

wo

$$(30)\left\{\begin{aligned} f_0 &= \mathsf{\Gamma}(\mathfrak{E})\,\mathsf{E} - \tfrac{1}{2}\mathsf{E}^2\,\nabla\,\varepsilon + \mathsf{\Gamma}(\mathfrak{M})\,\mathsf{M} - \tfrac{1}{2}\mathsf{M}^2\,\nabla\,\mu + [\mathsf{\Lambda}\,\mathfrak{M}] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}\{[\mathfrak{E}\,\mathfrak{M}] - \varepsilon_0\,\mu_0\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]\} + [\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{E})\,u\,.\,\mathfrak{M}] - [\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{M})\,u\,.\,\mathfrak{E}]. \end{aligned}\right.$$

Nun ist erfahrungsmässig $\int\limits_\infty \mathsf{E}\,.\,\mathsf{\Lambda}\,d\tau$ der Energiebetrag, welcher per Zeiteinheit in den Leitern in der Form von Wärme und chemischer Energie abgegeben wird. Die Gleichung (29) lehrt also, dass das Energieprincip gewahrt ist, sofern wir W als die elektromagnetische Energie des Feldes und $\int\limits_\infty u\,.\,f_0\,d\tau$ als die in der Zeiteinheit geleistete mechanische Arbeit betrachten dürfen. Als Energie dürfen wir *jede* eindeutige Function von E, M und u ansprechen; den von Gleichung (29) geforderten Wert haben wir bereits in (A) vorweggenommen. Der Arbeit dürfen wir den angegebenen Wert zuschreiben, wenn wir ohne Widerspruch erstens mit unseren Grundannahmen und zweitens mit der Erfahrung f_0 als die auf den Inhalt der Volumeinheit wirkende Kraft ansehen dürfen.

Bezüglich der *ersten* Forderung bemerken wir, dass für ein Volumelement *im Vacuum* gilt:

$$\mathsf{\Gamma}(\mathfrak{E}) = \mathsf{\Gamma}(\mathfrak{M}) = \nabla\,\varepsilon = \nabla\,\mu = \mathsf{\Lambda} = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0,$$

und ferner nach unserer Festsetzung (vgl. p. 34):

$$u = 0, \quad \text{also} \quad \mathfrak{E} = \varepsilon_0\,\mathsf{E}, \quad \mathfrak{M} = \mu_0\,\mathsf{M}.$$

Es wird also in f_0 jedes einzelne Glied gleich Null. Daher *bleibt* $u = 0$, wenn es einmal gleich Null war. Unsere Festsetzung kann somit nicht zu einem inneren Widerspruch führen.

Unsere *Erfahrungen* über die mechanischen Kräfte elektromagnetischen Ursprunges entspringen ausschliesslich der Beobachtung der *relativen* Bewegungen der Körper. Wir benutzen daher die Gleichung (28). In dieser erscheint die geleistete Arbeit in zwei Teile zerlegt: Der erste Teilbetrag entspricht einer Bewegung, welche alle Körper des Feldes gemeinsam als starres System ausführen, und bedeutet, dass eine solche Bewegung durch eine Kraft

$$F = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\infty \varepsilon_0\,\mu_0\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]\,d\tau$$

unterstützt wird.

Der zweite Teilbetrag $\int\limits_{\infty} v \, . \, f \, d\tau$ entspricht den *relativen* Bewegungen der im Felde vorhandenen Körper; er bedeutet, dass diese Bewegungen durch die Kräfte f beherrscht sind. Es fragt sich also, ob die f in (27) thatsächlich die von uns beobachteten Kräfte sind.

Aus dem Ausdruck von f können wir zunächst die beiden letzten Glieder ausscheiden. Das erste dieser Glieder bedeutet eine Kraft auf ein bewegtes elektrisch geladenes Teilchen, welche dasselbe normal zur magnetischen Polarisation und *normal zu seiner Bewegungsrichtung* fortzutreiben sucht. An ausgedehnten Massen wird sie wegen der Kleinheit des Factors v kaum nachzuweisen sein. (Sie ist herbeigezogen worden zur Deutung der an den Kathodenstrahlen beobachteten Erscheinungen und des Zeeman-Effectes.) Aber wie dem auch sein mag: die Arbeit einer solchen Kraft ist Null; ihre Existenz oder Nichtexistenz ändert also nichts bezüglich der Energiegleichung. Das gleiche gilt für die Kraft auf ein im elektrischen Felde bewegtes magnetisches Teilchen, welche durch das zweite der in Frage stehenden Glieder dargestellt wird. In Zeichen: nach (d) ist $v \, . \, [v \mathfrak{M}] = 0$, $v \, . \, [v \mathfrak{E}] = 0$; wir hätten also in (23) sogleich die beiden letzten Terme unterdrücken können.

Weiter: Der Term

$$\frac{\delta}{\delta t} \{ [\mathfrak{E} \mathfrak{M}] - \varepsilon_0 \, \mu_0 \, [\mathsf{E} \, \mathsf{M}] \}$$

bezeichnet zwei Partialkräfte, welche stets so klein bleiben, dass jede einzelne von ihnen höchstens in äusserst verdünnten Gasen zu wahrnehmbaren Bewegungen führen könnte.[1]) In diesem Falle aber ist $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$; die beiden Kräfte compensiren sich daher in den Grössen niedrigster Ordnung; es bleiben nur Glieder der Form $(p + v) / \omega_0^2 \, . \, \delta / \delta t$ übrig, welche unter keinen Umständen zu merkbaren Bewegungen Anlass geben können.

Die wahrnehmbaren Kräfte werden somit dargestellt durch die fünf ersten Terme in f. Diese bezeichnen in strenger Vollständigkeit die Kräfte im *relativ ruhenden, stationären* Felde.

1) Vgl. H. Hertz, Ausbreitung der elektrischen Kraft, p. 284; H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. 3. p. 531 f.

Diese Kräfte sind es zugleich, welche das Object aller genauen Messungen bilden. Um sie als Functionen von E und M auszudrücken, haben wir die Werte von $\mathfrak{M}$, $\Gamma(\mathfrak{E})$, $\Gamma(\mathfrak{M})$ aus (C_2) und (8) zu entnehmen. Aus (8b) folgt:

$$\Gamma(\mathfrak{E})\,\mathsf{E} = \Gamma(\varepsilon\,\mathsf{E})\,\mathsf{E} + \varepsilon_0\,\mu_0\,(p\,.\,\Lambda)\,\mathsf{E},$$

oder nach (e):

$$= \Gamma(\varepsilon\,\mathsf{E})\,\mathsf{E} + \varepsilon_0\,\mu_0 \Big\{(\Lambda\,.\,\mathsf{E})\,p - \big[\Lambda\,[p\,\mathsf{E}]\big]\Big\}\,.$$

Den letzten Term vereinigen wir mit dem Term $[\Lambda\,\mathfrak{M}]$ in f, und erhalten so:

$$(31)\quad \begin{cases} f = \Gamma(\varepsilon\,\mathsf{E})\,\mathsf{E} - \frac{1}{2}\,\mathsf{E}^2 \nabla\,\varepsilon + \Gamma(\mu\,\mathsf{M})\,\mathsf{M} - \frac{1}{2}\,\mathsf{M}^2 \nabla\,\mu \\ \quad + [\Lambda\,.\,\mu\,\mathsf{M}] + \varepsilon_0\,\mu_0\,(\Lambda\,.\,\mathsf{E})\,p\,. \end{cases}$$

Die fünf ersten Terme dieses Ausdruckes stellen die bekannten Kräfte des stationären Feldes vollständig dar: die Kräfte auf die Träger von Elektricitätsmengen, auf ungeladene Dielektrica, auf die Teilchen permanenter Magnete, auf temporär magnetisirte Körper, auf durchströmte Leiter. Zu diesen bekannten Kräften gesellt sich nach unserer Theorie eine weitere Kraft auf durchströmte Leiter, welche bisher nicht beobachtet ist: $\varepsilon_0\,\mu_0\,(\Lambda\,.\,\mathsf{E})\,p$. Sie hat die Richtung der Erdbewegung, und würde für ein Stück Kupfer bei der Stromdichte 1 $\frac{\text{Ampère}}{\text{mm}^2}$ den $10^{13\text{ten}}$ Teil des Kupfergewichtes betragen.

§ 7. Localisirung der Energie.

Der in § 6 discutirte Wert der mechanischen Kräfte leistet gemäss seiner Ableitung der Bedingung Genüge, dass *für das gesamte Feld* das Princip von der Erhaltung der Energie gewahrt sein muss. Wir haben noch zu untersuchen, ob wir die Energie *localisiren* können unter Aufrechterhaltung unserer Annahme (E), dass

$$\Sigma = c\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]$$

die *Strahlung* sei.

Wir gehen aus von der Gleichung (26), verstehen aber wiederum unter v die *Gesamt*geschwindigkeit, setzen also

$$p = 0, \quad v = u, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t},$$

und damit

$$f = f_0 \quad \text{[vgl. Gleichung (30)]}.$$

Auf der linken Seite sondern wir

$$\Gamma\left[[u\,\mathfrak{M}][u\,\mathfrak{E}]\right]$$

ab, und denken es in seiner ursprünglichen Form:

$$[u\,\mathfrak{E}]\,.\,\mathrm{P}[u\,\mathfrak{M}] - [u\,\mathfrak{M}]\,.\,\mathrm{P}[u\,\mathfrak{E}] = u\,.\left[\mathfrak{E}\,.\,\mathrm{P}[u\,\mathfrak{M}]\right]$$
$$- u\,.\left[\mathfrak{M}\,.\,\mathrm{P}[u\,\mathfrak{E}]\right]$$

auf die rechte Seite gebracht. Es entsteht so:

$$-\Gamma(T) = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathsf{E}\,.\,\Lambda + u\,.(f_0 + f_1), \tag{32}$$

wo

$$\begin{aligned} T &= [\mathsf{E}\,\mathsf{M}] + \left[\mathsf{E}\,[u\,\mathfrak{E}]\right] + \left[\mathsf{M}\,[u\,\mathfrak{M}]\right], \\ f_1 &= -\left[\mathfrak{E}\,.\,\mathrm{P}[u\,\mathfrak{M}]\right] + \left[\mathfrak{M}\,.\,\mathrm{P}[u\,\mathfrak{E}]\right], \\ w &= \tfrac{1}{2}(\mathsf{E}\,.\,\mathfrak{E} + \mathsf{M}\,.\,\mathfrak{M}) + \varepsilon_0\,\mu_0\,u\,.\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]. \end{aligned} \tag{33}$$

Den Ausdruck für T müssen wir umformen. Es ist nach (e):

$$\begin{aligned} \left[\mathsf{E}\,[u\,\mathfrak{E}]\right] + \left[\mathsf{M}\,[u\,\mathfrak{M}]\right] &= (\mathsf{E}.\mathfrak{E} + \mathsf{M}.\mathfrak{M})\,u - (u.\mathsf{E})\,\mathfrak{E} - (u.\mathsf{M})\,\mathfrak{M} \\ &= (\mathsf{E}.\mathfrak{E} + \mathsf{M}.\mathfrak{M})\,u - (u.\mathsf{E})\,\varepsilon\,\mathsf{E} - (u.\mathsf{M})\,\mu\,\mathsf{M} \\ &\quad - \varepsilon_0\,\mu_0\{-(u.\mathsf{E})\,[u\,\mathsf{M}] + (u.\mathsf{M})\,[u\,\mathsf{E}]\}. \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} \{\;\} &= [u\,\{\mathsf{E}\,(u\,.\,\mathsf{M}) - \mathsf{M}\,(u\,.\,\mathsf{E})\}] = \left[u\left[u\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}]\right]\right] \\ &= (u\,.\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}])\,u - u^2[\mathsf{E}\,\mathsf{M}] \end{aligned}$$

und

$$\mathsf{E}\,.\,\mathfrak{E} + \mathsf{M}\,.\,\mathfrak{M} = \varepsilon\,\mathsf{E}^2 + \mu\,\mathsf{M}^2 + 2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,u\,.\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}].$$

Also

$$\begin{aligned} T &= (1 + \varepsilon_0\,\mu_0\,u^2)\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}] + \tfrac{1}{2}(\mathsf{E}\,.\,\mathfrak{E} + \mathsf{M}\,.\,\mathfrak{M})\,u \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\varepsilon\,\mathsf{E}^2 + \mu\,\mathsf{M}^2)\,u - (u\,.\,\mathsf{E})\,\varepsilon\,\mathsf{E} - (u\,.\,\mathsf{M})\,\mu\,\mathsf{M}. \end{aligned}$$

Wir können daher (32) in folgender Form schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} &-\Gamma(\Sigma + w_1\,u) - \Gamma(Y) = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathsf{E}\,.\,\Lambda + u\,.(f_0 + f_1), \\ &\text{oder} \\ &\int(\Sigma_n + w_1\,u_n)\,d\,S + \int Y_n\,d\,S = \frac{\partial}{\partial t}\int w\,d\,\tau \\ &\qquad + \int \mathsf{E}\,.\,\Lambda\,d\,\tau + \int u\,.(f_0 + f_1)\,d\,\tau, \end{aligned}\right. \tag{34}$$

wo S die Oberfläche von τ, n die innere Normale von $d\,S$,

(35) $$\Sigma = (1 + \varepsilon_0 \mu_0 u^2)[\mathsf{E}\,\mathsf{M}],$$

(36) $$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}(\mathsf{E}\,.\,\mathfrak{E} + \mathsf{M}\,.\,\mathfrak{M}), \\ w = \frac{1}{2}(\mathsf{E}\,.\,\mathfrak{E} + \mathsf{M}\,.\,\mathfrak{M}) + \varepsilon_0 \mu_0 u\,.\,[\mathsf{E}\,\mathsf{M}], \end{cases}$$

(37) $$Y = \tfrac{1}{2}(\varepsilon \mathsf{E}^2 + \mu \mathsf{M}^2) u - (u\,.\,\mathsf{E})\,\varepsilon \mathsf{E} - (u\,.\,\mathsf{M})\,\mu \mathsf{M},$$

oder

(37′) $$\begin{cases} Y_n = -u\,.\,\pi^n, \text{ wo } \pi^n \text{ ein Vector mit den Componenten } \pi^n_x,\ \pi^n_y,\ \pi^n_z; \\ \pi^n_x = \pi^x_x \cos(n\,x) + \pi^y_x \cos(n\,y) + \pi^z_x \cos(n\,z); \\ \pi^x_x = -\tfrac{1}{2}(\varepsilon \mathsf{E}^2 + \mu \mathsf{M}^2) + \varepsilon \mathsf{E}_x \mathsf{E}_x + \mu \mathsf{M}_x \mathsf{M}_x, \\ \pi^y_x = \pi^x_y = \varepsilon \mathsf{E}_x \mathsf{E}_y + \mu \mathsf{M}_x \mathsf{M}_y \text{ etc.}, \end{cases}$$

f_0 und f_1 aus (30) und (33).

Die Gleichung (34) können wir folgendermaassen interpretiren: Die Energie der Volumeinheit ist w; hiervon haftet der Anteil w_1 an der Materie derart, dass er ihre Bewegungen teilt. Abgesehen von dieser *Fortführung* der Energie findet eine Strömung derselben durch *Strahlung* im Betrage Σ statt. Zu den bereits betrachteten Kräften f_0 treten neue Volumkräfte f_1; diese enthalten ebenso, wie die letzten Partialkräfte in f_0 die Geschwindigkeit als Factor; ihre Existenz ändert nichts an den in § 6 gezogenen Schlüssen. Endlich erhalten wir neben diesen Volumkräften noch Oberflächenspannungen π; sie sind identisch mit den Spannungen der Maxwell'schen und der Hertz'schen Theorie.

Diese Interpretation der Gleichung (34) giebt der Strahlung Σ den in (E) geforderten und in §§ 2—5 benutzten Ausdruck. Sie ist also *eine* für uns zulässige Interpretation, — aber keineswegs die einzige. In der That ist willkürlich zunächst die Art, wie wir die in die Richtung von u fallende Componente von T in zwei Teile zerlegt haben. Ferner aber hätten wir die Grösse $\Gamma\left[[u\,\mathfrak{M}]\,[u\,\mathfrak{E}]\right]$, welche wir in die Form $-u\,.\,f_1$ brachten, auch als $-\Gamma\{(u\,.\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{M}])\,u\}$ mit $-\Gamma(T)$ vereinigt lassen können. Das heisst zusammen: wir dürfen die mitgeführte Energie w_1 um einen willkürlichen Betrag vergrössern, sofern wir nur um den gleichen Betrag auch die Normalcomponente π^n_n der Oberflächenspannungen vermehren, und wir dürfen ferner, unter Aufgabe der Kräfte f_1, noch den Betrag $u\,.\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{M}]$ zu w_1

hinzufügen. Die oben gewählte Darstellung ergiebt den möglichst engen Anschluss an die Deutung, welche Hertz *seinen* Gleichungen gegeben hat.

Anhang.

In dem vorstehenden Abriss der Elektrodynamik haben wir uns darauf beschränkt, zu zeigen, dass sich alle Beobachtungen, welche die Abhängigkeit der elektromagnetischen Vorgänge von den wahrnehmbaren Bewegungen der Körper betreffen, in ein einfaches Gesetz zusammenfassen lassen. Dieses Gesetz, in Gleichungen formulirt, stellten wir an die Spitze unserer Betrachtungen. Aus ihm deducirten wir, was vorgehen müsse; und wir fanden unsere Deductionen durch die Erfahrung bestätigt. In dieser Darstellung ergab sich nirgends ein Anlass, neben den ponderabelen Körpern einen „Aether“ einzuführen; es genügte, anzunehmen, dass sich auch in einem von Materie freien Raum elektromagnetische Energie ausbreiten könne.

Wir wollen nun nachträglich unsere Grundannahmen der Anschauung näher zu bringen suchen durch Einführung eines überall vorhandenen, die Materie durchdringenden Etwas, das wir „Aether“ nennen wollen, ohne uns damit irgend eine der Vorstellungen zu eigen zu machen, welche im Laufe der Zeit mit diesem Wort verknüpft worden sind. Es ist nicht unsere Meinung, dass durch solche Bildersprache das Geringste gewonnen werde bezüglich der oben abgehandelten Theorie. Aber möglicherweise kann sie einen heuristischen Wert gewinnen bei dem weiteren Ausbau dieser Theorie. Wir geben also demjenigen Teil unserer Grundannahmen, welcher sie von den Maxwell-Hertz'schen unterscheidet, nunmehr die folgende Fassung:

Ueberall ist Aether vorhanden, und überall ist er in absoluter Ruhe. Alle Geschwindigkeiten, von denen wir sprechen, sind Geschwindigkeiten relativ zum Aether. Unseren bisherigen Erfahrungen gegenüber genügt es, die Fixsterne ohne „Eigenbewegung“ als ruhend gegen den Aether anzusehen. — Die Polarisationen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ gehören zum Teil dem Aether, zum Teil der Materie an. Jeder der beiden Anteile ist das Product aus Feldintensität und elektrischer, bez. magnetischer

Constante. Dem Aether kommen die Constanten ε_0, μ_0 zu, der Materie die Constanten

$$(C^1) \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_0, \quad \mu_1 = \mu - \mu_0 .$$

Die Feldintensitäten sind in der *Materie* die Grössen E, M, welche auf der linken Seite der Gleichungen (B) auftreten, — dieselben, welche auch für den Fall der Ruhe gelten würden; denn die in (B) auftretenden Flächen und Curven liegen *fest in der Materie.* Die Feldintensitäten sind im *Aether* Grössen E_0, M_0, welche sich von E, M durch „inducirte" Anteile unterscheiden; denn der Aether hat gegen das Bezugssystem der Gleichungen (B) die Geschwindigkeit $-u$. Es ist

$$(C^2) \qquad \mathsf{E}_0 = \mathsf{E} - [u \cdot \mu_0 \mathsf{M}]; \quad \mathsf{M}_0 = \mathsf{M} + [u \cdot \varepsilon_0 \mathsf{E}]$$

und die Polarisationen sind

$$(C^3) \qquad \mathfrak{E} = \varepsilon_1 \mathsf{E} + \varepsilon_0 \mathsf{E}_0; \quad \mathfrak{M} = \mu_1 \mathsf{M} + \mu_0 \mathsf{M}_0 .$$

Strassburg i. E., im Mai 1901.

(Eingegangen 28. October 1901.)