7. *Ueber den Verlauf der electrischen Schwingungen bei den Tesla'schen Versuchen; von A. Oberbeck.*

Die brillanten und überraschenden Lichterscheinungen bei den Tesla'schen Versuchen[1]) haben auch in Deutschland allgemeines Interesse erregt, besonders seit dieselben in der Urania in Berlin durch Hrn. P. Spiess[2]) einem grösseren Publicum vorgeführt werden.

Bei Wiederholung dieser Versuche an anderen Orten hat sich dann herausgestellt, dass zu ihrem Gelingen keineswegs so grosse Hülfsmittel nothwendig sind, wie Tesla selbst aufgewandt hat, dass sie vielmehr schon mit einem grösseren Inductionsapparat[3]) oder einer kräftigen Influenzmaschine[4]) ausgeführt werden können.

Hiernach dürfte wohl eine kurze theoretische Erörterung dieses Gegenstandes an der Stelle sein, wenigstens insoweit, als die Bewegungen der Electricität in den Leitern in Betracht kommen, während für den Uebergang der electrischen Schwingungen an die Luft resp. an den Aether, durch welchen die eigentlichen Lichterscheinungen hervorgerufen werden, noch weitere Versuche zur Klärung der Sachlage abzuwarten sind.

Vergegenwärtigen wir uns die Tesla'sche Anordnung in ihrer einfachsten Form (Fig. 1). Bei derselben wird den inneren Belegungen der Condensatoren A und B so lange Electricität zugeführt, bis zwischen den Electroden F eines Funkenmikrometers ein Funke übergeht. Infolge dieser Entladung verläuft in der Leitung I ebenfalls ein electrischer Strom, welcher in dem Kreis II einen Strom inducirt. Der zweite

---

1) Vgl. E. de Fodor, Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz. A. Hartleben's Verlag, 1894; H. Ebert, Naturw. Rundschau. 9. Jahrgang. p. 4—7. p. 17—18. p. 29—33. 1894.

2) P. Spiess, Ueber Ströme hoher Wechselzahl und Frequenz. Himmel und Erde. 7. Jahrgang. p. 297—313. 1895.

3) F. Himstedt, Wied. Ann. 52. p. 476—485. 1894.

4) A. Töpler, Ges. Isis in Dresden. p. 22—32. 1894.

Stromkreis ist offen. Wir dürfen uns aber die Enden der secundären Rolle des Transformators ebenfalls mit den Belegungen eines Condensators verbunden denken. Denn eine enggewundene Rolle, in welcher Ströme inducirt werden, besitzt schon an sich die Eigenschaften eines Condensators. Ausserdem werden aber bei vielen Versuchen die Enden dieser Rolle mit Leitern von mehr oder weniger grosser Capacität verbunden, sodass also die Annahme eines Condensators C, wenn auch von kleinerer Capacität als die Condensatoren A und B gerechtfertigt erscheint.

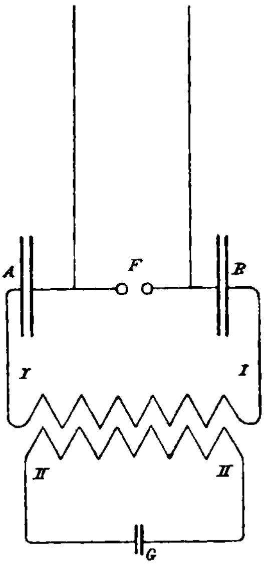

Fig. 1.

Endlich können wir uns die Condensatoren A und B für die Berechnung durch einen einzigen Condensator von halber Capacität (A und B als gleich angenommen) ersetzt denken, sodass wir den weiteren Betrachtungen die Anordnung der Fig. 2 zu Grunde legen können.

In einem bestimmten Augenblick seien also die Belegungen von c_1 entgegengesetzt geladen. Ihre Potentialdifferenz mag gleich 1 gesetzt werden. Bei der Entladung durch den ersten Stromkreis werden dann auch in dem zweiten Stromkreis Ströme inducirt. Da die Leitungen aus dicken Kupferdrähten bestehen, so kann man ohne weiteres annehmen, dass beide Ströme in Form gedämpfter Schwingungen verlaufen. Nach Erlöschen derselben findet neue Ladung und Entladung statt.

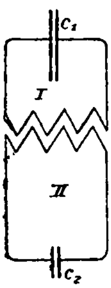

Fig. 2.

Die Rechnung lehrt nun, dass *die Entladung nicht, wie bei einem einzigen Stromkreis aus einer einzigen, sondern stets aus zwei Schwingungen von verschiedener Schwingungszahl besteht.*

Es wird daher unsere Aufgabe sein, die Schwingungszahlen dieser beiden Schwingungen, ihre Anfangsamplituden in den beiden Kreisen und die Grösse der Dämpfungen zu ermitteln.

2. Zu dem Zweck bezeichnen wir die Stromintensitäten in den beiden Kreisen mit i_1 und i_2, die Potentialdifferenzen der beiden Condensatoren von den Capacitäten c_1 und c_2 mit: V_1 und V_2, die Widerstände mit w_1 und w_2, die Inductionscoëfficienten mit p_1 und p_2, endlich den Coëfficienten der Wechselinduction mit q.

Dann gelten die Gleichungen:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
w_1 i_1 + p_1 \frac{d i_1}{d t} + q \frac{d i_2}{d t} + V_1 &= 0, \\
w_2 i_2 + p_2 \frac{d i_2}{d t} + q \frac{d i_1}{d t} + V_2 &= 0, \\
i_1 &= c_1 \frac{d V_1}{d t}, \\
i_2 &= c_2 \frac{d V_2}{d t}.
\end{aligned}
$$

Nach Einführung von V_1 und V_2 an Stelle von i_1 und i_2 erhalten wir:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
p_1 c_1 \frac{d^2 V_1}{d t^2} + w_1 c_1 \frac{d V_1}{d t} + v_1 + q c_2 \frac{d^2 V_2}{d t^2} &= 0, \\
p_2 c_2 \frac{d^2 V_2}{d t^2} + w_2 c_2 \frac{d V_2}{d t} + V_2 + q c_1 \frac{d^2 V_1}{d t^2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Setzt man zur Integration dieser Gleichungen:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
V_1 &= e^{\lambda t}, \\
V_2 &= k e^{\lambda t},
\end{aligned}
$$

so ist:

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 p_1 c_1 + w_1 c_1 \lambda + 1 &= - k q c_2 \lambda^2, \\
k \{\lambda^2 p_2 c_2 + w_2 c_2 \lambda + 1\} &= - q c_1 \lambda^2,
\end{aligned}
$$

oder:

$$
(4) \qquad k = - \frac{\lambda^2 p_1 c_1 + w_1 c_1 \lambda + 1}{q c_2 \lambda^2} = - \frac{q c_1 \lambda^2}{\lambda^2 p_2 c_2 + w_2 c_2 \lambda + 1}.
$$

Hieraus ergiebt sich zur Berechnung von λ eine Gleichung vierten Grades:

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
\lambda^4 + \lambda^3 \frac{w_1 p_1 + w_2 p_2}{p_1 p_2 - q^2} + \lambda^2 \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2 + w_1 w_2 c_1 c_2}{p_1 p_2 - q^2} \\
+ \lambda \frac{w_1 c_1 + w_2 c_2}{p_1 p_2 - q^2} + \frac{1}{c_1 c_2 (p_1 p_2 - q^2)} = 0.
\end{aligned}
$$

Da wir aperiodische Bewegungen der Electricität von vornherein ausgeschlossen haben, so müssen die vier Wurzeln dieser Gleichung von der Form sein:

$$\lambda_1 = -\alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = -\alpha - i\beta,$$
$$\lambda_3 = -\gamma + i\eta, \qquad \lambda_4 = -\gamma - i\eta.$$

Anstatt diese Gleichung allgemein aufzulösen, wobei für die Wurzeln recht complicirte Ausdrücke zu erwarten sind, wollen wir von der Erwägung Gebrauch machen, dass man angenähert richtige Ausdrücke für die Schwingungsdauer der electrischen Schwingungen bei der Entladung eines Condensators ohne Induction auf einen zweiten Kreis erhält, wenn man das Glied vernachlässigt, welches den Widerstand enthält. Es folgt dann die Formel:

$$T = \pi \sqrt{p\,c}.$$

Werden also in gleicher Weise hier die Widerstände $w_1 = w_2 = 0$ gesetzt, so erhält man aus Gleichung (5):

$$\lambda^4 + \lambda^2 \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1 p_2 - q^2} + \frac{1}{c_1 c_2 (p_1 p_2 - q^2)} = 0 \tag{7}$$

oder auch:

$$\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^2}(p_1 c_1 + p_2 c_2) + c_1 c_2 (p_1 p_2 - q^2) = 0.$$

Also:

$$\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 c_1 c_2 q^2}. \tag{8}$$

Berücksichtigt man, dass bei dieser Annahme die Dämpfungsfactoren α und γ Null werden, dass also die Wurzeln der Gleichung (5) die Werthe haben:

$$\lambda_1 = +i\beta, \; \lambda_2 = -i\beta, \; \lambda_3 = +i\eta, \; \lambda_4 = -i\eta, \tag{9}$$

und dass die Schwingungszeiten T und T' mit denselben durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$T = \frac{\pi}{\beta}, \qquad T' = \frac{\pi}{\eta},$$

so ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{p_1 c_1 + p_2 c_2 + \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 c_1 c_2 q^2}}{2}}, \tag{10}$$

$$T' = \pi \sqrt{\frac{p_1 c_1 + p_2 c_2 - \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 c_1 c_2 q^2}}{2}}.$$

Hieraus ersehen wir, dass sich stets der Strom in beiden

Kreisen in zwei gleichzeitig verlaufende Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer auflöst.

Führen wir in diese Ausdrücke die Schwingungszeiten T_1 und T_2 der beiden einzelnen Kreise ein, indem wir setzen:

$$T_1^2 = \pi^2 p_1 c_1, \qquad T_2^2 = \pi^2 p_2 c_2.$$

Ferner sei ϑ eine Zeit von derselben Grössenordnung, welche durch die Gleichung:

$$\vartheta^2 = \pi^2 q \sqrt{c_1 c_2}$$

definirt werden mag, dann ist:

$$(11) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2 + \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\vartheta^4}}{2}},$$

$$T' = \pi \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2 - \sqrt{(T_1^2 - T_2^2)^2 + 4\vartheta^4}}{2}}.$$

Wir gehen nun zur Besprechung der folgenden beiden Specialfälle über.

a) Es sei $T_1 = T_2$. Die beiden Kreise sind so angeordnet, dass sie gleiche Schwingungsdauer besitzen. Man bezeichnet dies gewöhnlich als Resonanz.

Dann ist:

$$(12) \qquad \begin{cases} T^2 = T_1^2 + \vartheta^2, \\ T'^2 = T_1^2 - \vartheta^2, \end{cases}$$

oder

$$(13) \qquad \begin{cases} T^2 = \pi^2 \{p_1 c_1 + q\sqrt{c_1 c_2}\} \\ T'^2 = \pi^2 \{p_1 c_1 - q\sqrt{c_1 c_2}\}. \end{cases}$$

Demnach sind auch in diesem Falle die beiden Schwingungszeiten verschieden und zwar ist *die eine Schwingungsdauer grösser, die andere kleiner, als die Schwingungsdauer der beiden Einzelkreise.*

b) Die Schwingungsdauer des einen Kreises sei erheblich grösser, als diejenige des anderen. Also:

$$T_1 > T_2.$$

Aber es sei auch ϑ klein, sodass

$$T_1^2 - T_2^2 > 2\vartheta^2$$

ist. Dann ist in erster Annäherung:

$$(14)\quad \begin{cases} T^2 = T_1'^2 + \dfrac{\vartheta^4}{T_1^2 - T_2^2} \\ T'^2 = T_2'^2 - \dfrac{\vartheta^4}{T_1^2 - T_2^2} \end{cases}$$

In diesem Falle liegt also die Schwingungsdauer der langsameren Schwingung der Schwingungsdauer des ersten Kreises nahe, ist also grösser als dieselbe, während die Dauer der schnelleren Schwingung etwas kleiner ist, als diejenige des zweiten Kreises.

3. Wir wenden uns nun zu der Frage, wie sich die potentielle Energie der in dem ersten Condensator anfänglich angehäuften Electricitäten bei der Entladung auf die beiden Stromkreise und in denselben auf die beiden Einzelschwingungen vertheilt. Mit anderen Werthen: es sollen die Amplituden der einzelnen Schwingungsbewegungen berechnet werden. Jedoch sollen auch hierbei die Einflüsse der Widerstände vernachlässigt werden:

Dann nehmen die Gleichungen (2) die einfache Form an:

$$p_1 c_1 \frac{d^2 V_1}{d t^2} + V_1 + q c_2 \frac{d^2 V_2}{d t^2} = 0,$$

$$p_1 c_2 \frac{d^2 V_2}{d t^2} + V_2 + q c_1 \frac{d^2 V_1}{d t^2} = 0.$$

Es genügt die folgende Form der Lösungen zu benutzen:

$$(15)\quad \begin{cases} V_1 = A_1 \cos \beta t + B_1 \cos \eta t, \\ V_2 = A_2 \cos \beta t + B_2 \cos \eta t. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Amplituden erhält man die Gleichungen:

$$A_1 (1 - \beta^2 p_1 c_1) = A_2 \beta^2 q c_2,$$

$$C_1 (1 - \eta^2 p_1 c_1) = C_2 \beta^2 q c_2.$$

Ferner ist anfänglich:

$$V_1 = 1, \qquad V_2 = 0,$$

$$\frac{d V_1}{d t} = 0, \qquad \frac{d V_2}{d t} = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(16)\quad \begin{cases} k = \dfrac{1 - \beta^2 p_1 c_1}{\beta^2 q c_1}, \\ k' = \dfrac{1 - \eta^2 p_1 c_1}{\eta^2 q c_2}. \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{k'}{k'-k}, \qquad C_1 = -\frac{k'}{k'-k},$$

$$A_2 = \frac{k'}{k'-k}, \qquad C_2 = -\frac{k'}{k'-k}.$$

Also:

$$(17) \qquad \begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{k'-k}\{k'\cos\beta t - k\cos\eta t\}, \\ V_2 = \dfrac{k k'}{k'-k}\{\cos\beta t - \cos\eta t\}. \end{cases}$$

Als bemerkenswerth mag hierbei hervorgehoben werden, dass die Amplituden der beiden verschiedenen Schwingungen in dem secundären Kreis gleich gross sind.

Mit Benutzung der früher berechneten Werthe von $1/\beta^2$ und $1/\eta^2$ erhält man:

$$(18) \qquad \begin{cases} k = \dfrac{p_2 c_2 - p_1 c_1 + \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 q^2 c_1 c_2}}{2 q c_2} \\ k' = \dfrac{p_2 c_2 - p_1 c_1 - \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 q^2 c_1 c_2}}{2 q c_2} \end{cases}$$

Insbesondere sind die Amplituden der secundären Schwingungen:

$$(19) \qquad \frac{k' k}{k'-k} = \frac{q c_1}{\sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4 q^2 c_1 c_2}}$$

In dem speciellen Falle der Resonanz ist:

$$k = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \qquad k' = -\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}.$$

$$(20) \qquad \begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{2}\{\cos\beta t + \cos\eta t\} \\ V_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c_1}{c_2}}\{\cos\beta t - \cos\eta t\}. \end{cases}$$

Es dürfte daher vortheilhaft sein, die Uebereinstimmung der beiden Schwingungszeiten der Einzelkreise dadurch herzustellen, dass man für die Inductionscoefficienten p_1 einen kleinen Werth nimmt, dafür aber einen Condensator von grösserer Capacität benutzt, während die betreffenden Grössen umgekehrt für den secundären Kreis herzustellen sind.

4. Um die Dämpfung der beiden Einzelschwingungen zu bestimmen, müssen wir auf die allgemeine Gleichung (5) für λ zurückgehen und die Wurzeln in der Form der Glei-

chungen (6) berechnen. Die Zahlen α und γ sind dann die zu den Schwingungen T' und T'' gehörenden Dämpfungsfactoren. Anstatt aber die Gleichung vierten Grades (5) allgemein aufzulösen, ist es wohl vorzuziehen die Grössen α und γ in der folgenden Weise angenähert zu bestimmen. Zu dem Zweck sehen wir die Werthe β und η auch jetzt noch — entsprechend den Gleichungen (8) und (9) — als richtig an. Schreiben wir ferner die Gleichung (5) in der abgekürzten Form:

$$\lambda^4 + f\lambda^3 + g\lambda^2 + h\lambda + k = 0, \tag{21}$$

und denkt man sich: $\lambda = i\beta$ gesetzt, so erfüllt β die Gleichung:

$$\beta^4 - g\beta^2 + k = 0. \tag{22}$$

Setzen wir ferner in der obigen Gleichung (20):

$$\lambda = -\alpha + i\beta,$$

aber unter der Voraussetzung, dass α klein ist im Vergleich zu β, so erhält man mit Vernachlässigung höherer Potenzen von α und der Producte von α mit f und h:

$$\beta^4 + 4i\beta^3\alpha - fi\beta^3 - g\beta^2 - 2g\alpha i\beta + hi\beta + k = 0.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung der Gleichung (21):

$$\alpha = \frac{f\beta^2 - h}{2(2\beta^2 - g)}.$$

In gleicher Weise erhält man den Annäherungswerth für den Dämpfungsfactor der zweiten Schwingung:

$$\gamma = \frac{f\eta^2 - h}{2(2\eta^2 - g)}.$$

Wir setzen für die einzelnen Buchstaben ihre wirklichen Werthe ein und erhalten, wenn man noch die abgekürzten Bezeichnungen einführt:

$$R = \sqrt{(p_1 c_1 - p_2 c_2)^2 + 4q^2 c_1 c_2},$$

$$D = p_1 c_1 - p_2 c_2.$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{w_1\{p_2(R+D) - 2q^2 c_1\} + w_2\{p_1(R-D) - 2q^2 c_2\}}{4R(p_1 p_2 - q^2)} \\ \gamma &= \frac{w_1\{p_2(R-D) + 2q^2 c_2\} + w_2\{p_1(R+D) + 2q^2 c_2\}}{4R(p_1 p_2 - q^2)}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Für den Fall der Resonanz nehmen diese Ausdrücke die einfachere Form an:

$$
(24) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{w_1 \{p_2 \sqrt{c_1 c_2} - q c_1\} + w_2 \{p_1 \sqrt{c_1 c_2} - q c_2\}}{4 \sqrt{c_1 c_2}\,(p_1 p_2 - q^2)} \\
\gamma &= \frac{w_1 \{p_2 \sqrt{c_1 c_2} + q c_1\} + w_2 \{p_1 \sqrt{c_1 c_2} + q c_2\}}{4 \sqrt{c_1 c_1}\,(p_1 p_2 - q^2)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Da α kleiner ist als γ, so folgt, dass die Dämpfung der kürzeren Schwingung grösser ist, als diejenige der langsameren. Man kann die letzten beiden Ausdrücke noch auf eine einfachere und zur Berechnung bei Zahlenbeispielen bequemere Form bringen.

Die Inductionscoefficienten p_1 und p_2 der beiden Wickelungen des Transformators enthalten die Quadrate der Windungszahlen, der Coefficient q die Producte derselben. Man kann daher setzen:

$$
(25) \qquad q = \sqrt{p_1 p_2} \cdot \varepsilon,
$$

wo ε ein von der jedesmaligen Anordnung abhängender Zahlenfactor — jedenfalls kleiner als Eins — ist.

Führt man dies in die letzte Formel ein und berücksichtigt, dass hier

$$
p_1 c_1 = p_2 c_2
$$

angenommen wurde, so ist:

$$
(26) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\dfrac{w_1}{p_1} + \dfrac{w_2}{p_2}}{4\,(1 + \varepsilon)}, \\
\gamma &= \frac{\dfrac{w_1}{p_1} + \dfrac{w_2}{p_2}}{4\,(1 - \varepsilon)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Hiernach könnte man jetzt die allgemeinen Integrale der Gleichungen (2) in der Form schreiben:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= e^{-\alpha t}\{A_1 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t\} \\
&\quad + e^{-\gamma t}\{C_1 \cos (\eta t) + D_1 \sin \eta t\} \\
V_2 &= e^{-\alpha t}\{A_2 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t\} \\
&\quad + e^{-\gamma t}\{C_2 \cos \eta t + D_3 \sin \eta t\}.
\end{aligned}
$$

Da wir jetzt angenähert richtige Werthe für α, β, γ, η erhalten haben, so würde es nicht schwer halten, die acht Constanten den Anfangsbedingungen entsprechend zu bestimmen. Ich verzichte aber auf die Wiedergabe der complicirten Formeln.

5. Dagegen schien es mir nicht ohne Interesse, die Zahlenwerthe der wichtigsten Grössen für ein Beispiel auszurechnen.

Ich lege nach ungefährer Schätzung für die Constanten des Apparates Werthe zu Grunde, wie sie einer Anordnung entsprechen, mit welcher ich die hauptsächlichsten Tesla'schen Versuche wiederholen konnte.

Setzt man:

$$p_1 = 1000 \text{ cm}, \quad p_2 = 25\,000 \text{ cm}, \quad q = 3000 \text{ cm},$$

ferner, um die Resonanzbedingung zu befriedigen:

$$c_1 = 10^{-18}$$

(also gleich 900 electrostatischen Capacitätseinheiten)

$$c_2 = \frac{1}{25} \cdot 10^{-18},$$

endlich:

$$w_1 = 0{,}01 \text{ Ohm} = 10^8,$$

$$w_2 = 1 \quad\;\, ,, \quad = 10^9,$$

so erhält man, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält:

$$T_1 = \;\; 9{,}93 \,.\, 10^{-8} \text{ sec},$$

$$T_2 = 12{,}6 \;\,.\, 10^{-8} \text{ sec},$$

$$T' = \;\; 6{,}3 \;\,.\, 10^{-8} \text{ sec},$$

oder die Schwingungszahlen:

a) für die Einzelschwingung der beiden Kreise:

$$N_1 = 10\,600\,000,$$

b) für die bei Combination derselben erhaltenen beiden Schwingungen:

$$N = \;\; 7\,960\,000,$$

$$N' = 15\,920\,000.$$

Die beiden Dämpfungsfactoren sind entsprechend:

$$\alpha = 2187{,}5,$$

$$\gamma = 8750.$$

Greifswald, den 29. Mai 1895.