

**5. Über induktive Erregung zweier elektrischer
Schwingungskreise mit Anwendung auf Perioden-
und Dämpfungsmessung, Teslatransformatoren
und drahtlose Telegraphie;
von P. Drude.**

Inhalt: Einleitung. I. Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen p. 513. II. Die magnetische Koppelung ist sehr klein p. 521. III. Messung der Periode und der Dämpfung p. 525. 1. Die Maximalamplitude p. 528. 2. Der Integraleffekt p. 530. IV. Die magnetische Koppelung ist nicht sehr klein p. 534. V. Die Wirksamkeit der Teslatransformatoren p. 540. VI. Abhängigkeit der Teslawirkung von Dämpfung und Koppelung p. 544. VII. Anwendung auf die drahtlose Telegraphie p. 550. a) Einfacher oder lose gekoppelter Empfänger p. 551 b) Eng gekoppelter Empfänger p. 554. Hauptresultate p. 560.

J. v. Geitler¹⁾, B. Galitzin²⁾, A. Oberbeck³⁾ und Domalip und Koláček⁴⁾ haben nachgewiesen, daß, wenn zwei elektrische Schwingungskreise genügend intensiv aufeinander einwirken, jede derselben nicht mehr eine, sondern zwei Eigenperioden hat, auch wenn die beiden Systeme aufeinander abgestimmt sind, d. h. wenn sie ohne gegenseitige oder bei sehr schwacher gegenseitiger Einwirkung eine gleiche Eigenperiode besitzen. Das Problem ist später in allgemeinerer und vollständigerer Weise von M. Wien⁵⁾ behandelt worden. Wien⁶⁾ wendet seine Resultate auch auf die drahtlose Telegraphie nach dem Braunschen System. V. Bjerknes⁷⁾ hat den Fall sehr schwacher Koppelung ausführlich behandelt in Rücksicht auf Perioden und Dämpfungsmessung durch Diskussion der sogenannten Resonanzkurve.

1) J. v. Geitler, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Februar u. Oktober 1895.

2) Fürst B. Galitzin, Petersb. Ber., Mai u. Juni 1895.

3) A. Oberbeck, Wied. Ann. 55. p. 623. 1895.

4) R. Domalip u. F. Koláček, Wied. Ann. 57. p. 731. 1896.

5) M. Wien, Wied. Ann. 61. p. 151. 1897.

6) M. Wien, Ann. d. Phys. 8. p. 686. 1902.

7) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 120. 1895.

Die hier folgende Behandlung des Problems unterscheidet sich von den genannten Bearbeitungen in folgenden Punkten:

1. Die Lösung der Differentialgleichungen, speziell die Berechnung der Amplituden aus den Anfangsbedingungen, wird in einer mathematisch übersichtlichen, Rechenfehler leicht ausschließenden Form gegeben, die auch für kompliziertere Verhältnisse, z. B. eng gekoppelte Sender und Empfänger bei drahtloser Telegraphie, anwendbar bleibt.¹⁾

2. Der induzierte Kreis wird nicht, wie bei den genannten Autoren, lediglich als ein längs des Leiters konstanter Strom behandelt, an dessen Enden eine bestimmte Kapazität liegt, sondern den wirklichen Verhältnissen entsprechend.²⁾

3. Gegen die Wiensche Bearbeitung tritt ein Unterschied auf für das Resultat hinsichtlich der Dämpfung beider Eigenschwingungen in eng gekoppelten Systemen.

4. Bjercknes diskutiert nur die Resonanzkurve des Integraleffektes ausführlich. Hier wird auch die der Maximalamplitude mit hinzugezogen und dadurch eine experimentell einfache Methode zur Bestimmung der einzelnen Dämpfungen beider Schwingungskreise gewonnen.

5. Die Frage nach der besten Konstruktion eines Tesla-transformators wird weiter geführt. Ihre Lösung hängt noch von einer auszuführenden Experimentaluntersuchung ab.

I. Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen.

Wir setzen zunächst voraus, daß die Sekundärspule (z. B. Teslaspule) zentriert und symmetrisch zum Primärkreis liege. Die allgemeinen Resultate gelten aber auch für beliebige Lagen der Sekundärspule. Der Primärstromkreis enthalte die (elektromagnetisch gemessene) Kapazität C_1 . Die Potentialdifferenz zwischen beiden Metallflächen der Kapazität C_1 zu einer beliebigen Zeit t sei V_1 , die Stromstärke, die wir im ganzen

1) Nachträglich sehe ich, daß schon Domalip und Koláček diese Behandlung sehr ähnlich gewählt haben. Ich glaube nur, daß meine Formeln etwas übersichtlicher geblieben sind durch Einführung einer anderen Integralform bei starker Koppelung beider Schwingungskreise.

2) Daraus ergibt sich für die in den Differentialgleichungen auftretenden Konstanten der auf p. 518 gezogene Schluß $L_{12} < L_{21}$, während sonst $L_{12} = L_{21}$ angenommen wurde.

Primärkreis konstant annehmen können (da C_1 sehr groß gewählt wird), sei i_1 . Die Anzahl magnetischer Kraftlinien, welche zu irgend einer Zeit den Primärkreis umschlingen, sei N_1 . Dann gilt:

$$(1) \quad i_1 = -C_1 \frac{dV_1}{dt},$$

$$(2) \quad \frac{d^2 N_1}{dt^2} + w_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C_1} = 0.$$

w_1 ist ein Koeffizient, von dem die Dämpfung der Primärschwingung abhängt (Widerstand von Leitung und Funken, sowie der [geringe] Strahlungsverlust des Kondensators, eventuell auch elektrische Absorption in seinem Dielektrikum). w_1 wird als von der Zeit unabhängig angenommen. Sollte diese Annahme nicht zutreffen, so ist unter w_1 ein während der Schwingungen stattfindender Mittelwert zu verstehen. N_1 hängt von i_1 und der Stromstärke i_2 in der Sekundärspule ab. i_2 ist längs der Spule nicht konstant.

Wenn wir die Achse der (als Zylinder gewickelten) Spule zur z -Richtung wählen, $z = 0$ in die Mitte der Spule legen, während $z = \pm h/2$ die beiden Spulenden bedeutet, d. h. h die Spulenhöhe, so können wir als Anfangsglied einer Fourierschen Reihe (Grundschiwingung) setzen:

$$(3) \quad i_2 = i_2^0 \cos \frac{\pi z}{h}.$$

i_2^0 ist die Stromstärke in der Mittelwindung. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Spule frei, d. h. ohne angelegte Kapazität, endigt, so daß $i_2 = 0$ sein muß für $z = \pm h/2$.

Die Kraftlinien N_1 zerfallen nun in zwei Teile:

$$(4) \quad N_1 = N_{11} + N_{12},$$

von denen der erste Teil die Kraftlinien bezeichnen soll, welche nur den Primärkreis umschlingen, während N_{12} die Zahl der Kraftlinien sein soll, welche sowohl den Primärkreis umschlingen, als auch Windungen der Spule. (Vgl. Fig. 1.)

Für sämtliche Kraftlinien N_{11} ist die magnetomotorische Kraft die gleiche, nämlich $4\pi i_1$, wenn nämlich der Stromkreis 1 als ein linearer angesehen werden kann, was wir voraussetzen wollen, und in praxi auch hinreichend erfüllt ist. Ist also

W_{11} der magnetische Widerstand der (parallel geschalteten) Krafttröhren N_{11} , so ist:¹)

$$(5) \quad N_{11} = \frac{4\pi i_1}{W_{11}}.$$

Für die Kraftlinien N_{12} ist aber die magnetomotorische Kraft nicht für alle die gleiche, da die Spule nicht als linea-

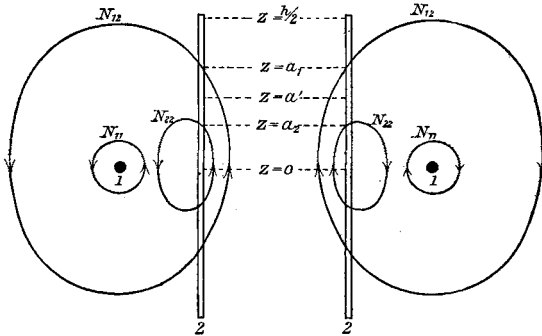


Fig. 1.

rer Strom angesehen werden kann. Wenn eine dieser Kraftlinien den Spulenmantel an den Stellen $z = \pm a$ schneidet, so ist für diese die magnetomotorische Kraft:

$$4\pi i_1 + 4\pi \frac{n}{h} \int_{-a}^{+a} i_2 dz = 4\pi i_1 + 8n i_2^0 \sin \pi \frac{a}{h}^2),$$

falls n die Gesamtzahl der Spulenwindungen bedeutet, so daß auf der Strecke dz die Anzahl $(n/h) dz$ Windungen liegt. Wir können aber für die verschiedenen Kraftlinien N_{12} eine gleiche mittlere elektromotorische Kraft ansetzen:

$$4\pi i_1 + 8n i_2^0 \sin \pi \frac{a_1}{h},$$

wobei a_1 jedenfalls kleiner als $h/2$ und größer als a' ist, falls der Spulenmantel von der kürzesten der Kraftlinien N_{12} , die gerade auch noch i_1 umschlingt, an der Stelle a' geschnitten wird.

1) Vgl. z. B. P. Drude, Physik d. Äthers p. 72. Stuttgart 1894.

2) Das +-Zeichen vor dem zweiten Gliede gilt, falls positives i_1 und i_2 gleichsinnig gerechnet wird.

Es ist daher nach dem Gesetz vom magnetischen Kreislauf zu setzen:

$$(6) \quad N_{12} = \frac{4\pi i_1 + 8n i_2^0 \sin(\pi a_1/h)}{W_{12}},$$

wobei W_{12} den magnetischen Widerstand sämtlicher Kraftrohren N_{12} in Parallelschaltung bedeutet.

Nach (2) und (4) entsteht daher:

$$(7) \quad 4\pi \left(\frac{1}{W_{11}} + \frac{1}{W_{12}} \right) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{8n}{W_{12}} \sin \frac{\pi a_1}{h} \frac{d^2 i_2^0}{dt^2} + w_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C_1} = 0.$$

Die Differentialgleichung für die Stromstärke i_2 in der Spule enthält t und z als unabhängige Variable.

Wenn e_2 die auf der Längeneinheit $dz = 1$ der Spule liegende elektrische Ladung (nach elektromagnetischem Maße) bedeutet, \mathfrak{C}_2 die Kapazität dieser Längeneinheit, V_2 das Potential auf der Spule an der Stelle z , so gilt:

$$(8) \quad \frac{\partial i_2}{\partial z} = - \frac{\partial e_2}{\partial t}, \quad e_2 = \mathfrak{C}_2 V_2.$$

Sind ferner N_2 die Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche den Spulenquerschnitt in der Höhe z der Spule durchsetzen, so gilt zwischen zwei Stellen z und $z + dz$, zwischen denen $(n/h)dz$ Windungen liegen, falls $i_2^0 w_2 dz$ gleich dem Energieverlust pro Zeiteinheit gesetzt wird (Widerstand und Strahlung):

$$(9) \quad i_2 w_2 = - \frac{n}{h} \frac{\partial N_2}{\partial t} - \frac{\partial V_2}{\partial z}.$$

Aus (8) und (9) folgt:

$$(10) \quad \frac{n}{h} \frac{\partial^2 N_2}{\partial t^2} + w_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} - \frac{1}{\mathfrak{C}_2} \frac{\partial^2 i_2}{\partial z^2} = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung für i_2 können wir in eine totale für i_2^0 umwandeln, wenn wir auch N_2 nach einer Fourierschen Reihe entwickeln, beim Anfangsglied

$$(11) \quad N_2 = N_2^0 \cos \frac{\pi z}{h}$$

stehen bleiben, und wenn wir unter w_2 und \mathfrak{C}_2 , die eigentlich auch von z abhängig sind, Mittelwerte für die ganze Spule verstehen, d. h. sie als Konstanten behandeln. Dann ergibt nämlich (3), (10) und (11):

$$(12) \quad \frac{n}{h} \frac{d^2 N_2^0}{dt^2} + w_2 \frac{di_2^0}{dt} + \frac{\pi^2}{h^2 \mathfrak{C}_2} i_2^0 = 0.$$

N_2^0 bedeutet nach (11) die Anzahl Kraftlinien, welche den Spulenquerschnitt an der Spulenmitte $z = 0$ durchsetzen. Auch diese Zahl zerfällt in zwei Teile

$$(13) \quad N_2 = N_{22} + N_{12},$$

wobei die Kraftlinien N_{22} nur die Spule durchsetzen, aber nicht den Kreis 1 umschlingen, während N_{12} sowohl Spulenwindungen, als auch den Primärkreis 1 umschlingen. Für die N_{22} ist nun wiederum die magnetomotorische Kraft nicht konstant, wir können aber für sie eine gleiche mittlere magnetomotorische Kraft

$$8 n i_2^0 \sin \left(\pi \cdot \frac{\alpha_2}{h} \right)$$

in Ansatz bringen, wobei $\alpha_2 < \alpha'$, d. h. auch $\alpha_2 < \alpha_1$ ist. Daher gilt

$$(14) \quad N_{22} = \frac{8 n i_2^0 \sin \left(\pi \frac{\alpha_2}{h} \right)}{W_{22}},$$

falls W_{22} der magnetische Widerstand der Kraftrohren N_{22} ist. Dagegen ergibt (12):

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} 8 \pi^2 \left(\frac{\sin \pi \frac{\alpha_1}{h}}{W_{12}} + \frac{\sin \pi \frac{\alpha_2}{h}}{W_{22}} \right) \frac{d^2 i_2^0}{d t^2} + \frac{4 \pi n}{W_{12}} \frac{d^2 i_1}{d t^2} \\ + w_2 h \frac{d i_2^0}{d t} + \frac{\pi^2}{\mathfrak{C}_2 h} i_2^0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit Gleichung (7) bildet die Grundgleichungen unseres Problemes. Schreibt man jetzt zur Vereinfachung i_2 für i_2^0 , d. h. bedeutet von nun an i_2 die Stromstärke in der Mittelwindung der Teslaspule, so haben unsere Grundgleichungen die bekannte Form:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{11} \frac{d^2 i_1}{d t^2} + L_{12} \frac{d^2 i_2}{d t^2} + w_1 \frac{d i_1}{d t} + \frac{i_1}{C_1} = 0, \\ L_{22} \frac{d^2 i_2}{d t^2} + L_{21} \frac{d^2 i_1}{d t^2} + w_2 \frac{d i_2}{d t} + \frac{i_2}{C_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist gesetzt:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{11} = 4 \pi \left(\frac{1}{W_{11}} + \frac{1}{W_{12}} \right), \quad L_{22} = \frac{16 n^2}{\pi} \left(\frac{\sin \pi \frac{\alpha_1}{h}}{W_{11}} + \frac{\sin \pi \frac{\alpha_2}{h}}{W_{22}} \right), \\ L_{12} = \frac{8 n}{W_{12}} \sin \frac{\pi \alpha_1}{h}, \quad L_{21} = \frac{8 n}{W_{12}}, \\ w_2 = \frac{2}{\pi} w_2 h, \quad C_2 = \mathfrak{C}_2 h : 2 \pi. \end{aligned} \right.$$

Aus (17) folgt :

$$(18) \quad L_{12} : L_{21} = \sin \frac{\pi a_1}{h},$$

d. h. es ist nicht mehr, wie bei zwei linearen Stromkreisen, zu setzen $L_{12} = L_{21}$, sondern es ist $L_{12} < L_{21}$, und zwar um so mehr, je kleiner a_1 ist, d. h. je näher der Primärkreis der Mittelwindung der Teslaspule liegt und je höher letztere im Vergleich zu diesem Abstand vom Primärkreis ist. Bei verschiedenen Lagen der Teslaspule zum Primärkreis wechselt also das Verhältnis $L_{12} : L_{21}$, und zwar wird es um so kleiner, je stärker die gegenseitige Induktion (magnetische Koppelung) zwischen Teslaspule und Primärkreis gemacht wird. Dieses Resultat, zu dessen Ableitung die Interpretation der Koeffizienten der bekannten Gleichungen (16) unternommen wurde, gilt auch für beliebige und unsymmetrische Lagen der Teslaspule zum Primärkreis.

Von den Koeffizienten L sind L_{11} und L_{21} verhältnismäßig einfach theoretisch zu berechnen, während L_{22} und L_{12} wohl nur durch sehr langwierige Rechnungen zu erhalten sind. L_{21} rührt von den Kraftlinien her, welche der Strom i_1 durch den Querschnitt q der Teslaspule hindurchsendet. Nennen wir diese Anzahl, falls $i_1 = 1$ ist, an einer beliebigen Stelle z der Spule N_{21} , so ist das Anfangsglied N_{21}^0 der Fourierschen Entwicklung

$$N_{21} = N_{21}^0 \cos \frac{\pi z}{h}$$

gegeben durch

$$(19) \quad N_{21}^0 = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} N_{21} \cos \frac{\pi z}{h} dz.$$

Daher ist

$$(20) \quad L_{21} = \frac{4n}{\pi h} \int_{-h/2}^{+h/2} N_{21} \cos \frac{\pi z}{h} dz.$$

Wenn die Primärwindungen Kreise sind, so ist die durch i_1 an einer beliebigen Raumstelle hervorgebrachte magnetische Kraft durch Kugelfunktionen darstellbar, daher ist N_{21} und deshalb auch L_{21} zu berechnen. Für die Selbstinduktion L_{11} sind schon bekannte Formeln entwickelt.¹⁾ Diese Formeln darf

1) Für Spulen bedürfen die Stefanschen Formeln bei oszillatorischen Kondensatorentladungen einer Korrektur, vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 604. 1902.

man aber für L_{22} nicht auch benutzen, da i_2 längs der Spule 2 nicht konstant ist.

Setzt man an Stelle der Gleichungen (16) Gleichungen für die Potentialdifferenz V_1 an der Kapazität C_1 im Stromkreis 1, und für das Potential V_2 (eigentlich V_2^h zu schreiben) an einem freien Ende $z = h/2$ der Spule, so ergibt sich vermöge (1) und (8) aus (16):

$$(21) \quad \begin{cases} L_{11} C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} - 2 L_{12} C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + w_1 C_1 \frac{d V_1}{dt} + V_1 = 0, \\ L_{22} C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} - \frac{L_{21} C_1}{2} \frac{d^2 V_1}{dt^2} + w_2 C_2 \frac{d V_2}{dt} + V_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen wollen wir entweder in der Form benutzen:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{d^2 V_1}{dt^2} + 2 \delta_1 \frac{d V_1}{dt} + (v_1^2 + \delta_1^2) V_1 = p_{12} \frac{d^2 V_2}{dt^2}, \\ \frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2 \delta_2 \frac{d V_2}{dt} + (v_2^2 + \delta_2^2) V_2 = p_{21} \frac{d^2 V_1}{dt^2}, \end{cases}$$

wobei also gesetzt ist:

$$(22) \quad \begin{cases} \delta_1 = \frac{w_1}{2 L_{11}}, & v_1^2 + \delta_1^2 = \frac{1}{L_{11} C_1}, & p_{12} = 2 \frac{L_{12} C_2}{L_{11} C_1}, \\ \delta_2 = \frac{w_2}{2 L_{22}}, & v_2^2 + \delta_2^2 = \frac{1}{L_{22} C_2}, & p_{21} = \frac{1}{2} \frac{L_{21} C_1}{L_{22} C_2}, \end{cases}$$

oder in der Form:

$$(II) \quad \begin{cases} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) \frac{d^2 V_1}{dt^2} + 2 \vartheta_1 \frac{d V_1}{dt} + V_1 = p_{12} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) \frac{d^2 V_2}{dt^2}, \\ (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) \frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2 \vartheta_2 \frac{d V_2}{dt} + V_2 = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) \frac{d^2 V_1}{dt^2}, \end{cases}$$

1) Diese Gleichungen nehmen die Gestalt von den Gleichungen bei M. Wien (Ann. d. Phys. 8. p. 694. 1902) an, wenn man berücksichtigt, daß $2 V_2$ die Potentialdifferenz zwischen beiden Spulenden ist. Daher besteht auch die hier gültige Gleichung

$$i_2^0 = 2 C_2 \frac{d V_2^h}{dt}.$$

Die nachfolgenden Entwicklungen gelten daher auch für den Fall, daß der Sekundärkreis aus keiner Spule, sondern aus einem linearen Strom mit angehängter großer Kapazität C_2 besteht. $2 V_2$ ist dann die sekundäre Potentialdifferenz.

wobei gesetzt ist

$$(23) \quad \begin{cases} \vartheta_1 = \frac{1}{2} w_1 C_1, & \tau_1^2 + \vartheta_1^2 = L_{11} C_1, & p_{12} = 2 \frac{L_{12} C_2}{L_{11} C_1}, \\ \vartheta_2 = \frac{1}{2} w_2 C_2, & \tau_2^2 + \vartheta_2^2 = L_{22} C_2, & p_{21} = \frac{1}{2} \frac{L_{21} C_1}{L_{22} C_2}. \end{cases}$$

Als Integral der Form (I) wählen wir

$$(24) \quad V_1 = A e^{xt}, \quad V_2 = B e^{xt}, \quad x = -\delta + i\nu,$$

als Integral von (II) wählen wir:

$$(25) \quad V_1 = A e^{t/y}, \quad V_2 = B e^{t/y}, \quad y = -\vartheta + i\tau.$$

Dabei bedeutet $i = \sqrt{-1}$.

Es wird sich erweisen, daß in einem Falle die Form (I) zweckmäßig ist, im anderen Falle die Form (II).

Aus (I) und (24) folgt:

$$(26) \quad \begin{cases} A(x^2 + 2\delta_1 x + \nu_1^2 + \delta_1^2) = p_{12} x^2 B, \\ B(x^2 + 2\delta_2 x + \nu_2^2 + \delta_2^2) = p_{21} x^2 A. \end{cases}$$

Dagegen folgt aus (II) und (25):

$$(27) \quad \begin{cases} A(\tau_1^2 + \vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 y + y^2) = p_{12} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) B, \\ B(\tau_2^2 + \vartheta_2^2 + 2\vartheta_2 y + y^2) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) A. \end{cases}$$

Durch Elimination von $A:B$ folgen für x und y die biquadratischen Gleichungen:

$$(28) \quad (x^2 + 2\delta_1 x + \nu_1^2 + \delta_1^2)(x^2 + 2\delta_2 x + \nu_2^2 + \delta_2^2) = p_{12} p_{21} x^4,$$

$$(29) \quad \begin{cases} (y^2 + 2\vartheta_1 y + \tau_1^2 + \vartheta_1^2)(y^2 + 2\vartheta_2 y + \tau_2^2 + \vartheta_2^2) \\ = p_{12} p_{21} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2). \end{cases}$$

Wenn $p_{12} = 0$ ist, d. h. der Primärkreis allein vorhanden ist, so ergibt (26):

$$(30) \quad x = -\delta_1 \pm i\nu_1.$$

ν_1 bezeichnet also die Frequenz, δ_1 die Dämpfung der Eigenschwingung des Primärkreises. Nennt man T_1 die Schwingungsdauer, γ_1 das logarithmische Dekrement, so ist

$$(30') \quad \nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad \delta_1 = \frac{\gamma_1}{T_1}.$$

Analog bezeichnet ν_2 und δ_2 Frequenz bez. Dämpfung der Eigenschwingung der Teslapule allein. $\vartheta_1, \tau_1, \vartheta_2, \tau_2$ haben

nicht direkt so anschauliche physikalische Bedeutungen, jedenfalls ist aber für die Eigenschwingungen zu setzen:

$$(31) \quad y = -\vartheta_1 \pm i\tau_1 \quad \text{bez.} \quad y = -\vartheta_2 \pm i\tau_2.$$

Wenn ϑ_1^2 gegen τ_1^2 , ϑ_2^2 gegen τ_2^2 zu vernachlässigen ist, so gilt

$$\frac{t}{e^{-\vartheta_1 + i\tau_1}} = e^{-\frac{\vartheta_1}{\tau_1^2} t} \cdot e^{-i\frac{t}{\tau_1}}.$$

Setzt man also

$$e^{-\frac{t}{\vartheta_1 + i\tau_1}} = e^{-\gamma \cdot \frac{t}{T_1}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_1} t},$$

so ist

$$(32) \quad \tau_1 = \frac{T_1}{2\pi}, \quad \vartheta_1 = \frac{\gamma_1 T_1}{4\pi^2}.$$

Dabei ist T_1 die Periode, γ_1 das logarithmische Dekrement des Kreises 1.

Die Gleichung (I), (24) und (28) ist nun praktisch, wenn die magnetische Koppelung k^2

$$(33) \quad k^2 = p_{12} p_{21} = \frac{L_{12} L_{21}}{L_{11} L_{22}}$$

so klein ist, daß sie gegen 1 vernachlässigt werden kann.

Verfolgen wir zunächst diesen ersten Fall.

II. Die magnetische Koppelung ist sehr klein.

Wenn $p_{12} p_{21}$ gegen 1 vernachlässigt wird, so ergibt (28) die vier Wurzeln für x :

$$(34) \quad x_1 = -\delta_1 + i\nu_1, \quad x_2 = -\delta_1 - i\nu_1, \quad x_3 = -\delta_2 + i\nu_2, \quad x_4 = -\delta_2 - i\nu_2.$$

Demnach ist das allgemeine Integral von (I):

$$(35) \quad \begin{cases} V_1 = A_1 e^{x_1 t} + A_2 e^{x_2 t} + A_3 e^{x_3 t} + A_4 e^{x_4 t}, \\ V_2 = B_1 e^{x_1 t} + B_2 e^{x_2 t} + B_3 e^{x_3 t} + B_4 e^{x_4 t}. \end{cases}$$

Aus (1) folgt:

$$(36) \quad -\frac{i_1}{C_1} = x_1 A_1 e^{x_1 t} + x_2 A_2 e^{x_2 t} + x_3 A_3 e^{x_3 t} + x_4 A_4 e^{x_4 t},$$

aus (3) und (8):

$$(37) \quad \pi \frac{i_2}{\mathfrak{C}_2 h} = x_1 B_1 e^{x_1 t} + x_2 B_2 e^{x_2 t} + x_3 B_3 e^{x_3 t} + x_4 B_4 e^{x_4 t}.$$

Als Anfangsbedingung für $t = 0$ gilt nun:

$$(38) \quad V_1 = F, \quad V_2 = 0, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = 0.$$

Daher ergibt (35), (36), (37) und (38):

$$(39) \quad \sum A_n = F, \quad \sum A_n x_n = 0, \quad \sum B_n = 0, \quad \sum B_n x_n = 0, \\ n = 1, 2, 3, 4.$$

Nun ist nach der zweiten der Gleichungen (26):

$$(40) \quad B_n \left(x_n + 2 \delta_2 + \frac{\nu_2^2 + \delta_2^2}{x_n} \right) = p_{21} x_n A_n.$$

Durch Addition dieser vier für $n = 1, 2, 3, 4$ gebildeten Gleichungen entsteht wegen der Gleichungen (39):

$$(41) \quad \frac{B_1}{x_1} + \frac{B_2}{x_2} + \frac{B_3}{x_3} + \frac{B_4}{x_4} = 0.$$

Ferner folgt aus der zweiten der Gleichungen (26):

$$(42) \quad B_n \left(1 + \frac{2 \delta_2}{x_n} + \frac{\nu_2^2 + \delta_2^2}{x_n^2} \right) = p_{21} A_n.$$

Durch Addition dieser vier für $n = 1, 2, 3, 4$ gebildeten Gleichungen folgt wegen (39) und (41):

$$(43) \quad \frac{B_1}{x_1^2} + \frac{B_2}{x_2^2} + \frac{B_3}{x_3^2} + \frac{B_4}{x_4^2} = p_{21} \frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2}.$$

Daher ergibt (43), (41), und die beiden letzten Gleichungen (39):

$$(44) \quad \frac{B_1}{x_1^2} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \\ x_1^3, & x_2^3, & x_3^3, & x_4^3 \end{vmatrix} = p_{21} \frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2} x_2 x_3 x_4 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x_2, & x_3, & x_4 \\ x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

Die hier auftretenden Determinanten lassen sich sofort hinschreiben. Denn es ist

$$(45) \quad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & x_4^2 \\ x_1^3, & x_2^3, & x_3^3, & x_4^3 \end{vmatrix} = + (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4).$$

Daher ergibt (44):

$$(46) \quad B_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) = - p_{21} \frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2} x_1^2 x_2 x_3 x_4,$$

und ähnlich folgt (zyklische Buchstabenvertauschung):

$$(47) \quad B_2 (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_1) = - p_{21} \frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2} x_1 x_2^2 x_3 x_4,$$

$$(48) \quad B_3 (x_3 - x_4)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = - p_{21} \frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2} x_1 x_2 x_3^2 x_4,$$

$$(49) \quad B_4 (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = - p_{21} \frac{F}{\nu_2^2 + \delta_2^2} x_1 x_2 x_3 x_4^2.$$

Von besonderem Interesse ist das Potential V_2 am Spulende. Durch (35) und (46) bis (49) ist dasselbe durch die Anfangspotentialdifferenz im Primärkreis ausgedrückt.

Es ergibt sich B_2 zu B_1 konjugiert komplex, ebenso B_4 zu B_3 , gerade wie auch x_2 zu x_1 , x_4 zu x_3 .

Daher ergibt sich V_2 nach (35) gleich einer reellen Größe.

Um das Resultat übersichtlich zu gestalten, kann man die Gleichung (36), wenn man für die x die Werte (34) einsetzt, in der Form schreiben:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} V_2 = e^{i \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t} & \left[B_1 e^{-\delta_1 t} e^{+i \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t} + B_3 e^{-\delta_2 t} e^{-i \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t} \right] \\ & + e^{-i \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t} \left[B_2 e^{-\delta_1 t} e^{-i \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t} + B_4 e^{-\delta_2 t} e^{+i \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t} \right]. \end{aligned} \right.$$

Setzt man also

$$(50') \quad B_1 e^{-\delta_1 t} e^{+i \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t} + B_3 e^{-\delta_2 t} e^{-i \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t} = -i B e^{i \chi},$$

wobei B und χ reelle Größen sind, so wird

$$(51) \quad V_2 = 2 B \sin \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \chi \right).$$

B bezeichnet also die Amplitude des Potentials am Ende der Testspule. Es entstehen Schwebungen für V_2 , da B von der Zeit abhängt.

Aus (50) folgt nun, da B_2 konjugiert komplex zu B_1 ist, und B_4 zu B_3 :

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} B^2 = B_1 B_2 e^{-2 \delta_1 t} + B_3 B_4 e^{-2 \delta_2 t} \\ + e^{-(\delta_1 + \delta_2) t} [B_1 B_4 e^{i(\nu_1 - \nu_2) t} + B_3 B_2 e^{-i(\nu_1 - \nu_2) t}]. \end{aligned} \right.$$

Nun ist nach (46)

$$(53) \quad B_1 = -p_{21} F(\delta_1^2 + \nu_1^2) \frac{-\delta_1 + i \nu_1}{2 i \nu_1 [-(\delta_1 - \delta_2) + i(\nu_1 - \nu_2)]} \cdot \frac{1}{[-(\delta_1 - \delta_2) + i(\nu_1 + \nu_2)]}.$$

Da nun $\delta_1 - \delta_2$ stets klein gegen $\nu_1 + \nu_2$, und δ_1 klein gegen ν_1 ist, so kann man setzen bis auf erste Ordnung in δ_1 bez. δ_2 :

$$(54) \quad B_1 = p_{21} F \frac{\nu_1^2}{2(\nu_1 + \nu_2)} \left(1 + i \frac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_1(\nu_1 + \nu_2)} \right) \cdot \frac{1}{\nu_1 - \nu_2 + i(\delta_1 - \delta_2)}.$$

Analog ergibt sich

$$(54) \quad \begin{cases} B_2 = p_{21} F \cdot \frac{\nu_1^2}{2(\nu_1 + \nu_2)} \left(1 - i \frac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_1(\nu_1 + \nu_2)} \right) \cdot \frac{1}{\nu_1 - \nu_2 - i(\delta_1 - \delta_2)}, \\ B_3 = -p_{21} F \cdot \frac{\nu_1^2}{2(\nu_1 + \nu_2)} \left(1 + i \frac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_2(\nu_1 + \nu_2)} \right) \cdot \frac{1}{\nu_1 - \nu_2 + i(\delta_1 - \delta_2)}, \\ B_4 = -p_{21} F \cdot \frac{\nu_1^2}{2(\nu_1 + \nu_2)} \left(1 - i \frac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_2(\nu_1 + \nu_2)} \right) \cdot \frac{1}{\nu_1 - \nu_2 - i(\delta_1 - \delta_2)}. \end{cases}$$

Folglich ergibt (52):

$$(55) \quad B = p_{21} F \frac{\nu_1^2}{2(\nu_1 + \nu_2)} \sqrt{\frac{e^{-2\delta_1 t} + e^{-2\delta_2 t} - 2e^{-(\delta_1 + \delta_2)t} \cos \varphi}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}},$$

wobei

$$(56) \quad \varphi = (\nu_1 - \nu_2)t + \frac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_1 + \nu_2} \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right).$$

Man kann auch B in der Form schreiben:

$$(57) \quad B = p_{21} F \frac{\nu_1^2}{2(\nu_1 + \nu_2)} e^{-\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} t} \sqrt{\frac{\left(e^{+\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} t} - e^{-\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} t} \right)^2 + 4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}}.$$

Für den Fall der *Resonanz* $\nu_1 = \nu_2$ wird

$$(58) \quad B = p_{21} F \frac{\nu_1}{4} \frac{e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}}{\delta_1 - \delta_2}.$$

B nimmt einen maximalen Wert an, wenn ist

$$(59) \quad e^{(\delta_1 - \delta_2)t} = \delta_1 : \delta_2, \text{ d. h. für } t = \frac{\log \delta_1 / \delta_2}{\delta_1 - \delta_2}.$$

Dieser maximale Wert (bei Resonanz) ist nach (58) und (59):

$$(60) \quad \begin{cases} B_{\text{Max.}} = -p_{21} F \frac{\nu_1}{4 \delta_2} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{\delta_1}{\delta_2 - \delta_1}} \\ = -p_{21} F \frac{\nu_1}{4} \frac{\delta_1 \delta_1 / \delta_2 - \delta_1}{\delta_2 \delta_2 / \delta_2 - \delta_1}. \end{cases}$$

Dies stimmt mit der von Bjerknæs¹⁾ erhaltenen Formel überein.

Für $\nu_1 = \nu_2$, $\delta_1 = \delta_2$ nimmt (58) die unbestimmte Form $0/0$ an. Wenn man aber in (57) nach Potenzen von $\nu_1 - \nu_2$ und $\delta_1 - \delta_2$ entwickelt, so entsteht, falls man für φ in (56) nur schreibt $\varphi = (\nu_1 - \nu_2)t$, eine bestimmte Form, da $(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2$ im Zähler und Nenner auftritt. Man erhält dadurch:

$$(61) \quad B = p_{21} F \frac{\nu_1}{4} t e^{-\delta_1 t},$$

1) V. Bjerknæs, Wied. Ann. 55. p. 134, Formel (9a). 1895.

welche Formel ebenfalls von Bjerknæs¹⁾ abgeleitet ist. Ob es bei φ gestattet ist, in seinem zweiten Gliede den Grenzübergang $\nu_1 = \nu_2$ früher auszuführen, als in seinem ersten Gliede $(\nu_1 - \nu_2)t$, mag hier nicht untersucht werden.²⁾

III. Messung der Periode und der Dämpfung.

Wir nehmen den Sekundärkreis als unveränderlich an. Von praktischem Interesse ist sowohl die Frage, ob die Wirkung im Sekundärkreis bei stetiger Veränderung der Frequenz ν_1 des Primärkreises ein Maximum annimmt, wenn genau $\nu_1 = \nu_2$ ist, als auch die Frage, ob man aus quantitativer Ausmessung der Resonanzkurve, d. h. aus quantitativer Messung der Wirkung im Sekundärkreis bei verschiedener Frequenz ν_1 des Primärkreises die Dämpfungen δ_1 und δ_2 der beiden Schwingungskreise bestimmen kann. Beide Fragen hat Bjerknæs l. c. behandelt, aber nur für den Integraleffekt erschöpfend, der bei elektrometrischen, bolometrischen, thermoelektrischen (Joulewärme) Meßmethoden maßgebend ist. Indes ist sein Verfahren insofern noch zu verallgemeinern, als es einen Unterschied ausmacht, ob man zur Veränderung von ν_1 die Kapazität C_1 verändert, während L_{11} festbleibt³⁾ (Fall a), oder ob man umgekehrt C_1 festhält, aber L_{11} variiert (Fall b). Im Fall a) ist nämlich nach (22) der für die Wirkung im Sekundärkreise maßgebende Koeffizient p_{21} nicht konstant; er ist, falls δ^2 gegen ν^2 , d. h. γ^2 gegen $4\pi^2$ vernachlässigt wird, in die Gestalt zu bringen:

$$(62) \quad p_{21} = \frac{1}{2} \frac{L_{21}}{L_{11}} \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2};$$

1) l. c., Formel (8a). Aus ihr folgt:

$$B_{\text{Max.}} = p_{21} F \frac{\nu_1}{4e\delta_1}.$$

2) Der Fall $\nu_1 = \nu_2$, $\delta_1 = \delta_2$ erfordert streng genommen eine besondere Behandlung schon von Gleichung (28) an, da diese dann lautet: $x^2 + 2\delta_1 x + \nu_1^2 + \delta_1^2 = \pm x^2 k$, und k nicht mehr gegen 1 vernachlässigt werden darf, da nach (40) die B proportional zu k sind. Aus diesem Grunde ist es auch unmöglich, daß die Wurzeln x paarweise genau gleich werden, was aus (34) für $\delta_1 = \delta_2$, $\nu_1 = \nu_2$ scheinbar hervorgeht.

3) Dieser Fall liegt meinen Beobachtungen (Ann. d. Phys. 9, p. 293. 1902) zugrunde.

im Fall b) dagegen ist p_{21} konstant, vorausgesetzt, daß bei Änderung von L_{11} der Koeffizient der wechselseitigen Induktion L_{21} fest bleibt, was man experimentell leicht realisieren kann. Den Bjerknesschen Betrachtungen liegt nur der Fall b) zugrunde. Aber auch in anderer Hinsicht ist eine Ergänzung zu dieser grundlegenden Arbeit von Bjerknæs wünschenswert, nämlich um die Maximalamplitude ebenfalls erschöpfend zu behandeln, weil sich herausstellt, daß durch Kombination der Beobachtungen der Resonanzkurve des Integraleffektes und der Maximalamplitude die Dämpfungen δ_1 und δ_2 beider Schwingungskreise einzeln zu berechnen sind, was meines Erachtens ein einfacheres Beobachtungsverfahren bedeutet, als die von Bjerknæs vorgeschlagenen. Die Maximalamplitude (größter Wert des Potentials V_2) kann aus Funkenschlagweiten oder besser aus der elektrischen Ablenkung der Kathodenstrahlen in einer Braunröhre experimentell quantitativ erhalten werden.

Die Betrachtungen sowohl für den Integral- als für den Maximaleffekt haben an die Formel (55) anzuknüpfen. Setzt man

$$(63) \quad v_1 = v_2(1 + \zeta),$$

so schreibt sich ganz allgemein in jedem Falle der im Sekundärkreis eintretende Effekt E in der Form:

$$(64) \quad E = P(1 + a\zeta - b\zeta^2),$$

wobei a positiv und negativ sein kann, b aber stets positiv ist. b ist sehr groß gegen 1. Das Maximum E_m von E tritt nach (64) ein bei

$$(65) \quad \zeta_m = \frac{a}{2b}$$

und hat den Wert

$$(66) \quad E_m = P\left(1 + \frac{a^2}{4b}\right).$$

Setzt man

$$(67) \quad \zeta = \zeta_m + \eta, \quad v_1 = v_2(1 + \zeta_m + \eta),$$

d. h. bezeichnet η die prozentische Differenz der Frequenz v_1 von der Resonanzfrequenz $v_2(1 + \zeta_m)$, worunter die Frequenz

verstanden sein soll, welche die größte Wirkung im Sekundärkreis ergibt, so folgt aus (64):

$$(68) \quad E = P \left(1 + \frac{a^2}{4b} - b\eta^2 \right),$$

d. h. nach (66):

$$(69) \quad \frac{E_m - E}{E_m} = b\eta^2.$$

η ist experimentell bestimmbar, wenn man den Primärkreis nach Schwingungsdauer oder Wellenlänge geeicht hat. Daher gibt (69) an, in welcher Weise man quantitativ aus der Resonanzkurve den Koeffizienten b berechnen kann. Die Resonanzkurve ist um so steiler, je größer b ist. Hat man so b gefunden, so ist die Schwingungsdauer ν_2 aus (65) und (67) zu berechnen, wenn man a kennt.

Es wird nun die spezialisiertere Betrachtung lehren, daß man wegen der Abhängigkeit¹⁾ der Dämpfung δ_1 von der Frequenz ν_1 den Koeffizienten a nicht rechnerisch angeben kann, aber wohl ist b aus (55) theoretisch ableitbar. b hängt nur von den logarithmischen Dekrementen γ_1 und γ_2 (bez. den Dämpfungen δ_1 und δ_2) der beiden Schwingungskreise ab. *Man erhält daher aus den Resonanzkurven Aufschluß über diese von beiden Dämpfungen abhängende Größe b , dagegen nicht²⁾ über den genauen Wert der Frequenz ν_2 .* Kombiniert man aber die Resonanzbeobachtungen an den zwei verschiedenen Effekten (Maximal- und Integraleffekt) miteinander, so kann man auch ν_2 genau bestimmen, sowie die Dämpfungen beider Schwingungskreise einzeln. Dies wird nun gezeigt werden.

Wir behandeln jetzt die einzelnen Fälle gesondert.

1) Eine solche kann bestehen sowohl direkt wegen veränderter Frequenz, als auch wegen veränderter Stromstärke i_1 (bei variiertem C_1). Auch Bjerknæs zieht dies in Rücksicht.

2) Das scheinbar abweichende Resultat von Bjerknæs wird nur dadurch veranlaßt, daß er die Resonanzkurve auf größere Werte ζ ausdehnt, als wir es hier tun wollen. Tatsächlich bedeutet die Bjerknæs'sche Bestimmung der Differenz des Isochronitätspunktes und des Resonanzpunktes (es handelt sich dabei um die von Bjerknæs mit S bezeichnete Größe) auch nur eine Taxierung der Größenordnung, vgl. V. Bjerknæs, l. c. p. 150.

1. Die *Maximalamplitude*. a) C_1 wird verändert. Formel (57) und (62) liefert für den nach (59) folgenden Wert¹⁾ von t für die im Laufe der Zeit erreichte größte Amplitude des Potentials V_2 :

$$(70) \quad B_{\text{Max.}} = F \frac{L_{21}}{L_{11}} \cdot \frac{\nu_2^2}{4(\nu_1 + \nu_2)} \cdot q \sqrt{\frac{1 + \delta_1 \delta_2 \left(\frac{\log \delta_1 / \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \right)^2 \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\delta_1 - \delta_2} \right)^2}{1 + \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\delta_1 - \delta_2} \right)^2}},$$

wobei bedeutet

$$(71) \quad q = \frac{\delta_2 \delta_2 / \delta_1 - \delta_2}{\delta_1 \delta_1 / \delta_1 - \delta_2}.$$

Führt man (63) ein, so entsteht:

$$(72) \quad B_{\text{Max.}} = F \frac{L_{21}}{L_{11}} \frac{\nu_2}{8(1 + \frac{1}{2}\zeta)} \left(q + \frac{\partial q}{\partial \delta_1} \cdot \frac{d \delta_1}{d \zeta} \right) \sqrt{1 - b \zeta^2},$$

wobei ist

$$(73) \quad b = \left(\frac{\nu_2}{\delta_1 - \delta_2} \right)^2 \left(1 - \delta_1 \delta_2 \left(\frac{\log \delta_1 / \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \right)^2 \right).$$

Diese Größe b ist beständig positiv und sehr groß gegen 1. In der Tat liefert eine Reihenentwicklung:

$$(74) \quad b = \frac{\nu_2^2}{12 \delta_1^2} \left(1 + x + \frac{13}{15} x^2 + \frac{11}{15} x^3 + \frac{103}{140} x^4 + \dots \right),$$

$x = 1 - \delta_2 / \delta_1$ gesetzt, gültig für $\delta_1 > \delta_2$, oder

$$(75) \quad b = \frac{\nu_2^2}{12 \delta_2^2} \left(1 + x + \frac{13}{15} x^2 + \frac{11}{15} x^3 + \frac{103}{140} x^4 + \dots \right),$$

$x = 1 - \delta_1 / \delta_2$ gesetzt, gültig für $\delta_1 < \delta_2$.

Entwickelt man (72) nach ζ und behält nur erste Potenzen von ζ bei, abgesehen vom Gliede $b \zeta^2$ (wegen der Größe des Faktors b) und setzt

$$(76) \quad \frac{d \delta_1}{d \zeta} = \delta \zeta,$$

so wird (72):

$$(77) \quad B_{\text{Max.}} = F \frac{L_{21}}{L_{11}} \frac{\nu_2}{8} q \sqrt{1 - \zeta \left(1 - \frac{2 \delta}{q} \frac{\partial q}{\partial \delta_1} \right) - b \zeta^2}.$$

1) Dieser Wert von t gibt streng genommen nur für $\nu_1 = \nu_2$ die größte Amplitude $B_{\text{Max.}}$. Da aber ν_1 nahe benachbart zu ν_2 angenommen wird, können wir diesen Wert von t benutzen. Die Berücksichtigung dieser Veränderung von t würde nur auf den Koeffizienten a in Formel (64) Einfluß gewinnen, auf den es nicht genau ankommt nach oben im Text angestellten Überlegungen.

Nennt man V^2 das Quadrat der maximalen Potentialdifferenz $2 B_{\text{Max}}$ zwischen den Enden des Sekundärkreises, so nimmt nach (77) V^2 die Gestalt der Formel (64) an, wobei ist

$$(78) \quad a = - \left(1 - \frac{2\delta}{q} \frac{\partial q}{\partial \delta_1} \right) = -1 + \frac{2\delta}{\delta_1 - \delta_2} \left(\frac{\delta_2 \log \delta_1 / \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} - 1 \right),$$

während b den aus (73), (74) oder (75) folgenden Wert hat. Nach (69) gewinnt man also aus der quantitativ in der Nähe der Resonanz ausgemessenen Resonanzkurve:

$$\frac{V_m^2 - V^2}{V_m^2} = b \eta^2$$

Aufschluß über den Wert von b , während nach (65) die Resonanzfrequenz liegt bei

$$(79) \quad \nu_1 = \nu_2 (1 + \zeta_m) = \nu_2 \left(1 - \frac{1 + \frac{2\delta}{\delta_1 - \delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \log \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)}{2b} \right).$$

Ob der Wert von ζ_m positiv oder negativ ist, d. h. ob die Resonanzfrequenz größer oder kleiner als die Frequenz ν_2 des Sekundärkreises ist, kann man ohne Kenntnis des Wertes δ , d. h. der Abhängigkeit des δ_1 von ν_1 , nicht sagen. Jedenfalls ist δ von der Größenordnung des δ_1 oder δ_2 , so daß nach (79) und (73) ζ_m von der Größenordnung

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{\nu_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi} \right)^2$$

ist, wobei γ_1, γ_2 die logarithmischen Dekremente der beiden Schwingungskreise bedeuten (vgl. Formel (30) p. 520). Selbst wenn $\gamma_1 = 1$ sein sollte, was einer sehr großen Dämpfung entspricht, die nur eine schwach ausgeprägte Resonanz geben würde, und $\gamma_2 = 0$, so würde daher die Resonanzfrequenz des Primärkreises nur um etwa 1—2 Proz. von der Frequenz ν_2 des Sekundärkreises abweichen.¹⁾

b) L_{11} im Primärkreis wird verändert. Nach (22) p. 519 ist p_{21} konstant. (57) liefert für den nach (59) folgenden Wert von t und nach (63):

$$(80) \quad B_{\text{Max}} = p_{21} F \frac{\nu_2}{4} \left(1 + \frac{3}{2} \zeta \right) \left(q + \frac{\partial q}{\partial \delta_1} \cdot \frac{d \delta_1}{d \zeta} \right) \sqrt{1 - \bar{b} \zeta^2},$$

1) Bei meinen Versuchen (Ann. d. Phys. 9. p. 293. 1902), bei denen ich die Eigenschwingungsdauern von Spulen durch Resonanz ermittelt habe, war dieselbe sehr scharf ausgebildet, so daß der Fehler sicher unter $1/4$ Proz. lag.

wobei b denselben Wert (73) wie im Falle a) hat. Dagegen ist hier

$$(81) \quad \frac{d \delta_1}{d \zeta} = \delta' \zeta$$

im allgemeinen verschieden anzunehmen von dem Werte $d \delta_1 / d \zeta$ im Falle a) (vgl. die dortige Formel (76)). Entwickelt man (80) nach Potenzen von ζ , so entsteht die Form (64), wobei aber jetzt ist

$$(82) \quad a = + 3 + \frac{2 \delta'}{\delta_1 - \delta_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \log \frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 \right).$$

Aus der Resonanzkurve erhält man also wiederum Aufschluß über die Größe b , die Resonanzfrequenz liegt aber nach (65) jetzt bei

$$(83) \quad v_1 = v_2 (1 + \zeta_m) = v_2 \left(1 + \frac{3 - \frac{2 \delta'}{\delta_1 - \delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \log \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)}{2 b} \right).$$

Vergleicht man diese Formel mit der entsprechenden Formel (79) des Falles a), so erkennt man, daß, wenn nicht eine starke Verschiedenheit der Änderungskoeffizienten δ und δ' das Resultat beeinflußt, die Resonanzfrequenz in diesem Falle b) größer ist als im Falle a).

2. *Der Integraleffekt.*¹⁾ Beobachtet man die durch den Sekundärstrom i_2 in der Mitte des Sekundärkreises ($i_2 = i_2^0$) entwickelte Joule-Wärme, was durch ein dort eingeschaltetes Thermoelement bequem geschehen kann, so kommt es auf den Integraleffekt an

$$J = \int_0^{\infty} i_2^2 dt.$$

Da aus (3), (8) und (17) folgt

$$i_2^0 = 2 C_2 \frac{d V_2^h}{dt} \quad (\text{vgl. Anm. 1 auf p. 519}),$$

1) Man kann auch aus dem Integraleffekt auf einen metallisch geschlossenen Sekundärkreis (der also keine Eigenschwingungen besitzt) die Dämpfung im Primärkreis bestimmen (vgl. R. Lindemann, Ann. d. Phys. 12. p. 1012. 1903). Diese Methode ist besonders bequem, wenn man die Änderung der Dämpfung γ_1 durch Variation von C_1 oder F' studieren will. Ich gedenke bei anderer Gelegenheit ausführlicher darauf einzugehen und die Messungen zu publizieren.

so ergibt (51) auf p. 523:

$$J = \int_0^{\infty} 4 C_2^2 B^2 (v_1 + v_2)^2 \cos^2 \left(\frac{v_1 + v_2}{2} t + \chi \right) \\ = 2 C_2^2 (v_1 + v_2)^2 \int_0^{\infty} B^2 (1 + \cos [(v_1 + v_2) t + 2\chi]) dt.$$

Der Effekt des zweiten mit dem \cos multiplizierten Gliedes unter dem Integralzeichen ist zu vernachlässigen¹⁾ gegen den Effekt des ersten Gliedes, so daß entsteht:

$$J = 2 C_2^2 (v_1 + v_2)^2 \int_0^{\infty} B^2 dt.$$

Setzt man hierin den Wert von B nach (55) ein, so folgt, da ist

$$\int e^{-(\delta_1 + \delta_2) t} \cos(\alpha t + \beta) dt \\ = e^{-(\delta_1 + \delta_2) t} \frac{\alpha \sin(\alpha t + \beta) - (\delta_1 + \delta_2) \cos(\alpha t + \beta)}{\alpha^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}, \\ J = p_{21}^2 F^2 \frac{v_1^4}{2} C_2^2 \frac{1}{(v_1 - v_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2} \\ \left\{ \frac{1}{2\delta_1} + \frac{1}{2\delta_2} - 2 \frac{(\delta_1 + \delta_2) \cos \beta - \alpha \sin \beta}{\alpha^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2} \right\}.$$

Dabei ist (vorübergehend) gesetzt nach (56):

$$\alpha = v_1 - v_2, \quad \beta = \frac{\delta_1 v_2 + \delta_2 v_1}{v_1 + v_2} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right).$$

Da man nun δ^2 gegen v^2 vernachlässigen kann, so folgt:

$$J = p_{21}^2 F^2 \frac{v_1^4}{4} C_2^2 \frac{1}{(v_1 - v_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2} \\ \left\{ \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} - 4 \frac{\delta_1 + \delta_2 + (v_1 - v_2)^2 \frac{\delta_1 v_2 + \delta_2 v_1}{(v_1 + v_2) v_1 v_2}}{(v_1 - v_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2} \right\}.$$

Nun ist in der Nähe der Resonanz $(v_1 - v_2)^2$ zu vernachlässigen neben $(v_1 + v_2) v_1 v_2 (\delta_1 + \delta_2)$: $\delta_1 v_2 + \delta_2 v_1$, dagegen nicht zu vernachlässigen neben $(\delta_1 + \delta_2)^2$ oder neben $(\delta_1 - \delta_2)^2$. Daher ist die letzte Formel zu schreiben:

1) Vgl. V. Bjerknes, l. c. p. 137.

$$J = p_{21}^2 F^2 \frac{\nu_1^4}{4} C_2^2 \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2} \left\{ \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} - \frac{4(\delta_1 + \delta_2)}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2} \right\},$$

oder:

$$(84) \quad J = p_{21}^2 F^2 \frac{\nu_1^4}{4} C_2^2 \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß man aus Beobachtung der Resonanzkurve des Integraleffektes Aufschluß über $\delta_1 + \delta_2$ erhält, ein Resultat, das schon Bjerknes¹⁾ abgeleitet hat. Zur genaueren Diskussion, in welcher Weise $\delta_1 + \delta_2$ aus der Resonanzkurve gewonnen wird, sind aber wieder die zwei Fälle zu unterscheiden, ob bei Variation von ν_1 nur C_1 verändert wird, oder nur L_{11} .

a) Die Kapazität C_1 im Primärkreis wird verändert. Nach (62) p. 525 ist in diesem Falle zu setzen:

$$p_{21} = \frac{1}{2} \frac{L_{21} \nu_2^2}{L_{11} \nu_1^2}.$$

Daher wird (84) in Rücksicht auf $\nu_2^2 = 1 : L_{22} C_2$ [nach (22)]:

$$J = \frac{F^2}{16} \frac{L_{21}^2}{L_{11}^2 L_{22}^2} \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}.$$

Setzt man nun nach (63) $\nu_1 = \nu_2 (1 + \zeta)$ und nach (76) $d\delta_1 : d\zeta = \delta\zeta$, so wird

$$J = \frac{F^2}{16} \frac{L_{21}^2}{L_{11}^2 L_{22}^2} \frac{1}{\delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2)} \left(1 - \frac{\delta_2 \delta}{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2)} \zeta - \left(\frac{\nu_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)^2 \zeta^2 \right),$$

d. h. man gewinnt wiederum die Form (64) mit der Bedeutung der Koeffizienten

$$(85) \quad a = - \frac{\delta_2 \delta}{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2)}, \quad b = \left(\frac{\nu_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 + \gamma_2} \right)^2.$$

Aus der Steilheit der Resonanzkurve nach (69) ergibt sich also $\gamma_1 + \gamma_2$, während die Resonanzfrequenz aus (65) folgt zu

$$(86) \quad \nu_1 = \nu_2 (1 + \zeta_m) = \nu_2 \left(1 - \frac{\delta_2 \delta (\delta_1 + \delta_2)}{2 \delta_1 \nu_2^2} \right).$$

Vergleicht man die Werte b nach (74) oder (75) mit dem hier ermittelten Werte b nach (85), so erkennt man, daß letzterer immer etwas größer ist als ersterer, am meisten für

1) V. Bjerknes, l. c. p. 148.

den Fall $\delta_1 = \delta_2$. Da nun nach p. 527 größeres b eine steilere (ausgeprägtere) Resonanzkurve ergibt, so ergibt die Beobachtung des Integraleffektes schärfere Resonanz, als die des Maximaleffektes, ein Resultat, welches auch Bjerknes l. c. p. 165 schon gezogen hat.¹⁾

Durch Kombination der Beobachtungen der Resonanzkurve des Integraleffektes und des Maximaleffektes kann man die logarithmischen Dekremente γ_1, γ_2 beider Schwingungskreise einzeln berechnen, da man nach (73) und (85) dadurch zwei verschiedenen aus γ_1 und γ_2 zusammengesetzte Ausdrücke berechnet. Dies ergibt eine experimentell leicht ausführbare Bestimmungsmethode von γ_1 und γ_2 .

Wenn man in dieser Weise γ_1 und γ_2 , oder δ_1 und δ_2 berechnet hat, so ergibt dann das Verhältnis der aus beiden Effekten erhaltenen Resonanzfrequenzen (79) und (86) auch eine Formel zur Berechnung des Änderungskoeffizienten δ , d. h. auch des genauen Wertes der Frequenz ν_2 des Sekundärkreises.

b) L_{11} im Primärkreis wird verändert. Nach (22) p. 519 ist p_{21} konstant. Nach (84) wird

$$J \sim 1 + \left(4 - \frac{\delta_2 \delta'}{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2)}\right) \zeta - \left(\frac{\nu_2}{\delta_1 + \delta_2}\right)^2 \zeta^2,$$

wobei δ' den nach (81) definierten Änderungskoeffizienten von δ_1 bedeutet. Aus der Resonanzkurve ergibt sich also wiederum $\nu_2 : \delta_1 + \delta_2$, die Resonanzfrequenz liegt bei:

$$(87) \quad \nu_1 = \nu_2 (1 + \zeta_m) = \nu_2 \left(1 + \frac{4 - \frac{\delta_2 \delta'}{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2)}}{2 \nu_2^2 : (\delta_1 + \delta_2)^2}\right).$$

Diese Resonanzfrequenz wird im allgemeinen größer sein, als die Resonanzfrequenz im Falle a) nach (86). Ein Vergleich mit (82) lehrt, daß man auch im Falle b) durch Kombination der Beobachtungen des Integral- und des Maximaleffektes $\delta_1, \delta_2, \delta', \nu_2$ experimentell bestimmen kann.

1) Auch für $\nu_1 = \nu_2$ hängt der Integraleffekt viel mehr von der Dämpfung ab, da er nach (84) der vierten Potenz von $\delta_{1,2}$ umgekehrt proportional ist, als die Maximalamplitude, da nach Anm. 1 p. 525 V_{Max}^2 proportional $1/\delta_1^2$ ist.

IV. Die magnetische Koppelung ist nicht sehr klein.

Wenn die magnetische Koppelung k^2 (Formel (33)) nicht gegen 1 zu vernachlässigen ist, so benutzen wir die Gleichungsform (II), (25) und (29). Für

$$(88) \quad y = z - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$$

ergibt (29):

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} & z^4 + z^2 [\tau_1^2 + \tau_2^2 - \frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2] - z(\tau_1^2 - \tau_2^2)(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ & + \left[\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \right)^2 + \tau_1^2 \right] \left[\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \right) + \tau_2^2 \right] \\ & - k^2(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Die vier Wurzeln z dieser Gleichung müssen die Form haben

$$(90) \quad z_1 = \beta + i\tau, \quad z_2 = \beta - i\tau, \quad z_3 = -\beta + i\tau', \quad z_4 = -\beta - i\tau'.$$

Da nun (89) identisch ist mit

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = 0,$$

so ergibt die Koeffizientenvergleichung dieser letzten Gleichung mit den Koeffizienten der Gleichung (89) und Benutzung der Form (90):

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau^2 + \tau'^2 - 2\beta^2 &= \tau_1^2 + \tau_2^2 - \frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2, \\ 2\beta(\tau^2 - \tau'^2) &= -(\vartheta_1 - \vartheta_2)(\tau_1^2 - \tau_2^2) = Q, \\ (\tau^2 + \beta^2)(\tau'^2 + \beta^2) &= \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \right)^4 + (\tau_1^2 + \tau_2^2) \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \right) \\ &+ \tau_1^2 \tau_2^2 - k^2(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2). \end{aligned} \right.$$

Quadriert man die erste dieser Gleichungen und zieht davon die mit 4 multiplizierte letzte Gleichung ab, so entsteht:

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} (\tau^2 - \tau'^2)^2 - 8\beta^2(\tau^2 + \tau'^2) &= (\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 - 2(\tau_1^2 + \tau_2^2)(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 \\ &+ 4k^2(\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2) = P. \end{aligned} \right.$$

Nun macht es einen wesentlichen Unterschied, ob diese Größe P positiv oder negativ ist. Bei nicht zu kleiner magnetischer Koppelung k^2 ist P jedenfalls positiv. Wenn wir in der Nähe der Resonanz $\tau_1 = \tau_2$ beobachten, so folgt aus der zweiten der Gleichungen (91), daß jedenfalls eine der beiden Größen β oder $\tau^2 - \tau'^2$ sehr klein sein muß. Falls also P

positiv ist, muß dies nach (92) die Größe β selbst sein, und wir erhalten für $\tau_1 = \tau_2$:

$$(93) \quad \beta = 0, \quad \tau^2 - \tau'^2 = \sqrt{P} \quad \text{für} \quad \tau_1 = \tau_2.$$

Die vier Wurzeln y haben also gemeinsame reelle Anteile, aber die imaginären Anteile sind verschieden. *Es entstehen also bei nicht zu kleiner magnetischer Koppelung im Resonanzfall $\tau_1 = \tau_2$ zwei Schwingungen mit verschiedenen Perioden und verschiedener¹⁾ Dämpfung, denn es ist dann, falls \mathcal{G}^2 gegen τ^2 vernachlässigt wird, d. h.²⁾ das Quadrat des logarithmischen Dekrementes gegen $4\pi^2$, was stets zulässig ist, wenn Resonanz überhaupt deutlich zutage tritt:*

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{-\frac{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}{2} + i\tau} = -\frac{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}{2\tau^2} - \frac{i}{\tau},$$

$$\frac{1}{y_3} = \frac{1}{-\frac{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}{2} + i\tau'} = -\frac{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}{2\tau'^2} - \frac{i}{\tau'}.$$

Die langsamere Schwingung (Periode $\sim \tau$) hat also kleinere absolute Dämpfung und kleineres logarithmisches Dekrement als die schnellere Schwingung (Periode $\sim \tau'$, $\tau' < \tau$).

Wenn umgekehrt P negativ ist, was bei sehr kleiner Koppelung k^2 in der Nähe der Resonanz eintreten kann, so würde $\tau^2 - \tau'^2$ klein, β groß sein. Mit Vernachlässigung von k^2 würde dann (91) die Wurzeln liefern: $\tau = \tau_1$, $\tau' = \tau_2$, $\beta = -\frac{1}{2}(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2)$, d. h. nach (88) und (90) wäre

$$y_1 = -\mathcal{G}_1 + i\tau_1, \quad y_2 = -\mathcal{G}_1 - i\tau_1,$$

$$y_3 = -\mathcal{G}_2 + i\tau_2, \quad y_4 = -\mathcal{G}_2 - i\tau_2.$$

Dies ergibt also den unter II. schon behandelten und dort erledigten Fall.

1) M. Wien (Wied. Ann. 61. p. 177. 1897; vgl. auch Ann. d. Phys. 8. p. 695. 1902) hatte abgeleitet, daß der Fall der magnetischen Koppelung sich nicht wesentlich unterscheidet von dem der elektrischen Koppelung, und daß daher die Dämpfungen beider Wellen gleich seien. Dies Resultat ist aber nur gültig, wenn die Koppelung k^2 (nach Wiens Bezeichnung $\varrho_1 \varrho_2$) klein gegen 1 ist, weil sonst die Wienschen Vernachlässigungen unstatthaft sind. Mit A. Oberbeck (Wied. Ann. 55. p. 631. 1895) steht das hier abgeleitete Resultat in Einklang.

2) Vgl. oben p. 521, Formel (32).

Wir haben also hier P als positiv anzunehmen. Die allgemeine Lösung von (91), (92) gestaltet sich in der Nähe der Resonanz $\tau_1 = \tau_2$ einfach, weil dort Q klein ist, d. h. auch β^2 klein ist gegen $\tau^2 - \tau'^2$. In (92) kann daher in dem Faktor von $8\beta^2$ für $\tau^2 + \tau'^2$ derjenige Näherungswert $\tau^2 + \tau'^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2$ eingesetzt werden, der sich aus der ersten der Gleichungen (91) ergibt für $\beta = 0$ und mit Vernachlässigung von $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2$ gegen $\tau_1^2 + \tau_2^2$. Daher ergibt dann (92):

$$(94) \quad (\tau^2 - \tau'^2)^2 - 8\beta^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) = P.$$

Die zweite der Gleichungen (91) und (94) kann man nun leicht nach den beiden Unbekannten $\tau^2 - \tau'^2$ und β^2 auflösen. Man erhält:

$$(95) \quad \begin{cases} (\tau^2 - \tau'^2)^2 = \frac{P + \sqrt{P^2 + 8Q^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)}}{2}, \\ 8\beta^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) = \frac{-P + \sqrt{P^2 + 8Q^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)}}{2}. \end{cases}$$

Da in der Nähe der Resonanz $8Q^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)$ klein gegen P^2 ist, so kann man für (95) setzen:

$$(96) \quad \begin{cases} \tau^2 - \tau'^2 = \sqrt{P} \left(1 + \frac{Q^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)}{P^2} \right), \\ \beta = -\frac{Q}{2\sqrt{P}}, \end{cases}$$

während die erste der Gleichungen (91) liefert:

$$(97) \quad \tau^2 + \tau'^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \frac{Q^2}{2P}.$$

Es gilt nun weiter (für beliebige Werte der Koppelung k^2) nach (25), (88) und (90):

$$(98) \quad \begin{cases} V_1 = A_1 e^{t/y_1} + A_2 e^{t/y_2} + A_3 e^{t/y_3} + A_4 e^{t/y_4}, \\ V_2 = B_1 e^{t/y_1} + B_2 e^{t/y_2} + B_3 e^{t/y_3} + B_4 e^{t/y_4}. \end{cases}$$

$$(99) \quad \begin{cases} y_1 = \beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau, & y_2 = \beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - i\tau, \\ y_3 = -\beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau', & y_4 = -\beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - i\tau'. \end{cases}$$

Aus (1) folgt:

$$(100) \quad -\frac{i_1}{C_1} = \frac{A_1}{y_1} e^{t/y_1} + \frac{A_2}{y_2} e^{t/y_2} + \frac{A_3}{y_3} e^{t/y_3} + \frac{A_4}{y_4} e^{t/y_4},$$

aus (3) und (8):

$$(101) \quad \pi \frac{i_2}{C_2 h} = \frac{B_1}{y_1} e^{t/y_1} + \frac{B_2}{y_2} e^{t/y_2} + \frac{B_3}{y_3} e^{t/y_3} + \frac{B_4}{y_4} e^{t/y_4}.$$

Die Anfangsbedingungen (38) ergeben daher:

$$(102) \quad \sum A_n = F, \quad \sum \frac{A_n}{y_n} = 0, \quad \sum B_n = 0, \quad \sum \frac{B_n}{y_n} = 0, \\ n = 1, 2, 3, 4.$$

Nun ist nach der zweiten¹⁾ der Gleichungen (27):

$$B_n \left(\frac{\tau_2^2 + \vartheta_2^2}{y_n} + 2 \vartheta_2 + y_n \right) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) \frac{A_n}{y_n}.$$

Durch Addition dieser aus $n = 1, 2, 3, 4$ gebildeten vier Gleichungen entsteht wegen der Gleichungen (102):

$$(103) \quad \sum B_n y_n = 0.$$

Ferner folgt aus (27):

$$B_n (\tau_2^2 + \vartheta_2^2 + 2 \vartheta_2 y_n + y_n^2) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) A_n.$$

Durch Addition dieser vier Gleichungen folgt wegen (102) und (103):

$$(104) \quad \sum B_n y_n^2 = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F.$$

Aus (102), (103) und (104) lassen sich die B sofort als Determinanten-Quotienten ausdrücken, z. B. ist

$$\frac{B_1}{y_1} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ y_1^2, & y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \\ y_1^3, & y_2^3, & y_3^3, & y_4^3 \end{vmatrix} = -p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_2, & y_3, & y_4 \\ y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \end{vmatrix}.$$

1) Aus ihr folgt auch für den Fall $\tau_1 = \tau_2$ und $\vartheta_1 = \vartheta_2$, daß $A_1 : B_1 = \tau_2^2 - \tau^2 : p_{21} \tau_2^2$ ist, also negativ, da $\tau > \tau_2$, und daß $A_3 : B_3 = \tau_2^2 - \tau'^2 : p_{21} \tau_2^2$ ist, d. h. positiv, da $\tau' < \tau_2$ ist. In Rücksicht auf (100) und (101) ergibt dies, daß die Schwingung τ in i_1 und i_2 gleich gerichtet ist, die Schwingung τ' aber in i_1 und i_2 entgegengesetzt verläuft. Daher kann man die Periode τ durch eine in der Nähe von i_1 aufgestellte Resonanzleitung (vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 611. 1902) eventuell leichter messen als die Periode τ' .

Nach (45) ergibt dies

$$B_1 (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = + p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F y_1,$$

und analog:

$$B_2 (y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_2 - y_1) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F y_2,$$

$$B_3 (y_3 - y_4)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F y_3,$$

$$B_4 (y_4 - y_1)(y_4 - y_2)(y_4 - y_3) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F y_4.$$

Nach (99) ist daher

$$B_1 = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) F' \frac{\beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau}{2i\tau(2\beta + i(\tau - \tau'))(2\beta + i(\tau + \tau'))}.$$

Nun ist $(2\beta)^2$ stets zu vernachlässigen gegen $(\tau + \tau')^2$.
Daher ist

$$\frac{1}{2\beta + i(\tau + \tau')} = \frac{1 + i\frac{2\beta}{\tau + \tau'}}{i(\tau + \tau')},$$

und es ist, wenn man ϑ_2^2 gegen τ_2^2 sowie β^2 gegen τ^2 vernachlässigt, was gestattet ist, falls es sich überhaupt um Resonanz handelt, und die Abkürzung benutzt:

$$(105) \quad \delta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + \beta \frac{\tau - \tau'}{\tau + \tau'}.$$

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 = -p_{21} \tau_2^2 F' \frac{\tau - \tau' - 2\frac{\beta}{\tau} \delta + i\left(2\beta + \frac{\tau - \tau'}{\tau} \delta\right)}{2(\tau + \tau')[4\beta^2 + (\tau - \tau')^2]}, \\ B_2 = -p_{21} \tau_2^2 F' \frac{\tau - \tau' - 2\frac{\beta}{\tau} \delta - i\left(2\beta + \frac{\tau - \tau'}{\tau} \delta\right)}{2(\tau + \tau')[4\beta^2 + (\tau - \tau')^2]}, \\ B_3 = +p_{21} \tau_2^2 F' \frac{\tau - \tau' - 2\frac{\beta}{\tau'} \delta + i\left(2\beta + \frac{\tau - \tau'}{\tau'} \delta\right)}{2(\tau + \tau')[4\beta^2 + (\tau - \tau')^2]}, \\ B_4 = +p_{21} \tau_2^2 F' \frac{\tau - \tau' - 2\frac{\beta}{\tau'} \delta - i\left(2\beta + \frac{\tau - \tau'}{\tau'} \delta\right)}{2(\tau + \tau')[4\beta^2 + (\tau - \tau')^2]}. \end{array} \right.$$

Dabei ist β^2 nicht gegen $(\tau - \tau')\tau$ vernachlässigt, um zunächst auch die Fälle kleiner Koppelung, bei denen $\tau - \tau'$ klein ist, nicht auszuschließen.

Nun ist mit Vernachlässigung von β^2 gegen τ^2 nach (99):

$$\frac{1}{y_1} = \frac{\beta}{\tau^2} - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\tau^2} - \frac{i}{\tau},$$

daher wird nach (98):

$$(107) \quad V_2 = - \frac{p_{21} \tau_2^2 F \Phi}{2(\tau + \tau') [4\beta^2 + (\tau - \tau')^2]},$$

wobei Φ bedeutet:

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= e^{-\frac{t}{\tau^2} \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - \beta \right)} \cdot \left[\left(\tau - \tau' - 2 \frac{\beta \delta}{\tau} \right) \cos \frac{t}{\tau} + \left(2\beta + \frac{\tau - \tau'}{\tau} \delta \right) \sin \frac{t}{\tau} \right] \\ &- e^{-\frac{t}{\tau'^2} \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + \beta \right)} \cdot \left[\left(\tau - \tau' - 2 \frac{\beta \delta}{\tau'} \right) \cos \frac{t}{\tau'} + \left(2\beta + \frac{\tau - \tau'}{\tau'} \delta \right) \sin \frac{t}{\tau'} \right]. \end{aligned} \right.$$

Wenn wir zunächst fragen, für welches Verhältnis $\tau_1 : \tau_2$ wird stärkste Induktion eintreten, d. h. V_2 ein Maximum annehmen, so ist, gerade wie oben p. 526, zu unterscheiden, ob bei der Variation von τ_1 die Kapazität C_1 variiert wird, oder die Selbstinduktion L_{11} . Abgesehen hiervon kann man aber zur Taxierung der Verhältnisse folgendes aus (107) ablesen: Bei Variation von τ_1 (während τ_2 fest bleibt) ändert sich V_2 hauptsächlich wegen des Nenners $4\beta^2 + (\tau - \tau')^2$ und wegen des Zählers Φ , während p_{21} sich nur unwesentlich ändert. Da nun β in der Nähe der Resonanz sehr klein ist, und da auch δ klein ist, so hat Φ einen Wert¹⁾, der beständig kleiner als $2(\tau - \tau')$ ist; wir können also setzen:

$$(109) \quad \Phi = 2 \varrho (\tau - \tau'), \quad \varrho < 1.$$

Der Wert des echten Bruches ϱ variiert nicht sehr stark, wenn $\tau_1 : \tau_2$ sich ändert. Mit der bei starker Koppelung zulässigen Vernachlässigung von $4\beta^2$ gegen $(\tau - \tau')^2$ wird also (107):

$$(110) \quad V_2 = \frac{p_{21} \tau_2^2 F \varrho}{\tau^2 - \tau'^2}.$$

Maximale Induktion tritt also ein, wenn die Perioden der beiden induzierten Schwingungen sich möglichst nahe kommen,

1) Eine Zerlegung des Φ in ein Produkt

$$\sin \frac{1}{2} t \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} \right) \cdot \sin \frac{1}{2} t \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right)$$

hat nur dann physikalischen Sinn (Schwebungen), wenn τ nahezu gleich τ' ist. Das können wir hier bei stärkerer Koppelung nicht voraussetzen.

d. h. wenn $\tau^2 - \tau'^2$ ein Minimum ist. Nach (92) ist nun näherungsweise zu setzen:

$$(111) \quad \tau^2 - \tau'^2 = \sqrt{(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 + 4k^2\tau_1^2\tau_2^2},$$

woraus hervorgeht, daß für $\tau_1 = \tau_2$ das Minimum für $\tau^2 - \tau'^2$ eintritt. *Stärkste Induktion tritt also jedenfalls in der Nähe der Isochronität $\tau_1 = \tau_2$ ein.* Zugleich geht auch aus (110) und (111) hervor, daß die Resonanzkurve um so flacher wird, je stärker die Koppelung ist¹⁾, denn wenn k^2 groß ist, so ändert sich $\tau^2 - \tau'^2$ bei Veränderung von $\tau_1^2 - \tau_2^2$ prozentisch viel weniger, als wenn k^2 klein ist.

Zur Messung von Schwingungsdauern durch Resonanzversuche muß man also mit möglichst kleiner Koppelung arbeiten.

V. Die Wirksamkeit der Teslatransformatoren.

Nach den zuletzt erhaltenen Resultaten können wir den Resonanzfall $\tau_1 = \tau_2$ voraussetzen, und erhalten dann aus (92) und (110), da nach (91) β streng gleich Null zu setzen ist, für das Potential am Ende der Teslaspule den Wert:

$$V_2 = \frac{p_{21} F q}{2 \sqrt{k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2}} = \frac{q F L_{21} C_1}{4 L_{22} C_2} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2}}.$$

Für p_{21} ist der Wert nach (22) eingesetzt.

Da nun nach (33) ist

$$L_{21} = k \sqrt{\frac{L_{11} L_{22} L_{21}}{L_{12}}},$$

so folgt

$$V_2 = \frac{q F C_1}{4 C_2} \frac{k}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}} \cdot \frac{L_{21}}{L_{12}}},$$

oder da im Resonanzfall $L_{11} C_1 = L_{22} C_2$ ist, und unter Rücksicht auf (32):

1) Dies geht sowohl aus den Messungen von F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 5. p. 895. 1901 hervor, der die flachere Resonanzkurve interpretierte als eine Zunahme der Dämpfungen, als auch aus zahlreichen Beobachtungen von mir, nach denen ich stets die Resonanz um so schärfer erhielt, je schwächer ich die Koppelung wählte.

$$(112) \quad V_2 = \frac{\varrho}{4} F \sqrt{\frac{C_1 L_{21}}{C_2 L_{12}} \cdot \frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2}}. \quad 1)$$

Aus (108) folgt dabei für ϱ der Wert:

$$2\varrho = e^{-\frac{t}{\tau} \cdot \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}} \left(\cos \frac{t}{\tau} + \frac{\delta}{\tau} \sin \frac{t}{\tau} \right) - e^{-\frac{t}{\tau'} \cdot \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}} \left(\cos \frac{t}{\tau'} + \frac{\delta}{\tau'} \sin \frac{t}{\tau'} \right).$$

Nach (105) ist $\delta = \vartheta_1 + \vartheta_2/2$, und man kann setzen

$$\cos \frac{t}{\tau} + \frac{\delta}{\tau} \sin \frac{t}{\tau} = \cos \frac{t - \delta}{\tau}.$$

da $(\delta : \tau)^2$ gegen 1 zu vernachlässigen ist. Folglich wird

$$2\varrho = e^{-\frac{t\delta}{\tau^2}} \cdot \cos \frac{t - \delta}{\tau} - e^{-\frac{t\delta}{\tau'^2}} \cdot \cos \frac{t - \delta}{\tau'}.$$

Führt man eine neue Zeit $t_1 = t - \delta$ ein, so wird

$$2\varrho = e^{-\frac{\delta}{\tau} \left(\frac{t_1 + \delta}{\tau}\right)} \cdot \cos \frac{t_1}{\tau} - e^{-\frac{\delta}{\tau'} \left(\frac{t_1 + \delta}{\tau'}\right)} \cdot \cos \frac{t_1}{\tau'}.$$

Da die Maximalwerte von ϱ zu Zeiten t_1 erreicht werden, welche etwa gleich T_1 oder größer als T_1 sind, so kann man δ neben t_1 im Exponentialglied vernachlässigen und erhält, wenn man wiederum t für t_1 schreibt:

$$(113) \quad 2\varrho = e^{-\frac{\delta t}{\tau^2}} \cdot \cos \frac{t}{\tau} - e^{-\frac{\delta t}{\tau'^2}} \cdot \cos \frac{t}{\tau'}.$$

Um das absolute Maximum von V_2 zu finden, ist diejenige Zeit t aufzusuchen, zu welcher ϱ ein absolutes Maximum wird. Bevor wir dies tun, mögen einige allgemeine Bemerkungen an (112) angeknüpft werden.

Wenn wir von der Dämpfung γ_1 und γ_2 absehen könnten, so würde ϱ_{Max} den Wert 1 haben und es würde nach (112) V_2 von der Stärke der Koppelung ganz unabhängig sein, falls wie bei linearen Stromkreisen $L_{12} = L_{21}$ zu setzen wäre. Nach

1) Diese Formel stimmt mit der von A. Oberbeck (Wied. Ann. 55. p. 629. 1895) abgeleiteten Formel (20) bis auf den Faktor

$$\sqrt{\frac{L_{21}}{L_{12}}} \cdot \sqrt{\frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2}}.$$

p. 518 wächst aber $L_{21} : L_{12}$ mit wachsender Koppelung, daher muß aus diesem Grunde und wegen vorhandener Dämpfung die Erregung der Teslaspule mit wachsender Koppelung zunehmen.

Nicht induktiv wirkende (tote) Selbstinduktion des Primärkreises ist aus zwei Gründen schädlich für die beste Wirksamkeit des Teslatransformators. Erstens wird, da bei vorliegender Teslaspule die Schwingungsperiode vorgeschrieben ist, die Kapazität C_1 des Primärkreises herabgesetzt, zweitens wird die Koppelung kleiner, wie aus (33) hervorgeht.

Da nach (112) V_2 proportional zu $\sqrt{C_1 : C_2}$ ist, so muß also zur besten Konstruktion eines Teslatransformators der Primärkreis aus einer Windung möglichst dicken Drahtes bestehen (da dadurch L_{11} möglichst klein wird und C_1 bei gegebenem T_1 möglichst groß), während die Sekundärspule recht kleine Kapazität im Vergleich zu C_1 haben muß. Eine einzige offene Kreiswindung als Sekundärkreis ist daher wegen der damit verbundenen Kleinheit des C_2 relativ günstig, jedenfalls günstiger als eine aus wenigen Windungen (2—10) bestehende Sekundärspule, da die dicht beieinander liegenden Endwindungen derselben, welche ja entgegengesetzte elektrische Ladungen tragen, viel größere Kapazität C_2 ergeben. Dieses Resultat wird durch Versuche, die ich angestellt habe (Potentialmessung durch Beobachtung von Funkenlängen oder qualitativ durch Aufleuchten von Vakuumröhren) durchaus bestätigt.

Man muß also Spulen von viel mehr Windungen anwenden, um wieder auf günstige kleine Werte der Kapazität C_2 zu kommen.

Es sei h die Höhe, r der Radius, g die Ganghöhe, δ die Drahtdicke, n die absolute Windungszahl der Teslaspule. Dann ist die Wellenlänge λ ihrer Eigenschwingung bestimmt durch

$$\frac{1}{2} \lambda = l \cdot f(h/r, g/\delta),$$

wobei $l = 2r\pi n$ die Drahtlänge der Teslaspule bedeutet, während f ein von h/r , g/δ und von der Natur des Spulenkernes abhängender Faktor ist, für den ich früher¹⁾ Tabellen angegeben habe.

Nennt man r_1 den Radius des Kreises, welchen der Primärkreis bildet (wir wollen ihn entsprechend unseren obigen Über-

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 322. 1902.

legungen als einen Kreis von einer Windung annehmen), ρ_1 den Radius seines Drahtes (halbe Drahtdicke), so gilt¹⁾ für die Selbstinduktion des Primärkreises:

$$L_{11} = 4 \pi r_1 [(\lognat 8 r_1 / \rho_1) - 2],$$

daher muß für C_1 gelten, da ist

$$2 \pi \sqrt{L_{11} C_1} = \lambda_1,$$

falls C_1 nach elektrostatischem Maße gemessen wird:

$$C_1 = \frac{\lambda_1^2}{4 \pi^2 L_{11}} = \frac{r^2 n^2 f^2}{\pi r_1 (\log 8 r_1 / \rho_1 - 2)}.$$

Die Kapazität C_2 der Teslaspule (nach elektrostatischem Maße) können wir jedenfalls in der Form schreiben

$$C_2 = r \varphi (h/r, g/\delta).$$

Da nun nach (17) und (18) p. 517 $L_{21} : L_{12}$ und ebenso k^2 nach (33) nicht von n abhängen, sondern nur von h/r , r_1/r , und da der Maximalwert, den ρ im Laufe der Zeit annimmt, nur von k^2 , γ_1 und γ_2 abhängt, so gewinnen wir aus (112) den Satz:

Bei konstanten Verhältnissen h/r , r_1/r , r_1/ρ_1 , und bei konstanten Dekrementen γ_1 und γ_2 ist das Maximumpotential der Teslaspule proportional mit ihrer Windungszahl.

Es würde nun vor allem die für die Praxis wichtige Frage zu untersuchen sein: *Für welches Verhältnis h/r der Teslaspule ist ihre Wirkung bei gegebener Windungszahl n am größten?* Die Beantwortung dieser Frage werde ich später auf experimentellem Wege geben. Ungefähr liegt das beste Verhältnis h/r zwischen 1,5 und 3.

Wenn man, was bei Teslatransformatoren meist erlaubt ist, $(\gamma_1 - \gamma_2)^2 : 4 \pi^2$ neben k^2 vernachlässigt, so schreibt sich (112) unter Benutzung der Umgestaltung

$$C_2 = r_1 \cdot r/r_1 \cdot \varphi (h/r, g/\delta) = L_{11} \cdot \chi (h/r, r/r_1, r_1/\rho_1, g/\delta)$$

$$(114) \quad V_2 = \rho F \sqrt{\frac{C_1}{L_{11}}} \cdot \psi (h/r, r/r_1, r_1/\rho_1, g/\delta).$$

Nun ist nach (22) und (30')

$$\gamma_1 = \frac{w_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_{11}}}.$$

Daher wird

$$(114') \quad V_2 = 2 \rho F \frac{\gamma_1}{w_1} \psi (h/r, r/r_1, r_1/\rho_1, g/\delta).$$

1) M. Wien, Wied. Ann. 53. p. 931. 1894.

w_1 besteht nun fast nur aus dem Funkenwiderstande. Derselbe ist von L_{11} unabhängig, dagegen abhängig von F und von C_1 . Mit wachsendem C_1 nimmt er ab.¹⁾ ρ nimmt mit wachsendem γ_1 ab. Bei *schwachen* Koppelungen kann man annähernd²⁾ $\rho\gamma_1$ als konstant betrachten (vgl. Abschnitt VI), wobei unter ρ der im Laufe der Zeit erreichte Maximalwert verstanden sein soll. Daher folgt aus (114'): *Die Wirksamkeit eines nicht sehr stark gekoppelten Teslatransformators hängt bei konstanten Verhältnissen h/r , r/r_1 , r_1/ρ_1 , g/δ nur von der Kapazität C_1 des Primärkreises ab, einerlei, ob die Spule kleine Dimensionen und viel Windungen oder größere Dimensionen und weniger Windungen besitzt.* Bei sehr starken Koppelungen wächst dagegen $\rho\gamma_1$ mit γ_1 . *Daher ist dann großes n und kleines r etwas günstiger als kleines n und großes r .*

In jedem Falle kommt es darauf an, daß das zur Resonanz nötige C_1 möglichst groß ist.

Die Abhängigkeit der Teslawirkung vom Primärfunkentpotential F ist innerhalb gewisser Grenzen gering; das haben mir sowohl Versuche gezeigt, als auch geht es aus (114') hervor, da w_1 mit der Funkenlänge, daher auch mit F zunimmt.

Eine Einbettung der Spule in Petroleum ist wegen der damit verbundenen Erhöhung ihrer Kapazität ungünstig, wegen der Möglichkeit stärkerer Koppelung k^2 (r annähernd gleich r_1) eventuell günstig. Der Vorteil wird bei starken Dämpfungen den Nachteil überwiegen; bei schwachen Dämpfungen dagegen nicht.

Jetzt soll untersucht werden, in welcher Weise der Maximalwert des Faktors ρ in Formel (112) von Dämpfung γ_1 , γ_2 und Koppelung k^2 abhängt.

VI. Abhängigkeit der Teslawirkung von Dämpfung und Koppelung.

Nach (92) ist für den Resonanzfall $\tau_1 = \tau_2$, da nach (91) $\beta = 0$ ist:

$$\tau^2 - \tau'^2 = \sqrt{P} = 2\tau_1^2 \sqrt{k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2} = 2\tau_1^2 k',$$

wobei k' eine neue Abkürzung ist für

$$(115) \quad k'^2 = k^2 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\tau_1}\right)^2 = k^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2.$$

1) Vgl. R. Lindemann, Ann. d. Phys. 12. p. 1012. 1903.

2) Dabei ist γ_2 als klein neben γ_1 angenommen.

Nach (91) ist, da $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2$ gegen $2\tau_1^2$ zu vernachlässigen ist:

$$\tau^2 + \tau'^2 = 2\tau_1^2.$$

Hieraus folgt

$$(116) \quad \tau^2 = \tau_1^2(1 + k'), \quad \tau'^2 = \tau_1^2(1 - k').$$

Nach (115) ist k'^2 nur bei nicht zu kleiner Koppelung k^2 direkt als Koppelungskoeffizient zu deuten. Ganz allgemein kann man k' aus (116) definieren, nämlich

$$(117) \quad \frac{\tau^2}{\tau'^2} = \frac{1+k'}{1-k'}, \quad \frac{\tau^2 - \tau'^2}{\tau^2 + \tau'^2} = k'.$$

Nach (113) und (32) ist nun

$$(118) \quad 2\varrho = e^{-\alpha \frac{t}{\tau}} \cdot \cos \frac{t}{\tau} - e^{-\alpha' \frac{t}{\tau'}} \cdot \cos \frac{t}{\tau'},$$

wobei gesetzt ist

$$(119) \quad \alpha = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1+k'}}, \quad \alpha' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-k'}}.$$

Für numerisches Rechnen ist bequemer, (118) in der Form zu schreiben

$$(120) \quad 2\varrho = e^{-\alpha \frac{t}{\tau}} \cdot \cos \frac{t}{\tau} - e^{-\alpha'' \frac{t}{\tau'}} \cdot \cos \frac{t}{\tau'},$$

wobei ist:

$$(121) \quad \alpha'' = \alpha \cdot \frac{\tau^2}{\tau'^2}.$$

Die Abhängigkeit des ϱ von dem Verhältnisse $\tau : \tau'$ und von dem mittleren logarithmischen Dekrement $\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ kann nur durch numerische Auswertung übersichtlich erhalten werden. In den folgenden Tabellen sind die sukzessiven Maxima von ϱ und die Werte t/T_1 , bei denen sie stattfinden, für verschiedene Verhältnisse $T' : T'' = \tau : \tau'$ und für verschiedene logarithmische Dekremente $\gamma_1 + \gamma_2/2$, wie sie in praxi vorkommen können¹⁾, angegeben. Die absoluten Maxima sind durch Druck hervorgehoben. T_1 ist die (gemeinsame) Schwingungsdauer des Primär- oder Sekundärkreises, wie sie ohne Koppelung jeder Kreis für sich allein besitzt. Die Maxima von 2ϱ , welche auf das letzte in den Tabellen angegebene Maximum folgen, sind stets kleiner, als dieses zuletzt angegebene.

1) Das Dekrement $\gamma = 0,15$ ist schon ziemlich klein. Es ist von mir bei Vermeidung Hertzscher Strahlung beobachtet in Abhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 23. p. 99. 1896. — Man kann aber noch kleinere Dekremente herstellen (z. B. $\gamma_1 = 0,09$), worüber ich später berichten werde.

$$T: T' = 1,1, \quad k' = 0,095, \quad k'^2 = 0,0090.$$

Nr. des Max.	$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15$		Nr. des Max.	$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15$	
	$t: T_1$	2ϱ		$t: T_1$	2ϱ
1	0,34	+ 0,17	11	5,23	+ 1,12
2	0,78	- 0,42
3	1,25	+ 0,63
4	1,75	- 0,83	21*	10,45	+ 0,10
5	2,24	+ 0,97
6	2,74	- 1,07	27	13,66	+ 0,36
7	3,23	+ 1,16	28	14,18	- 0,37
8	3,73	- 1,18	29	14,69	+ 0,36
9	4,23	+ 1,18	30	15,19	- 0,35
10	4,73	- 1,15	31	15,68	+ 0,34
		

* Vgl. die Anmerkung zur nächsten Tabelle bei Max. Nr. 9*

$$T: T' = 1,25, \quad k' = 0,219, \quad k'^2 = 0,048.$$

Nr. des Max	$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,25$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,5$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,75$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 1,0$	
	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ
1	0,31	+ 0,37	0,30	+ 0,36	0,29	+ 0,32	0,27	+ 0,29	0,26	+ 0,27
2	0,75	- 0,90	0,74	- 0,83	0,73	- 0,68	0,71	- 0,57	0,70	- 0,48
3	1,23	+ 1,26	1,22	+ 1,11	1,21	+ 0,82	1,19	+ 0,61	1,18	+ 0,46
4	1,71	- 1,44	1,71	- 1,20	1,70	- 0,78	1,69	- 0,51	1,67	- 0,35
5	2,20	+ 1,42	2,20	+ 1,13	2,20	+ 0,65	2,19	+ 0,38	2,18	+ 0,23
6	2,69	- 1,23	2,69	- 0,94	2,70	- 0,48	2,70	- 0,25	2,70	- 0,13
7	3,18	+ 0,93	3,18	+ 0,67	3,19	+ 0,31	3,20	+ 0,15	3,22	+ 0,07
8	3,68	- 0,56	3,79	- 0,39	3,75	- 0,17	3,77	- 0,08	3,79	- 0,04
9*	4,41	+ 0,15	4,41	+ 0,16	4,41	+ 0,11	4,41	+ 0,05	4,41	+ 0,02
10	5,13	- 0,45	5,08	- 0,29	5,07	- 0,10	4,99	- 0,05	—	—
11	5,62	+ 0,64	5,61	+ 0,38	5,58	+ 0,11	5,54	+ 0,03	—	—
12	6,11	- 0,73	6,10	- 0,40	6,08	- 0,10	6,07	- 0,02	—	—
13	6,62	+ 0,73	6,62	+ 0,38	6,62	+ 0,09	6,62	+ 0,02	—	—

* Nr. 9 ist für kleines $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ (für $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15$ und $0,25$) kein Maximum, sondern ein Minimum. Zwischen dem achten und zehnten Maximum nimmt nämlich dann ϱ zwei positive Maxima und ein positives Minimum an. Letzteres ist unter Nr. 9* rubriziert. Für größeres $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ ist aber 9* wirklich ein Maximum, da zwischen 8 und 10 dann nur dies eine Maximum Nr. 9 liegt.

$$T: T' = 1,29, \quad k' = 0,249, \quad k'^2 = 0,062.$$

Nr. des Max.	$\frac{\gamma_2 + \gamma_2}{2} = 0,15$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,25$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,5$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,75$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 1,0$	
	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ
1	0,31	+0,42	0,30	+0,42	0,28	+0,36	0,27	+0,33	0,26	+0,30
2	0,75	-1,01	0,74	-0,93	0,73	-0,77	0,71	-0,64	0,70	-0,54
3	1,22	+1,39	1,21	+1,23	1,21	+0,89	1,19	+0,66	1,18	+0,50
4	1,71	-1,50	1,70	-1,26	1,70	-0,82	1,69	-0,54	1,68	-0,36
5	2,20	+1,38	2,20	+1,09	2,19	+0,63	2,19	+0,37	2,18	+0,22

$$T: T' = 1,332, \quad k' = 0,279, \quad k'^2 = 0,078.$$

1	0,31	+0,48	0,30	+0,46	0,28	+0,41	0,27	+0,37	0,25	+0,34
2	0,75	-1,11	0,74	-1,03	0,72	-0,85	0,71	-0,71	0,69	-0,59
3	1,22	+1,49	1,21	+1,31	1,20	+0,95	1,19	+0,71	1,16	+0,52
4	1,69	-1,52	1,69	-1,28	1,69	-0,82	1,69	-0,54	1,68	-0,36

$$T: T' = 1,412, \quad k' = 0,332, \quad k'^2 = 0,110.$$

1	0,30	+0,56	0,29	+0,54	0,28	+0,49	0,27	+0,45	0,25	+0,41
2	0,73	-1,28	0,72	-1,18	0,72	-0,97	0,70	-0,81	0,68	-0,69
3	1,19	+1,59	1,19	+1,40	1,18	+1,03	1,17	+0,77	1,15	+0,57

$$T: T' = 1,50, \quad k' = 0,384, \quad k'^2 = 0,148.$$

1	0,30	+0,66	0,29	+0,63	0,27	+0,57	0,26	+0,51	0,25	+0,48
2	0,72	-1,44	0,71	-1,32	0,69	-1,09	0,68	-0,91	0,67	-0,77
3	1,17	+1,63	1,17	+1,44	1,17	+1,04	1,16	+0,77	1,15	+0,58
4	1,64	-1,22	1,65	-1,01	1,66	-0,66	1,67	-0,45	1,68	-0,31
5*	2,35	+0,22	2,35	+0,26	2,35	+0,28	2,35	+0,22	2,35	+0,16
6	3,05	-0,97	3,04	-0,71	3,01	-0,36	2,97	-0,21	2,96	-0,12
7	3,53	+1,10	3,52	+0,77	3,52	+0,34	3,52	+0,16	3,51	+0,08

$$T: T' = 1,667, \quad k' = 0,470, \quad k'^2 = 0,221.$$

1	0,28	+0,80	0,27	+0,76	0,26	+0,69	0,25	+0,62	0,20	+0,58
2	0,69	-1,615	0,68	-1,49	0,67	-1,21	0,66	-1,01	0,65	-0,85
3	1,13	+1,49	1,13	+1,31	1,13	+0,94	1,13	+0,70	1,14	+0,53
4*	1,82	-0,24	1,82	-0,31	1,82	-0,36	1,82	-0,32	1,82	-0,26
5	2,50	+1,17	2,49	+0,90	2,46	+0,50	2,44	+0,31	2,43	+0,20

$$T: T' = 2,0, \quad k' = 0,60, \quad k^2 = 0,360.$$

Nr. des Max.	$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,25$		$\frac{\gamma_2 + \gamma_3}{2} = 0,5$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,75$		$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 1,0$	
	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_2$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ	$t: T_1$	2ϱ
1	0,25	+1,02	0,25	+0,97	0,24	+0,88	0,23	+0,80	0,21	+0,74
2	0,63	-1,74	0,63	-1,60	0,62	-1,28	0,62	-1,04	0,61	-0,89
3*	1,26	+0,28	1,26	+0,36	1,26	+0,48	1,26	+0,46	1,26	+0,42
4	1,90	-1,33	1,89	-1,05	1,88	-0,64	1,87	-0,44	1,86	-0,31

$$T: T' = 2,5, \quad k' = 0,724, \quad k^2 = 0,524.$$

1	0,22	+1,27	0,22	+1,20	0,21	+1,06	0,18	+0,96	0,18	+0,88
2	0,54	-1,55	0,54	-1,41	0,55	-1,10	0,55	-0,91	0,56	-0,76
3	1,31	+1,39	1,31	+1,14	1,31	+0,77	1,31	+0,59	1,31	+0,49

$$T: T' = 3, \quad k' = 0,80, \quad k^2 = 0,64.$$

1	0,19	+1,39	0,19	+1,32	0,18	+1,18	0,18	+1,04	0,17	+0,95
2*	0,67	-0,36	0,67	-0,48	0,67	-0,65	0,67	-0,68	0,67	+0,65
3*	1,34	+0,54	1,34	+0,65	1,34	+0,65	1,34	+0,57	1,34	+0,49
4*	2,01	-0,64	2,01	-0,68	2,01	-0,57	2,01	-0,45	2,01	-0,34
5*	2,68	+0,66	2,68	+0,66	2,68	+0,49	2,68	+0,35	2,68	+0,24

$$T: T' = 4, \quad k' = 0,882, \quad k^2 = 0,778.$$

1	0,15	+1,52	0,15	+1,42	0,14	+1,21	0,13	+1,08	0,12	+1,01
2	0,69	-1,39	0,69	-1,16	0,69	-0,90	0,69	-0,77	0,69	-0,69
3*	1,37	+0,73	1,37	+0,82	1,37	+0,69	1,37	+0,58	1,37	+0,49
4	2,06	-0,93	2,06	-0,77	2,06	-0,58	2,06	-0,45	2,06	-0,34
5*	2,74	+0,77	2,74	+0,69	2,74	+0,49	2,74	+0,35	2,74	-0,24

$$T: T' = 5, \quad k' = 0,923, \quad k^2 = 0,854.$$

1	0,12	+1,56	0,11	+1,46	0,11	+1,27	0,10	+1,12	0,10	+1,02
2*	0,69	-0,69	0,69	-0,80	0,69	-0,83	0,69	-0,76	0,69	-0,70
3*	1,39	+0,83	1,39	+0,82	1,39	+0,70	1,39	+0,58	1,39	+0,49
4*	2,08	-0,83	2,08	-0,76	2,08	-0,58	2,08	-0,45	2,08	-0,34
5*	2,77	+0,81	2,77	+0,69	2,77	+0,49	2,77	+0,35	2,77	+0,24
6*	3,47	-0,77	3,47	-0,68	3,47	-0,41	3,47	-0,28	3,47	-0,17

$$T: T' = 10, \quad k' = 0,98, \quad k^2 = 0,96.$$

1. Max. (zugleich absolutes) bei $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15$ für $t/T_1 = 0,066$: $2\varrho = +1,55$.

$$T: T' = 100, \quad k' = 0,9998.$$

1. Max. (zugleich absolutes) bei $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15$ für $t/T_1 = 0,0047$: $2\varrho = +1,02$.

Die mit * bezeichneten Maxima sind für kleine $\gamma_1 + \gamma_2/2$ nicht Maxima, sondern Minima des absoluten Betrages von 2ρ (vgl. Anm. zu p. 546). Z. B. ist für

$$T: T' = 3, \quad \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15, \quad t: T_1 = 0,45, \quad 2 \rho = -1,22.$$

$$T: T' = 2, \quad \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15, \quad t: T_1 = 1,02, \quad 2 \rho = +0,82.$$

$$T: T' = 1,5, \quad \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0,15, \quad t: T_1 = 2,09, \quad 2 \rho = +0,44.$$

Der Verlauf von 2ρ ergibt sich auch aus den graphischen Darstellungen (vgl. unten).

Zunächst interessieren die absoluten Maxima, die in den Tabellen durch Druck hervorgehoben sind. Man bemerkt, daß dieselben mit wachsender Koppelung und abnehmender Dämpfung im allgemeinen zunehmen, *jedoch ist bei nicht zu großen Dämpfungen ($\gamma_1 + \gamma_2/2 \cong 0,5$) die Koppelung¹⁾ $k' = 0,6$, $k'^2 = 0,36$, $T: T' = 2$ am günstigsten, d. h. auch besser, als stärkere Koppelungen.* Die Abhängigkeit der absoluten Maxima $2 \bar{\rho}$ von der Koppelung ist in der beistehenden Fig. 2 dargestellt, bei der der Koeffizient k' und das absolute Maximum $2 \bar{\rho}$ als Ordinaten aufgetragen sind.

Die Kurven sind von kompliziertem Charakter. Bei der Koppelung $k' = 0,6$ ist für $\gamma_1 + \gamma_2/2 = 0,15$ $2 \bar{\rho} = 1,74$, d. h. es bleibt um 13 Proz. zurück hinter dem Werte $2 \bar{\rho} = 2$, der für verschwindende Dämpfung eintreten würde.

Für $\gamma_1 + \gamma_2/2 = 1$ ist bei $k' = 0,6$ $2 \bar{\rho} = 0,89$, d. h. es ist etwa halb so groß als $2 \bar{\rho}$ bei $\gamma_1 + \gamma_2/2 = 0,15$. *Bei so starker Koppelung hängt also die Maximalamplitude nur wenig von der Dämpfung ab, dagegen sehr bedeutend bei schwacher Koppelung.* Aus Fig. 2 hat man die beste Anschauung davon, in welchen Grenzen die Wirksamkeit eines mit guter Resonanz gebauten Teslatransformators durch wechselnde Dämpfung schwanken kann. Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß nach (112) wegen des Faktors

$$\sqrt{k'^2 : k'^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2} = \sqrt{k'^2 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2} : k'^2$$

1) Ich gebe hier immer nur den Koeffizienten k' oder k'^2 an. Der eigentliche Koppelungskoeffizient k^2 ist nach Formel (115) aus k'^2 zu berechnen, wenn man $\gamma_1 - \gamma_2$ kennt. Für $k'^2 = 0,36$ ist der Unterschied zwischen k'^2 und k^2 schon zu vernachlässigen.

das Maximum von V^2 bei kleinem k'^2 noch wesentlich größer wird als

$$\frac{q}{4} F \sqrt{\frac{C_1}{C_2} \frac{L_{21}}{L_{12}}},$$

nämlich wenn $(\gamma_1 - \gamma_2 / 2\pi)^2$ einen merklichen Betrag hat gegen k'^2 .

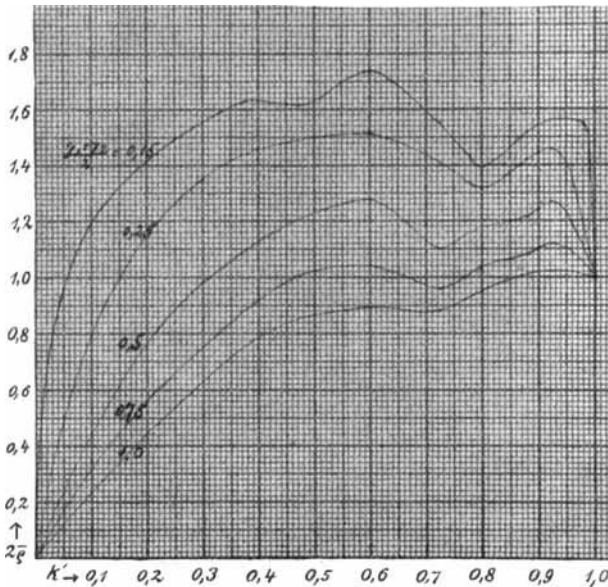


Fig. 2.

VII. Anwendung auf die drahtlose Telegraphie.

Verwendet man einen Sendeapparat mit induktiver Erregung (magnetischer Koppelung), so bleibt Formel (112) im wesentlichen bestehen, obwohl der Sekundärkreis (Teslaspule) zur Vermehrung der Strahlung mit Antennen versehen wird. Verzichtet man nun im Empfangsapparat auf Resonanz, so kommt es nur auf Erzielung eines möglichst großen absoluten Maximums von V^2 an. Man wird also die Koppelung $k' = 0,6$ wählen (nur bei sehr starker Dämpfung $\gamma_1 + \gamma_2/2 \geq 0,75$ möglichst noch eine stärkere). Verwendet man aber das Resonanzprinzip,

um den Empfänger auf den Sender abstimmen zu können, so ist der zeitliche Verlauf des Faktors ϱ in Formel (112) wichtig. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem man einen einfachen ungekoppelten, oder nur sehr lose gekoppelten (zweifachen) Empfangsapparat benutzt, der nur *eine* Eigenschwingungsperiode besitzt, oder

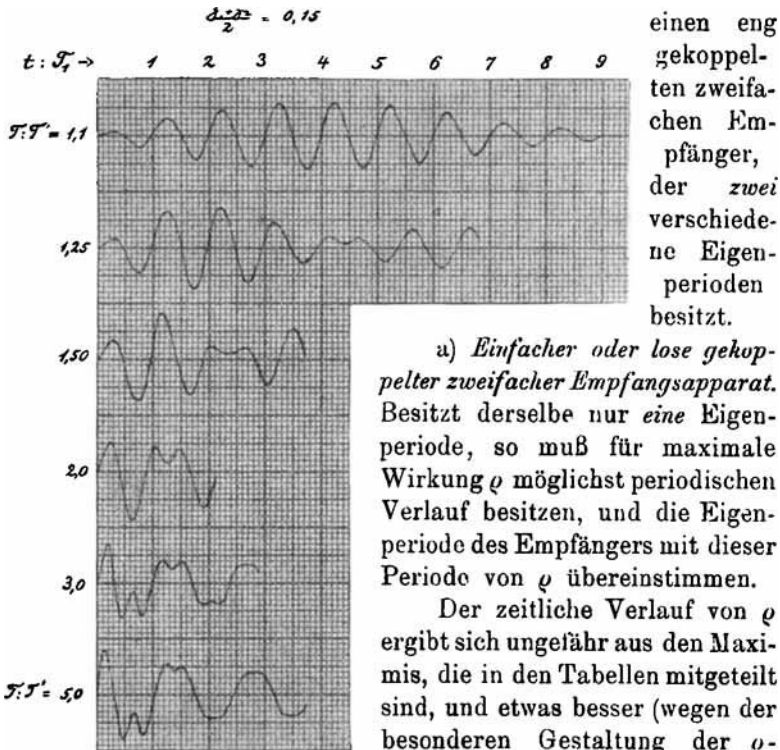


Fig. 3.

ein eng gekoppelter zweifacher Empfänger, der *zwei* verschiedene Eigenperioden besitzt.

a) *Einfacher oder lose gekoppelter zweifacher Empfangsapparat.* Besitzt derselbe nur *eine* Eigenperiode, so muß für maximale Wirkung ϱ möglichst periodischen Verlauf besitzen, und die Eigenperiode des Empfängers mit dieser Periode von ϱ übereinstimmen.

Der zeitliche Verlauf von ϱ ergibt sich ungefähr aus den Maximis, die in den Tabellen mitgeteilt sind, und etwas besser (wegen der besonderen Gestaltung der ϱ -Kurve in der Umgebung der mit * versehenen Maximis) aus der graphischen Darstellung der Fig. 3, welche den zeitlichen Verlauf von ϱ bei verschiedenem k' nur für die kleinste Dämpfung $\gamma_1 + \gamma_2/2 = 0,15$ darstellt, da das Charakteristische dabei am meisten zutage tritt.

Der allgemeine Charakter dieser Kurven besonders bei kleiner Koppelung ($T: T' = 1,1$ und $T: T' = 1,25$) ist der der sogenannten *Schwebungen*. Die erste Schwebung ist bei dem in den Tabellen mit * bezeichneten Maximum beendet (in den Kurven durch einen Sattel erkenntlich). Innerhalb einer Schwebung ist

der Verlauf von ϱ annähernd periodisch mit der Periode $\frac{1}{2} T_1$, jedoch ist die zweite Schwebung um π in Phase versetzt gegen die erste Schwebung, so daß auf einen Empfangsapparat, der als einfacher Resonator mit der Periode T_1 gebaut ist, die zweite Schwebung schädlich für die Wirkung der ersten Schwebung ist. Wenn man daher bei der drahtlosen Telegraphie Wert auf Abstimmung legt, so muß man die Koppelung beim Sendepapparat derartig wählen, daß die zweite Schwebung eine Maximalamplitude enthält, die relativ klein ist im Vergleich zur Maximalamplitude in der ersten Schwebung. Dies ist um so mehr der Fall, je kleiner die Koppelung im Sendepapparat ist. Denn nach den Tabellen sind z. B. für $\gamma_1 + \gamma_2/2 = 0,15$ die Maximalamplituden $\bar{\varrho}_1$ und $\bar{\varrho}_2$ der beiden ersten Schwebungen:

Bei $T: T' = 1,1$,	$k' = 0,095$,	$2\bar{\varrho}_1 = 1,18$,	$2\bar{\varrho}_2 = 0,37$,	$\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2 = 3,19$.
„ $= 1,25$,	$= 0,219$,	$= 1,44$,	$= 0,73$,	$= 1,97$.
„ $= 1,50$,	$= 0,384$,	$= 1,63$,	$= 1,10$,	$= 1,48$.

Daher muß im Sender die Koppelung sehr klein sein, wenn in einem einfachen Empfänger scharfe Resonanz erzielt werden soll.¹⁾ Wenn man nun aber neben scharfer Abstimmung zugleich auch noch Wert legt auf möglichste Empfindlichkeit des Empfangsapparates, so ist zu berücksichtigen, daß die Maximalamplitude $\bar{\varrho}_1$ der ersten Schwebung mit abnehmender Koppelung abnimmt. Aus diesem Grunde wird man die Koppelung nicht zu klein wählen. Es hängt die beste Wahl der Koppelung im Sender sowohl von der Dämpfung $\gamma_1 + \gamma_2/2$ im Sender, als auch von der Eigendämpfung des Empfängers ab. Denn es ist klar, daß für einen stark gedämpften Empfänger, dessen Eigenschwingung nach etwa 20 halben Eigenperioden nahezu abgeklungen ist ($\gamma = 0,4$, Amplitude nur 2 Proz. der Anfangsamplitude), die zweite Schwebung der Koppelung $T: T' = 1,1$, $k' = 0,095$, welche überhaupt erst nach 21 halben Eigenperioden T_1 einsetzt, vollkommen unschädlich ist. Daher

1) Dies Resultat deckt sich mit dem schon von W. Wien (Ann. d. Phys. 8. p. 711. 1902) abgeleiteten. Für kleine Koppelungen ist ja auch kein Unterschied zwischen den Wienschen und meinen Entwicklungen hier vorhanden, sondern nur für starke Koppelungen, da nach meinen Entwicklungen für sehr starke Koppelung, von der allerdings zweifelhaft ist, ob sie sich realisieren läßt, wiederum gute Resonanz möglich wäre (vgl. weiter unten im Text).

würde für einen solchen Empfänger jedenfalls nicht eine noch kleinere Koppelung im Sender zu wählen sein. Aber auch von der Dämpfung $\gamma_1 + \gamma_2/2$ im Sender hängt die richtige Wahl der Koppelung ab, denn das Verhältnis $\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2$ der Maximalamplituden der beiden ersten Schwebungen wird um so größer, je größer $\gamma_1 + \gamma_2/2$ ist, wie folgende Tabelle lehrt:

$$T: T' = 1,25, \quad k' = 0,219.$$

$\gamma_1 + \gamma_2/2$	0,15	0,25	0,5	0,75	1,0
$2 \bar{\varrho}_1$	1,44	1,20	0,82	0,61	0,48
$2 \bar{\varrho}_2$	0,73	0,40	0,11	0,05	0,02
$\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2$	1,97	3,0	7,5	12,2	24,0
$T: T' = 1,50, \quad k' = 0,384.$					
$\gamma_1 + \gamma_2/2$	0,15	0,25	0,5	0,75	1,0
$2 \bar{\varrho}_1$	1,63	1,44	1,09	0,91	0,77
$2 \bar{\varrho}_2$	1,10	0,77	0,36	0,22	0,16
$\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2$	1,48	1,87	3,0	4,1	4,8

Wenn also z. B. die zweite Schwebung der zehnte Teil der Amplitude der ersten Schwebung sein darf, ohne daß ihre schädliche Wirkung bemerkbar wird, und es ist im Sender $\gamma_1 + \gamma_2/2 = 0,75$, so braucht man keine schwächere Koppelung als $k' = 0,219$ zu wählen, weil schon für diese $\bar{\varrho}_1 : \bar{\varrho}_2 = 12,2$ ist.

Wenn wir nun die unteren Kurven der Fig. 3 betrachten, welche für sehr starke Koppelungen gelten, so treten wieder andere Verhältnisse ein, weil dann ρ einen periodischen Verlauf ohne Schwebungen annimmt. Dies tritt für Verhältnisse $T: T'$, welche größer als 3 sind, d. h. für Koppelungen k' , die größer als $k' = 0,8$ sind, aus den Kurven der Fig. 3 deutlich zutage. Es liegt dies daran, daß für sehr starke Koppelungen die schnellere Schwingung der beiden Perioden T, T' des Senders viel stärker gedämpft ist, als die langsamere, so daß dann nur diese allein merklich bleibt. *Wenn also Koppelungen, die größer als $k' = 0,8$ sind, experimentell realisiert werden können, so kann man zur Erzielung guter Resonanz und zugleich kräftiger Wirkung auch mit sehr starker Koppelung im Sender arbeiten. Die Eigenperiode des Empfängers muß dann aber $\sqrt{2} = 1,41$ mal so groß sein, als die Eigenperiode T_1 der beiden (ungekoppelten) Schwingungskreise des Senders.*

Nach (60) p. 524 hängt die Maximalamplitude eines einfachen Empfängers stark von der Dämpfung des Senders und Empfängers ab, der Integraleffekt nach (84) noch mehr.

b) *Enggekoppelter Empfangsapparat.* Besitzt derselbe (wegen der engen Koppelung seiner beiden Teile) zwei Eigenperioden T und T' , und nennt man V_2 das Potential am freien Ende der Antennen des Empfängers, V_1 die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen des Kondensators in dem Stromkreise 1 des Empfängers, der mit dem Stromkreise 2 des Empfängers, welcher die Antennen enthält, eng gekoppelt ist, so gelten entsprechend den Gleichungen (II) der p. 519 oben die Formeln:

$$(122) \quad (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) \frac{d^2 V_1}{dt^2} + 2 \vartheta_1 \frac{d V_1}{dt} + V_1 = p_{12} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) \frac{d^2 V_2}{dt^2},$$

$$(123) \quad (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) \frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2 \vartheta_2 \frac{d V_2}{dt} + V_2 = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) \frac{d^2 V_1}{dt^2} + a \cdot V_2'.$$

Dabei beziehen sich jetzt alle Größen, abgesehen von V_2' , auf die beiden Stromkreise 1 und 2 des Empfangsapparates, nur V_2' bezieht sich auf den Sender und bedeutet die in dem bisherigen Teil dieser Arbeit mit V_2 bezeichnete Größe, d. h. das Potential am Antennenende des Senders, für welche ja in Formel (112) und (113) genauere Ausdrücke gegeben sind. Der Term $a V_2'$ bezeichnet die Erregung des Empfängers (strenger ausgedrückt der Antennen des Empfängers) durch die vom Sender ausgestrahlten Wellen elektrischer Kraft. Der Faktor a hängt also von der Entfernung des Senders vom Empfänger und von der spezielleren Konstruktion, z. B. Antennenlänge des Empfängers ab.

Nach (112) und (113) ist zu setzen

$$(124) \quad a V_2' = S \left(e^{-\frac{\delta t}{\tau^2}} \cos \frac{t}{\tau} - e^{-\frac{\delta t}{\tau'^2}} \cos \frac{t}{\tau'} \right).$$

Wir können setzen:

$$(125) \quad a V_2' = S_1 e^{t/z_1} + S_2 e^{t/z_2} + S_3 e^{t/z_3} + S_4 e^{t/z_4},$$

wobei

$$(126) \quad \begin{cases} z_1 = -\delta + i\tau, & z_2 = -\delta - i\tau, & z_3 = -\delta + i\tau', \\ z_4 = -\delta - i\tau', \end{cases}$$

und

$$(127) \quad S_1 = S_2 = S, \quad S_3 = S_4 = -S$$

gesetzt ist.

Als Integral von (122), (123) schreiben wir analog wie früher Formel (25) p. 520:

$$(128) \quad \begin{cases} V_1 = A_1 e^{t/y_1} + A_2 e^{t/y_2} + A_3 e^{t/y_3} + A_4 e^{t/y_4} \\ \quad + D_1 e^{t/z_1} + D_2 e^{t/z_2} + D_3 e^{t/z_3} + D_4 e^{t/z_4}, \\ V_2 = B_1 e^{t/y_1} + B_2 e^{t/y_2} + B_3 e^{t/y_3} + B_4 e^{t/y_4} \\ \quad + E_1 e^{t/z_1} + E_2 e^{t/z_2} + E_3 e^{t/z_3} + E_4 e^{t/z_4}. \end{cases}$$

Die mit A und B proportionalen Glieder sind die Eigenschwingungen des Empfängers, die mit D und E proportionalen Glieder die durch den Sender erzwungenen Schwingungen. Daher sind die y die vier Wurzeln der Gleichung (vgl. (29) p. 520):

$$(129) \quad \begin{cases} (y^2 + 2 \mathcal{P}_1 y + \tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2)(y^2 + 2 \mathcal{P}_2 y + \tau_2^2 + \mathcal{P}_2^2) \\ \quad - p_{12} p_{21} (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2)(\tau_2^2 + \mathcal{P}_2^2) \\ = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4) = 0. \end{cases}$$

Als Anfangsbedingungen (für $t = 0$) gilt:

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = 0,$$

daher (vgl. (102) p. 537) gilt:

$$(130) \quad \begin{cases} \sum A + \sum D = 0, & \sum B + \sum E = 0, \\ \sum \frac{A}{y} + \sum \frac{D}{z} = 0, & \sum \frac{B}{y} + \sum \frac{E}{z} = 0. \end{cases}$$

Nun gilt nach (122):

$$(131) \quad A_1 (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2 + 2 \mathcal{P}_1 y_1 + y_1^2) = p_{12} (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2) B_1,$$

$$(132) \quad D_1 (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2 + 2 \mathcal{P}_1 z_1 + z_1^2) = p_{12} (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2) E_1,$$

und noch sechs analoge Gleichungen für A_2, y_2, B_2 und D_2, z_2, E_2 etc. Dividiert man (131) durch y_1 , (132) durch z_1 und addiert, so entsteht:

$$\begin{aligned} (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2) \left(\frac{A_1}{y_1} + \frac{D_1}{z_1} \right) + 2 \mathcal{P}_1 (A_1 + D_1) + A_1 y_1 + D_1 z_1 \\ = p_{12} (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2) \left(\frac{B_1}{y_1} + \frac{E_1}{z_1} \right). \end{aligned}$$

Addiert man hierzu die drei analogen Gleichungen, die man erhält, wenn man in A, D, y, z den Index 1 durch 2, 3, 4 ersetzt, so entsteht wegen der Relationen (130):

$$(133) \quad \sum A y + \sum D z = 0.$$

Addiert man (131) und (132), so entsteht:

$$\begin{aligned} (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2) (A_1 + D_1) + 2 \mathcal{P}_1 (A_1 y_1 + D_1 z_1) + A_1 y_1^2 + D_1 z_1^2 \\ = p_{12} (\tau_1^2 + \mathcal{P}_1^2) (B_1 + E_1). \end{aligned}$$

Addiert man hierzu die drei analogen Gleichungen, die man erhält, wenn man wiederum in A , D , y , z den Index 1 durch 2, 3, 4 ersetzt, so entsteht wegen (130) und (133):

$$(134) \quad \sum A y^2 + \sum D z^2 = 0.$$

In (130), (133), (134) sind nun vier lineare Gleichungen für A_1, A_2, A_3, A_4 enthalten, aus denen man die A durch die D ausdrücken kann, z. B. wird

$$\frac{A_1}{y_1} A = -y_2 y_3 y_4 A_{11} \sum \frac{D}{x} + A_{12} \sum D - D_{13} \sum D z + A_{14} \sum D z^2.$$

Dabei sind die A die Determinanten:

$$A = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ y_1^2, & y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \\ y_1^3, & y_2^3, & y_3^3, & y_4^3 \end{vmatrix} = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) \\ (y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4),$$

$$A_{11} = A_{14} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_2, & y_3, & y_4 \\ y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \end{vmatrix} = -(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4),$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_2^2, & y_3^2, & y_4^2 \\ y_2^3, & y_3^3, & y_4^3 \end{vmatrix} = -(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)(y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_4),$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ y_2, & y_3, & y_4 \\ y_2^3, & y_3^3, & y_4^3 \end{vmatrix} = -(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)(y_2 + y_3 + y_4).$$

Daher wird

$$(135) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_1}{y_1} (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) &= y_2 y_3 y_4 \sum \frac{D}{x} \\ &- (y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_4) \sum D \\ &+ (y_2 + y_3 + y_4) \sum D z - \sum D z^2 \\ &= - \sum \frac{D}{x} (z - y_2)(z - y_3)(z - y_4). \end{aligned} \right.$$

Dabei sind in der \sum für D und z die Indizes 1, 2, 3, 4 zu nehmen und diese vier Glieder zu addieren. Aus der Gleichung (123) folgt nun

$$E_1 (\tau_2^2 + \vartheta_2^2 + 2 \vartheta_2 z_1 + z_1^2) = p_{21} (\tau_2^2 + \vartheta_2^2) D_1 + S_1 z_1^2.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit (132) und dividiert durch E_1 , so entsteht:

$$D_1 [(z_1^2 + 2 \vartheta_1 z_1 + \tau_1^2 + \vartheta_1^2)(z_1^2 + 2 \vartheta_2 z_1 + \tau_2^2 + \vartheta_2^2) - p_{12} p_{21} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2)(\tau_2^2 + \vartheta_2^2)] = p_{12} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) \delta_1 z_1^2,$$

oder wegen (129):

$$(136) \quad D_1 (z_1 - y_1)(z_1 - y_2)(z_1 - y_3)(z_1 - y_4) = p_{12} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) z_1^2 \delta_1.$$

Setzt man diesen Wert in (135) ein, so folgt:

$$(137) \quad \frac{A_1}{y_1} (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = -p_{12} (\tau_1^2 + \vartheta_1^2) \sum S_n \frac{x_n}{x_n - y_1}.$$

Unter dem \sum -Zeichen hat S und z sukzessive die vier Indizes $n = 1, 2, 3, 4$, während y_1 seinen Index nicht ändert. Die Formeln für A_2, A_3, A_4 ergeben sich aus (137) durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3, 4 bei den Größen A, S, y, z der Formel (137).

Die Formeln (128), (136) und (137) geben die vollständige Lösung der Aufgabe für V_1 bei beliebigen Werten y und z , d. h. bei beliebigen Dämpfungen und Eigenschwingungen sowohl vom Sender wie vom Empfänger. Es ist klar, daß letzterer im Resonanzfall am stärksten angeregt wird; man wird es also so einrichten, daß die beiden Eigenperioden des Senders identisch mit denen des Empfängers sind. Wenn z. B. identisch (auch hinsichtlich der Koppelung) konstruierte Apparate als Sender und Empfänger benutzt werden, nur mit dem Unterschied, daß beim Sender der Stromkreis 1 eine Funkenstrecke enthält, beim Empfänger dagegen an Stelle der Funkenstrecke einen Strom- oder Potentialindikator (Rutherfords magnetischer Stromindikator oder Kohärer), so sind die Eigenperioden von Sender und Empfänger gleich. In Hinsicht auf (126) ist also dann zu setzen:

$$(138) \quad \begin{cases} y_1 = -\sigma + i\tau, & y_2 = -\sigma - i\tau, \\ y_3 = -\sigma + i\tau', & y_4 = -\sigma - i\tau'. \end{cases}$$

Die Dämpfungsgröße σ der Eigenschwingungen des Senders ist im allgemeinen verschieden anzunehmen von der Dämpfungsgröße δ des Senders, bei identisch konstruierten Apparaten wird wohl δ meist größer als σ sein, weil der Sender eine Funkenstrecke enthält. Da aber der Wellenindikator im Empfänger auch elektrische Energie verzehrt, so kann es eventuell auch eintreten, daß $\sigma = \delta$ wird.

Wir wollen der weiteren Rechnung den Fall $\delta = \sigma$ zugrunde legen, weil dadurch die Formeln sehr einfach werden, und weil das Wesentliche dabei schon zur Genüge hervortreten wird.

Unter der Annahme $\delta = \sigma$ werden die y und z gleich, d. h. es wird $y_1 = z_1, y_2 = z_2, y_3 = z_3, y_4 = z_4$. Wir können also nach (136) schreiben:

$$(139) \quad D_1(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_1 \frac{\tau_1^2}{z_1 - y_1},$$

und nach (137):

$$(140) \quad A_1(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = -p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_1 \frac{z_1 y_1}{z_1 - y_1}.$$

Von der \sum auf der rechten Seite von (137) ist nämlich nur das mit S_1 behaftete Glied beizubehalten, weil es den Nenner $z_1 - y_1 = 0$ enthält.

Aus (128) folgt nun weiter:

$$(141) \quad \begin{cases} V_1 = (A_1 + D_1)e^{t/y_1} + (A_2 + D_2)e^{t/y_2} \\ \quad + (A_3 + D_3)e^{t/y_3} + (A_4 + D_4)e^{t/y_4}. \end{cases}$$

Durch Addition von (139) und (140) ergibt sich:

$$(A_1 + D_1)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) = p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_1 y_1,$$

oder nach (138):

$$(A_1 + D_1)(\tau^2 - \tau'^2) = -\frac{1}{2} p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_1 (1 + i\sigma/\tau)$$

und analog:

$$(A_2 + D_2)(\tau^2 - \tau'^2) = -\frac{1}{2} p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_2 (1 - i\sigma/\tau),$$

$$(A_3 + D_3)(\tau^2 - \tau'^2) = -\frac{1}{2} p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_3 (1 + i\sigma/\tau'),$$

$$(A_4 + D_4)(\tau^2 - \tau'^2) = -\frac{1}{2} p_{12}(\tau_1^2 + \vartheta_1^2) S_4 (1 - i\sigma/\tau').$$

Unter Rücksicht auf (127) wird also nach (141), wenn man ϑ_1^2 gegen τ_1^2 vernachlässigt, und σ^2 gegen τ^2 resp. gegen τ'^2 :

$$(142) \quad V_1 = -\frac{p_{12} \tau_1^2 S}{\tau^2 - \tau'^2} \left(e^{-\frac{\sigma t}{\tau^2}} \cdot \cos \frac{t - \sigma}{\tau} - e^{-\frac{\sigma t}{\tau'^2}} \cos \frac{t \sigma}{\tau'} \right).$$

Setzt man $t - \sigma = t'$, und sieht man von Anfangszeiten ab, die von der Größenordnung $t = \sigma$ sind, so kann man (142) schreiben:

$$V_1 = -\frac{p_{12} \tau_1^2 S}{\tau^2 - \tau'^2} \left(e^{-\frac{\sigma t'}{\tau^2}} \cdot \cos \frac{t'}{\tau} - e^{-\frac{\sigma t'}{\tau'^2}} \cdot \cos \frac{t'}{\tau'} \right).$$

Nach den Entwicklungen des Abschnittes V p. 540 ist dies nun umzugestalten in:

$$(143) \quad V_1 = -\frac{S}{2\pi} \sqrt{\frac{C_2 L_{12}}{C_1 L_{22}}} \cdot \frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi}\right)^2} \left(e^{-\frac{\sigma t'}{\tau^2}} \cos \frac{t'}{\tau} - e^{-\frac{\sigma t'}{\tau'^2}} \cos \frac{t'}{\tau'} \right).$$

Die Potentialdifferenz V_1 im Empfänger wird also durch eine analoge Formel dargestellt, wie das Potential V_2 am Sender nach (112), nur daß $C_1 L_{31}$ und $C_2 L_{12}$ ihre Rolle als Zähler und Nenner vertauschen. Man muß daher, wenn V_1 möglichst hoch werden soll, C_1 klein gegen V_2 wählen, wenn man aber einen möglichst starken Primärstrom erhalten will, muß C_1 groß gegen C_2 sein, weil

$$i_1 = - C_1 \frac{dV_1}{dt}$$

ist, nach (1) p. 514. Für den Rutherfordschen magnetischen Wellenindikator ist jedenfalls diese Anordnung zu wählen, und selbst für den Kohärer scheint sie mir wegen seiner großen und unkonstanten Kapazität zweckmäßiger zu sein, als die neuerdings meist gewählte Transformierung auf hohes Potential V_1 , wenigstens wenn man mit deutlicher Resonanz arbeiten will.¹⁾

Die Abhängigkeit des V_1 von der Zeit ist dieselbe, wie sie in V. beim Teslatransformator ausführlich behandelt ist, nämlich sie ist die Differenz zweier verschieden gedämpfter Schwingungen verschiedener Periode. Wie dort dargelegt wurde, muß also auch hier die Koppelung $k' = 0,6$ ($\tau : \tau' = 2$) beider Teile des Empfängers besonders günstig sein. *Veränderungen von Dämpfungen machen dann auch*, wie aus Fig. 2 hervorgeht, *für die Maximalamplitude wenig Unterschied aus, jedenfalls viel weniger, als für den Integraleffekt²⁾*, da dieser, wie aus (143) leicht zu erhalten ist, proportional zu $1 : \sigma$ ist. Jedenfalls sieht man, daß beim zweifach gebauten (gekoppelten) Empfänger der unperiodische Verlauf des Senderpotentials für die Resonanz nicht mehr hinderlich ist.

Immerhin wird man die schärfste Resonanz (aber mit Verzicht auf möglichst große Intensität) erhalten, wenn man nach M. Wien einen sehr lose gekoppelten Sender und einen sehr lose gekoppelten Empfänger benutzt, bei welchen die Dämpfungen

1) Diesen Punkt werde ich bei späterer Gelegenheit ausführlicher behandeln.

2) Der Kohärer reagiert auf die Maximalamplitude, Rutherfords magnetischer Indikator vermutlich auf den Integraleffekt. Daher wird man bei letzterem mehr als bei ersterem auf kleine Dämpfung achten müssen.

der beiden Stromkreise 1, welche die große Kapazität C_1 enthalten, möglichst klein zu machen sind. Ferner ist für scharfe Resonanz besser ein auf den Integraleffekt reagierender Indikator zu benutzen, als ein auf die Maximalamplitude reagierender. Denn ganz allgemein muß die Resonanz bei der Anordnung am besten wahrzunehmen sein, bei der die Intensität am stärksten (selbst im Resonanzfall) von der Dämpfung beeinflußt wird.

Es ist eine Frage für sich (die später behandelt werden soll), wie man die Antennen am zweckmäßigsten im Vergleich zur Sekundärspule und wie diese nach Höhe, Radius, Wicklungszahl am besten zu dimensionieren ist für den Zweck der Ausstrahlung elektromagnetischer Energie.

Zusammenfassung der Hauptresultate.

1. Aus der kombinierten Beobachtung der Resonanzkurve der Maximalamplitude und des Integraleffektes ergibt sich *die Dämpfung beider Schwingungskreise einzeln, sowie die Frequenz des Resonators.*

2. Die Resonanzkurve wird um so ausgeprägter, je schwächer die Koppelung beider Schwingungskreise ist. Ferner ist sie für den Integraleffekt ausgeprägter, als für die Maximalamplitude.

3. Der wirksamste Teslatransformator besteht aus *einer* Primärwindung und *vielen* Sekundärwindungen, die einen Spulenkörper *von bestimmtem* (noch nicht genau ermitteltem) *Verhältnis von Höhe zu Durchmesser* bilden. Die Anzahl der Sekundärwindungen ist begrenzt durch die Nebenforderungen, daß die Isolation nicht durchschlagen wird, und die Drahtdicke nicht zu klein wird. Ferner erfordert eine Steigerung der Zahl der Sekundärwindungen einen Speise-Induktor von höherer Schlagweite. Tote (nicht induktiv wirkende) Selbstinduktion des Primärkreises ist möglichst zu vermeiden, seine Drahtdicke soll möglichst groß sein und *die Koppelung zwischen Primärkreis und Teslaspule soll den Wert $k^2 = 0,36$* (Verhältnis der beiden durch Koppelung entstandenen Frequenzen 1:2) *möglichst erreichen.* Die Primärkapazität muß den Primärkreis in Resonanz mit der Teslaspule bringen und soll (wegen Ver-

meidung von Entladungen und Rückstand) aus Metallplatten in gut isolierendem, rückstandsfreiem Dielektrikum (Petroleum, nicht Glas oder Luft) gebildet sein.

Bei schwacher Koppelung kommt es nur darauf an, daß diese Primärkapazität C_1 möglichst groß ist, einerlei, ob dies durch kleine Spulen von hoher Wickelungszahl n erreicht wird, oder durch größere Spulen von kleinerem n ; bei starker Koppelung ist hohes n etwas wirksamer. — Vom Funkenpotential hängt die Teslawirkung innerhalb gewisser Grenzen wenig ab.

4. Bei schwacher Koppelung hat die Dämpfung der Primär- und Sekundärschwingungen starken Einfluß auf die Wirksamkeit des Teslatransformators, bei starker Koppelung (schon von $k^2 = 0,16$ an) viel weniger.

5. Bei der drahtlosen Telegraphie erhält man schärfste Resonanz (aber mit Verzicht auf Intensität) bei schwach gekoppeltem und wenig gedämpften Sender und Empfänger. Letzterer enthält dann zweckmäßig einen auf den Integraleffekt reagierenden Indikator.

6. Verwendet man einen schwach gekoppelten (oder einfachen) Empfänger und einen stark gekoppelten Sender, so tritt keine deutliche Resonanz auf. *Erst bei sehr starker Koppelung im Sender ($k^2 > 0,6$) kann man den Empfänger auf den Sender abstimmen. Die Empfängerfrequenz muß dann aber im Verhältnis $1:\sqrt{2}$ kleiner sein, als die Frequenz der beiden (aufeinander abgestimmten) Senderschwingungskreise einzeln.*

7. Verwendet man zwei gleich gebaute und gleich gekoppelte Apparate als Sender und Empfänger, so kann man größte Intensität erhalten und mäßige Deutlichkeit der Resonanz, letztere mehr beim Integraleffekt, als bei der Maximalamplitude. Zur Erzielung größter Wirkung ist in beiden Apparaten die Koppelung $k^2 = 0,36$ zu wählen. Bei Benutzung eines auf Maximalamplitude reagierenden Indikators im Empfänger hängt dann die Wirkung wenig von den Dämpfungen ab, dafür wird die Resonanz aber auch undeutlicher, als wenn man einen auf Integraleffekt reagierenden Indikator wählt.

Giessen, November 1903.

(Eingegangen 25. November 1903.)