10. *Temperatur und Entropie der Strahlung;*
von Willy Wien.

Fast jede Art von Strahlung kann aus dem Wärmevorrath fester Körper hergestellt werden und enthält, auch wenn sie sich im freien Aether befindet, in Räumen von endlicher Ausdehnung eine endliche Energiemenge, weil die Geschwindigkeit ihrer Fortpflanzung nicht unendlich gross ist. Sie muss deshalb auch unabhängig von der Quelle, aus der sie stammt, den Gesetzen der Wärmetheorie unterworfen sein. Wenn man demnach Strahlung betrachtet, von der man weiss, dass sie auch nur von der Wärme erzeugt werden kann, und die sich ausserdem im Wärmegleichgewicht befindet, so muss sie thermodynamisch vollständig aus ihrem Volumen, der Dichtigkeit der Energie und ihren Eigenschaften bestimmt sein, ohne dass die Körper, die sie ausgesandt haben, irgendwie in Frage kommen. Sobald ein abgegrenztes Quantum Strahlung, das sich im Gleichgewicht befindet, wo kein Energieaustausch mehr stattfinden kann, als bekannt gegeben ist, und man sich überzeugt hat, dass alle vorhandenen Strahlen auch durch Wärme erzeugt werden können, müssen sich auch Temperatur und Entropie bestimmen lassen.

Aus dieser Betrachtung hat man nur sehr wenig auszuschliessen, nämlich Hertz'sche Schwingungen und Kathodenstrahlen, wenn diese überhaupt Schwingungen sind.

Auf die Nothwendigkeit dieser Untersuchungen und die Einführung des Temperaturbegriffes für die Strahlung ist bereits von Hrn. E. Wiedemann hingewiesen worden[1]), der auch darauf aufmerksam macht, dass der Strahlung, die von wärmeren Körpern herrührt, eine entsprechende höhere Temperatur zugeschrieben werden muss.

Wir haben uns die Aufgabe gestellt, die Temperatur der Strahlung nur aus ihrem Zustande zu bestimmen, auch wenn sie uns vollkommen losgelöst von den Körpern, die sie erregt

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **34.** p. 447. 1888; **38.** p. 487. 1889.

haben, gegeben ist. Die Möglichkeit hierzu wird uns durch eine Folgerung aus dem Kirchhoff'schen Satze geboten:

Wenn wir einen leeren Raum mit Körpern von beliebiger Beschaffenheit aber endlichem Absorptionsvermögen für alle Strahlen vollständig einhüllen und die Hülle auf gleicher Temperatnr halten, so ist in dem Hohlraume nach Herstellung des Gleichgewichts eine solche Strahlung vorhanden, als ob die umgebenden Wände vollkommen schwarz wären; sie hängt also nur von der Temperatur, nicht von der Beschaffenheit der Körper ab.

Die Strahlung eines schwarzen Körpers ist hiernach der Zustand des stabilen Wärmegleichgewichtes, jede Strahlung von anderer Beschaffenheit wird bei einer solchen Anordnung *von selbst* in die eines schwarzen Körpers verwandelt. Sobald dieser Zustand eingetreten ist, findet zwischen den festen Körpern und dem Hohlraume kein Wärmeaustausch mehr statt. Wir müssen demnach dieser Strahlung dieselbe Temperatur wie den anliegenden Wänden beilegen.

Die Definition der Strahlung des schwarzen Körpers als Zustand des stabilen Wärmegleichgewichtes scheint mir erhebliche Vorzüge vor der ursprünglichen zu besitzen. Diese muss einen Körper als möglich annehmen, der alle auffallenden Strahlen absorbirt. Die physikalische Bedingung hierfür ist dann aber, dass dieser Körper für Strahlen jeder Wellenlänge dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, wie der leere Raum, eine Forderung, die nach den neueren Anschauungen über Dispersion bei keinem Körper erfüllt ist. Nach diesen Festsetzungen können wir dann die Gleichgewichtszustände betrachten, als ob die Strahlung von vollkommen schwarzen Körper herrührt. Dadurch wird die Behandlung oft sehr vereinfacht und wir wollen demnach auch die Bezeichnung beibehalten.

§ 1. Eigenschaften des Gleichgewichtes der Strahlung. Vollkommene und zerstreuende Spiegel. Zustände labilen Gleichgewichtes.

Als Eigenschaften der Strahlung schwarzer Körper wurde schon von Kirchhoff abgeleitet, dass sie keine Vorzugsrichtungen in Bezug auf die strahlende Oberfläche oder die Polarisation haben kann. Ich habe in einer früheren Arbeit hieraus das bekannte Cosinusgesetz gefolgert.[1]) Es folgt ferner, dass diese Strahlung sich zwischen zwei unendlichen Ebenen von gleicher Temperatur herstellen muss und dass die Ausstrahlung jeder die Hälfte der an irgend einer Stelle vorhandenen Strahlung liefert.

Wenn der oben betrachtete Hohlraum nur theilweise von strahlenden Flächen, im übrigen von Spiegeln umgeben ist, so ändert dies an der Energievertheilung nichts, wenn die Spiegel die auffallenden Strahlen vollkommen zerstreut zurückwerfen. Denn es werden die warmen Körper solange Energie aussenden, bis in jedem irgendwie gerichteten Strahlenbündel überall gleichviel Energie nach beiden Seiten fliesst. In einzelnen Fällen ist dies auch noch der Fall, wenn die Spiegel vollkommen regelmässig spiegeln. Es sei z. B. ein rechtwinkeliges Parallelepipedon gegeben, dessen Seitenwände ab und dc strahlen, während die anderen regelmässig spiegeln.

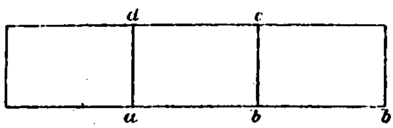

Fig. 1.

Der Einfluss der Seitenwände ist dann so, als ob bei fehlendem bc z. B. eine strahlende Fläche bb' vorhanden wäre. Die Summe aller Spiegelungen liefert das Ergebniss, als ob ab und dc sich ins unendliche erstreckten. Wie wir gesehen haben, stellt sich dann die Strahlung eines schwarzen Körpers her. Es ist aber ein wesentlicher Unterschied vorhanden, je nachdem die Spiegel zerstreut oder regelmässig spiegeln, den man übrigens so festhalten kann, dass in der unmittelbaren Nähe strahlender Körper und zerstreuender Spiegel der Zustand ein anderer ist, als in endlicher Entfernung von diesen oder an regelmässigen Spiegeln. Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, dass die Vorgänge an zwei benachbarten Punkten strahlender Flächen oder zerstreuender Spiegel vollkommen unabhängig von einander sind, während in endlicher Entfernung von diesen an jeder Stelle zwar die ganze Mannigfaltigkeit der Veränderungen an der strahlenden Fläche den Zustand bestimmt, aber ein benachbarter Punkt in demselben Moment nur einen unendlich wenig

1) W. Wien, Wied. Ann. **45**. p. 712. 1892.

verschiedenen Zustand erhalten kann. Im ersten Fall wird der Zustand durch eine *nicht differenzirbare*, im zweiten durch eine *differenzirbare* Function des Ortes dargestellt. Allerdings würden Aenderungen im Gleichgewichtszustande sich hier nicht durch Functionen ausdrücken lassen, die nach der Zeit differenzirbar wären. Im Zustande des Gleichgewichts würden beide Arten des Zustandes thermodynamisch vollkommen gleichwerthig sein, weil man sie ohne weiteres in einander überführen kann.

Andere Gleichgewichtszustände sind bei anderer Anordnung der Spiegel denkbar. Es sei $a\,b$ der Durchschnitt einer kreisförmigen, strahlenden Ebene. Um die Mitte der Scheibe sei eine Halbkugel gelegt, die innen vollkommen spiegeln soll. Alle Strahlen, die von dem Körper ausgehen, werden dann zu ihm zurückgeworfen. Auf diese Weise kann auch ein Gleichgewicht der Energie eintreten, ohne dass die Dichtigkeit der Energie überall die der Temperatur der strahlenden Platte und dem stabilen Gleichgewichte entsprechende wäre. Dieser Zustand des Gleichgewichtes wird sofort gestört, sobald ein Theil der Kugelfläche nicht mehr regelmässig spiegelt oder ein fremder Körper in den Hohlraum gebracht wird. Da das Gleichgewicht hier ohne gleichwerthige Arbeitsleistung gestört werden kann, sind wir berechtigt es als *labil* zu bezeichnen. Auch in diesem Falle kann die Platte $a\,b$ von beliebiger Beschaffenheit sein, wenn sie nur bei der Herstellung der Strahlung für jede Wellenlänge endliches Absorptionsvermögen besass; denn jedes von $a\,b$ ausgehende Strahlenbündel wird solange hin- und hergeworfen, bis es völlig absorbirt ist, es muss deshalb in der entgegengesetzten Richtung ebensoviel Energie gehen. Sobald das Gleichgewicht hergestellt ist, kann die strahlende Scheibe durch einen vollkommenen Spiegel ersetzt werden, ohne dass an der Strahlung etwas geändert würde.

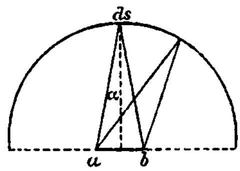

Fig. 2.

Auch jede andere Abweichung einer im Gleichgewicht befindlichen Strahlung von der eines schwarzen Körpers kann nur als in labilem Gleichgewicht befindlich betrachtet werden; denn sie lässt sich ohne angebbare Arbeitsleistung in den Zustand stabilen Gleichgewichts überführen. Hat sie irgend-welche Vorzugsrichtungen, so genügt hierzu ein diffuser Schirm; Abweichungen in der Farbenzusammensetzung sind durch einen strahlenden Körper von der Temperatur, die der gegebenen Dichtigkeit der Energie entspricht ohne Arbeitsleistung auszugleichen.

§ 2. Bestimmung der Temperatur gegebener, im Gleichgewicht befindlicher Strahlung. Maximum der aus Strahlung zu gewinnenden Arbeit.

Die in der Form von Strahlung vorhandene Wärme unterscheidet sich von der in festen Körpern befindlichen dadurch, dass sie sich als eine Mischung von Energie verschiedener Eigenschaften erweist, die wir durch passende Apparate nachweisen können. Diese Bestandtheile sind unabhängig von einander, denn wir können Strahlung herstellen, die nur die einzelnen enthält. Dadurch sind wir genöthigt, jedem einzelnen Bestandtheile der Strahlung schwarzer Körper die Temperatur des Gesammtsystems zuzuschreiben.

Nur auf diese Weise lässt sich auch die Bedingung befriedigen, dass bei Gleichheit der Temperatur kein Wärmeaustausch stattfinden darf. Wenn wir z. B. in einem geschlossenen Raume mit spiegelnden Wänden Strahlung im stabilen Gleichgewicht haben, und in einem anliegenden vollkommen zerstreute Strahlung von anderer Farbenzusammensetzung, so ist Gleichgewicht zwischen beiden Strahlungen erst dann möglich, wenn sie sich vollkommen vermischt haben, sodass jede einzelne homogene Farbe in beiden Räumen gleiche Dichtigkeit hat. Es muss die Gleichheit der Dichtigkeit jeder Farbe bestehen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. Wir müssen also jeder einzelnen Farbe, die in der Strahlung des schwarzen Körpers vorkommt, die Temperatur dieser Strahlung beilegen. Jeder andern gegebenen homogenen Farbe zerstreuter Richtung haben wir demnach die Temperatur zuzuschreiben, die die Strahlung eines schwarzen Körpers hat, wenn sie die betreffende Farbe in gleicher Dichtigkeit enthält. Denn nur dann ist die Energie dieser Farbe bei beiden im Gleichgewicht. Diese Bestimmung der Temperatur ist eindeutig, weil es nur eine Temperatur gibt, bei der die Strahlung eines schwarzen Körpers eine gegebene Farbe in bestimmter

Dichtigkeit besitzt. Strahlung gemischter Farbe ist im allgemeinen aufzufassen als ein System von Energie verschiedener Temperatur; ihre Ueberführung in die Farbenzusammensetzung der Strahlung eines schwarzen Körpers ist demnach der Ausgleich dieser verschiedenen Temperaturen.

Wir sind jetzt im Stande, das Maximum der Arbeit zu berechnen, das aus gegebener zerstreuter Strahlung gewonnen werden kann, während der Rest seine Farbenzusammensetzung ändert, wenn wir die Energievertheilung im Spectrum eines schwarzen Körpers als bekannt voraussetzen. Wenn wir diese Vertheilung graphisch auftragen, sodass die Wellenlängen die Abscissen, die zugehörige Dichtigkeit der Energie φ die Ordinaten bilden (wo dann $\varphi\, d\lambda$ die Dichtigkeit der Energie ist, deren Farbe zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt), so muss die gewonnene Curve mindestens ein Maximum zeigen, weil die Energie sowohl für $\lambda = 0$ als für $\lambda = \infty$ verschwindet. Erfahrungsmässig gibt es nur ein Maximum. Wir werden später beweisen, dass die Curven für verschiedene Temperaturen sich nicht schneiden dürfen. Wir betrachten nun die Curve der Energievertheilung für eine bestimmte Temperatur.

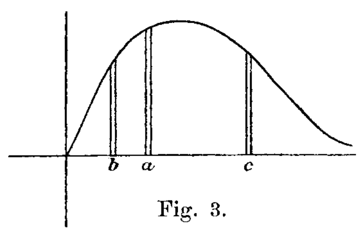

Fig. 3.

Alle homogenen Farben, die wir aus der von der Curve eingeschlossenen Fläche ausschneiden, haben gleiche Temperatur. Nehmen wir ein schmales Stück a auf der vom Maximum der Curve nach den kürzeren Wellenlängen gelegenen Seite. Wenn ein gleich breites Stück b von kürzerer Wellenlänge ausgeschnitten wird, so wird, wie ohne weiteres ersichtlich, diese Farbe eine höhere Temperatur haben müssen, wenn die Ordinate über b die Höhe von a haben soll, wenn also beide Farben gleiche Dichtigkeit besitzen. Wollen wir, dass beide Farben in gleicher Weise homogen sind, so muss die Breite a und b einen bestimmten Theil der Wellenlängn ausmachen. Es müssen sich dann verhalten $a/b = \lambda_a/\lambda_b$, wo λ_a und λ_b die zugehörigen Wellenlängen bezeichnen. Hierdurch würde eine weitere Steigerung der Temperatur von b erforderlich sein. Umgekehrt würde jeder Farbe zwischen a und dem

Maximum bei gleicher Dichtigkeit tiefere Temperaturen zukommen, ebenso auf der anderen Seite des Maximums bis zu einer Stelle c, wo die Temperaturen gleich sind und die durch die Gleichung $c\,\varphi_c = a\,\varphi_a$ oder $\lambda_c\,\varphi_c = \lambda_a\,\varphi_a$ bestimmt ist. Darüber hinaus nimmt dann die Temperatur wieder zu.

Sei nun die absolute Temperatur, bei der die Dichtigkeit von b gleich $b\,\varphi_b$ ist, gleich ϑ_1, die von a gleich ϑ_0, so ist bei einer irgendwie vorgenommenen Verwandlung der Farbe b in a, bei constant gehaltener Dichtigkeit aus der Volumeneinheit der Strahlung höchstens das Arbeitsquantum

$$b\,\varphi_b\,\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_1}$$

zu gewinnen, wie aus den bekannten Grundsätzen der Wärmetheorie folgt. Dabei hat die Menge

$$b\,\varphi_b\,\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}$$

die Farbe a angenommen. Umgekehrt muss, um die Menge

$$a\,\varphi_a\,\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}$$

von der Farbe a in die Farbe b zu verwandeln, mindestens die Arbeit

$$a\,\varphi_a\,\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_1}$$

geleistet und in Strahlung der Farbe b umgesetzt werden. Bei der Verwandlung von Strahlung gemischter Farbe muss die Veränderung jeder einzelnen verfolgt werden. Sei $\varphi_1(\lambda)$ eine beliebig gegebene Energievertheilung, sodass

$$\psi = \int_0^\infty \varphi_1\,d\lambda$$

die Dichtigkeit der Gesammtstrahlung bezeichnet. Verwandeln wir diese in eine Strahlung mit der Energievertheilung $\varphi_2(\lambda)$, so ist für jede Farbe die gewinnbare Arbeit

$$(1) \qquad \varphi_1\,d\lambda\,.\,\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_1},$$

wo ϑ_0 sich aus $\varphi_2(\lambda)$ ergiebt. Also im ganzen

$$A = \int^\infty \varphi_1\,d\lambda\,.\,\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_2}.$$

Ist die zweite Energievertheilung die eines schwarzen Körpers, so wird ϑ_0 constant, also

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \int_0^\infty \varphi_1 \, d\lambda - \vartheta_0 \int_0^\infty \frac{\varphi_1 \, d\lambda}{\vartheta_1} \\ &= \psi - \vartheta_0 \int_0^\infty \frac{\varphi_1 \, d\lambda}{\vartheta_1} \end{aligned} \right.
$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck für das Maximum der Arbeitsleistung, die aus der Volumeneinheit gewonnen werden kann, wenn eine beliebige Farbenmischung mit zerstreuten Richtungen in den Zustand des stabilen Wärmegleichgewichtes übergeht.

Ausser den Unterschieden in der Farbe sind noch die Verschiedenheiten zu berücksichtigen, welche bei Strahlungen bestimmter Richtungen auftreten. Wir sahen bereits, dass in der Strahlung schwarzer Körper keine Vorzugsrichtungen vorhanden

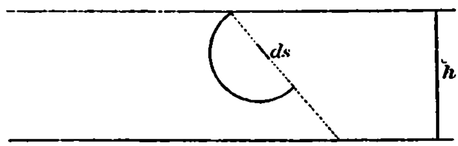

Fig. 4.

sein können, dass aber doch Zustände mit bevorzugten Richtungen sich im Gleichgewicht zu halten vermögen. Zahlreiche Folgerungen aus den Regeln der Strahlenbrechung und dem zweiten Hauptsatze sind bereits von Hrn. v. Helmholtz gezogen und haben wichtige Gesetze für die Helligkeit der Strahlen ergeben.

Wir betrachten nun die Strahlung eines schwarzen Körpers, wie sie sich zwischen zwei unendlich ausgedehnten strahlenden Ebenen gleicher Temperatur herstellt. Durch ein Flächenelement ds, das zwischen beiden liegt, fliesst gleichviel Energie in jeder Richtung unabhängig von der Richtung der Normalen von ds. Denn wenn es selbst strahlte, so würde die ausgesandte Energie unabhängig von dieser Richtung sein, dabei müsste es aber ebensoviel erhalten; es darf also auch diese nicht von der Richtung abhängen. Es ist für die Richtung der Strahlung vollkommen gleichgültig ob ds ganz durchlässig ist, theilweise oder vollständig reflectirt, oder selbst strahlt. Immer sendet es durch eine Halbkugel um seinen Mittelpunkt die Energie

$$\varepsilon\, d\, s \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} d\gamma\, d\alpha \sin\alpha \cos\alpha = \pi\, \varepsilon\, d\, s\,,$$

wo ε nur von der Temperatur der strahlenden Platten abhängt. $\pi\,\varepsilon$ ist dann das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers nach der Definition Kirchhoff's. Um die Dichtigkeit der Energie zu erhalten, betrachten wir den Zwischenraum der beiden Ebenen, die den Abstand h haben mögen. Die Flächeneinheit jeder Ebene sendet unter dem Neigungswinkel α gegen die Normale die Energie $2\,\pi\,\varepsilon\, d\,\alpha \sin\alpha \cos\alpha$ aus. Jedes Strahlenbündel dieser Richtung durcheilt die Länge $h/\cos\alpha$ bis es von der gegenüberstehenden Ebene absorbirt wird.

Ist c die Lichtgeschwindigkeit, so befindet sich in diesen Strahlenbündeln die Energie

$$\frac{2\,\pi\,\varepsilon\, d\,\alpha \sin\alpha \cos\alpha}{c} \cdot \frac{h}{\cos\alpha}\,.$$

Beachtet man, dass gleichviel Energie hin- und hergeht und dividirt durchs Volumen, so ist die Dichtigkeit

$$\psi = \frac{4\,\pi\,\varepsilon}{c} = \frac{4e}{c}\,.$$

Betrachtet man nun *begrenzte* Strahlenkegel z. B. bei der Abbildung durch Linsen, so folgt aus bekannten Sätzen, dass die Oeffnung des Strahlenkegels der Grösse des Bildes immer entspricht, sodass der engere Kegel, der dem grössern Bilde gehört, dafür so viel weniger von den ausgesandten Strahlen umspannt. Es strömt dann gleichviel Energie zwischen beiden Bildern hin und her, wenn beide gleiche Temperatur haben. Es geht hieraus hervor, dass die Grösse der Kegelöffnung und die Dichte der Energie, die in dem Kegel fliesst, einer bestimmten Temperatur entspricht und dass man mit einem solchen Strahlenkegel nur eine bestimmte höchste Temperatur erzeugen oder unterhalten kann, weil bei jeder Steigerung über das Maximum der Betrag der rückwärtsfliessenden Energie überwiegt.

Der Energie, die in einem solchen begrenzten Strahlenkegel hin- und hergeht, muss also die Temperatur des strahlenden Körpers zugeschrieben werden, weil wir sie so concentriren können, dass sie diese Temperatur erzeugt. Dabei muss aber vorausgesetzt werden, dass keine Zerstreuung des Lichtes auf seinem Wege vorkommt. Eine Folge dieser Festsetzung ist, dass bei regelmässiger Anordnung der Strahlenrichtung die Energie eine hohe Temperatur besitzen kann, selbst wenn ihre Dichtigkeit viel kleiner ist, als bei der Strahlung schwarzer Körper. Man kann deshalb mit der directen Sonnenstrahlung sehr hohe Temperaturen erzeugen, während dem zerstreuten Tageslichte eine viel niedrigere Temperatur zukommt, obwohl beide aus derselben Quelle stammen. Es sei (Fig. 2) ds ein Element der Kugelfläche, das senkrecht über der Mitte der strahlenden Scheibe ab liegt, α_1 sei der Divergenzwinkel der von dieser Stelle der Kugel zurückkommenden Strahlen. Ein Element ds' von ab sendet ds die Energiemenge $\varepsilon ds ds' \cos^2\alpha_1/r^2$ zu, wo r die Entfernung zwischen ds und ds', α_1 der Winkel ist, den r mit der Normalen von ds und ds' bildet. Nun ist

$$d s' = \frac{2\pi r^2 \sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} d\alpha_1 ,$$

die gesammte von ab nach ds gestrahlte Energie ist

$$2\pi\varepsilon d s \int_0^\alpha \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \, d\alpha_1 = \pi\varepsilon d s \sin^2\alpha = e\, d s \sin^2\alpha .$$

Wenn man die Dichtigkeit der Energie in der Nähe von ds erhalten will, betrachtet man ein unendlich kleines über ds errichtetes rechtwinkeliges Parallelepiped mit der Höhe h. In diesem befindet sich die Energie

$$\frac{2 d s}{c} \cdot 2\pi\varepsilon \int_0^\alpha \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \, d\alpha_1 \frac{h}{\cos\alpha_1} = \frac{4 d s \pi \varepsilon h}{c} (1 - \cos\alpha),$$

also ist die Dichtigkeit

$$\psi_\alpha = \frac{4e}{c}(1 - \cos\alpha) \quad \text{oder} \quad \psi_\alpha = \psi(1 - \cos\alpha).$$

Da wir ψ auch in seiner Abhängigkeit von der Temperatur als bekannt voraussetzen, so gestattet die Gleichung

$$(3) \qquad \psi = \frac{\psi_\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

bei gegebenem α und ψ_α die Temperatur zu bestimmen. Es ist wohl zu beachten, dass bei der Abbildung Object und Bild beliebig klein gemacht werden können, sodass diese Bestimmung der Temperatur für jeden Strahlenkegel gilt. Doch muss der Strahlengang derartig sein, dass die Beugung des Lichtes zu vernachlässigen ist. Beugung wirkt immer zerstreuend auf die Richtung der Strahlen und stellt also Vorgänge dar, die nicht umkehrbar sind. Wenn α sehr klein wird, kommen wir auf den Fall der Elementarkegel. Hier treffen alle Strahlen die Halbkugel nahe senkrecht und es sind keine seitlich kreuzenden Strahlen in endlicher Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel vorhanden. Wir sehen aus der Gleichung (3), dass dann die Temperatur bei endlicher Dichtigkeit der Strahlung unendlich gross im Vergleich zur Temperatur der Strahlung eines schwarzen Körpers von gleicher Dichtigkeit wird. Die Verwandlung derart regelmässiger Strahlung in solche mit zerstreuten Richtungen entspricht einer Erniedrigung der Temperatur und ist deshalb nicht ohne weiteres umkehrbar. Sie kann demnach aber als Compensation für die Gewinnung von Arbeit aus Strahlung dienen. Das Maximum der Arbeit, die aus Strahlung bestimmter Richtung gewonnen werden kann, während der Rest zerstreut wird, gibt wieder der Bruch $(\vartheta_1 - \vartheta_0)/\vartheta_1$, wo die ϑ auf die angegebene Weise zu bestimmen sind.

Bisher ist die Strahlung immer als unpolarisirt angenommen worden. Der volle Einfluss der Polarisation kann nur bei Strahlen zur Geltung kommen, die in einem schmalen Bündel sehr nahe dieselbe Richtung haben, wie wir sie bei kleinem Winkel α oben erreichen konnten. Dann ist der Einfluss der Polarisation so, dass ein polarisirtes Strahlenbündel dieselbe Temperatur wie ein unpolarisirtes besitzt, das die doppelte Dichtigkeit der Energie besitzt. In der That wird ein linear polarisirtes Strahlenbündel durch ein passend angeordnetes polarisirendes Prisma vollständig hindurchgehen und auf einen strahlenden Körper s fallen, während von den reciproken Strahlen von s nur die Hälfte den Weg der polarisirten Strahlen zurücklegen, während die anderen von dem polarisirenden Prisma in eine andere Richtung gelenkt werden. Strahlen gleicher Polarisation legen dagegen nach beiden entgegengesetzten Richtungen denselben Weg zurück.

Die Reciprocität des Strahlenganges hört, wie von Hrn. v. Helmholtz[1]) bemerkt ist, auf, sobald die Drehung der Polarisationsebene durch magnetische Kräfte erfolgt. Es gehe natürliches paralleles Licht, und zwar in der Zeiteinheit die Energiemenge q, durch ein Nicol'sches Prisma 1, wobei der total reflectirte Strahl nicht absorbirt, sondern wieder durch einen Spiegel zurückgeworfen werde. Die ganzen Vorrichtungen einschliesslich der die Strahlen aussendenden Körper sind in einer adiabatischen Hülle zu denken. Die Anordnung kann genau so gedacht werden, wie sie sich Kirchhoff in seiner bekannten Abhandlung über das Verhältniss von Emission und Absorption vorstellt. Es ist deshalb nicht nöthig, näher darauf einzugehen. Die durchgehenden Strahlen gehen weiter durch ein nicht absorbirendes Medium, in dem durch magnetische Kräfte die Polarisationsebene um einen Winkel α gedreht werde. Dann gehen sie weiter durch ein zweites Nicol'sches Prisma 2, dessen Hauptschnitt mit dem des ersten einen Winkel ε bilde. Die hier total reflectirten Strahlen sollen wieder in der Richtung ihrer Ankunft zurückgeworfen werden. Dann geht durch das Prisma 2 die Energie $(q/2)\left(\cos^2(\varepsilon-\alpha)\right)$, alles übrige geht wieder zurück. Lassen wir nun bei derselben Anordnung umgekehrt dieselbe Lichtmenge auch an der anderen Seite einfallen, so gelangt die Menge $(q/2)\left(\cos^2(\varepsilon+\alpha)\right)$ durch das erste Prisma 1. Dabei ist von den Reflexionen an der Grenze der durchsichtigen Medien abgesehen, weil diese durch passende Wahl derselben beliebig herabgedrückt werden können.

Zwei gleichtemperirte Körper würden sich hier nicht gleichviel Wärme zustrahlen. Der bei 1 liegende Körper erhielte

$$q - \frac{q}{2}\left(\cos^2(\varepsilon-\alpha) - \cos^2(\varepsilon+\alpha)\right),$$

der bei 2 die Menge

$$q + \frac{q}{2}\left(\cos^2(\varepsilon-\alpha) - \cos^2(\varepsilon+\alpha)\right).$$

---

1) v. Helmholtz, Wiss. Abh. **2.** p. 136.

Der Unterschied $q\left(\cos^2(\varepsilon-\alpha)-\cos^2(\varepsilon+\alpha)\right)$ erreicht seinen grössten Werth bei constantem α, wenn $\varepsilon=(\pi/4)$ ist. Er ist dann $q\sin 2\alpha$. Für $\alpha=(\pi/4)$ erhält dann 2 dreimal soviel Energie als 1.

Wir können durch diese Anordnung aber auch Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen lassen, wenn nämlich 2 eine höhere Temperatur ϑ_2 besitzt, als die Temperatur ϑ_1 von 1. Hier denken wir uns die Anordnung so, dass zwei gleiche Systeme, wie die Fig. 2 darstellt, einander in passender Entfernung gegenüberstehen, wo die strahlenden Körper verschiedene Temperatur haben. Die Körper seien sehr klein, sodass die Divergenzwinkel der von der Kugel reflectirten Strahlen klein sind. Oeffnen wir jetzt die Kugelflächen durch zwei gegenüberstehende Segmente, deren Axe die Verbindungslinie der strahlenden Körper ist, so können wir die austretenden Strahlen durch zwei Linsen so lenken, dass die Strahlen des einen den anderen treffen, während die Strahlen zwischen den Linsen nahe parallel laufen. Die Linsen werden als unendlich dünn angesehen. Denken wir uns an Stelle des Körpers 2 eine spiegelnde Kugelfläche, deren Mittelpunkt in der Mitte der diesem Körper zunächstliegenden Linse liegt, so werden alle von 1 ausgehenden Strahlen zunächst wieder die Linse treffen und so nach 1 zurückgelangen. Durch ähnliche Vorrichtungen können wir alle durch die polarisirenden Prismen abgelenkten Strahlen wieder an die Ausgangsstelle zurückführen. Sei $2f(\vartheta_1)$ die in der Zeiteinheit von 1 in unserer Richtung ausgehende Energie, $2f(\vartheta_2)$ die von 2 ausgestrahlte.

Es erhält dann

2 die Menge $f(\vartheta_1)\cos^2(\varepsilon-\alpha)+f(\vartheta_2)\sin^2(\varepsilon+\alpha)+f(\vartheta_2)$

1 die Menge $f(\vartheta_2)\cos^2(\varepsilon+\alpha)+f(\vartheta_1)\sin^2(\varepsilon-\alpha)+f(\vartheta_1)$.

2 sendet in unserer Richtung $2f(\vartheta_2)$ aus, es erhält also in der Zeiteinheit den Ueberschuss

$$\mathfrak{U}=f(\vartheta_1)\cos^2(\varepsilon-\alpha)-f(\vartheta_2)\cos^2(\varepsilon+\alpha)$$

und für $\varepsilon=(\pi/4)$

$$\mathfrak{U}=\frac{f(\vartheta_1)}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-\frac{f(\vartheta_2)}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)^2.$$

Das Wärmequantum $\mathfrak{U}$ geht von der Temperatur ϑ_1 zur

Temperatur ϑ_2 über. Es ist dies im Clausius'schen Sinne eine negative Verwandlung, deren Verwandlungswerth

$$-\mathfrak{U}\left(\frac{1}{\vartheta_1}-\frac{1}{\vartheta_2}\right)$$

ist. Legen wir ϑ_2 fest, so sehen wir, dass die Grösse

$$\mathfrak{U}\left(\frac{1}{\vartheta_1}-\frac{1}{\vartheta_2}\right)$$

für $\vartheta_1 = \vartheta_2$ verschwindet, andererseits bei abnehmendem ϑ_1 ebenfalls durch einen Werth Null gehen muss, weil $f(\vartheta_1)$ kleiner wird. Diese Grösse muss also ein Maximum für einen bestimmten Werth ϑ_1 haben. Es folgt aus der Gleichung

$$\frac{d\,\mathfrak{U}}{d\,\vartheta_1}\left(\frac{1}{\vartheta_1}-\frac{1}{\vartheta_2}\right)-\frac{\mathfrak{U}}{\vartheta_1{}^2}=0,$$

$$\frac{d\,f(\vartheta_1)}{d\,\vartheta_1}\left(\frac{1}{\vartheta_1}-\frac{1}{\vartheta_2}\right)-\frac{f(\vartheta_1)}{\vartheta_1{}^2}+\frac{f(\vartheta_2)}{\vartheta_1{}^2}\left(\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^2=0.$$

Sobald $f(\vartheta)$, ϑ_2, α gegeben sind, lässt sich hiernach das Maximum des Verwandlungswerthes berechnen.

Für $\alpha=(\pi/4)$ hat $\mathfrak{U}=f(\vartheta)$ seinen grössten Werth. Nehmen wir noch für $f(\vartheta)$ das von Boltzmann für die Strahlung schwarzer Körper theoretisch begründete Stefan'sche Strahlungsgesetz, nämlich $f(\vartheta)=c\,\vartheta^4$, wo c constant ist, so wird, da für $\alpha=(\pi/4)$ [1]),

$$\cos\alpha-\sin\alpha=0,\qquad \mathfrak{U}=c\,\vartheta_1{}^4.$$

Es ergiebt sich also das Maximum aus der Gleichung

$$3\,\vartheta_1{}^2-\frac{4\,\vartheta_1{}^3}{\vartheta_2}=0,\quad \text{also}\quad \vartheta_1=\frac{3}{4}\,\vartheta_2.$$

Die Grösse

$$-\mathfrak{U}\left(\frac{1}{\vartheta_1}-\frac{1}{\vartheta_2}\right)$$

wird hiernach

$$=-\frac{27}{256}\cdot c\,\vartheta_2{}^3.$$

Da dieser Verwandlungswerth negativ ist, so muss ihm irgend ein mindestens gleicher zur Seite stehen. Es muss bei der

1) Für beliebige Werthe von α ergiebt sich die Normalform der Gleichung fünften Grades in Bezug auf ϑ_1, die durch elliptische Modulfunctionen verhältnissmässig einfach auflösbar ist. Da aber der Grenzfall für $\alpha=(\pi/4)$ von wesentlichem Interesce ist, so soll auf die allgemeine Gleichung nicht näher eingegangen werden.

Wirkung des Magneten auf das Licht irgend eine Entropievermehrung vorhanden sein. Es mag dahingestellt bleiben, ob eine Erwärmung des magnetischen Mediums auf Kosten der magnetischen Energie allein oder mit gleichzeitiger Inanspruchnahme des Energiewerthes der Strahlung als Compensation auftritt. Die am nächsten liegende Annahme scheint mir zu sein, dass das Licht die vorhandene Magnetisirung des Mediums zerstört und die magnetische Energie in Wärme verwandelt. Bei äusserlich constant gehaltenen magnetischen Kräften wird die Magnetisirung immer wieder erneuert, in ähnlicher Weise, wie die nach dem Ohm'schen Gesetz zerstörten electrischen Kraftlinien durch die electromotorische Kraft constant gehalten werden. Da mit zunehmendem ϑ_2 der Verwandlungswerth stark wächst, so müsste ein derartiger Einfluss von der Intensität des durchgehenden Lichtes abhängen. Die bisherigen Experimente sind auf diese Frage noch nicht gerichtet worden.

Die Theorien, welche über die magnetische Drehung der Polarisationsebene bisher aufgestellt sind, vermögen ebenfalls keinen Aufschluss zu geben.[1])

§ 3. Aenderungen des Volumens eingeschlossener Strahlung. Arbeitsleistung. Reciproke Beziehungen.

Die bisherigen Betrachtungen sind von jeder Theorie des Lichtes unabhängig. Sie sind nur eine Anwendung der Sätze der Wärmelehre. Die besonderen Eigenschaften der Strahlen verlangten nur eine Zerlegung der Energie in einzelne Bestandtheile.

Es ist aus dem zweiten Hauptsatze die Folgerung gezogen, dass Strahlung einen Druck auf eine bestrahlte Oberfläche ausübt, und man kann die Grösse dieses Druckes berechnen, wenn man die Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur kennt. Man würde dann bei einer grossen Zahl von Folgerungen

---

1) Ueber diese Frage würde die Theorie erst dann Aussagen machen können, wenn sie auf die Wechselwirkung zwischen dem Träger der Lichtenergie und den ponderabeln Theilen des magnetischen Mediums eingeht. Anhaltspunkte hierfür bietet die von Hrn. F. Richarz (Münch. Ber. (1) 24. 1893) aufgestellte Theorie des molecularen Magnetismus.

aus der Existenz dieses Druckes noch immer unabhängig von jeder Hypothese bleiben. Da wir aber die Strahlungsgesetze schwarzer Körper empirisch mit sehr geringer Sicherheit kennen, so scheint es mir zuverlässiger, die electromagnetische Lichttheorie vorauszusetzen, die die Grösse dieses Druckes zu berechnen erlaubt. Auch würden sich bei anderer Annahme über den Druck die Umrechnungen mit der grössten Leichtigkeit ausführen lassen.

Nach der Maxwell'schen Theorie übt eine ebene Welle, die auf eine ebene Grenzfläche fällt und hier absorbirt wird, einen Druck auf die Flächeneinheit aus, der gleich der Energie in der Volumeneinheit multiplicirt mit dem Cosinus des Einfallswinkels ist. Ist die Ebene spiegelnd, so addirt sich hierzu noch der Druck der zurückgeworfenen Welle. Bei auffallenden Kugelwellen ergiebt sich der Druck jedesmal aus der Energie und der Richtung der Wellennormale.

Wenn die getroffene Fläche dem Drucke Folge leistet, so kann der Druck auf Kosten der Energie der Strahlung Arbeit leisten. Wenn umgekehrt die Fläche sich gegen die auffallenden Strahlen bewegt, so muss von aussen Arbeit zugeführt werden, die die Energie der Strahlung vermehrt. Wir wollen die Beziehungen der Strahlung zur äusseren Arbeitsleistung genauer untersuchen.

Wir betrachten eine Erregungsstelle electromagnetischer Wellen innerhalb eines vollkommen spiegelnden rechtwinkeligen Parallelepipeds, dessen Mittelpunkt der Coordinatennullpunkt sei. $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ seien die Wände, X, Y, Z seien die Componenten der electrischen, L, M, N die der magnetischen Kraft, so können wir die Maxwell'schen Gleichungen erfüllen, indem wir setzen[1])

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial x}, & L &= -A\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial t}, \\ Y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial y}, & M &= +A\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t}, \\ Z &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, & N &= 0, \end{aligned}\right.$$

---

1) Hertz, Gött. Ber. p. 106. 1890; Wied. Ann. **36.** p. 1. 1889.

wo $1/A$ die Lichtgeschwindigkeit ist und φ eine Lösung der Gleichung

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{A^2} \Delta \varphi$$

bedeutet. Wenn die Wände vollkommen spiegeln sollen, so ergeben die Grenzbedingungen, dass hier die parallelen Componenten der electrischen und die normalen der magnetischen Kraft verschwinden müssen, weil eine vollkommene Zurückwerfung aller Richtungen nur an einem Körper möglich ist, dessen electrisches Leitungsvermögen unendlich gross ist.

Für $x = \pm a$ sollen demnach $\partial^2 \varphi / \partial z \partial y$, $\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2$, $\partial^2 \varphi / \partial y \partial t$ Null sein. Dies ist mit Berücksichtigung von (5) der Fall, wenn φ dort verschwindet. Für $y = \pm b$ verschwinden $\partial^2 \varphi / \partial z \partial x$, $\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2$ und $\partial^2 \varphi / \partial x \partial t$ ebenfalls mit φ. Für $z = \pm c$ verschwinden $\partial^2 \varphi / \partial z \partial x$, $\partial^2 \varphi / \partial z \partial y$, wenn dort $\partial \varphi / \partial z$ gleich Null wird.

Wir genügen diesen Bedingungen, wenn wir die hin- und hergeworfenen Spiegelbilder der Erregungsstelle einführen.

Es sei

$$\varphi_1 = \mathfrak{B} \frac{\cos(m r_1 - n t)}{r_1}, \quad \frac{m}{n} = A \quad r_1^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

$\mathfrak{B}$ eine Constante. Dann liegt die Erregungsstelle im Punkte x', y', z'.

Im ersten Spiegelbilde bei a wird scheinbar eine Welle erregt, die der Gleichung entspricht

$$\varphi_2 = \mathfrak{B} \frac{\cos(m r_2 - n t)}{r_2}, \quad r_2^2 = \big(x - (2a - x')\big)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

φ_1 und φ_2 genügen der Gleichung (5), $\varphi_1 - \varphi_2$ verschwindet für $x = +a$.

Die Schwingung im Spiegelbilde bei $z = +c$ erregt scheinbar die Welle

$$\varphi_3 = \mathfrak{B} \frac{\cos(m r_3 - n t)}{r_3}, \quad r_3^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + \big(z - (2c - z')\big)^2.$$

$\partial / \partial z (\varphi_1 + \varphi_3)$ verschwindet für $z = c$.

Bildet man so die Summe aller Spiegelbilder, so ergiebt sich [1])

1) Durch eine Formel von ganz ähnlicher Gestalt lässt sich das Problem der Reflexion der Schallwellen, die in einem Punkte innerhalb eines Zimmers erregt und von den Wänden zurückgeworfen werden, lösen.

$$\varphi = \mathfrak{B} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\cos(m\,r - n\,t)}{r},$$

$$r^2 = \left(x - (2\,\alpha\,a + (-1)^\alpha x')\right)^2 + \left(y - (2\,\beta\,a + (-1)^\beta y')\right)^2 + \left(z - (2\,\gamma\,a + (-1)^\gamma z')\right)^2.$$

Die Reihen gehen für $m\,r - n\,t = 0$ in die bekannten ϑ-Functionen über.

Die hierdurch dargestellten Vorgänge sind den allgemeinen Gesetzen der Reciprocität unterworfen, denn sie sind unter der Form des Princips der kleinsten Wirkung[1]) darstellbar, sobald man die Unstetigkeitsstellen, wo r verschwindet, ausschliesst.

In einer früheren Arbeit[2]) habe ich gezeigt, dass die Strömungscomponenten der Energie dargestellt werden durch die Ausdrücke

$$\mathfrak{u} = + \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial t}\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]}{4\,\pi}$$

$$\mathfrak{v} = + \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial t}\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right]}{4\,\pi}$$

$$\mathfrak{w} = + \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial t}\,\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial x} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial y}\,\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial y}}{4\,\pi}$$

Bei der Bildung dieser Ausdrücke wird durch die Differentiation nach t mit Rücksicht auf den Werth von φ die Grösse n als Factor auftreten. Setzen wir $-n$ für n, so erhalten wir dasselbe System mit rückwärtsgehender Energiebewegung, während im ersten Falle der Energiewerth des Systems aus der Zuströmungsstelle sich fortwährend vermehrt, wird er sich beim zweiten beständig vermindern. Es folgt hieraus, dass, sobald wie bestimmte electromagnetische Schwingungen vermittels solcher Anordnung durch äussere Arbeitsleistung erzeugen können, dass das Princip der kleinsten Wirkung erfüllt ist, Zustände möglich sind, bei denen umgekehrt vermittels derselben Anordnungen, vorhandene Energie

1) v. Helmholtz, Crelle's Journ. **100.** p. 141. Berl. Ber. **10.** März 1892.

2) W. Wien, Wied. Ann. **45.** p. 722. 1892.

electromagnetischer Schwingungen in äussere Arbeit umgesetzt werden kann. Solche Schwingungen also, die von endlichen Körpersystemen erzeugt werden, können in der Wärmestrahlung nicht vorkommen, weil wir sonst mit denselben Systemen aus gegebener Strahlung, die sich durch anliegende warme Körper ersetzt, die Energie dieser Schwingungen dauernd ohne sonstige Compensation in Arbeit umsetzen könnten. Dass vermittels Wechselstrommaschinen, die einerseits electrische Schwingungen erzeugen, andererseits die Energie von Wechselströmen in Arbeit umsetzen können, Arbeit ohne Compensation aus Wärme erzeugt werden könnte, wenn in der Strahlung Schwingungen von entsprechender Dauer vorhanden wären, ist bereits von Hrn. Rubens ausgesprochen worden. Dasselbe Resultat ist von mir früher durch ganz andere Betrachtungen abgeleitet worden.[1]) Uebrigens würde bei der Existenz langer Wellen der electromagnetische Druck der Strahlung selbst eine Umsetzung von Energie der Strahlung in Arbeit ohne Compensation ermöglichen. Nehmen wir an, wir hätten homogene Strahlung in einem geschlossenen spiegelnden Raum, die an einem beweglichen Theil der Wand gleiche Phase besitzt; wenn wir den Raum vergrössern, so leistet der Druck der Strahlung Arbeit, aber die Compensation hierfür liegt in der Volumenvergrösserung, die ohne einen gleichen Arbeitsaufwand nicht rückgängig gemacht werden kann. Der Druck auf die Wände hat die halbe Periode der Schwingung, während er vom Werth Null bis zum Maximum ansteigt und wieder auf Null herabsinkt.

Wenn wir aber der Schwingung mit der Bewegung des Spiegels so folgen könnten, dass wir ihn, während der Druck in der Nähe des Nullpunktes liegt, der Strahlung entgegenführen, in der Nähe des Maximums des Druckes dagegen die Strahlung Arbeit leisten lassen, so wird diese Arbeit ohne Compensation erzeugt.

Es mag dahingestellt bleiben, ob die erforderliche Geschwindigkeit des Stempels bei den wirklichen Wärmestrahlen der Natur der Sache nach unmöglich ist, oder, was wahrscheinlicher ist, die scheinbar secundären, nicht umkehrbaren

---

1) W. Wien, Wied. Ann. **49**. p. 633. 1893.

Begleiterscheinungen, wie die Reibung, ein grosses Uebergewicht erhalten, jedenfalls geht auch hieraus hervor, dass die Wellenlängen in der Wärmestrahlung eine gewisse Grenze nicht überschreiten dürfen. Ebenso wie der zweite Hauptsatz nur solange gilt, als man die Bewegung der Molecüle nur in ihrer Gesammtheit angreifen kann, ebenso hört er auf zu gelten, sobald man auf die einzelnen, von der Wärme erregten Schwingungen zu wirken vermag.

Wenn wir die in der betrachteten Weise eingeschlossene Strahlung zusammendrücken, so entsteht die Frage, welche Richtung die durch äussere Arbeitsleistung hinzukommende Strahlung hat. Wenn die Reflexion auch während der Bewegung regelmässig bleibt, so wird jeder Punkt, der die Wellen durch Zurückwerfung an dem Spiegel erhielt, sobald der Spiegel sich rückwärts bewegt, eine der Verminderung der Dichtigkeit entsprechende geringere Strahlung erhalten, vorausgesetzt, dass die Geschwindlgkeit der Bewegung unendlich klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, die Strahlung sich also in jedem Moment vollkommen ausgeglichen hat. Bei umgekehrter Bewegung des Spiegels tritt eine entsprechende Vermehrung ein. Es folgt dies aus dem von Kirchhoff präciser ausgedrückten Huygens'schen Princip.[1]) Hiernach kann der Zustand in irgend einem Punkte betrachtet werden als herrührend von einer über die reflectirenden Wände ausgebreiteten Schicht leuchtender Punkte. Nehmen wir die bewegte Wand als eben an. Von der von einem bestimmten Erregungscentrum ausgehenden Strahlung erhält jeder Punkt eine endliche Energiemenge nur von einer unendlich kleinen Stelle der Ebene aus. Alle anderen Theile liefern einen verschwindenden Beitrag. Durch die Bewegung des Spiegels wird die Strahlung vermehrt, als ob die Erregung der Strahlung in der fingirten Schicht leuchtender Punkte verstärkt würde. Da aber die an den betrachteten Punkt gelangende Energie, soweit sie nicht von der unendlich kleinen Stelle herrühren, vorher unendlich klein war, muss sie auch jetzt noch verschwinden. Die durch Bewegung des Stengels vermehrte Strahlung geht also den Weg der regelmässigen Strahlen. Nur hierdurch wird der Vorgang bei regelmässiger Reflexion überhaupt umkehrbar.

1) Kirchhoff, Sitzungsber. der Berl. Akad. vom 22. Juni 1882.

§ 4. **Die Temperatur als integrirender Nenner des Differentials der zugeführten Energie und die Bestimmung der Entropie. Veränderung der Farbe nach dem Doppler'schen Princip.**

Bei den Volumenänderungen eingeschlossener Strahlung haben wir solche zu unterscheiden, bei denen die Strahlung in dauernder Berührung mit dem strahlenden Körper gedacht wird, die also bei genügend grossem Wärmevorrath des Körpers isotherm verlaufen, und solchen, bei denen die Strahlung, von strahlenden Körpern getrennt, in vollkommen spiegelnden Hüllen eingeschlossen gedacht wird. Bei den letzten Vorgängen wird die Farbe der Strahlung nach dem Doppler'schen Princip geändert, wie ich bereits früher gezeigt habe.[1]) Wenn ursprünglich zerstreute Strahlung in einem rechtwinkeligen Parallelepiped mit regelmässig spiegelnden Wänden hin- und hergeworfen wird, so werden die Strahlen, die unter einem bestimmten Winkel gegen die Normale des Spiegels auffallen, diesen Winkel auch bei der Volumenverkleinerung bewahren. Hierbei werden die Strahlen um so mehr durch äussere Energie verstärkt, je kleiner der Winkel ist, den sie mit der Normale bilden. In derselben Weise werden diese Strahlen auch stärker von der Veränderung infolge des Doppler'schen Princips betroffen. Man erhält dann Strahlen, die je nach der Richtung verschiedene Färbung besitzen. Die Veränderung der Farbe sowohl wie der Intensität ist bei diesem Vorgange vollkommen umkehrbar. Für die letztere haben wir die Umkehrbarkeit schon in § 3 gezeigt.

Die Veränderung der Farbe geschieht nach der Gleichung

$$\lambda_1 = \frac{c + 2\,v \cos\alpha}{c}\,\lambda_0,$$

wo λ_0 die ursprüngliche Wellenlänge, λ_1 die Wellenlänge nach *einer* Reflexion am bewegten Spiegel, v die Geschwindigkeit des Spiegels und c die Lichtgeschwindigkeit, α der Winkel zwischen Spiegelnormale und Stahl ist. Ist x die Entfernung des bewegten Spiegels von der gegenüberstehenden Wand, so wird der Strahl n mal am bewegten Spiegel zurückgeworfen, während der Spiegel den Weg dx zurücklegt, wo

$$n = \frac{dx}{2\,x} \cdot \frac{c}{v} \cos\alpha.$$

1) W. Wien, Sitzungsber. der Berl. Akad. vom 9. Febr. 1893.

Nehmen wir c unendlich gross auch gegen x/dx, so ist die Wellenlänge nach der Zeit dx/v

$$\lambda = \left(1 + \frac{2\,v\cos\alpha}{c}\right)^n \lambda_0 = \left(1 + \frac{2\,v\cos\alpha}{c}\right)^{\frac{dx}{2x}\cdot\frac{c}{v}\cos\alpha} = e^{\frac{dx}{x}\cos^2\alpha}\,\lambda_0.$$

Aus dieser Form ist ersichtlich, dass bei Zurückgehen λ wieder λ_0 wird. Die durch äussere Arbeitsleistung hinzukommende Energie nimmt die Farbe jeder Einzelschwingung an, deren Druck in dem betreffenden Augenblick überwunden wird. Sie addirt sich daher einfach zu den vorhandenen.

Wenn dagegen die Strahlung von Wänden, die zerstreut spiegeln, zurückgeworfen wird, so tritt weder ein Vorzug in der Farbe noch in der Energie für verschiedene Richtung ein. Da in diesem Falle die Strahlung sich dauernd im Zustande stabilen Gleichgewichtes befindet, so ist die Veränderung der Farbe dieselbe, wie sie durch entsprechende Temperaturänderung hervorgerufen wird.

Bei solchen Anordnungen, wie wir sie zur Herstellung abgegrenzter Strahlenkegel benutzen, können, wie wir bereits sahen, ebenfalls adiabatische Veränderungen gedacht werden, wenn nämlich die strahlende Fläche durch eine regelmässig spiegelnde ersetzt wird. Im allgemeinen behalten die Strahlen hier ihre Richtung nicht bei. Wenn die strahlende Fläche sehr klein wird, so erhalten wir eine Anordnung, bei der alle Strahlen nahe senkrecht auf den Spiegel fallen, es verändert sich dann die Farbe sowohl als die Energie für alle gleichmässig. Auch diese Vorgänge sind umkehrbar.

Bevor wir uns zu der Berechnung der Farbenänderung wenden, müssen wir nachweisen, dass in allen diesen Fällen, die von uns definirte Temperatur auch die erforderliche Eigenschaft hat, integrirender Nenner des Differenzials der zugeführten Energie zu sein. Hierdurch ergiebt sich dann auch sofort der Werth der Entropie. Schreiben wir das Differential der zugeführten Energie zunächst allgemein in der Form

$$dQ = M\,dx + N\,dy,$$

wo x und y die beiden den Zustand bestimmenden Variabeln, M und N Functionen von x und y sind, so ist unter den unendlichen vielen integrirenden Nennern einer dadurch ausgezeichnet, dass er nur eine Function von x oder y allein ist.

Es ist nun von Hrn. Budde[1]) nachgewiesen, dass die absolute Temperatur derjenige integrirende Nenner der zugeführten Wärme ist, der nur eine Function der beliebig gewählten Temperaturscala ist, und unabhängig vom zweiten bestimmenden Parameter (z. B. Volumen). Ist x die Temperaturvariable, so muss die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = f(x), \tag{6}$$

dann ist der die Temperatur bestimmende integrirende Nenner

$$D = \text{const.}\, e^{\int f(x)\, d x} \tag{7}$$

Betrachten wir zunächst vollkommen zerstreute Strahlung eines schwarzen Körpers, so wird, wie wir gesehen haben, der Zustand durch Dichtigkeit ψ und Volumen vollständig bestimmt. Denkt man sich graphisch die Dichtigkeit als Ordinate, das Volumen als Abscisse aufgetragen, so kann jede beliebige Curve aus adiabatischen und isothermen Zweigen zusammengesetzt werden, indem man sie so häufig abwechseln lässt, dass die gebrochene Linie der Curve mit beliebiger Annäherung sich anschliesst. Wir können demnach sowohl der Dichtigkeit als auch dem Volumen alle möglichen Werthe gleichzeitig beilegen, sodass sie als von einander unabhängige Variable eingeführt werden können. Die Dichtigkeit ist hier die Temperaturvariable, von der der die Temperatur ausdrückende integrirende Nenner allein abhängen darf.

Es befinde sich nun die Strahlung in einem geraden Cylinder, dessen Querschnitt die Flächeneinheit ist. $a - x$ sei die Entfernung eines beweglichen Stempels von einer festen Basis an gerechnet, so ist $\psi(a - x)$ die innere Energie des Systems, die wir mit U bezeichnen. Wächst x um dx, so soll das Volumen verkleinert werden, also wird Arbeit gegen den Druck der Strahlen geleistet. Der Mittelwerth des Druckes der Strahlen ist nach Boltzmann[2]) $\frac{1}{3}\psi$ auf die Flächeneinheit, es ist also die nach aussen abgegebene Arbeit $-\frac{1}{3}\psi\, d x = d W$.

1) Budde, Wied. Ann. **45.** p. 751. 1892.
2) Boltzmann, Wied. Ann. **22.** p. 291. 1884.

Die Clausius'sche Gleichung $dQ = dU + dW$ wird also

$$dQ = d\psi(a - x) - \tfrac{4}{3}\psi\, dx.$$

Die Gleichung (6) wird demnach

$$f(\psi) = \frac{1}{4\psi}$$

und (7) gibt

(8) $$D = c\,\psi^{1/4} = \vartheta,$$

wo c eine Constante bezeichnet.

Die Gleichung (8) spricht das bereits von Boltzmann abgeleitete Stefan'sche Strahlungsgesetz aus.

Die *Entropie* S wird durch die Gleichung definirt

$$dS = \frac{dQ}{\vartheta}$$

also

$$S = S_0 + \frac{4}{3c}(a - x)\,\psi^{3/4}$$

Wir wenden uns jetzt zunächst zur Bestimmung der Entropie von Strahlung bestimmter Richtung wie bei der Anordnung in Fig. 2 und beschränken uns auf den Fall, dass die strahlende Fläche sehr klein gegen den Kugelradius ist. Die adiabatischen und isothermen Volumenänderungen müssen hier durch Ausdehnung und Zusammenziehung der ganzen Halbkugel vorgenommen werden, weil sonst die Strahlen grösster Divergenz nicht wieder zurückreflectirt würden. Daher darf auch die Strahlung nicht zwischen zwei Flächen eingeschlossen werden.

Sei r der variable Radius der Kugel. Bezeichnen wir die Grösse $\psi_a r^2$ mit $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}$ innerhalb der Kugel constant bis auf die nahe dem Mittelpunkte gelegenen Stellen; den dort liegenden Energievorrath können wir vernachlässigen, weil das Volumen in der dritten Potenz des Radius zunimmt, die Dichtigkeit im Quadrat abnimmt. Die innere Energie ist dann

$$U = 2\pi\,\psi_a\,.\,r^3 = 2\pi\,\mathfrak{a}\,r$$

also

$$dU = 2\pi\,(r^3\,d\psi_a + 3\,r^2\,dr\,\psi_a).$$

Die nach aussen abgegebene Arbeit ist, während r um dr wächst

$$dW = 2\pi\,r^2\,dr\,.\,\psi_a.$$

Es ist demnach

$$d Q = d U + d W = 2 \pi (r^3 d \psi_a + 4 \psi_a r^2 d r).$$

Nach (6) ist auch hier, da jetzt ψ_a Temperaturvariable ist

$$f(\psi_a) = \frac{1}{4 \psi_a}$$

demnach

$$\vartheta = c \psi_a{}^{1/4}$$

und

$$S = S_0 + \frac{8 \pi}{3 c} \cdot \psi^{a^{3/4}} r^3.$$

Die Strahlung bestimmter Richtung hängt in derselben Weise von der Temperatur ab, wie die vollkommen zerstreute.

Aus der Beziehung, dass die Veränderung der zerstreuten Strahlung bei adiabatischem Vorgange nach dem Doppler'schen Princip die gleiche Veränderung der Farbe zeigen muss, wie die durch Temperaturveränderung hervorgebrachte, habe ich durch Bildung von Mittelwerthen diese Veränderung als Function der Temperatur in der bereits erwähnten Arbeit berechnet.

Wir können jetzt dieselbe Berechnung bei der Strahlung bestimmter Richtung anstellen, ohne dass wir Mittelwerthe zu bilden brauchen, weil die Strahlen sehr nahe senkrecht den Spiegel treffen und deshalb auch gleiche Veränderung erleiden. Die Zahl n der Reflexionen an der bewegten Kugel ist hier während r um $d r$ sich ändert

$$n = \frac{d r}{2 r} \cdot \frac{c}{v}.$$

Die neue Wellenlänge also

$$\lambda_n = e^{\frac{d r}{r}} \lambda = \left(1 + \frac{d r}{r}\right) \lambda.$$

Setzen wir

$$\lambda_n = \lambda + d \lambda,$$

so ist

$$d \lambda = \frac{d r}{r} . \lambda, \qquad \lambda = \frac{r}{a} \lambda_0,$$

wo a der Werth von r für $\lambda = \lambda_0$ ist.

Nun ist bei adiabatischen Veränderungen $d Q = 0$ also

$$0 = r d \psi_a + 4 \psi_a d r.$$

Hieraus folgt

$$\psi_a = \left(\frac{a}{r}\right)^4 \psi_a'.$$

Hier entspricht ψ'_a dem Werthe $r = a$; ψ'_a und λ_0 sind also zusammengehörige Werthe. Eliminiren wir a/r so folgt

$$\frac{\psi_a}{\psi'_a} = \frac{\lambda_0{}^4}{\lambda^4}.$$

Da nun

$$\frac{\psi_a}{\psi'_a} = \frac{\vartheta^4}{\vartheta_0{}^4}$$

war, wo dann ϑ_0 der zu ψ'_a gehörende Werth von ϑ ist, so erhalten wir

$$\vartheta\,\lambda = \vartheta_0\,\lambda_0.$$

Dies ist dieselbe Gleichung, die ich aus der Betrachtung der Mittelwerthe abgeleitet hatte. Es folgt hieraus, dass die zu einer bestimmten Farbe gehörende Energie auch nach der Veränderung zu der veränderten Farbe gehört.

Liegen die Grenzen eines schmalen, aus dem Normalspectrum ausgeschnittenen Spectralbandes vor der Temperaturänderung bei λ_0 und $\lambda_0 + \delta\,\lambda_0$, so werden die neuen Grenzen bei

$$\lambda = \frac{\vartheta_0\,\lambda_0}{\vartheta} \quad \text{und} \quad \lambda + \delta\,\lambda = \frac{\vartheta_0}{\vartheta}(\lambda_0 + \delta\,\lambda_0)$$

liegen. Die Steigerung der Gesammtdichtigkeit ist

$$\psi = \psi_0\,\frac{\vartheta^4}{\vartheta_0{}^4}.$$

Sie vertheilt sich, wie wir gesehen haben so, dass die Dichtigkeit *jeder* Farbe dieser Gleichung entsprechend gesteigert wird. Setzen wir

$$\psi_0 = \int_0^\infty \varphi_0\,\delta\,\lambda_0, \text{ so ist } \varphi = \varphi_0\,\frac{\vartheta^4}{\vartheta_0{}^4}, \quad \delta\lambda_0 = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\,\delta\,\lambda,$$

also

$$\psi = \int_0^\infty \varphi\,d\,\lambda = \int_0^\infty \frac{\vartheta^5}{\vartheta_0{}^5}\,\varphi_0\,\delta\,\lambda.$$

Jeder festgelegten Farbe λ_0 entspricht nach der Aenderung eine neue Farbe λ und eine Ordinate

$$\varphi = \frac{\vartheta^5}{\vartheta_0{}^5}\,\varphi_0.$$

Sobald die Energievertheilung im Spectrum eines schwarzen

Körpers bei einer Temperatur bekannt ist, lässt sie sich für jede andere ableiten.

Es lässt sich leicht einsehen, dass die Curven verschiedener Temperatur einander nie schneiden dürfen. Denn wenn für eine Farbe die der tieferen Temperatur entsprechende Strahlung grössere Dichtigkeit der Energie besässe als die Strahlung höherer Temperatur, so könnte man mit Hülfe einer Platte, die diese Farbe vorzugsweise hindurchlässt, Energie tieferer zu höherer Temperatur bringen, ohne dass sonst eine Veränderung zurückbliebe.

Wir können hiernach mit Hinzuziehung der soeben gewonnenen Ergebnisse eine Curve angeben, die steiler abfällt, als es die Curve der Energievertheilung des schwarzen Körpers nach der Seite der langen Wellen hin darf. Wir gehen aus von den Gleichungen

$$\lambda\,\vartheta = \text{const.} \qquad \varphi = \text{const.}\,\vartheta^5.$$

Sei $(d\varphi/d\lambda)\,d\lambda$ der Zuwachs, den φ bei constantem ϑ erfährt, wenn λ um $d\lambda$ wächst. Dagegen rückt jeder Punkt der Curve $\varphi(\lambda)$, wenn ϑ um $d\vartheta$ wächst, nach der Seite der kleineren λ um die Strecke

$$d\lambda = \frac{\text{const.}}{\vartheta^2}\,d\vartheta$$

vor. Wenn die Curven für ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ sich nicht schneiden sollen, muss also sein

$$-\frac{d\varphi}{d\lambda}\,d\lambda < -\frac{d\varphi}{d\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{d\lambda}\,d\lambda.$$

Nun ist

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{5\,\varphi}{\vartheta}, \qquad \frac{d\vartheta}{d\lambda} = -\frac{\vartheta}{\lambda},$$

also

$$-\frac{d\varphi}{d\lambda}\,d\lambda < +\frac{5\,\varphi}{\lambda}.$$

Auf der Seite, wo $d\varphi/d\lambda$ negativ ist, also vom Maximum an nach den langen Wellen zu, ist der Grenzwerth für $-d\varphi/d\lambda$ überall

$$-\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{5\,\varphi}{\lambda}$$

Jeder Theil dieses Zweiges der Curve für die Energievertheillung muss weniger steil gegen die Abscissenaxe abfallen als die Curve

$$\varphi = \frac{\text{const.}}{\lambda^5}$$

und zwar für jede Temperatur.

In Fig. 5 ist die Gestalt dieser Curve gezeichnet, die einer Temperatur entspricht, wo für das Maximum der Energievertheilung

$$\frac{\varphi \max}{\lambda \max} = 4$$

ist. Nachdem wir nachgewiesen haben, dass bei den umkehrbaren Veränderungen, durch die wir die Entropie der Strahlung schwarzer Körper bestimmten, jede homogene Farbe sich unabhängig von der Existenz der übrigen verändert, sehen wir ohne weiteres ein, dass die Entropie der Strahlung eines schwarzen Körpers sich zusammensetzen muss aus den Entropieen der einzelnen homogenen Farben. Das Verhältniss von Energie und Entropie jeder Farbe muss dabei für alle Farben constant sein. Die Entropie der homogenen Strahlung $\varphi(\lambda) d\lambda$ ist hiernach gleich der der Strahlung des schwarzen Körpers multiplicirt mit dem Verhältniss der Energieen, also

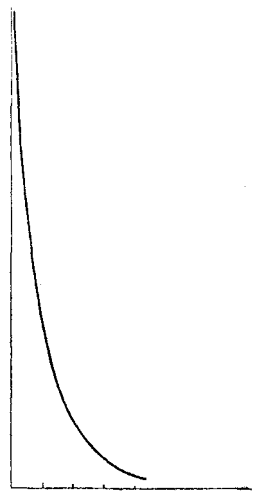

Fig. 5.

$$s = s_0 + \frac{4}{3c}(a - x)\,\psi^{3/4}\,\frac{\varphi\, d\lambda}{\psi}$$

$$= s_0 + \frac{4}{3}(a - x)\frac{\varphi\, d\lambda}{\vartheta}.$$

Die Berechtigung zu dieser Zerlegung liegt darin, dass allen Farben dieselbe Temperatur zukommt, und wir die Entropie eines warmen Körpers von gleichmässiger Temperatur in einzelne Theile nach dem Verhältniss der vorhandenen Energie zerlegen können.

Bei Strahlung zusammengesetzter Farbe ist dann die Entropie

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \frac{4}{3}(a - x)\int_0^\infty \frac{\varphi\, d\lambda}{\vartheta}$$

wo ϑ, wie wir oben gesehen, als Function der Wellenlänge zu behandeln ist. Aus der Definition der Strahlung schwarzer Körper konnten wir schliessen, dass die Entropie hier ihren grössten Werth im Vergleich zu einer anderen Farbenzusammensetzung hat. In der That ist

$$\delta \mathfrak{S} = 0,$$

wenn ϑ = const. ist.

Wenn Strahlung einfacher Farbe in Strahlung gemischter Farbe übergeht, so wächst die Entropie und diese Zunahme bildet die Compensation für die hierbei mögliche Arbeitsleistung. Es besteht eine vollständige Analogie zu der Entropievermehrung, die man bei der Mischung getrennter Gase erhält. Auch bei den Gasen ist die Entropie des Gemisches gleich der Summe der Entropieen der einzelnen Gase als ob jedes allein vorhanden wäre. Aber ein nicht zu übersehender Unterschied besteht darin, dass die Verschiedenheiten der Gase selbst Verschiedenheiten der Entropie auch bei gleicher Temperatur ermöglichen, während wir es nur mit der Energie selbst zu thun haben, die nur durch Unterschiede in ihrer Temperatur den Werth der Entropie verändert.

Der Maximalwerth der Arbeit, die gewonnen werden kann, wenn gegebene Strahlung von der Zusammensetzung $\varphi(\lambda)$ in die Zusammensetzung der Strahlung eines schwarzen Körpers übergeht, war nach Gleichung (2)

$$= (a - x)\left(\psi - \vartheta_0 \int_0^\infty \frac{\varphi \, d\lambda}{\vartheta}\right) = (a - x)\,\psi - \frac{3}{4}\,\vartheta_0 (\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0).$$

Die Bestimmung der Entropie von Strahlung bestimmter Richtung bei verschiedener Farbenzusammensetzung ergiebt sich von selbst.

§ 5. Umkehrbare und nicht umkehrbare Processe.

Nach den bisher angestellten Betrachtungen können wir Temperatur und Entropie für jede beliebig gegebene Strahlengattung bestimmen. Die Vorgänge bei der Volumenvergrösserung der Strahlung sind umkehrbar, wenn die Energie jeder Farbe das Maximum der Arbeit leistet. Dass wir durch den Strahlendruck bei vorhandener Temperaturdifferenz wirklich die dem Carnot'schen Princip entsprechende nur durch die Temperaturdifferenz bedingte grösste Arbeitsleistung erhalten, sehen wir aus folgender Betrachtung.

Wenn wir in zwei rechtwinkelig parallelepipedischen Räumen mit zerstreut spiegelnden Wänden, die neben einander liegen, Strahlung schwarzer Körper von der Dichtigkeit ψ_1 und $\psi_2 < \psi_1$ haben, so können wir ein Arbeitsquantum ohne Volumenänderung des ganzen Systems dadurch gewinnen, dass wir die als beweglich gedachte Zwischenwand, die die Flächeneinheit haben möge, unter dem Ueberdrucke $\frac{1}{3}(\psi_1 - \psi_2)$ Arbeit leisten lassen, bis beiderseits gleicher Druck herrscht. Dann ist auch beiderseits die Temperatur die gleiche; b sei die Entfernung der beweglichen Zwischenwand von der gegenüberliegenden in dem Raume wo ψ_2 herrscht, a dieselbe Grösse in dem andern. Die bewegliche Zwischenwand verschiebt sich parallel mit sich selbst um den Werth x bis die sich ändernde Dichte ψ', gleich der ebenfalls variabeln ψ_2' geworden ist.

Der Energiewerth in 1 ist anfänglich

$$U_1 = a\psi,$$

während der Veränderung

$$U_1' = (a + x)\psi',$$

ebenso

$$U_2 = b\,\psi_2, \qquad U_2' = (b - x)\,\psi_2',$$

also

$$\frac{d\psi_1'}{dx} = \frac{dU_1'}{dx}\,\frac{1}{a+x} - \frac{U_1'}{(a+x)^2}.$$

Die geleistete Arbeit während der Verschiebung dx ist

$$\frac{dU_1'}{dx}\,dx = -\frac{1}{3}\,\psi_1'\,dx,$$

also

$$\frac{d\psi_1'}{dx} = -\frac{4\,\psi_1'}{3\,(a+x)},$$

$$\psi_1' = \left(\frac{a}{a+x}\right)^{4/3}\psi_1.$$

Ebenso ist

$$\psi_2' = \left(\frac{b}{b-x}\right)^{4/3}\psi_2.$$

Nach der Veränderung soll

$$\psi_1' = \psi_2',$$

also

$$\left(\frac{a}{a+x}\right)^{4/3}\psi_1 = \left(\frac{b}{b-x}\right)^{4/3}\psi_2$$

sein.

Die nach aussen gewonnene Arbeit ist

$$W = \frac{1}{3}\int_0^x (\psi_1' - \psi_2')\,dx = \psi_1\, a\left(1 - \frac{a^{1/3}}{(a+x)^{1/3}}\right)$$
$$+ \psi_2\, b\left(1 - \frac{b^{1/3}}{(b-x)^{1/3}}\right).$$

Ist die Veränderung in 2 nicht adiabatisch, sondern durch Verbindung mit einem strahlenden Körper von grosser Wärmecapacität isotherm, so bleibt ψ_2' constant gleich ψ_2, es wird

$$\left(\frac{a}{a+x}\right)^{4/3}\psi_1 = \psi_2\,, \qquad W = \psi_1\, a\left(1 - \frac{a^{1/3}}{(a+x)^{1/3}}\right)$$
$$= \psi_1\, a\left(1 - \frac{\psi_2^{1/4}}{\psi_1^{1/4}}\right)$$
$$= \psi_1\, a\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1}\right).$$

Es ist dies Quantum Wärme von der Temperatur ϑ_1 in Arbeit verwandelt, während die Menge $\psi_1\, a(\vartheta_2/\vartheta_1)$ von der Temperatur ϑ_1 auf die Temperatur ϑ_2 gesunken ist. Nach den bekannten Sätzen von Clausius ist die gewonnene Arbeit die grösste, die gewonnen werden kann.

Es folgt aus diesen Betrachtungen, dass alle die Veränderungen der Strahlung nicht umkehrbar sind, bei denen Strahlung ohne Arbeitsleistung ihr Volumen vergrössert. Daher ist die freie Ausstrahlung warmer Körper ein nicht umkehrbarer Vorgang.

Aber auch jede ohne Arbeitsleistung vor sich gehende Vermischung von Strahlung verschiedener Farbe ist nicht umkehrbar, in derselben Weise, wie die Vermischung zweier Gase ohne Arbeitsleistung nicht umkehrbar ist. In beiden Fällen wächst die Entropie.

Wenn wir in einem, mit der Strahlung eines schwarzen Körpers erfüllten, Raum einen zerstreuenden Spiegel bewegen, der frei begrenzt ist und dessen Ränder in endlichem Abstand von den Wänden bleiben, so kann diese Bewegung ohne angebbare Arbeitsleistung vollzogen werden, weil der Druck auf beiden Seiten immer der gleiche bleibt. Infolgedessen darf auch keine Veränderung der Farbe eintreten, weil eine solche einer Arbeitsleistung entsprechen würde.

Die Veränderungen der Farbe nach dem Doppler'schen Princip gleicht sich an der Vorder- und Rückfläche im Mittel auf den Werth Null aus, weil im Mittel jedes Energiequantum gleich oft an der Vorder- und Rückfläche des Spiegefs zurückgeworfen wird. Dieser Fall zeigt deutlich, wie erst durch die Mittelwerthe der vom zweiten Hauptsatz und dem Wärmegleichgewicht geforderte Zustand eintritt.

Es lässt sich auch die Folgerung ziehen, die wir oben bereits aus anderen Betrachtungen gewonnen hatten, dass man nicht auf die Energie einzelner Farben in der Wärmestrahlung verändernd einwirken kann.

So darf keine Platte existiren, die nur Strahlen, deren Farbe zwischen zwei bestimmten Wellenlängen liegt, *vollkommen hindurchlässt*, alle übrigen *vollkommen reflectirt* unabhängig von der Richtung der Strahlen. Man könnte durch eine solche Platte die Strahlung eines schwarzen Körpers in zwei Theile theilen, die Bewegung der Platte würde dann die Farbe und Energie der hindurchgelassenen Strahlung nicht verändern, dagegen die übrigen in der bereits betrachteten Weise. Wählen wir die Platte so, dass die Wellenlängen $\lambda = a$ und $\lambda = b$, welche die Farbe der hindurchgelassenen Energie abgrenzen, auf der Seite des Maximums der Energievertheilung liegen, wo die Intensität nach den langen Wellen hin stark abfällt.

Sei $b > a$. Auf der Seite der Platte, wo die Strahlung zusammengedrückt wird, verkürzen sich alle Wellenlängen, die nicht zwischen a und b liegen, und die Energie der Farben, deren Wellenlänge etwas grösser als b ist, erhalten jetzt Wellenlängen, die zwischen a und b fallen und sich daher durch den ganzen Raum frei ausbreiten.

Ebenso würden bei a die anliegenden Farben von kürzerer Wellenlänge der sich ausdehnenden Strahlung zwischen a und b fallen und sich durch die Platte hindurch vertheilen. Da nun $\varphi_a > \varphi_b$, so würde mehr Energie von der Seite, wo die Strahlung sich ausdehnt, nach der anderen Seite gelangen, als umgekehrt. Dieser Ueberschuss würde sich zu dem sonst vorhandenen, durch Zusammendrückung entstandenen Ueberschuss der Dichtigkeit addiren und mit diesem zusammen auf einen vollkommenen Spiegel drücken, der an die Stelle der Platte gesetzt wird.

Wenn man mit dem Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung zurücklegt, würde man demnach mehr Arbeit erhalten, als man für die Bewegung der Platte aufgebraucht hat, und ausserdem noch eine Farbenänderung zurückbehalten.

Man darf daher einer solchen Lamelle nur solche Eigenschaften zuschreiben, wie es von Kirchhoff geschieht, dass sie Strahlung einer Farbe vorzugsweise hindurchlässt, die andere vorzugsweise zurückwirft, wobei aber immer ein endliches Verhältniss zwischen durchgelassenen und zurückgeworfenen Strahlen bestehen bleibt. Dann ist der eben erörterte Process nicht möglich.

Wir können aus der Existenz der wirklich realisirbaren Platte noch eine Folgerung ziehen, durch die das oben gewonnene Ergebniss bestätigt wird, dass homogene zerstreute Strahlung bei adiabatischer Volumenänderung homogen bleibt. Wir sahen bereits, dass die Bewegung eines freien Spiegels in der Strahlung die Farbe nicht ändern darf. Der Ausgleich der Farbenveränderung nach dem Doppler'schen Princip an der Vorder- und Rückseite muss für *jede* Farbe für sich geschehen, ohne dass Uebereinanderlagerungen verschiedener Farbe stattfinden dürfen. Wenn diese nämlich stattfänden, so würde durch Bewegung einer freien Platte, die bestimmte Farben stärker hindurchlässt als andere, erreicht werden können, dass die Ueberlagerung der stärker reflectirten also auch an beiden Seiten der Platte stärker geänderten Farben über die mehr hindurchgelassenen also weniger geänderten stattfände. Hierbei würde eine Veränderung der Farbenzusammensetzung eintreten. So würde man das Maximum der Energievertheilung stärker verändern können, und wenn also die Veränderung mit einem Energieaustausch mit den anderen Farben begleitet wäre, so würde das Maximum mehr Energie abgeben als zurückerhalten. Die Folge wäre eine Abplattung der Curve der Energievertheilung. Wenn dagegen jede Farbe für sich ausgeglichen wird, so wird es keinen Unterschied machen, ob vollkommene Spiegel oder theilweise durchlässige Platten bewegt werden.

Wir werfen zum Schluss noch einen Blick auf die mannigfaltigen Processe, bei denen Arbeit von der Strahlung geleistet wird. Die chemischen Lichtwirkungen, die Erzeugung eines galvanischen Stromes durch Belichtung von Electroden, die Erzeugung electrischer Ladungen unter dem Einflusse des ultravioletten Lichtes, die von Hallwachs und Righi beobachtet wurden, sind Beispiele derartiger Verwandlungen. Da diese Experimente nur qualitativ sind, so lässt sich nicht sehen, ob bei ihnen wirklich das Maximum der möglichen Arbeitsleistung erzielt wird.

Bei der Fluorescenz wird die Farbe des einfallenden Lichtes verändert; da es sich hier um die sichtbaren Strahlen handelt und das Maximum der Energievertheilung der Strahlung schwarzer Körper bei den Intensitäten, wie wir sie auf fluorescirende Körper fallen lassen, im Ultrarothen liegt, so nimmt die Entropie nach den brechbareren Strahlen hin ab. Wenn die Fluorescenz das Stokes'sche Gesetz befolgt, d. h. die Wellenlänge grösser wird, so entspricht der Vorgang einer Vermehrung der Entropie. Bei Substanzen, die ausschliesslich im entgegengesetzten Sinne wirken, kann die Verwandlung nicht ohne Compensation vor sich gehen, die in gleichzeitiger Absorption bestehen wird. Es lässt sich aus unseren Ergebnissen der Betrag der mindestens eintretenden Absorption leicht berechnen. Es folgt noch, dass fluorescirende Substanzen ihre Eigenschaften in solchen Temperaturen verändern müssen, wo sie selbst sichtbare Strahlen aussenden. Denn wenn dann Strahlung derselben Temperatur auf sie fällt, die sie selbst besitzen, ist die Compensation durch Absorption nicht mehr möglich.