# VII. *Messung der Inductionsconstanten mit dem „optischen Telephon"; von Max Wien.*

(Hierzu Taf. VI Fig. 15—26.)

Durch die vielfache Anwendung, welche die Wechselströme in neuerer Zeit in Wissenschaft und Technik gefunden haben, hat die Messung der Inductionsconstanten, d. h. des Selbstpotentials, des gegenseitigen Inductionscoëfficienten und der Capacität eine ähnliche Bedeutung erlangt, wie die des galvanischen Widerstandes.

Es soll im Folgenden eine Methode beschrieben werden, welche es gestattet, die Inductionsconstanten in ähnlicher Art und mit annähernd derselben Genauigkeit zu messen, wie Widerstände.

Ich habe früher [1]) das Selbstpotential von Rollen in der Weise bestimmt, dass die Ausschläge des optischen Telephons bei verschiedenen Einstellungen der Wheatstone'schen Brücke miteinander verglichen wurden. Im Folgenden soll nur die *Nulleinstellung* der Brücke zur Anwendung kommen.

Es ist also vor allem die Bedingung dafür aufzustellen, dass ein Sinusstrom von der Periode $n$ im Brückendraht verschwindet, wenn die vier Zweige der Brücke Widerstand, Selbstinduction und Capacität besitzen.

Es sei mir gestattet, den Ausdruck für die Amplitude eines Wechselstroms im Brückenzweige noch einmal kurz abzuleiten, indem ich mich dabei an die einschlägigen Arbeiten von Oberbeck[2]) und Lord Rayleigh[3]) anschliesse.

Die Potentialdifferenz $V$ an den beiden Endpunkten eines Leiters ist bei constantem Strom mit der Stromintensität $J$ durch die Gleichung

$$V = wJ$$

verbunden.

1) M. Wien, Wied. Ann. 42. p. 603. 1891.

2) Oberbeck, Wied. Ann. 17. p. 820. 1882.

3) Lord Rayleigh, Proc. of the Roy. Soc. 49. p. 203. 1891.

Bei dem periodischen Strom $J = e^{int}$ besteht dieselbe Gleichung $V = wJ$, wenn der Leiter ohne merkliche Selbstinduction oder Capacität ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so treten neue electromotorische Kräfte innerhalb des Zweiges auf. Hat der Leiter das Selbstpotential $p$, so ist für einen variablen Strom:

$$V = wJ + p\frac{\partial J}{\partial t}$$

und für den Strom $J = e^{int}$:

$$V = we^{int} + inp\, e^{int} = (w + inp)\, e^{int}.$$

Ist ausserdem ein Condensator von der Capacität $c$ eingeschaltet, so ist für einen variablen Strom:

$$V = wJ + p\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{c}\int J\, dt,$$

oder für $J = e^{int}$:

$$V = \left(w + inp + \frac{1}{inc}\right) e^{int} = \left\{w + i\left(np - \frac{1}{nc}\right)\right\} e^{int}. \text{[1]}$$

Es bleibt also auch für den Strom $e^{int}$ die Proportionalität zwischen Potentialdifferenz und Stromintensität bestehen, nur muss man als Proportionalitätsfactor statt des Widerstandes $w$ den Widerstandsoperator $a = w + inp + 1/inc$ einführen: $V = aJ$.

Bei einem verzweigten Leitersystem gelten, wenn im Hauptzweig, dem Sitz der electromotorischen Kraft, der constante Strom $J = 1$ fliesst, die Kirchhoff'schen Gleichungen:

$$\Sigma(k) = 0 \quad \text{für jeden Verzweigungspunkt,}$$
$$\Sigma(kw) = 0 \quad \text{für jeden Kreisumlauf,}$$

$k$ ist darin das Verhältniss der Stromintensität in dem betreffenden Zweige zu der des Hauptzweiges, also ein echter Bruch.

Wenn im Hauptzweig der periodische Strom $J = e^{int}$ ist, so gelten analog die Gleichungen $\Sigma(k) = 0$, $\Sigma(ka) = 0$, worin $k$ das Verhältniss der Stromamplitude des betreffenden Zweiges zu der des Hauptzweiges ist, also im allgemeinen eine complexe Zahl $k = \mu + i\nu$.[2]

1) Ist $np = 1/nc$, so bleibt $w$ allein stehen, d. h. der Zweig verhält sich als ob er weder Selbstinduction noch Capacität besässe. Ich habe dies zur Messung von Flüssigkeitswiderständen benutzt. l. c. I. p. 613.

2) Oberbeck, l. c. p. 822.

Wenn statt des Stromes $e^{int}$ ein einfacher Sinusstrom $J = \sin nt$ durch das System geht, so erhält man die Amplitude ($\alpha$) und die Phasendifferenz ($\varepsilon$) jedes Zweiges im Vergleich zum Hauptzweige durch die Beziehungen:

$$\alpha = \operatorname{mod}(k) = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{\nu}{\mu}.$$

Die Einführung des Stromes $e^{int}$ dient nur zur Vereinfachung der Rechnung und soll im Folgenden immer beibehalten werden.

Wie von einem Widerstand, so kann auch von einem Widerstandsoperator eines verzweigten Leiters gesprochen werden, wobei beide dieselbe Form haben, da sie mit Hülfe derselben Gleichungen berechnet werden, z. B. bei einer Stromschleife (Fig 17):

$$w = \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}, \qquad a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Dieser so berechnete Widerstandsoperator eines verzweigten Leiters ist auch complex $a = a' + i a''$, jedoch ist der reelle Theil ($a'$) nicht wie bei einem einfachen Leiter = dem Widerstand, sondern es treten Glieder hinzu, welche von der Periode abhängig sind.

Dieselben entstehen dadurch, dass bei Multiplication zweier Widerstandsoperatoren das Product der beiden imaginären Theile derselben neue reelle Glieder liefert. In ähnlicher Weise treten auch in dem Widerstandsoperator eines Zweiges durch gegenseitige Induction neue reelle Glieder hinzu, welche von der Periode abhängig sind.

Experimentell verhält sich auch hier der reelle Theil des Widerstandsoperators ($a'$) immer genau wie ein Widerstand. Ich werde deshalb im Folgenden $a'$ den „modificirten Widerstand“ nennen und mit $w'$ bezeichnen. Derselbe ist also mathematisch definirt: der reelle Theil des Widerstandsoperators; physikalisch: die Grösse, welche bei Wechselstrom als Widerstand des Zweiges oder der Verzweigung auftritt.[1]

[1] Nicht zu verwechseln mit dem „scheinbaren Widerstand“:

$$s = \sqrt{w^2 + n^2 p^2}$$

Die Engländer (Heaviside, Rayleigh u. a.) benennen den scheinbaren Widerstand $s$ „impedance“, $a' = w'$ „effective resistance“, $p'$ „effective induction“.

Ebenso kann auch das Selbstpotential geändert erscheinen ich werde dasselbe dann „modificirtes Selbstpotential“ nennen und mit $p'$ bezeichnen. Offenbar sind $w'$ und $p'$, nicht $w$ und $p$, die Grössen, auf welche es in der That ankommt, und welche die Intensität des Wechselstromes in den verschiedenen Zweigen bedingen.

Einen besonderen Fall von Stromverzweigung, welcher von allgemeinerer Bedeutung ist, will ich als Beispiel speciell durchführen.

Ein Zweig enthalte die electrostatische Capacität $c$ (z. B. ein Kabel oder eine eng gewickelte Rolle). Diesen Fall kann man so auffassen, als ob der Zweig keine Capacität besässe, und seine Enden mit einem parallel geschalteten Condensator von der Capacität $c$ verbunden wären; dadurch erhält man eine Stromschleife. (Fig. 16.)

Die Zuleitungen zu den Condensatorplatten sollen keinen merklichen Widerstand oder Selbstinduction besitzen ($w$ und $np$ klein gegen $1/nc$) Dann ist der Widerstandsoperator des Condensatorzweiges: $a_1 = 1/inc$. Der andere Zweig enthält Widerstand und Selbstinduction, also $a_2 = w_2 + inp_2$:

$$a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{(w_2 + inp_2)}{(w_2 + inp_2)\,inc + 1}.$$

Trennt man den reellen und imaginären Theil, so ist:

$$a' = w' = \frac{w_2}{(1 - n^2 c p_2)^2 + n^2 c^2 w_2^{\,2}}, \qquad np' = \frac{np_2 - n^3 c p_2^{\,2} - n c w_2^{\,2}}{(1 - n^2 c p_2)^2 + n^2 c^2 w_2^{\,2}}.$$

Sowohl Widerstand wie Selbstpotential erscheinen durch die Capacität des Zweiges verändert.

Aus obiger Gleichung für $a$ ergibt sich, dass man den Widerstandsoperator eines Zweiges mit Capacität erhält, indem man bildet:

$$a = \frac{(a)}{1 + inc(a)},$$ [1])

worin $(a)$ der Widerstandsoperator, ohne Berücksichtigung der Capacität ist.

Die Stromamplitude im Brückenzweig der W h e a t s t o n e'schen Brücke (Fig. 17), bei gegebener electromotorischer Kraft $E$

1) In etwas anderer Weise schon von O b e r b e c k, l. c. p. 820 u. ff. abgeleitet und benutzt.

im Hauptzweig, lässt sich mit Hülfe der obigen, auf Wechselströme erweiterten Kirchhoff'schen Gleichungen in ganz derselben Weise berechnen, wie für constanten Strom und hat auch ganz dieselbe Form. Sie ergibt sich, wenn die Brücke nahezu im Gleichgewicht ist, als[1]):

$$\frac{\dfrac{(a_1 a_4 - a_2 a_3) E}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}}{\left[a + \dfrac{(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}\right]\left[A + \dfrac{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}\right]}.$$

Hierin ist $A$ der Widerstandsoperator des Hauptzweiges selbst, und

$$\frac{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}$$

der Widerstandsoperator der Zweige 1 — 4 zwischen den Punkten $A$ und $B$: der äussere Widerstandsoperator des Hauptzweiges, im Gegensatz zu $A$ dem inneren. Ebenso ist $a$ der innere Widerstandsoperator des Brückenzweiges, und

$$\frac{(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4},$$

der äussere, gleich dem der Zweige 1 — 4 zwischen den Punkten $C$ und $D$.

Wie erwähnt, soll im Folgenden nur die Nulleinstellung zur Anwendung kommen. Demnach interessirt uns der Nenner nur insofern, als sich die günstigste Anordnung der Brücke für Wechselströme daraus ableiten lässt. Lord Rayleigh[2]) stellt dafür die Bedingungen auf:

$$\text{Mod.}\,(a) = \text{Mod.}\,\frac{(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4},$$

$$\text{Mod.}\,(A) = \text{Mod.}\,\frac{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}.$$

Der Modul eines Widerstandsoperators ist gleich dem „scheinbaren Widerstand", also heisst das nichts anderes, als dass im Hauptzweig, wie im Brückenzweig der innere scheinbare Widerstand gleich dem äusseren sein muss, — ganz analog den Bedingungen für constanten Strom. Die Erfüllung dieser Bedingungen ist bei Wechselströmen deshalb schwieriger, weil man ausser mit dem Widerstand, noch mit dem Selbstpoten-

1) Rayleigh, l. c. p. 207.
2) Rayleigh, l. c. p. 309 u. 310.

tial und der Capacität der Zweige zu rechnen hat. Man hat dabei jedoch auch einen grossen Vortheil gegenüber dem constanten Strom, indem man im Haupt- und Brückenzweig den Strom transformiren kann, d. h. einen Strom hoher Spannung und geringer Intensität in einen solchen geringer Spanung und hoher Intensität verwandeln kann und um gekehrt.

Zu diesem Zwecke benutzte ich ein Inductorium, diesen primäre Rolle aus vier Spulen nebeneinander von je ein Siemens Widerstand bestand; dieselben konnten hintereinander und parallel geschaltet werden, sodass man in der primären Rolle 0,25 bis 4 Siemens hatte. Ebenso bestand die secundäre Rolle aus vier Spulen zu je 100 Siemens, also 25—400 Siemens, wenn sie parallel oder hintereinander geschaltet wurden.

Waren nun in den vier Zweigen der Brücke kleine Widerstände, so wurde ein unterbrochener constanter Strom hineingeschickt, die primäre Rolle des Inductoriums in den Brückenzweig gebracht und die secundäre mit dem optischen Telephon verbunden. Waren die Widerstände gross, so wurde das Inductorium mit passender Schaltung in den Hauptzweig gebracht, während in den Brückenzweig das Telephon direct eingeschaltet wurde, dessen Widerstand auch 25—400 Siemens betrug, sodass immer in den sechs Zweigen des Brückensystems die Widerstände von derselben Grössenordnung waren.

Auf diese Weise konnte bei sehr verschiedenen Widerständen und Selbstpotentialen in den vier Zweigen der Brücke mit annähernd gleicher Empfindlichkeit gearbeitet werden.

Ich wende mich jetzt zu dem Zähler in dem Ausdruck für die Stromamplitude in dem Brückenzweig: $a_1 a_4 - a_2 a_3$, und wir müssen im Folgenden untersuchen, unter welchen Bedingungen derselbe zu Null wird.

$a_1 a_4 - a_2 a_3$ ist im allgemeinen complex, es müssen also der reelle, wie der imaginäre Theil gleichzeitig Null werden. Demnach lässt sich von vornherein übersehen, dass, auch experimentell, immer zwei Bedingungen erfüllt werden müssen, damit der Strom im Brückenzweig verschwindet. Diese Bedingungen enthalten Beziehungen zwischen $p$, $M$, $c$ und Widerstände, welche diese Grössen unter einander zu vergleichen resp. zu messen gestatten.

1. Vergleich zweier Selbstpotentiale. (Fig. 18.) Inductionsrollen in den Zweigen 1 und 2.[1]) Die Widerstandsoperatoren der vier Zweige sind:

$$a_1 = w_1 + inp_1, \quad a_2 = w_2 + inp_2, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4,$$

$$0 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = (w_1 + inp_1) w_4 - (w_2 + inp_2) w_3$$
$$= (w_1 w_4 - w_2 w_3) + in(p_1 w_4 - p_2 w_3).$$

Der reelle Theil $= 0$ gesetzt, gibt:

$$w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0.$$

Der imaginäre Theil $= 0$ gesetzt, gibt:

$$p_1 w_4 - p_2 w_3 = 0$$

oder: $$w_1 : w_2 = w_3 : w_4 = p_1 : p_2.$$ [2])

Da die vier Widerstände bekannt sind, kann man das Verhältniss der Selbstpotentiale berechnen.

$p_1$ und $p_2$ kann man im allgemeinen nicht ändern, man muss deshalb $w_1$ und $w_2$ so einrichten, dass $w_1 : w_2 = p_1 : p_2$ ist, zugleich aber auch $w_3$ und $w_4$ so ändern, dass $w_3 : w_4 = w_1 : w_2$ ist. Es sind dies zwei experimentelle Bedingungen, die nur durch Näherung zu erfüllen sind. Man verfährt dabei am bequemsten in folgender Art. In allen vier Zweigen ein Rheostat, 1 und 2 durch einen Brückendraht mit Schleifcontakt verbunden, ebenso 3 und 4. In die Zweige 1 und 2 werden ausserdem noch die beiden zu untersuchenden Rollen eingeschaltet. Nun verkleinert man zuerst den Strom im Brückenzweig durch Stöpseln, schliesslich durch Verschiebung der Schleifcontacte, indem man erst auf dem einen Draht das Minimum sucht, dann auf dem anderen und so abwechselnd, bis Null erreicht ist.

In den Bedingungsgleichungen kommt die Periode $n$ nicht vor, es muss deshalb, wenn sie erfüllt sind, für jeden beliebigen variablen Strom der Brückenzweig stromlos sein. Man kann daher die Nulleinstellung mit jedem Instrument: Galvanometer, Dynamometer und Telephon machen. Mit dem optischen Telephon erfolgt sie bedeutend leichter, sicherer und empfindlicher, als mit dem Hörtelephon, das bei dieser Methode gewöhnlich angewendet zu werden pflegt. Leichter

---

1) Die nicht besonders erwähnten Zweige enthalten nur einfache Widerstände ohne merkliches Selbstpotential oder Capacität.

2) Maxwell, Electr. and Magn. 2. § 757.

deshalb, weil auch bei grösseren Ausschlägen jede Verringerung derselben im Fernrohr sofort merklich ist,. während das Ohr eine Aenderung der Tonstärke von 20 Proc. eben erst empfindet.[1]) Sicherer, weil die Fehlerquellen, auf welche ich weiter unten (p. 711) zu sprechen komme, geringeren Einfluss haben und sich übersehen lassen. Empfindlicher, weil das optische Telephon an und für sich empfindlicher ist, wie das Hörtelephon. Bei günstiger Anordnung der Brücke ist die Einstellung ebenso genau, wie bei reinen Widerständen, d. h. auf $^1/_{100}$ Proc.

Diese hier besprochene Methode ist die Grundlage für alles übrige und soll im Folgenden mit Methode I oder Fall I bezeichnet werden.

2. Vergleich zweier Capacitäten. (Fig. 19.) In den Zweigen 1 und 2 je ein Condensator parallel geschaltet.

Als Widerstandsoperator eines Zweiges mit parallel geschaltetem Condensator von der Capacität $c$ hatten wir oben gefunden: $a = (a)/(1 + inc(a))$, wo $(a)$ der Widerstandsoperator des Zweiges ohne Condensator ist.

Demnach ist:

$$a_1 = \frac{w_1}{1 + inc_1 w_1}, \quad a_2 = \frac{w_2}{1 + inc_2 w_2}, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4,$$

$$0 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = \frac{w_1 w_4}{1 + inc_1 w_1} - \frac{w_2 w_3}{1 + inc_2 w_2} = (w_1 w_4 - w_2 w_3) + inw_1 w_2 (w_4 c_2 - w_3 c_1),$$

$$w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0, \qquad w_4 c_2 - w_3 c_1 = 0,$$

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4 = c_2 : c_1 .^{2)}$$

Das experimentelle Verfahren bei der Nulleinstellung ist hier wie in allen folgenden Fällen dasselbe wie im Fall 1 und bietet durchaus keine Schwierigkeiten.

Ist $nc_1 w_1$ und $nc_2 w_2$ klein gegen 1, so kann die Methode keine genauen Resultate geben, weil dann der imaginäre Theil von $a_1 a_4 - a_2 a_3$ gegen den reellen klein ist, also wenig Einfluss auf die Intensität des Stromes im Brückenzweige hat. Da man sowohl bei der Periode $n$ und auch bei $w$ an

---

1) M. Wien, Wied. Ann. **36.** p. 847. 1889.

2) Oberbeck, l. c. p. 822 u. 827.

gewisse Grenzen gebunden ist, so folgt daraus, dass man nur grössere Capacitäten mit Sicherheit auf diese Weise vergleichen kann.

2'. (Fig. 20.) Hat man wirklich zwei Condensatoren miteinander zu vergleichen, so ist es viel bequemer, dieselben direct in die Zweige 1 und 2 einzuschalten; es ist dann:

$$a_1 = \frac{1}{i n c_1} \qquad a_2 = \frac{1}{i n c_2} \qquad \text{und}$$

$$0 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = (w_4 c_2 - w_3 c_1) i n, \qquad c_1 : c_2 = w_4 : w_3 .$$

Da der reelle Theil immer gleich Null ist, hat man nur eine experimentelle Bedingung zu erfüllen. Es ist dies die älteste Methode zum Vergleich von zwei Capacitäten. Hat man jedoch die Capacität eines Leiters zu bestimmen (z. B. eines Kabels), so muss man die vorige Methode anwenden und im Zweig 2 durch einen passenden Widerstand mit parallelgeschaltetem Condensator bekannter Capacität compensiren.

3. Vergleich eines Selbstpotentials mit einer Capacität.[1]) (Fig. 21.) Inductionsrolle im Zweig 1; parallel geschalteter Condensator im Zweige 4:

$$a_1 = w_1 + i n p_1, \qquad a_2 = w_2, \qquad a_3 = w_3, \qquad a_4 = \frac{w_4}{1 + i n c_4 w_4},$$

$$0 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = w_4 (w_1 + i n p_1) - w_2 w_3 (1 + i n c_4 w_4)$$
$$= (w_1 w_4 - w_2 w_3) + i n w_4 (p_1 - w_2 w_3 c_4),$$

$$w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0, \qquad \frac{p_1}{c_4} = w_2 w_3 .$$

Aus demselben Grunde, wie im vorigen Falle gibt diese Methode nur beim Vergleich grosser Selbstpotentiale und grosser Capacitäten genaue Resultate.

4. Vergleich eines gegenseitigen Inductionscoëfficienten mit einem Selbstpotential.[2]) (Fig. 22.) Im Zweige 1 befindet sich eine Rolle mit dem Selbstpotential $p_1$, darüber ist eine zweite Rolle geschoben, welche in den Hauptzweig eingeschaltet ist; der gegenseitige Inductionscoëfficient der beiden Rollen sei $M$.

Für den Zweig 1 gilt bei variablem Strom die Gleichung:

1) Maxwell, l. c. 2. § 778.

2) Maxwell, l. c. 2. p. 356. § 756.

$$V = i_1 w_1 + p_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial J}{\partial t}.$$

Ist $J = e^{int}$, $i_1 = k_1 e^{int}$, so ist:

$$V = \left(w_1 + inp_1 + in \frac{M}{k_1}\right) k_1 e^{int},$$

daher der Widerstandsoperator:

$$a_1 = w_1 + inp_1 + in \frac{M}{k_1}, \qquad a_2 = w_2, \qquad a_3 = w_3, \qquad a_4 = w_4,$$

$$0 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = (w_1 w_4 - w_2 w_3) + in \left(p_1 + \frac{M}{k_1}\right),$$

$$w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0 \text{ Bedingungsgleichung I.}$$

Der imaginäre Theil $= 0$ gesetzt, gibt:

$$\frac{p_1}{M} = -\frac{1}{k_1}.$$

Die Gleichung $\Sigma(k) = 0$ (vgl. p. 690) ergibt für den Verzweigungspunkt $A$:

$$k_1 + k_3 = 1.$$

Die Gleichung $\Sigma(ka) = 0$ für den Kreisumlauf $ACD$:

$$k_1 a_1 - k_3 a_3 = 0,$$

da im Brückenzweig der Strom Null sein soll.

Aus diesen drei Gleichungen folgt durch Elimination von $k_1$ und $k_3$ die zweite Bedingungsgleichung:

$$\frac{p_1}{M} = \left(1 + \frac{a_1}{a_3}\right) = -\left(1 + \frac{w_1}{w_3}\right).$$

Das negative Zeichen bedeutet, dass der Strom in den beiden Rollen entgegengesetzt gerichtet sein soll. Da die rechte Seite ihrem absoluten Werthe nach grösser ist, als 1, muss $p_1 > M$ sein.

Die Einstellung erfolgt auch durch Widerstandsänderung, indem man das Verhältniss $w_1/w_3$ variirt und $w_2/w_4$ danach einrichtet, und ist offenbar auch nur durch Näherung möglich.

Es sind dies alles bekannte Methoden, welche dazu dienen, Selbstpotentiale, gegenseitige Inductionscoëfficienten und Capacitäten miteinander zu *vergleichen*. Wollte man die *absoluten Werthe* dieser Grössen erhalten, so musste man eine derselben, z. B. ein Selbstpotential kennen, indem man es berechnete oder nach der Maxwell'schen Methode[1]) durch Galvanometerausschläge maass; die Berechnung ist unsicher

1) Maxwell, Phil. Trans. **155.** p. 475. 1865.

und die Messung gibt nur bei der allergrössten Sorgfalt zuverlässige Resultate.[1])

Bei allen diesen vier Methoden können alle Messinstrumente (Telephon, Dynamometer, Galvanometer) zur Nulleinstellung benutzt werden, weil alle variablen Ströme, unabhängig von ihrer Form, gleichzeitig im Brückenzweig verschwinden. Das optische Telephon hat hierbei nur den Vorzug, dass aus den oben angegebenen Gründen die Einstellung bequemer und sicherer erfolgt.

Ich habe diese Vergleichsmethoden hier nur deshalb ausführlicher besprochen, weil sie die Grundlage zu den folgenden Methoden bilden, welche gestatten, die absoluten Werthe von $p$, $c$, $M$ direct zu messen.

Bis jetzt bestand der reelle Theil von $a_1 a_4 - a_2 a_3$ immer nur aus $w_1 w_4 - w_2 w_3$, es musste also der Nullpunkt für Wechselstrom mit dem Nullpunkt für constanten Strom zusammenfallen. Bei etwas anderer Anordnung der Brücke treten Glieder zu dem reellen Theil von $a_1 a_4 - a_2 a_3$ hinzu, welche von der Periode und den Grössen $p$, $c$, $M$ abhängig sind; experimentell erscheint der *Nullpunkt für Wechselstrom gegen den für constanten Strom verschoben:* Wir haben hier einen Fall eines „modificirten Widerstandes" (p. 691).

Der Vergleich des modificirten Widerstandes $w'$ mit dem wahren Widerstand $w$ gibt eine Beziehung für die zu messenden Grössen. Der imaginäre Theil von $a_1 a_4 - a_2 a_3$, gleich Null gesetzt, eine zweite. Wenn man aus diesen beiden Gleichungen die gesuchten Grössen ausrechnet, so erscheinen dieselben, ausgedrückt durch Widerstände und die Periode $n$, also durch lauter bekannte Grössen. Die Periode $n$ ist die nothwendige Zeitgrösse, welche es ermöglicht, ein Selbstpotential $[L^{+1}]$, einen gegenseitigen Inductionscoëfficienten $[L^{+1}]$ oder eine Capacität $[L^{-1} T^{+2}]$ mit einem Widerstand $[L^{+1} T^{-1}]$ zu vergleichen.

$np$, $nM$, $1/nc$ haben die Dimensionen von Widerständen und es wird in den Einzelfällen besprochen werden, wie dieselben als solche gemessen werden.

---

[1]) Vgl. Rayleigh, Proc. of the Roy. Soc. **XXII.** p. 115. 1881 und Phil. Trans. **173.** p. 677. 1882.

Um aber $p$, $M$ und $c$ selbst zu erhalten, muss $n$ genau bekannt sein.

Zu diesem Zweck wurden Saitenunterbrecher und optisches Telephon in der früher beschriebenen Weise[1]) auf einen Ton von bekannter Schwingungszahl eingestimmt.

Diesen Ton lieferte eine grosse König'sche Stimmgabel, welche 512 halbe Schwingungen in der Secunde machen sollte. Da dieselbe mit mehreren anderen ebensolchen Stimmgabeln, welche im Berliner physikalischen Institut vorhanden waren, nur Schwebungen von der Dauer mehrerer Secunden machte, wurde die Schwingungszahl als richtig angenommen. Jedenfalls war ihr Ton sehr constant, da die Aenderungen, welche von den geringen Schwankungen der Zimmertemperatur herrührten, zu vernachlässigen sind.

Eventuelle Fehler in der Einstimmung des optischen Telephons auf diese Stimmgabel können nur insofern schaden, als dadurch die Nulleinstellung weniger empfindlich wird. Es kommt vor allem darauf an, dass die Periode der Unterbrechung, also der Ton der Saite, genau mit dem der Stimmgabel übereinstimmt. Man erreicht dies am besten in der Weise, dass man die Schwebungen der beiden Töne nicht mit dem Ohr, sondern mit dem Auge verfolgt. Auf den Ton der Stimmgabel schwingt das optische Telephon, welches auf denselben Ton eingestimmt ist, direct durch Resonanz mit. Schlägt man nun die Stimmgabel in der Nähe des Telephons an und leitet zugleich einen schwachen Strom, der von der Saite unterbrochen wird, hindurch, so entstehen Schwebungen, welche man im Fernrohr in der Weise beobachtet, dass das helle Lichtband abwechselnd breiter und schmaler wird. Dieselben kann man so lange verfolgen, als der Ton der Stimmgabel noch stark genug ist, um einen genügenden Ausschlag hervorzurufen: bei mässigem Anschlagen etwa 5—10 Secunden. Durch Spannen kann man nun den Ton der Saite so reguliren, dass in dieser Zeit nicht mehr als etwa $1/2$ Schwebung erfolgt. Soweit kommt man ohne Schwierigkeit, damit ist aber auch die Grenze der Genauigkeit der Einstimmung erreicht. Es bedeutet dies

1) M. Wien, l. c. II p. 685.

bei einem Tone von 256 ganzen Schwingungen einen Fehler bei der Bestimmung der Periode von weniger als $^1/_{2560}$, d. h. ca. $^1/_3$ pro Mille.

Vor jeder definitiven Nulleinstellung wurde die Einstimmung der Saite noch einmal controlirt und eventuell corrigirt, indem durch Verschiebung des Schleifcontactes ein passender Ausschlag hervorgerufen wurde und die Schwebungen beobachtet wurden, welche beim Anschlagen der Stimmgabel erfolgten.

Damit ist die Periode $n$ gegeben; ich komme zur Messung von $np$, $1/nc$, $nM$.

5. Messung von Selbstpotentialen. (Fig. 23.) Die Anordnung der Brücke ist wie im Fall 1 (p. 695) nur wird zu der Rolle im Zweig 1 ein Nebenschluss mit dem Widerstand $w_\beta$ gemacht. Die Rolle habe den Widerstand $w_\alpha$ und das Selbstpotential $p_1$ und der Theil des Zweiges 1, welcher ausserhalb dieser Verzweigung liegt, habe den Widerstand $w_\gamma$.

Dann ist der wahre Widerstand des Zweiges 1:

$$w_1 = w_\gamma + \frac{w_\alpha w_\beta}{w_\alpha + w_\beta},$$

der Widerstandsoperator des Zweiges 1:

$$a_1 = a_\gamma + \frac{a_\alpha a_\beta}{a_\alpha + a_\beta} = w_\gamma + \frac{(w_\alpha + inp_1)\, w_\beta}{w_\alpha + w_\beta + inp_1}.$$

Ferner:

$$a_2 = w_2 + inp_2, \qquad a_3 = w_3, \qquad a_4 = w_4.$$

$$0 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = w_4 \left\{ w_\gamma + \frac{(w_\alpha + inp_1)\, w_\beta}{w_\alpha + w_\beta + inp_1} \right\} - w_3 (w_2 + inp_2)$$

$$0 = w_4 \left\{ w_\gamma (w_\alpha + w_\beta) + w_\alpha w_\beta + inp_1 (w_\beta + w_\gamma) \right\}$$
$$- w_3 \left\{ w_2 (w_\alpha + w_\beta) - n^2 p_1 p_2 + in (p_1 w_2 w_3) + p_2 (w_\alpha + w_\beta) \right\}.$$

Der reelle Theil ist:

---

1) Wie schon der Widerstandsoperator des Zweiges 1 zeigt, ist eigentlich der Widerstand des Zweiges 1 und nicht der des Zweiges 2 modificirt und zwar vergrössert.

Diese Vertauschung ist durch Hinübermultipliciren des Nenners von $a_1 = (w_\alpha + w^\beta + inp_1)$ entstanden. Sie ist, da es bei der Nulleinstellung nur auf das Verhältniss $w_1/w_2$ ankommt, gestattet und vereinfacht die Formeln.

$$w_4\left\{w_\gamma + \frac{w_\alpha w_\beta}{w_\alpha + w_\beta}\right\} - w_3\left(w_2 - \frac{n^2 p_1 p_2}{w_\alpha + w_\beta}\right) = w_4 w_1 - w_3\left(w_2 - \frac{n^2 p_1 p_2}{w_\alpha + w_\beta}\right)$$

$$= w_4 w_1 - w_3 w_2' = 0. \qquad w_2' = w_2 - \frac{n^2 p_1 p_2}{w_\alpha + w_\beta}\text{[1]} \quad \text{also:}$$

$$n^2 p_1 p_2 = (w_2 - w_2')(w_\alpha + w_\beta).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung sind $w_\alpha$, $w_\beta$, $w_2$ als wahre Widerstände der betreffenden Zweige bekannt. $w_2'$ ist der „modificirte Widerstand" des Zweiges 2, wie er sich aus der Nulleinstellung ($w_2' = w_1 w_4 / w_3$) ergibt.

Der imaginäre Theil von $a_1 a_4 - a_2 a_3$ gibt $= 0$ gesetzt, eine zweite Gleichung für $p_1$ und $p_2$:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{w_3 (w_\alpha + w_\beta)}{w_4 (w_\beta + w_\gamma) - w_2 w_3}.$$

Dies Verhältniss kann natürlich auch für sich nach der Methode 1 bestimmt werden.

Es liefert also der reelle Theil, gleich Null gesetzt, das Product von $p_1$ und $p_2$; der imaginäre Theil den Quotienten, und damit sind die beiden Grössen selbst bekannt. Offenbar werden hierbei immer gleichzeitig die Selbstpotentiale von zwei Rollen bestimmt.

Experimentell ist die Anordnung genau wie im Fall 1: in allen vier Zweigen ein Rheostat, zwischen Zweig 1 und 2 ein Brückendraht, ebenso zwischen 3 und 4. In die Zweige 1 und 2 werden auch die beiden Rollen eingeschaltet, deren Selbstpotential bestimmt werden soll. Nur wird zu der einen Rolle ein Nebenschluss mit bekanntem Widerstand $w_\beta$ gemacht, der am besten zwischen dem wahren und dem scheinbaren Widerstand der Rolle liegt. Für verschiedene Werthe von $w_\beta$ erhält man mehrere gleichberechtigte Werthe für $p_1$ und $p_2$.

Die Nulleinstellung erfolgt auch, wie im Fall 1, indem man auf den beiden Brückendrähten abwechselnd das Minimum des Ausschlags sucht, bis derselbe zu Null wird.

Man merkt bei dieser Einstellung überhaupt nicht, dass dieser Fall wesentlich von dem Maxwell'schen Fall 1 verschieden ist; erst wenn man die wahren Widerstände der vier Zweige berechnet oder einen constanten Strom durch das System schickt, zeigt es sich, dass der im Wechselstrom gefundene Nullpunkt durchaus nicht mit dem für constanten Strom zusammenfällt.

Die Nulleinstellung ist hier jedoch nur ermöglicht durch die Resonator-artige Eigenschaft des optischen Telephons, nämlich für den Sinusstrom der Periode, auf welche es eingestimmt ist, mehr als 100 fach empfindlicher zu sein, als für jeden anderen Sinusstrom. Denn die Nulleinstellung ist von der Tonhöhe abhängig, $\left(w_2' = w_2 - n^2 p_1 p_2 / (w_\alpha + w_\beta)\right)$: während der Strom der Grundperiode $w$ verschwindet, sind die Sinusströme der höheren Perioden $2n$, $3n \ldots$, wie sie ein Inductorium liefert, noch alle mehr oder weniger stark vorhanden. Hörtelephon und Dynamometer lassen sich daher zur Nulleinstellung nicht benutzen; bei Anwendung des optischen Telephons stören jedoch diese Ströme höherer Periode nicht, weil dies Instrument für alle Ströme ausser dem der Grundperiode unempfindlich ist.

Hat man annähernd reine Sinusströme, wie eine Wechselstrommaschine oder ein Sinusinductor sie liefern, zur Verfügung, so kann man bei dieser und den folgenden Methoden das Hörtelephon oder Dynamometer anwenden, nur dürften die Fehler, welche von unvermeidlichen Aenderungen der Tourenzahl herrühren, verhältnissmässig gross sein, weil die Einstellung von dem Quadrat der Tonhöhe abhängig ist.

Auch bei meinen Messungen scheint die grösste Fehlerquelle die Unsicherheit der Periode gewesen zu sein, obgleich dieselbe, wie oben auseinander gesetzt, mit Hülfe einer König'schen Stimmgabel bis auf Bruchtheile von $^1/_{1000}$ genau festgestellt und festgehalten werden konnte. Die Nulleinstellung selbst gewährte gemäss der Empfindlichkeit des Apparats eine erheblich grössere Genauigkeit (ca. $^1/_{100}$ Proc.)

Eine zweite Fehlerquelle, auf welche keine Rücksicht genommen wurde, ist die Aenderung des Widerstandes der Kupferdrahtrollen infolge der Inconstanz der Zimmertemperatur. Indessen dürfte ihr Einfluss nicht sehr gross gewesen sein, da meist grössere Neusilberwiderstände zugeschaltet waren.

Zur Erläuterung der Methode diene ein Beispiel:

Es wurde das Selbstpotential von zwei Galvanometerrollen bestimmt, von denen die eine einen Widerstand von 3,33 S.-E., die andere von 0,82 S.-E. besass. Es wurden zwei Einstellungen gemacht, indem das eine mal zur Rolle I

28 S.-E., das andere mal 18 S.-E. parallel geschaltet wurden. Bei der ersten Einstellung wurde der Ausschlag Null, als sich befand:

Im Zweige 1: Rolle I ($w_\alpha = 3{,}33$ S.), parallel geschaltet $w_\beta = 28{,}0$ S. und $w_\gamma = 45{,}1$ cm Brückendraht (1 cm = 0,0138 S.).

$$w_1 = 3{,}598 \text{ S.}$$

Zweig 2: Rolle II = 0,82 S. + 1 S. (Rheostatenwiderstand) + 54,9 cm Brückendraht = 2,579 S. = $w_2$.

Zweig 3: 53 S. + 52.6 cm Brückendraht (1 cm = 0,0139 S.)

$$w_3 = 53{,}73 \text{ S.}$$

Zweig 4: 10,04 (corrigirt. Rheostatenwiderstand) + 47,4 cm Brückendraht: $w_4 = 10{,}699$ S.

Hieraus: $$w_2' = \frac{3{,}598 \,.\, 10{,}699}{53{,}731} = 0{,}716 \text{ S.}$$

Man sieht, dass der „modificirte Widerstand" $w_2'$ durchaus von dem wahren Widerstand $w_2 = 2{,}579$ verschieden ist.

$$n^2 p_1 p_2 = (w_2 - w_2')(w_\alpha + w_\beta) = 1{,}863 \,.\, 31{,}33 = 58{,}38 \text{ (Siemens)}^2$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{w_\alpha + w_\beta}{\frac{w_4}{w_3}(w_\beta + w_\gamma) - w_2} = \frac{31{,}33}{\frac{10{,}699}{53{,}731} \cdot 28{,}622 - 2{,}579} = 10{,}042,$$

$$p_1 = \frac{\sqrt{10{,}042 \,.\, 58{,}38} \,.\, 10^9}{2\pi \,.\, 256 \,.\, 1{,}06} = 1{,}4201 \,.\, 10^7 \,.\, \text{cm.}$$

$$p_2 = 1{,}4141 \,.\, 10^6 \text{ cm.}$$

Die andere Einstellung bei $w_\beta = 18{,}0$ S. ergab:

$$w_2' = 1{,}037, \text{ wenn } w_2 = 3{,}777 \text{ war.}$$

Demnach: $$n^2 p_1 p_2 = 2{,}740 \,.\, 21{,}33 = 58{,}45$$

$$\frac{p_1}{p_2} = 10{,}038.$$

$$p_1 = 1{,}4205 \,.\, 10^7 \text{ cm}, \qquad p_2 = 1{,}4152 \,.\, 10^6 \text{ cm.}$$

Diese Werthe unterscheiden sich von den obigen um weniger als $^1/_{1000}$.

6. Messung von Capacitäten. (Fig. 24.) Die Anordnung der Brücke ist, wie im Fall 2′ (p. 697, Fig. 22) und wird ebenso wie im vorigen Fall zu dem Zweige 1, ein Nebenzweig mit bekanntem Widerstand ($w_1$) gemacht, und in den Zweig 2 hinter den Condensator auch ein Widerstand ($w_2$) eingeschaltet. Im Zweige 1 haben wir einen Widerstand und eine Capacität parallel geschaltet; im Zweig 2 einen Wider-

stand und eine Capacität hintereinander geschaltet. Es sind demnach die Widerstandsoperatoren:

$$a_1 = \frac{w_1}{1 + i n c_1 w_1}, \quad a_2 = w_2 + \frac{1}{i n c_2}, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4,$$

$$o = a_1 a_4 - a_2 a_3 = w_1 w_4 - w_3 (1 + i n c_1 w_1)\left(w_2 + \frac{1}{i n c_2}\right).$$

Der reelle Theil gibt:

$$w_1 w_4 - w_3 \left(w_2 + \frac{w_1 c_1}{c_2}\right) = 0, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{w_2 - w_2}{w_1} = \frac{w_4}{w_3} - \frac{w_2}{w_1}.$$

Der imaginäre Theil:

$$n^2 c_1 c_2 w_1 w_2 = 1, \qquad c_1 c_2 = \frac{1}{w_1 w_2 n^2}.$$

Wir haben wieder Quotient und Product der gesuchten Grössen, also diese selbst.

Experimentell verfährt man in folgender Art: $w_1$ und $w_2$ sind Rheostaten; jedoch sind die Zweige 1 und 2 diesmal nicht durch einen Brückendraht verbunden, weil es hauptsächlich auf das Product von $w_1$ und $w_2$ ankommt ($n^2 c_1 c_2 = 1/w_1 w_2$), welches durch Aenderung von $w_1 : w_2$ mittelst des Schleifcontacts wenig beeinflusst werden würde. Man verändert nun $w_1$ oder $w_2$, stellt dabei mit dem Schleifcontact zwischen $w_3$ und $w_4$ immer auf das Minimum ein, bis man Null erhält. Eine Einstellung, die, wie gesagt, weder hier noch in allen anderen Fällen, irgendwelche experimentellen Schwierigkeiten bietet. Wie beim vorigen Fall, misst man hierbei auch immer zwei Capacitäten gleichzeitig.

Die Empfindlichkeit der Methode nimmt ebenso, wie oben bei Fall 2 und 2', mit der Grösse der Capacitäten ab, weil, wenn $c_1$ und $c_2$ klein sind, $w_1$ und $w_2$ sehr gross gemacht werden müssen, damit $n^2 c_1 c_2 w_1 w_2 = 1$ wird.

Auf diese Weise wurden die Capacitäten eines Glimmercondensators $c_1$ von Siemens und Halske und eines Paraffincondensators $c_2$ gemessen, welche beide etwa 1 Mikrofarad betragen sollten.

Bei einem ersten Versuch erhielt ich den Strom Null, wenn $w_1 = 700{,}5 \quad w_2 = 700 \quad w_3 = 14{,}88 \quad w_2 = 28{,}52$ war.

$$c_1 c_2 = \frac{1{,}06^2}{700{,}5 \,.\, 700 \,.\, \pi^2 \,.\, 512^2} = 0{,}8857 \,.\, 10^{-30} \,.\, \frac{\sec^2}{\mathrm{cm}} \qquad c_1 = 0{,}9017.$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{28{,}52}{14{,}88} - \frac{700}{700{,}5} = 0{,}9179. \qquad c_2 = 0{,}9823.$$

Bei einem zweiten Versuch war:

$$w_1 = 983{,}0 \qquad w_2 = 500 \qquad w_3 = 17{,}89 \qquad w_4 = 25{,}50.$$

$$c_1 c_2 = \frac{1{,}06^2}{983{,}0 \,.\, 500 \,.\, \pi^2 \,.\, 512^2} = 0{,}8836. \qquad c_1 = 0{,}9001.$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{25{,}50}{17{,}89} - \frac{500}{983} = 0{,}9168. \qquad c_2 = 0{,}9817.$$

Die Differenzen sind bei $c_1$ grösser, als sie bei der Genauigkeit der Methode zulässig erscheinen.

Dieselben erklären sich aus einer Leitung oder einem Nebenschluss des Paraffincondensators. Ich bemerkte dies, als ich nach Methode 2′ die beiden Condensatoren direct mit einander verglich ($w_1 = \infty$, $w_2 = 0$). Ich erhielt hierbei überhaupt nicht den Strom Null, sondern nur ein Minimum und musste zum Glimmercondensator, $w_2 = 5{,}6$ Siemens[1]) hinzufügen, um den Strom zum Verschwinden zu bringen. Wir haben hier also denselben Fall, wie den eben betrachteten, nur dass, da $w_2$ verhältnissmässig klein ist, $w_1$ — der Widerstand des Paraffincondensators oder des Nebenschlusses — gross sein muss. Es berechnete sich $w_1$ aus der Gleichung $w_1 w_2 = 1 / n^2 c_1 c_2$ als 88000 Siem., indem die oben erhaltenen angenäherten Werthe von $c_1$ und $c_2$ benutzt wurden.

Dieser Nebenschluss von 88000 S. muss als zweiter Nebenschluss den obigen von 700,5, resp. 983,0 hinzugefügt werden. Dadurch wird $w_1$ kleiner:

$$w_1 = \frac{700{,}5 \,.\, 88000}{88700{,}5} = 695{,}0, \qquad w_1 = \frac{983{,}0 - 88000}{88983} = 972{,}1.$$

Danach berechnet sich im Versuch 1:

$$c_1 c_2 = 0{,}8928 \qquad c_1 = 0{,}9015 \,.\, 10^{-15} \,.\, \mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2$$

$$\frac{c_1}{c_2} = 0{,}9101 \qquad c_2 = 0{,}9904 \,.\, 10^{-15} \,.\, \mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2.$$

Beim Versuch 2:

$$c_1 c_2 = 0{,}8934 \qquad c_1 = 0{,}9021 \,.\, 10^{-15} \,.\, \mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2$$

$$\frac{c_1}{c_2} = 0{,}9109 \qquad c_2 = 0{,}9904 \,.\, 10^{-15} \,.\, \mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2.$$

---

1) Dieser hinzuzufügende Widerstand war an verschiedenen Tagen verschieden. Ein Beweis für die Inconstanz der Paraffincondensatoren vgl. Oberbeck, l. c. p. 837. Die hier angeführten Messungen wurden innerhalb einer Viertelstunde gemacht, sodass eine Aenderung der Condensatoren nicht zu befürchten war.

Diese Werthe stimmen gut untereinander überein und ihr Verhältniss auch gut mit dem bei directer Vergleichung gefundenen Werthe:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{20{,}675}{22{,}715} - \frac{5{,}6}{88000} = 0{,}9103.$$

Ich habe die ganze Sache nur deshalb so ausführlich dargelegt, um zu beweisen, wie exact die Methode auch interne Fehler der Apparate aufzudecken und zu messen gestattet.

7. Gleichzeitige Messung einer Capacität und eines Selbstpotentials. (Fig. 25.) Im Zweige 1 Selbstinduction und parallel geschaltete Capacität; also analog dem Maxwell'schen Fall 3; nur dass statt wie dort im Zweig 4, im Zweig 1 die Capacität parallel geschaltet ist:

$$a_1 = \frac{w_2 + i n p_1}{1 + i n c_1 (w_1 + i n p_1)} = \frac{w_1 + i n p_1}{(1 - n^2 c p) + i n c_1 w_1}$$

$$a_2 = w_2, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4,$$

$$0 = a_1 a_4 - a_2 a_3 = (w_1 + i n p_1) w_4 - w_2 w_3 (1 - n^2 c p + i n c_1 w_1).$$

Der reelle Theil $= 0$ gibt:

$$0 = w_1 w_4 - w_2 w_3 (1 - n^2 c_1 p_1) \qquad n^2 c_1 p_1 = 1 - \frac{w_2'}{w_2} = 1 - \frac{w_1 w_4}{w_2 w_3}.$$

Der imaginäre Theil $= 0$ gesetzt:

$$p_1 w_4 - w_1 w_2 w_3 c_1 = 0 \qquad \frac{p_1}{c_1} = \frac{w_1 w_2 w_3}{w_4}.$$

Die experimentelle Anordnung und die Nulleinstellung erfolgt wie in den vorigen Fällen. Damit die Methode gute Resultate gibt, darf $n^2 c_1 p_1$ nicht klein gegen 1 sein.

Nach dieser Methode wurde die Capacität des schon im vorigen Falle gemessenen Glimmercondensators und das Selbstpotential einer Rolle von 69,0 S. Widerstand bestimmt. Der Strom im Brückenzweig verschwand, wenn:

$$w_1 = 331{,}9, \quad w_2 = 570, \quad w_3 = 23{,}503, \quad w_4 = 20{,}887$$

gemacht wurde. Hieraus:

$$w_2' = \frac{w_1 w_4}{w_3} = 294{,}9, \quad n^2 c_1 p_1 = 1 - \frac{294{,}9}{570} = 0{,}4826,$$

$$\frac{p_1}{c_1} = 2{,}129 \,.\, 10^5 \,.\, (\text{Siemens})^2,$$

$$c_1 = 0{,}9918 \,.\, 10^{-15} \,.\, \text{cm}^{-1}\,\text{sec}^2, \qquad p_1 = 1{,}993 \,.\, 10^8 \text{ cm}.$$

Der Werth für die Capacität ist hier etwas grösser, als der nach der vorigen Methode gefundene (0,9904 Mikrofarad). Es liegt dies vermuthlich daran, dass man bei dieser Methode die Capacität der Rolle selbst mitmisst, wodurch die Capacität des Condensators zu gross erscheint.[1])

8. Messung eines gegenseitigen Inductionscoëfficienten. (Fig. 26.) $e, i, w, p$ seien electromotorische Kraft, Stromintensität, Widerstand und Selbstpotential eines Leiters. $E, J, W, P$ seien die analogen Grössen eines benachbarten Leiters; $M$ ihr gegenseitiger Inductionscoëfficient. Dann gelten die Differentialgleichungen:

$$M\frac{\partial J}{\partial t} + p\,\frac{\partial i}{\partial t} + wi - e = 0.$$
$$M\,\frac{\partial i}{\partial t} + P\frac{\partial J}{\partial t} + WJ - E = 0.$$

Ist $E = 0$, $i = e^{int}$ und demnach $J = \alpha e^{int}$, so wird:

$$e = (w + in\,\alpha M + inp)\,e^{int}, \qquad 0 = in M + \alpha(in P + W).$$

Wenn man $\alpha$ aus der zweiten Gleichung berechnet und in die erste einsetzt, wird:

$$e = \left\{w + \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2}\,W + in\left(p - \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2}\,P\right)\right\}e^{int}.$$

Es ist also der Widerstandsoperator eines Leiters mit gegenseitiger Induction:

$$a = w + \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2}\,W + in\left(p - \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2}\,P\right).$$

Durch die gegenseitige Induction treten sowohl zum reellen, wie zum imaginären Theil Glieder hinzu, welche von der Periode abhängig sind. Wir haben hier also wieder einen Fall eines „modificirten Widerstandes“ und eines „modificirten Selbstpotentials“:

---

1) Bei einer nachträglichen Messung ergab sich die Capacität der Rolle als ziemlich gross (p. 712).

2) Maxwell, Phil. Tr. **155.** p. 474. 1865. Rayleigh (Phil. Mag. **22.** p. 484. 1886) hat diese Gleichungen zur Bestimmung von $M$ angewendet und dabei das Hörtelephon benutzt. Es ist dies nur möglich, wenn im secundären Kreis $nP$ gross gegen $W$ ist. Dann sind $w'$ und $p'$ merklich unabhängig von $n$ und es fällt der Nullpunkt der Obertöne in die Nähe des Nullpunktes für den Grundton, sodass erstere nicht stören. Rayleigh arbeitete mit sehr hohen Schwingungszahlen, mithin war diese Bedingung erfüllt.

$$w' = w + \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2} W, \quad p' = p - \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2} P.$$ [2])

Experimentell erhält man beides, $p'$ und $w'$, durch die Nulleinstellung nach Methode 1, indem man den Zweig 1, in welchem die gegenseitige Induction stattfindet, so auffasst, als ob er wirklich den Widerstand $w'$ und das Selbstpotential $p'$ hätte.

Man erhält dann durch die Nulleinstellung:

$$w' = \frac{w_2 w_3}{w_4}, \quad p_1' = \frac{p_2 w_3}{w_4}.$$

Sind $p_1 p_2 P$ bekannt, so ergeben sich durch diese eine Einstellung zwei Werthe für $M$ durch die Gleichungen:

$$n^2 M^2 = (w_1' - w_1) \frac{W^2 + n^2 P^2}{W}, \quad n^2 M^2 = (p_1 - p_1') \frac{W^2 + n^2 P^2}{P}.$$

Sind $p_1 p_2 P$ nicht bekannt, so erhält man aus zwei Einstellungen mit verschiedenem $W$ zwei Paare solcher Gleichungen, aus denen sich $p_1$ $p_2$ $M$ $P$ berechnen lassen.

Für beide Fälle soll ein Beispiel gebracht werden.

Beispiel 1. Bifilar gewickelte Rolle.

| | |
|---|---|
| Widerstand der primären Rolle | = 1,667 S. |
| „ „ secundären „ | = 1,662 |
| Selbstpotential der primären Rolle $p_1$ | $= 3{,}558\ 10^6$ cm |
| „ „ secundären „ $P$ | $= 3{,}556\ 10^6$ cm |

Versuch I, im secundären Kreis 2 S. zugeschaltet. $W = 3{,}662$.

Null für: $w_1 = 2{,}450$, $w_2 = 7{,}412$, $w_3 = 7{,}507$, $w_4 = 10{,}903$,

$$w_1' = \frac{w_2 w_3}{w_4} = 5{,}115, \quad nM = 6{,}045 \text{ Siemens},$$
$$M = 3{,}546 \,.\, 10^6 .\, \text{cm};$$

$$np_1 = 6{,}067, \quad np_1' = 1{,}660, \quad nM = 6{,}042,$$
$$M = 3{,}544 \,.\, 10^6 .\, \text{cm}.$$

Versuch II, im secundären Kreis 4 S. zugeschaltet. $W = 5{,}662$.

$$w_1 = 1{,}81, \quad w_2 = 4{,}083, \quad w_3 = 12{,}676, \quad w_4 = 10{,}734,$$
$$w_1' = 4{,}822, \quad nM = 6{,}053, \quad M = 3{,}549 \,.\, 10^6 .\, \text{cm};$$
$$np_1 = 6{,}067, \quad np_1' = 2{,}847, \quad nM = 6{,}047,$$
$$M = 3{,}547 \,.\, 10^6 .\, \text{cm}.$$

Der mittlere Fehler bei der Messung von $M$ beträgt etwa $^1/_2$ promille.

Beispiel 2. Du Bois'sches Inductorium.

Widerstand der primären Rolle 0,999 S.

" " secundären " 396,5 S.

$M$, $p_1$, $P$ zu bestimmen.

Der Strom verschwand für:

$$\text{I.} \quad W = 996{,}5.$$

$$w_1 = 1{,}01, \quad w_2 = 4{,}18, \quad w_3 = 11{,}47, \quad w_4 = 35{,}92,$$

also: $$w_1' = 1{,}335.$$

$$\text{II.} \quad W = 1996{,}5.$$

$$w_1 = 1{,}289, \quad w_2 = 3{,}92, \quad w_3 = 10{,}738, \quad w_4 = 25{,}652,$$

$$w_1' = 1{,}641.$$

Aus diesen zwei Einstellungen, die innerhalb weniger Minuten zu machen sind, lassen sich, wie gesagt, $p$, $P$ und $M$ berechnen. Es ergab sich:

$$np = 1{,}14, \quad nM = 38{,}0, \quad nP = 1587 \text{ Siemens},$$

$$p = 6{,}69 \,.\, 10^5 \text{ cm}, \quad M = 2{,}23 \,.\, 10^7 \text{ cm}, \quad P = 9{,}31 \,.\, 10^8 \text{ cm}.$$

Ein besonderer Fall gegenseitiger Induction findet statt, wenn sich in der Nähe der Rollen Metallmassen befinden, in welchen Foucault'sche Ströme entstehen. Auch hier wird Widerstand und Selbstpotential modificirt, und man kann $w'$ und $p'$ in derselben Weise bestimmen wie oben. Der Einfluss auch kleiner Metallmassen ist ziemlich gross, z. B. erhielt ich bei einer auf ein Messingrohr gewickelten Rolle $w = 1{,}11$, $w' = 1{,}32$ S. Ist es, wie hier, nicht möglich, die Metallmassen von der Rolle zu entfernen, so kann man $p$ selbst nicht messen. Im Grunde hat dies auch keinen Werth, da bei Wechselströmen faktisch doch nur die modificirten Grössen $w'$ und $p'$ in Frage kommen. Allerdings sind sie in diesem Falle unbekannte Functionen der Periode, müssen also für verschiedene Perioden besonders bestimmt werden. Ich bemerke hier, dass, falls nicht reine Sinusströme vorliegen, diese Einstellungen mit dem Hörtelephon bei Anwesenheit kleiner Metallmassen schwierig und fehlerhaft, bei grösseren, gut leitenden, überhaupt nicht möglich sind, weil die Obertöne zu sehr stören. Man darf dies Instrument für genauere Messungen nur gebrauchen, wenn der Maxwell'-

sche Fall I ganz rein vorliegt: es darf nicht auf ein Tonminimum eingestellt werden, sondern es muss das Geräusch im Telephon ganz verschwinden, und dieser Nullpunkt mit dem für constanten Strom zusammenfallen.

In Eisenmassen treten die Foucault'schen Ströme natürlich noch viel stärker auf, und auch bei einem Kern von feinstem Blumendraht habe ich noch eine merkliche Verschiebung des Nullpunktes gefunden. Die Nulleinstellung bei Rollen mit festem Eisenkern erwies sich als etwas abhängig von Stärke und Form des Wechselstromes; es sind daher die nach obigen Methoden gefundenen Werthe für $p'$ und $w'$ hier nur als Annäherungen (bis auf ca. 1 Proc.) zu betrachten.

Eine andere Schwierigkeit bei der Messung der Inductionsconstanten ist die *Capacität*, welche eng gewickelte Rollen selbst besitzen. Jedoch ist dieselbe bei Rollen von geringem Widerstande nicht merklich. Bei grösseren hängt die Capacität hauptsächlich von der Art und Weise der Wickelung ab, und kann dieselbe jedenfalls immer gemessen und in Rechnung gezogen werden. Dies geschieht in folgender Art:

Es sollen zwei Rollen nach Methode I verglichen werden, von denen die eine im Zweige 1 merkliche Capacität besitzt, die andere im Zweige 2 nicht. Dann sind die Widerstandsoperatoren der vier Zweige:

$$a_1 = \frac{(a)}{1 + inc\,(a)} = \frac{w_1 + inp_1}{1 + inc\,(w_1 + inp_1)} = \frac{w_1 + inp_1}{(1 - n^2 cp_1) + incw_1},$$

$$a_2 = w_2 + inp_2, \qquad a_3 = w_3, \qquad a_4 = w_4,$$

$$0 = a_4 a_1 - a_2 a_3 = \frac{w_4\,(w_1 + inp_1)}{1 - n^2 cp_1 + incw_1} - (w_2 + inp_2)\,w_3.$$

Der reelle Theil gleich Null gesetzt gibt:

$$nc_1 = \frac{w_2 - w_2'}{np_1 w_2 + np_2 w_1},$$

also auch hier ein modificirter Widerstand und Verschiebung des Nullpunktes.

Der imaginäre Theil:

$$nc_1 = \frac{-np_1 \dfrac{w_4}{w_3} + np_2}{n^2 p_1 p_2 - w_1 w_2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man $p_1$ und $c$.

Bei einfach gewickelten Rollen ergab sich erst bei sehr vielen Windungen aus dünnem Draht eine merkliche Capacität. So erhielt ich bei einer Rolle von 64,8 S. Widerstand und einem Selbstpotential $p = 4{,}85 \,.\, 10^8 \,.\, \text{cm}$ noch keine Verschiebung des Nullpunktes. Beim Vergleich dieser Rolle mit einer anderen von 2921 S. Widerstand ergab sich für letztere $p = 3{,}97 \,.\, 10^9$ cm, $c = 7{,}7 \,.\, 10^{-19}\,\text{cm}^{-1}\,\text{sec}^2$. Also auch noch eine sehr kleine Capacität. Hingegen für eine *bifilar* gewickelte Rolle von dem Widerstand 135,1 S. und dem Selbstpotential $7{,}67 \,.\, 10^8$ cm war $c = 1{,}39 \,.\, 10^{-17}\,\text{cm}^{-1}\,\text{sec}^2$. Die im Fall 7 (p. 707) benutzte Rolle ergab bei $w = 69$ S. und $p = 1{,}99 \,.\, 10^8$ cm, $c = 1{,}9 \,.\, 10^{-18}\,\text{cm}^{-1}\,\text{sec}^2$.

Von der Einstellung mit dem Hörtelephon gilt dasselbe wie oben.

Physikal. Inst. der Univ. Berlin, Juli 1891.