II. *Untersuchungen über die Festigkeit des Glases; von Joseph von Kowalski.*

Einleitung.

Eins der interessantesten Capitel der Molecularphysik der festen Körper bildet die Lehre von der Festigkeit der Körper. Sie hat sogar, wie Lamé sagt, die Veranlassung gegeben zu dem Aufbau der Theorie der Elasticität. Und wenn auch zahlreiche Versuche[1]) über die Festigkeit von allerlei Körpern vorliegen, so können sie nur dazu dienen, der Technik gewisse Anhaltspunkte zu geben, wie weit man die Materialien in Anspruch nehmen darf, ohne sie zum Bruche zu bringen. Ueber die wahre Ursache des Bruches wurden aber nur Hypothesen aufgestellt, von denen zwei hauptsächlich hervorgehoben werden und als Grundlage zur Theorie der Festigkeit bei technischen Anwendungen gelegt wurden..

Nach der ersten nimmt man an, dass es eine gewisse Grenze für die inneren Spannungen gibt, die man nicht überschreiten darf, ohne den Körper zum Bruche zu bringen. Es ist die Hypothese, welche Clebsch in seinem Lehrbuche der Elasticität zu Grunde legt, um gewisse Gleichungen, welche technischen Zwecken dienen können, abzuleiten.

Die zweite Hypothese geht davon aus, dass die lineare Dilatation eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, und dass der Körper dort zu brechen anfängt, wo bei einer gewissen Deformation die grösste lineare Dilatation eintritt. Diese letzte Hypothese wurde schon von Mariotte aufgestellt in seinem: „Traité du mouvement des eaux"[2]) an der Stelle, wo er von der Festigkeit der Leitungsröhren spricht; sie wurde auch später von vielen Gelehrten, wie z. B. F. Neumann und Barre de Saint-Venant, wieder aufgenommen.

Es ist aber meines Wissens gar keine directe Beobachtung gemacht worden, aus der man etwas bestimmtes

---

1) Zahlreiche Literaturangaben über den Gegenstand finden sich in Violle, Cours de phys. 1. p. 463.

2) Mariotte, Oeuvres p. 455. 1740.

über die wahre Ursache der Grenze der Festigkeit sagen könnte.[1])

Auf Anregung des Hrn. Prof. W. Voigt habe ich daher die vorliegende Untersuchung unternommen, da es nicht uninteressant erscheint, die Hypothesen über die wahre Ursache des Eintritts des Bruches, einer experimentellen Prüfung zu unterziehen.

Als Material habe ich Glas gebraucht, da mir von Hrn. Prof. Voigt Glasstäbchen gütigst zur Verfügung gestellt wurden, die sich sehr gut zu der Untersuchung eigneten. Sie waren in der Fabrik von Greiner und Friedrichs in Stützerbach eigens zu diesem Zwecke hergestellt und besonders aus einem Gusse, der frei von Blasen war, gezogen und dann recht vorsichtig und langsam gekühlt. Ich konnte also voraussetzen, dass ich es mit einem ziemlich isotropen Körper zu thun haben würde. Die Untersuchung machte ich, indem ich die Glasstäbchen dem Zerreissen, Zerdrehen, Zerbrechen und Zerreissen combinirt mit Zerdrehen unterwarf und jedesmal die dabei eintretende Spannung und lineare Dilatation berechnete. Die lineare Dilatation in einer gewissen, durch die Richtungscosinus α, β, γ bestimmten Richtung ist durch die Formel:

$$(1) \qquad \varDelta = \alpha^2 x_x + \beta^2 y_y + \gamma^2 z_z + \beta\gamma y_z + \gamma\alpha z_x + \alpha\beta x_y$$

gegeben, die sich durch Einführung sphärischer Coordinaten ϑ und φ auch in folgender Form schreiben lässt:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varDelta &= \sin^2\vartheta \cos^2\varphi\, x_x + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi\, y_y + \cos^2\vartheta\, z_z \\ &+ \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta \sin\varphi\, y_z + \tfrac{1}{2}\cos\varphi \sin 2\vartheta\, z_x + \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Die Richtung der grössten Dilatation ist also bestimmt durch die Werthe von φ und ϑ, die man aus den Gleichungen:

$$\frac{\delta \varDelta}{\delta \varphi} = v, \qquad \frac{\delta \varDelta}{\delta \vartheta} = o \quad \text{zieht.}$$

Wenn man die so erhaltenen Werthe von φ und ϑ

1) Von älteren Arbeiten erwähnt Frankenheim in seiner „Lehre der Cohäsion“ (1835) eine Arbeit von Sickingen vom Jahre 1782 über die Festigkeit des Platins bei verschiedener Art von Belastung, die er als rein wissenschaftliche Untersuchung und als eine in jeder Beziehung physikalische Musterarbeit nach den damaligen Begriffen bezeichnet. Leider ist mir die Arbeit, die im Jahre 1782 erschienen sein soll, nicht zugänglich gewesen. —

in dem Ausdrucke (2) für Δ einsetzt, lässt sich leicht auch die Abhängigkeit des Werthes von Δ im Punkte x, y von dessen Lage im Querschnitte untersuchen.

Auf ähnliche Weise lässt sich auch das Druckellipsoid untersuchen und der Werth und die Richtung der grössten Spannung bei einer gewissen Art von Deformation bestimmen.[1]) Die Versuche wurden bei verschiedenen Temperaturen gemacht. Indessen hat sich herausgestellt, dass in den von mir innegehaltenen Grenzen ($10^0 \ldots 20^0$) der Einfluss der Wärme so klein ist, dass er vernachlässigt werden kann.

Im allgemeinen stellte ich die Festigkeitsversuche in der Weise an, dass die allmähliche Belastung in einem fort erfolgte. Es wurden aber auch einige Versuche so ausgeführt, dass das Stäbchen einer gewissen Belastung längere Zeit unterworfen wurde und dann erst einer grösseren. Es ergab sich die merkwürdige Thatsache, dass das Verhalten der Glasstäbchen in dem Falle anders ist. Ich gedenke in einer späteren Arbeit auf den Gegenstand näher einzugehen.

Theil I.

Bestimmung der Constanten.

Zunächst kam es darauf an, die Elasticitätsconstanten der gebrauchten Glassorte zu bestimmen. Ich habe sie durch Beobachtungen über die Biegung und Torsion der Glasstäbchen gefunden.

Zu dem Ende mussten zunächst die Dimensionen der Stäbchen auf's genaueste gemessen werden, was ich mit Hülfe eines Fühlhebels mit Wasserwage von Repsold ausführte. Ich will mich hier nicht näher auf die Beschreibung dieses bekannten Instrumentes einlassen, sondern nur hervorheben, dass einer Umdrehung der Schraube 0,2042 mm entsprachen. Die Trommel der Schraube war in 200 Theile getheilt, und da einer Drehung um einen Theil eine Verschiebung der Luftblase in der Wasserwage noch um 2 mm entsprach, konnte die Dickenmessung bis auf 0,0005 mm genau geschehen. Da die Glasstäbchen von nahezu elliptischem

1) Clebsch, Theorie der Elast- § 6.

Querschnitt waren, so musste ich zunächst den grössten Durchmesser messen, welcher vermittelst des gebrauchten Dickenmessers recht leicht zu ermitteln war. Es wurde dann eine kleine Längsmarke an einem Ende des Stabes mit einem Diamanten gezogen, um die Lage des grössten Durchmessers zu fixiren. Dann wurden die auf diesen senkrecht und unter 45^0 stehenden Durchmesser gemessen. Diese Messungen wurden an jedem Stäbchen an Stellen, welche in je 2 cm Entfernung voneinander lagen, angestellt.

Es zeigte sich, dass die Durchmesser bei einem und demselben Stäbchen nicht viel voneinander abwichen. Es wurden daher bei der Berechnung der Constanten die arithmetischen Mittel der Querdiameter als Diameter des Querschnittes des Stäbchens genommen.

Die Biegungsconstante. — Der Apparat, mittelst dessen ich die Biegung der Glasstäbchen mass, war ähnlich dem, den schon früher Baumgarten[1]) gebraucht und beschrieben hat, und wurde mir gütigst von Hrn. Prof. Voigt geliehen.

Das Stäbchen wurde auf beiden Schneiden des Apparates in der Weise aufgelegt, dass die grösste Axe des Querschnittes horizontal war. Auf die Weise konnte man ein ziemlich stabiles Gleichgewicht erzielen.

Die Senkung bei der Biegung wurde mit Hülfe eines fest mit dem Apparat verbundenen Mikrometermikroskops gemessen. Einer Umdrehung der Trommel entsprachen 0,0328 mm, wie es die Auswerthung an einem in $^1/_{50}$ mm getheilten Glasgitter ergab. Die Trommel der Mikrometerschraube war in 100 Theile getheilt, die absolute Senkung konnte bis auf $0{,}0_333$ mm abgelesen werden. Das Fadenkreuz wurde immer auf den untersten Rand des Stäbchens aufgestellt, der, indem man das Stäbchen von hinten beleuchtete, scharf zu sehen war. Es wurde jedesmal das Fadenkreuz dreimal auf den Rand eingestellt, und von den sich ergebenden Werthen in Trommeltheilen das arithmetische Mittel genommen. Zur Berechnung der Elasticitätsconstanten wurde die Formel:

$$E = \frac{1}{12} \frac{l^3}{s \sigma b^3 \pi} \quad \text{benutzt.}$$

1) Baumgarten, Pogg. Ann. **152**. p. 369. 1874.

Dabei bedeutet l die in Rechnung zu ziehende Länge des Stäbchens, d. h. die Entfernung der beiden Schneiden voneinander, die mittelst eines Maassstabes, welcher in halbe Millimeter getheilt war, gemessen wurde, a die grosse, b die kleine Axe der Querschnittsellipse, s die Senkung der Mitte des Stäbchens für 1 g Belastung. Diese letzte Grösse wurde aus vier Beobachtungen mit den entsprechenden Belastungen: Schale + 50 g; Schale + 100 g; Schale + 150 g; Schale + 200 g berechnet. Dabei war das Gewicht der Schale = 20,1 g.

Die Beobachtungen ergaben Folgendes:

	l	a	b	$10^7 s$	$10^{-3} E$		l	a	b	$10^7 s$	$10^{-3} E$
1.	89	1,1103	1,1022	1857	6753	9.	90	0,8342	0,8136	6152	6647
2.	90	0,9005	0,8673	4952	6646	10.	90	0,8334	0,8126	6181	6650
3.	63	1,0352	1,0169	9086	6707	11.	90	0,7491	0,7205	2845	6649
4.	90	1,1952	1,1734	1434	6744	12.	90	0,7867	0,7728	2235	6658
5.	90	1,1964	1,1705	1431	6741	13.	90	1,1406	1,1291	1714	6732
6.	90	1,7311	1,6976	0315	6751	14.	90	1,1500	1,1367	1662	6729
7.	90	0,9225	0,9036	4070	6701	15.	90	0,9129	0,9022	4202	6704
8.	90	0,9210	0,9027	4089	6705	16.	90	0,9201	0,9089	4078	6713

Gesammtmittel $E = 6\,702\,000$.

Wahrscheinlicher Fehler $\pm 7\,200$.

Die Torsionsconstante. — Die ziemlich grosse Länge der Glasstäbchen erlaubte mir, ein einfaches Verfahren bei der Bestimmung der Torsionsconstanten anzuwenden. Der Apparat wurde mir von dem hiesigen physikalischen Institute zur Verfügung gestellt. Die Anordnung war folgende:

Das obere Ende des Stäbchens wurde an einem fest in die Wand eingeschlagenen Halter vertical befestigt. An dem unteren Ende wurde eine horizontale Torsionsrolle angebracht. Von derselben liefen zwei dünne, gut ausgeglühte Drähte von genau gleicher Länge über je eine Rolle mit horizontaler Axe. Am Ende der dünnen Drähte war ein Querstab befestigt, der seinerseits in der Mitte an einem kleinen Haken die Schale trug. Der Querstab war aus leichtem Holz und hatte genau die Länge gleich dem Abstande der beiden entferntesten Punkte der beiden Rollen.

Die beiden Rollen, um welche die Drähte liefen, waren in je einer tragenden Gabel auf einem Brettchen befestigt. Um die Reibung möglichst klein zu machen, bewegten sich die Rollen auf Spitzen von Schrauben, welche in die Enden der tragenden Gabeln hineingebohrt waren. Die beiden Rollen wurden in eine solche Lage in Bezug auf die Torsionsrolle gebracht, dass erstens der Einschnitt der Torsionsrolle und der obere Rand des Einschnittes der beiden anderen Rollen in einer horizontalen Ebene lag; das geschah einfach, da die Stäbchen von ziemlich gleicher Länge waren, durch die Verschiebung in der oberen Befestigung des Stäbchens; zweitens so, dass auf die Torsionsrolle nur ein Drehungsmoment ausgeübt wird. Das letzte geschah durch Verschiebung der beiden Rollen mit dem Brettchen, auf welchem sie auf dem Untersatz, der fest mit der Wand verbunden war, befestigt waren, und wurde controlirt, indem man auf das untere Ende des Stäbchens das Fadenkreuz eines kleinen Fernrohrs einstellte, das auch fest mit der Wand verbunden war. Die Befestigung der beiden Enden des Glasstäbchens geschah durch Festkitten in zwei kleinen Messingklötzen, die einerseits in der Fassung der Torsionsrolle, andererseits in der des oberen Halters durch Schrauben festgeklemmt wurden.

Die Einrichtung, um den Drehungswinkel abzulesen, war folgende: dicht bei den Fassungen waren an dem Stäbchen zwei Zeiger angeklemmt. Die Klemmvorrichtung war der Art, dass das Stäbchen nur in den Randpunkten eines Querschnittes gefasst wurde; es konnte also die Entfernung der beiden gefassten Querschnitte vermittelst eines Stangencirkels mit genügender Genauigkeit gemessen werden. An dem Ende des Zeigers war ein kleiner Glasmaassstab von ungefähr 1 cm Länge befestigt. Er war mit einer photographischen Theilung in $^1/_{16}$ mm versehen, ähnlich den Theilungen bei Maassstäben der spectralanalytischen Apparate, sodass, wenn er von hinten beleuchtet wurde, die Theilung recht gut vermittelst eines fest mit der Wand verbundenen Mikroskopes bis auf die zu schätzenden Zehntel der Theilung abzulesen war. Die Länge des Zeigers betrug 99,5 mm, also erlaubte die Einrichtung, noch Winkel von 5″ abzulesen.

Der Winkel für eine Belastung von einem Gramm, den wir ψ nennen wollen, wurde aus vier Belastungen, P, $2P$, $3P$, $4P$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Zur Berechnung der Constanten wurde die Formel von de Saint-Venant gebraucht, nämlich:

$$T = 39{,}48\, R \frac{l(\varkappa^2 + \lambda^2)}{\psi\, \sigma^3},$$

worin:

R der Radius der Torsionsrolle, bei meinen Apparaten war $R = 49{,}5$ mm,

l die in Rechnung zu ziehende Länge des Glasstäbchens,

$\varkappa$ und λ die Trägheitsradien des elliptischen Querschnitts,

σ die Fläche desselben und

ψ, wie schon erwähnt, der Drehungswinkel bei einem Gramm Belastung.

Schliesslich will ich bemerken, dass die Hauptfehlerquellen bei unserem Verfahren der Bestimmung der Torsionsconstanten im Folgenden liegen.

1) In der Reibung der kleinen Rollen,

2) In der ungenauen Einstellung der beiden kleinen Rollen in Bezug auf die Torsionsrolle,

3) In der Schwierigkeit der Messung der in Rechnung zu ziehenden Länge des Stäbchens.

Es liess sich aber alles dies so weit beseitigen, dass die Genauigkeit der Methode für meine Zwecke völlig ausreichend war. Die Beobachtungsreihe ist folgende:

	l	a	b	ψ	$10^{-3}T$		l	a	b	ψ	$10^{-3}T$
1.	257	1,1406	1,1291	6′ 12,5″	2704	7.	254	1,0355	1,0167	9′ 8,5″	2712
2.	264	1,7311	1,6976	1 11,5	2784	8.	252	0,8342	0,8136	21 40,1	2724
3.	261	1,1190	1,0741	7 4,2	2709	9.	261	1,1451	1,1336	6 9,2	2732
4.	251	0,9249	0,9029	14 26,6	2766	10.	253	0,9278	0,9088	13 53,9	2707
5.	258	1,1952	1,1734	5 18,2	2746	11.	253	1,1390	1,1336	6 3,6	2710
6.	251	0,9225	0,9026	13 32	2762						

Gesammtmittel $T = 2\,732\,000$.
Wahrscheinlicher Fehler $5\,600$.

Da: $E = \dfrac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$, $T = \mu$ ist, so ergibt sich:

$$\mu = 2\,732\,000, \qquad \lambda = 2\,262\,500$$

und weiter das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation: $\alpha = 0{,}226$.

Also eine Zahl, die merkwürdigerweise sehr nahe der, welche Hr. Prof. Voigt gefunden hat, liegt.

Theil II.

Untersuchungen der Festigkeit.

1) Festigkeit bei einseitigem Zug.

Bei diesen Beobachtungen wurde ein Glasstäbchen von ungefähr 4 bis 8 cm Länge in zwei Halter eingekittet, sodass ungefähr 1,5 bis 2 cm ausserhalb der Fassungen waren. Es wurde zuerst zum Kitten gewöhnlicher Siegellack benutzt, er erwies sich aber bald als zu spröde, und deswegen benutzte ich später Schellack. Die obere Fassung des Stäbchens wurde an einem Querstabe zwischen zwei Stelltischen befestigt; an die untere wurde eine Schale aufgehängt mittelst einer Vorrichtung, die etwaige kleine Schwingungen der Schale dem befestigten Stäbchen nicht übermittelte. Die Belastung geschah zunächst durch behutsames Auflegen von grösseren Gewichtsstücken und dann durch Zuschütten von Schrotkörnern in einen auf der Schale stehenden Kasten, bis zum Bruch fortgesetzt. Das Zuschütten wurde sehr leise gemacht, und um die Stösse möglichst zu vermeiden, geschah es durch eine kleine Rinne, die bis über den Kasten, der auf der Schale lag, führte. Von den Beobachtungen wurden nur die gebraucht, bei denen der Bruch ausserhalb der Fassungen geschah, also bei welchen man voraussetzen konnte, dass der Bruch nicht von Sprüngen, die im Glase beim Einkitten entstehen konnten, zu Stande gekommen war.

Die Brüche, welche von einem Stosse herrührten, wurden selbstverständlich nicht in Rechnung gezogen.

Wie bekannt, ist die Spannung wie auch die Dilatation bei der einfachen Dehnung am grössten parallel der z-Axe, d. h. der Längsaxe des Stäbchens. Es wurde also der Druck pro Quadratmillimeter, der nöthig war, um das Stäbchen zum Zerreissen zu bringen, und die entsprechende lineare Dilatation in der Richtung der z-Axe berechnet. Dabei wurde die Formel benutzt:

$$\lambda_z = \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{C}{2\mu + 3\lambda},$$

wo C der Druck pro Quadratmillimeter.

Die Versuche ergaben Folgendes:

(P Gesammtbelastung in Grammen.)

	a	b	P	C	$10^6\lambda_z$		a	b	P	C	$10^6\lambda_z$
1.	1,0385	1,0185	28672	8628	1293	16.	0,8888	0,8627	21227	8812	1325
2.	1,0034	0,9835	27839	8981	1346	17.	0,7785	0,7667	16530	8815	1321
3.	0,9917	0,9809	27443	8971	1344	18.	1,0516	1,0297	29540	8684	1301
4.	1,0132	0,9985	27941	8791	1317	19.	1,0404	1,0220	28898	8651	1297
5.	1,1154	1,0688	32341	8635	1294	20.	1,0348	1,0108	28454	8659	1291
6.	1,0156	0,9972	27619	8683	1301	21.	1,0562	1,0316	29021	8676	1300
7.	1,1227	1,0613	32905	8790	1317	22.	0,9311	0,9199	23441	8712	1305
8.	1,1407	1,1256	34796	8667	1299	23.	0,9291	0,9092	23082	8697	1304
9.	1,1456	1,1252	35829	8847	1326	24.	0,9309	0,9098	23093	8679	1301
10.	1,1514	1,1121	35756	8889	1332	25.	0,9282	0,9074	23048	8706	1305
11.	0,8066	0,7989	17778	8787	1314	26.	1,1887	1,1602	37998	8777	1315
12.	0,8438	0,8255	19153	8752	1312	27.	1,1838	1,1627	37919	8774	1315
13.	0,8239	0,8004	18279	8823	1322	28.	1,1792	1,1589	37524	8740	1310
14.	0,8530	0,8352	19469	8699	1304	29.	1,0120	0,9982	28028	8754	1312
15.	0,8959	0,8612	21245	8765	1314	30.	1,0362	1,0021	28501	8737	1309

Gesammtmittel $\lambda_z = 0{,}001\,310$
Wahrscheinlicher Fehler $\pm\, 0{,}000\,004$.

Bei allen diesen Versuchen, ebenso wie bei den späteren Versuchen mit dem Zerdrehen und Zerdrehen combinirt mit Zug, wurden die Dimensionen, nachdem der Bruch erfolgt ist, gemessen. Die Messung geschah an den beiden Bruchflächen, und von den sich dort ergebenden Werthen für a und b wurde das arithmetische Mittel genommen. Als Ergebniss aus den Versuchen erhalten wir, dass die grösste lineare Dilatation $\lambda_z = 0{,}00131$, eine Zahl, die grösser ist, als die von F. Neumann[1]) aus den Versuchen von Brewster berechnete. Man sieht auch aus den vorhergehenden Zahlen, dass die Versuche so weit übereinstimmen, dass ich annehmen konnte, mit einem ziemlich einheitlichen Material zu thun zu haben.

2) Festigkeit bei der Biegung.

Um die Festigkeit bei der Biegung zu untersuchen, wurde derselbe Apparat benutzt, welcher schon zur Bestimmung der Biegungsconstante gedient hatte. Das Stäbchen wurde so auf die beiden Schneiden des Apparates gelegt, dass die grosse Axe horizontal war, und dann wurde es in der Mitte bis zum Bruch belastet. Die Belastung geschah durch Zuschütten von Schrot in einen Kasten, der die Schale ersetzte. Dies musste mit der grössten Vorsicht ge-

---

1) F. Neumann, Gesetze der Doppelbrechung des Lichts (1841) berechnet $\lambda_z = 0{,}0_37$, vermuthet aber, dass die wahre Zahl grösser ist.

schehen, denn jeder kleine Stoss hatte hier schon einen bedeutenden Einfluss.

Die Dimensionen des Stäbchens müssen vorher bestimmt werden. Sie wurden ebenso ermittelt, wie bei der Bestimmung der Elasticitätsconstanten.

Wie bekannt, findet bei dieser Art Biegung die grösste Spannung, wie auch die grösste lineare Dilatation in der dem niedrigsten Punkte der Mitte des Stäbchens statt. Die grösste Spannung wurde nach der Formel von Clebsch[1]):

$$R = \frac{E \, . \, b}{\varrho}$$

berechnet, wobei E die Biegungsconstante, b der Abstand des niedrigsten Punktes von der Hauptaxe, um welche die Biegung geschieht, ϱ der Krümmungsradius in demselben Punkte der Curve dritten Grades, in welche bei dieser Art von Deformation die Geraden parallel der z-Axe übergehen, bedeutet.

Für die grösste Dilatation, die auch im niedrigsten Punkte parallel der z-Axe stattfindet, haben wir den Ausdruck von Neumann[2]):

$$\lambda_z = \frac{3 \, . \, b \, . \, s \, . \, P}{\left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

wobei s die Senkung bei 1 g Belastung, P die Belastung und l die in Rechnung zu ziehende Länge des Stäbchens ist. Es ergaben sich folgende Resultate:

	l	a	b	P	R	$10^6\lambda_z$		l	a	b	P	R	$10^6\lambda_z$
1.	90	0,8342	0,8136	176	8786	1311	16.	40	0,8340	0,8137	382	8806	1314
2.	90	0,8334	0,8126	177	8819	1316	17.	40	0,8333	0,8127	382	8846	1320
3.	90	1,1406	1,1291	463	8893	1327	18.	40	1,1407	1,1291	1013	8893	1327
4.	90	1,1500	1,1367	473	8853	1321	19.	40	1,1500	1,1367	1041	8920	1331
5.	90	0,9129	0,9022	234	8806	1314	20.	90	1,1103	1,1022	427	8853	1321
6.	90	0,9201	0,9028	238	8779	1310	21.	90	0,9005	0,8673	207	8866	1323
7.	60	0,9248	0,9029	345	8759	1307	22.	90	1,1952	1,1734	535	8940	1334
8.	60	0,9264	0,9011	353	8987	1341	23.	90	1,1964	1,1705	536	8920	1331
9.	90	1,1402	1,1298	454	8953	1336	24.	90	1,7311	1,6976	1609	8819	1316
10.	90	1,1410	1,1284	447	8806	1314	25.	90	0,9225	0,9036	241	8793	1312
11.	60	0,9121	0,9096	345	8712	1300	26.	90	0,9210	0,9027	254	8900	1328
12.	60	0,9201	0,9089	349	8793	1312	27.	63	1,0355	1,0169	375	8826	1317
13.	60	0,9203	0,9084	357	8980	1340	28.	60	0,7491	0,7205	193	8860	1322
14.	40	0,9127	0,9024	512	8779	1310	29.	60	0,7667	0,7728	232	8980	1340
15.	40	0,9200	0,9090	523	8752	1306							

Gesammtmittel $\lambda_z = 0{,}001\,320$

Wahrscheinlicher Fehler $\pm\ 0{,}000\,003.$

1) Clebsch, l. c.
2) Neumann, l. c. p. 50.

3) Festigkeit bei der Torsion.

Die Versuche wurden folgendermassen angestellt: Die Stäbchen waren zunächst ebenso wie bei den Versuchen über den einseitigen Zug in zwei Halter eingekittet und zwischen zwei Stelltischen an einem Querstab befestigt. An dem unteren Halter war eine Torsionsrolle vom Radius $r = 49{,}5$ mm angebracht, von welcher, ähnlich wie bei der Bestimmung der Torsionsconstanten, zwei gut ausgeglühte Drähte über zwei andere Rollen liefen. An dem Ende der Drähte war ebenso wie bei der Constantenbestimmung eine Schale angebracht. Die Belastung geschah durch vorsichtiges Zuschütten von Schrotkörnern in die Schale bis zum Eintritt des Bruches.

Im allgemeinen mussten viel mehr Versuche gemacht werden, um brauchbare Daten zu erhalten, als bei den vorhergehenden Beobachtungen, hauptsächlich deshalb, weil das Stäbchen recht oft in den Fassungen zerdreht wurde, und diese Versuche nicht in Rechnung zu ziehen waren. Der Bruch erfolgte in einer Fläche, die am Rande von einer Spirallinie begrenzt war, also eine schöne Uebereinstimmung mit der Theorie.

Die Dimensionen des Stäbchens wurden gerade so wie bei den Zerreisseversuchen ermittelt.

Die grösste Dilatation ebenso wie die grösste Spannung findet bei der Torsion eines elliptischen Cylinders am Ende der kleinen Axe der Querschnittsellipse statt. Dabei geschieht die erste in einer Richtung, die einen Winkel von 45^0 mit der Axe des Cylinders einschliesst. Da:

$$x_x = y_y = z_z = x_y = 0$$

ist, so ist der Ausdruck für das Maximum der Dilatation gegeben durch die Formel:

$$\lambda_{45^0} = \frac{1}{2}\sqrt{y_z^2 + z_x^2},$$

was im Falle eines elliptischen Cylinders zu:

$$\lambda_{45^0} = \frac{N}{\mu a b^2 \pi}$$

wird.

Dabei bedeutet N das Drehungsmoment, und a, b, μ haben die früheren Bedeutungen.

Ebenso, da die Spannung in einem beliebigen Punkte:

$$s_t = \frac{2\tau\mu}{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}$$

ist, so ist das Maximum von s_t:

$$s_t = \frac{2N}{\pi a b^2}.$$

Aus den Versuchen erhalten wir Folgendes:

	a	b	P	s_t	$10^6\lambda_{45^0}$		a	b	P	s_t	$10^6\lambda_{45^0}$
1.	0,9281	0,9097	246	10173	1862	18.	1,0379	1,0199	399	10223	1873
2.	0,9140	0,9097	240	9966	1824	19.	1,0423	1,0271	402	10114	1851
4.	0,9363	0,9255	256	10135	1855	20.	1,1751	1,1525	571	10119	1852
5.	0,9148	0,8974	242	10146	1857	21.	1,1778	1,1496	539	9494	1737
6.	0,8985	0,8882	225	10124	1853	22.	1,1680	1,1445	552	9977	1826
7.	1,0420	1,0380	359	10152	1858	23.	1,1455	1,1338	531	9993	1830
8.	1,0613	1,0388	368	10235	1882	24.	1,1456	1,1180	519	10124	1834
9.	1,0542	1,0460	371	10239	1874	25.	1,1593	1,1226	529	10059	1841
10.	1,0608	1,0424	370	10195	1866	26.	1,1654	1,1297	540	10042	1838
11.	1,1399	1,1297	534	10152	1854	27.	1,1598	1,1302	538	10042	1838
12.	1,1343	1,1252	526	10130	1854	28.	1,0557	1,0159	399	10156	1851
13.	1,1353	1,1277	529	10135	1855	29.	1,0439	1,0210	396	10064	1842
14.	1,1307	1,1294	526	10086	1846	30.	0,8326	0,8094	199	10086	1846
15.	1,1441	1,1324	537	10119	1852	31.	0,8535	0,8096	207	10234	1873
16.	1,0377	1,0062	310	8163	1494	32.	0,8436	0,8067	203	10228	1872
17.	1,0355	1,0231	401	10234	1873	33.	0,8792	0,8576	231	10113	1851

Gesammtmittel $\lambda_{45^0} = 0{,}001\,837$
Wahrscheinlicher Fehler $\pm\, 0{,}000\,002$.

4) Combinirte Versuche von Zerreissen mit Zerbrechen.

Bei diesen Versuchen war die Torsionsrolle in der Mitte unten mit einem Haken versehen, an welchen eine Schale angehängt wurde. Es wurde eine gewisse Dehnung durch Auflegen von Gewichtsstücken auf die Zugschale hervorgebracht, und sodann das Stäbchen durch Zuschütten von Schrot in die Torsionsschale zerdreht. Bei der so hervorgebrachten Deformation haben wir für die Verrückungen die Ausdrücke:

$$u = \tau z y + \frac{C}{E}\alpha x, \qquad v = -\tau z x + \frac{C}{E}\alpha y,$$
$$w = \tau\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy + \frac{C}{E}z.$$

Das Minimum der Dilatation tritt also ein unter einem Winkel ϑ zur z-Axe geneigt, wobei der Winkel ϑ definirt ist durch:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{E}{1-\alpha}\cdot\frac{N}{C}\cdot\frac{1}{\mu\pi a b^2},$$

wo N das Drehungsmoment, und C die Belastung pro Quadratmillimeter bedeuten.

Für die grösste Dilatation gibt daher die Formel:

$$\lambda_\vartheta = \frac{C}{E}(\alpha \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) + \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta \frac{2N}{\mu\pi a b^2}\cdot$$

Für die Spannung entsprechend die Formel:

$$s_\vartheta = \frac{G}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} + \frac{4N^2}{(\pi a b^2)^2}}\cdot$$

Wenn wir die Ergebnisse der Versuche zusammenstellen, so erhalten wir Folgendes:

	a	b	P_z	P_t	ϑ	s_ϑ	$10^6\lambda_\vartheta$
1.	0,9352	0,9234	14515	146	29°31′ 9″	8786	1504
2.	0,9141	0,9123	14058	142	29 59 55	9004	1582
3.	1,0950	0,9296	16308	196	39 40 6	9404	1650
4.	0,9596	0,9161	16358	143	28 5 45	8752	1501
5.	0,9314	0,9148	15225	141	28 51 50	8879	1499
6.	0,9382	0,9127	5048	202	40 50 50	9883	1696
7.	0,8109	0,7807	7420	157	38 22 10	9838	1780
8.	0,8471	0,8219	10574	128	33 3 30	9739	1553
9.	0,9284	0,9093	1035	229	44 12 45	9986	1723

Die Dilatation wächst mit dem Winkel, welchen die Richtung, in der die Dilatation geschieht, mit der z-Axe einschliesst.

5) Festigkeit bei der Compression.

Dazu wurde ein sehr einfacher Apparat gebraucht. Er bestand aus einem eisernen Druckhebel, der sich an einem Ende um eine horizontale Axe bewegte und am anderen belastet werden konnte. Unter den Druckhebel wurde auf einer festen Unterlage ein kurzes Stäbchen von der Länge von 8 mm bis 10 mm aufgestellt und durch Belastung des einen Endes des Hebels zerdrückt. Damit bei diesem Verfahren die Vertheilung der Druckkräfte möglichst gleichmässig sei, hat man die beiden Enden der untersuchten Stäbchen zwischen zwei kleine Platten aus gut ausgeglühtem Kupfer gestellt. Es konnten indess von den vielen angestellten Versuchen nur wenige benutzt werden, denn sobald das Stäbchen ein klein wenig schief stand, so trat der Bruch viel zu früh ein, was man auch schon daraus merken konnte, dass in diesen Fällen das Stäbchen nicht parallel seiner Längsrichtung, wie es nach der Theorie sein muss, zerbrach. Die

Dimensionen der Stäbchen waren vorher gemessen, und der Hebel wurde vermittelst eines Zirkels ausgewerthet.

Bei diesen Versuchen findet die grösste Dilatation in der Richtung, welche senkrecht auf der z-Axe steht, statt. Es gilt dabei die Formel:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{C}{2\mu + 3\lambda}.$$

Die Ergebnisse der Versuche sind im Folgenden zusammengestellt, wobei e den Hebelarm bedeutet:

	$10^4 a$	$10^4 b$	P	l	C	$10^5 \lambda_x$
1.	8761	8639	18080	4,9	37900	128
2.	8587	8414	18740	4,5	37152	125
3.	8494	8434	29440	3,5	4478	154
4.	8493	8436	23728	3,5	36091	124
5.	8677	8568	19160	4,5	36915	125
6.	8673	8571	19972	4,5	38484	130
7.	8679	8565	19358	4,5	37269	126
8.	8672	8573	21832	4,5	42063	142
9.	8781	8564	17745	4,8	37556	126
10.	8763	8644	17764	5,0	37225	126
11.	8682	8563	19684	4,5	37926	128
12.	8490	8438	24662	3,5	38422	129
13.	8786	8645	17375	5,0	36407	123
14.	8662	8596	16754	5,1	35856	121

Gesammtmittel $\lambda_x = 0{,}00129$.

Wahrscheinlicher Fehler $\pm 0{,}00003$.

Resultate.

Wenn wir die Resultate der einzelnen Untersuchungen hier noch einmal zusammenstellen, so erhalten wir folgende Zahlen für den Druck pro qmm und die Grenzdilatation:

Einseitiger Zug	$C = 8767$	$\lambda_z = 0{,}00131$,
Biegung	$C = 8794$	$\lambda_z = 0{,}00132$,
Torsion	$C = 10142$	$\lambda_{45^0} = 0{,}00183$,
Zusammendrücken	$C = 37700$	$\lambda_x = 0{,}00129$.

Wir sehen also zunächst, dass keine der beiden in der Einleitung dieser Arbeit erwähnen Hypothesen ohne weiteres anzunehmen ist.

Bei dem Zerreissen und Zerbiegen, wo die grösste Dilatation in der Richtung parallel der Längsaxe des Stäbchens geschieht, erreicht die Grenzdilatation denselben Werth, nämlich für die von uns untersuchte Sorte von Glas ist $\lambda_z = 0{,}00131$. Bei der Torsion dagegen, wo sie unter dem Winkel von 45^0 zu der z-Axe geschieht, ist sie von λ_z verschieden.

Ebenso verhält es sich bei den combinirten Fällen von Drillung und Zug, wo auch die grösste Dilatation in einer Richtung geschieht, welche einen Winkel $0 < \vartheta < \pi/4$ mit der

z-Axe einschliesst. Dabei bemerken wir, dass die grösste Dilatation mit wachsendem ϑ wächst und den grössten Werth für $\vartheta = 45^0$ besitzt. Bei dem Zusammendrücken ergibt sich für λ_x ein Werth, der auch nahe dem Werthe von λ_z liegt.

Man könnte denken, dass die Ursache dieses merkwürdigen Verhaltens sich auf eine krystallinische Structur zurückführen lässt. In der That könnte man annehmen, dass das Glasstäbchen als Krystall vom hexagonalen System zu betrachten wäre. Wir werden im Folgenden sehen, dass die Annahme uns keine Erklärung gibt.

Die Elasticität eines Krystalls vom hexagonalen System hängt von fünf Constanten ab. Wir wollen in Folgendem nach Prof. W. Voigt[1]) mit u die Determinante:

$$u = \begin{vmatrix} A & D & B & 0 & 0 & 0 \\ D & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A.D}{2} \end{vmatrix}$$

bezeichnen und mit s_{kh} den Coëfficienten des $k$ten Elementes der $h$ten Reihe der Determinante u.

Nun wollen wir den einseitigen Zug betrachten. Es ergibt sich dabei, dass der Werth für die grösste Dilatation, welche parallel der z-Axe stattfindet, gegeben ist durch die Formel[2]):

$$\lambda_z = \Gamma_1 \, s_{33}.$$

Von derselben Constante hängt aber auch die Biegung ab, und sie ist bei meiner Biegungsconstantenbestimmung direct beobachtet $s_{33} = 1/E$, also ist die Berechnung von λ_z frei von jeder Hypothese über die Isotropie des Glases.

Bei der Torsion eines hexagonalen Krystalls erhalten wir für die Dilatation λ_t in einer beliebigen Richtung, bei Zugrundelegung der Formel (54) des l. c.:

$$\lambda_t = 2 N_1 \left(\frac{x\beta}{\alpha^4} - \frac{y\alpha}{b^2}\right) s_{44}.$$

Die Constante s_{44} ist aber diejenige, von welcher die

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **16.** p. 275. 1882.

2) W. Voigt, Elasticitätsverhältnisse der Krystalle p. 66.

Drillung um die Längsaxe des Stäbchens abhängt. Wir haben sie also ebenfalls bei der Bestimmung des Torsionscoëfficienten direct beobachtet, sie ist nämlich $s_{44} = 1 / T$. Hier ist also die Berechnung von λ_{45} auch frei von jeder Hypothese über die Isotropie des Stäbchens.

Anders verhält sich die Sache bei dem Zusammendrücken. Die Dilatation bei der Compression des hexagonalen Krystalls ist gegeben durch[1]):

$$\lambda_x = \Gamma_1 s_{13},$$

wo s_{13} eine neue unabhängige Constante ist. Also die Annahme einer krystallinischen Structur könnte uns nur Aufklärung über gewisse Merkwürdigkeiten, welche bei der Compression eintreten, geben.

Die Versuche aber mit letzterer, abgesehen von der grossen Ungenauigkeit, ergeben uns einen Mittelwerth für die Grenzdilatation, der nahezu gleich $= \lambda_z$ ist. Der Hauptwiderspruch mit der Hypothese, dass der Bruch bei einer constanten Grenzdilatation eintritt, liegt indessen in dem grossen Unterschiede von λ_z und λ_{45°.

III. *Beiträge zur Hydrodynamik;* *von Eduard Riecke.*

(Aus den Göttinger Nachr. vom 3. Oct. 1888; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. VI Fig. 1—12.)

In den beiden ersten Abschnitten der folgenden Mittheilung werden einige Probleme der Hydrodynamik, welche in den gewöhnlichen Darstellungen nur andeutungsweise behandelt werden, im wesentlichen auf dem Wege graphischer Darstellung weiter verfolgt. Dieselben beziehen sich auf die gleichförmige Bewegung einer Kugel durch eine ruhende Flüssigkeit und auf das Fortschreiten zweier paralleler Wirbelfäden in einer solchen, beziehungsweise eines einzigen Fadens längs einer festen Wand. In beiden Fällen besteht die Aufgabe darin, die Bewegungen der einzelnen Flüssigkeits-

---

1) W. Voigt, l. c. p. 66.