

X. *Theorie des Lichtes für bewegte Medien;* *von W. Voigt.*

(Mitgetheilt aus Nr. 8 der Göttinger Nachr. von 1887, vom Hrn. Verf.)

I. Die Ableitung der Gesetze für die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien ist ungemein oft in Angriff genommen, obwohl nur eine kleine Zahl von Erscheinungen zuverlässig festgestellt und eine noch kleinere in allen bedingenden Umständen soweit klar gelegt ist, dass an eine exacte Vergleichung der Beobachtungsergebnisse mit der Theorie gedacht werden kann, und obwohl demgemäss ein allgemeineres Interesse für den Gegenstand fehlt.

Trotzdem will ich im Folgenden dieses Problem noch einmal behandeln, weil ich glaube, dass in den früheren Theorien der Zusammenhang mit der allgemeinen Elasticitätstheorie nicht immer so gewahrt worden ist, wie mir nothwendig und möglich scheint, und weil ich gefunden habe, dass dieselben Grundsätze, die ich in allen übrigen Gebieten der Optik als Ausgangspunkt gewählt habe, sich auch hier fruchtbar erweisen.

Als mit der Elasticitätstheorie nicht vereinbar erscheint mir die von Fresnel eingeführte Vorstellung einer theilweisen Mitführung des Aethers durch die, wie beispielsweise bei dem Experiment von Fizeau, bewegten ponderablen Massen, sei dieselbe nun verstanden als eine Verschiebung des gesammten in jenen befindlichen Aethers mit einem Theil der Körpergeschwindigkeit oder eines Theiles des Aethers mit der gesammten Körpergeschwindigkeit.

Die erste Vorstellung gibt an der Grenze zweier verschiedener Körper durch die endliche Verschiedenheit der Geschwindigkeit zu beiden Seiten nothwendig ein Zerreißen des Aethers, der ja als fester Körper gedacht ist, und demzufolge eine Störung der Lichtfortpflanzung. Dabei ist es zudem ganz unerfindlich, wie sich in einem Medium, das jede Spannung mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, durch die Bewegung eines Theiles desselben mit viel geringerer Geschwindigkeit endliche Geschwindigkeitsdifferenzen in der

Grenze bilden sollen. Die Elasticitätstheorie gibt, wie ich gelegentlich gezeigt habe, nichts dem Aehnliches.¹⁾

Die zweite Vorstellung, welche einen Theil des Aethers den ponderablen Massen anhängend denkt, diesen aber bei Ableitung der Lichtgesetze einfach dem freien Aether zuzaddirt, scheint mir nicht minder bedenklich. Denn wenn ein Theil des Aethers unter anderen Kräften steht, muss er auch andere Elasticität besitzen, das System ist also kein einfaches mehr, sondern ein gemischtes und müsste daher auf stets zwei Lichtgeschwindigkeiten führen.

Alle diese Schwierigkeiten verschwinden mit einem mal, wenn man der Neumann'schen Hypothese beistimmt, nach welcher der Aether allenthalben die gleiche Dichte besitzt, denn dann ergibt sich die Annahme als möglich, dass er sich nicht mit den fortbewegten ponderablen Massen verschiebt. Doch ist es nicht nothwendig, ihn darum in absoluter Ruhe anzunehmen; dies wäre im Gegentheil eine unwahrscheinliche Hypothese, und es erscheint plausibler, ihn in irgend welcher selbständiger Bewegung zu denken, die wegen der grossen Geschwindigkeit, mit welcher Spannungen sich im Aether ausgleichen, zwar in (gegenüber den uns zugänglichen) grossen Räumen mit constanter Geschwindigkeit und Richtung stattfinden dürfte, aber in Sonnenweiten möglicherweise merklich verschieden ist, sodass z. B. die Gestirne, kraft ihrer enormen Grösse anders wirken, als Massen, mit denen wir experimentiren, dem ihnen zunächst liegenden Theil eine Geschwindigkeit einprägen, vermöge deren dieser während einiger Zeit an ihrer Bewegung Theil nimmt und etwa danach seinem ursprünglichen Orte wieder zustrebt. Wenigstens steht dem von seiten der Elasticitätstheorie, wie mir scheint, nichts entgegen.

Müssen wir aber zugeben, dass der Aether eine selbständige, ja selbst wechselnde Bewegung besitzen kann, so werden wir alle Beobachtungen, welche zur Berechnung die Kenntniss der gesammten relativen Geschwindigkeit der Erde gegen den Aether verlangen, als zu einer exacten Prüfung der Theorie wenig geeignet ansehen müssen, weil jene

1) W. Voigt, Crelle's Journ. 89. p. 288. 1882.

Grösse nur äusserst schwierig bestimmt werden kann; und es werden nur diejenigen Anordnungen des Experiments brauchbar bleiben, welche die Beobachtung abhängig machen von dem unter Umständen bestimmbaren Werthe der Differenz zwischen zwei verschiedenen solchen Geschwindigkeiten.

Schliessen wir sonach im allgemeinen die Betheiligung des Aethers an den fortschreitenden Bewegungen der ponderabeln Massen aus, so kann ein Unterschied der Lichtbewegung in ruhenden und in fortschreitenden Körpern nur dadurch hervorgebracht werden, dass die zwischen ponderabeln und Aethertheilchen wirkenden Kräfte hier und dort verschiedenen Gesetzen folgen. Diese Gesetze können sich dabei entweder nur durch die Werthe der Constanten oder aber durch die ganze Form unterscheiden.

Wir nehmen zunächst an, es gäbe Medien, die im ruhenden wie im bewegten Zustande vollkommen durchsichtig sind, und fragen uns, ob Wirkungen zwischen Materie und Aether denkbar sind, die hiermit (d. h. also mit dem Princip der Energie) vereinbar sind und doch die sichergestellten Eigenthümlichkeiten bewegter Medien ergeben.

Dabei berücksichtigen wir, um die Formeln von allem Anfang zu vereinfachen, dass wir alle Ursache haben, die Dichtigkeit des Aethers als verschwindend neben derjenigen der Materie anzusehen, dass demgemäss, wie in einem ruhenden Körper früher die Ausweichungen der ponderabeln Theile aus der Ruhelage verschwindend klein gegen die der Aethertheilchen gesetzt sind, wir jetzt bei bewegten Medien die Elongationen der ponderabeln Theile in Folge der Lichtbewegung gleichfalls zu vernachlässigen, also das Princip der Energie nur auf den Aether anzuwenden haben. Wir denken uns denselben innerhalb des betrachteten Raumes von nach Richtung und Grösse constanter Translationsgeschwindigkeit, können ihn also, auf ein entsprechendes Coordinatensystem bezogen, als ruhend ansehen.

Wir sind zu dem Princip der Energie gelangt durch die Gleichung der lebendigen Kraft¹⁾:

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 873. 1883.

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \sum^h \int \frac{dm_h}{2} \frac{\partial(V^2)}{\partial t} = S_i + S_j,$$

welche aussagt: die Summe der Zuwachse der lebendigen Kräfte der Aetherbewegung ist gleich der Arbeit S_i der inneren Kräfte des Aethers plus derjenigen S_j der Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether.

Nach den bekannten Werthen der inneren Kräfte des Aethers schreibt sich nach Einführung von deren Potential Φ :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \bar{S}_i, \\ \bar{S}_i = \sum^h \int d o_h (\bar{X}_n \bar{u}' + \bar{Y}_n \bar{v}' + \bar{Z}_n \bar{w}') \end{array} \right. \quad \text{worin:}$$

die Arbeit aller an den Oberflächen des Systems wirkenden inneren Kräfte des Aethers bezeichnet. Die Summe bezieht sich auf die Oberflächenelemente $d o_h$ aller Körper des Systems.

Die Arbeit der Wechselwirkungen, deren Componenten parallel den Coordinatenaxen wir A, B, C nennen, ist:

$$S_j = \sum^h \int dr_h (A u' + B v' + C w')_h.$$

Die Summe bezieht sich auf die Raumelemente dr_h aller Körper des Systems.

Betrachten wir zunächst eine Lichtbewegung, welche zur Zeit ganz innerhalb eines homogenen Körpers des Systems verläuft und keine der Grenzen o_h erreicht hat (denken uns etwa nur einen einzigen sehr grossen homogenen Körper gegeben), so können wir dieselbe in eine feste Oberfläche einschliessen, die ebenfalls ganz in diesem Körper liegt und längs deren überall \bar{u}' , \bar{v}' , \bar{w}' gleich Null ist. Dann gibt unsere Gleichung, da $\bar{S}_i = 0$ ist:

$$(4) \quad \frac{\partial(T + \Phi)}{\partial t} = S_j.$$

Soll die Energie des Systems constant sein, so muss auch S_j ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein von Functionen, die sich nur durch die augenblickliche Configuration des Systems bestimmen.

Welche Kräfte A, B, C dem entsprechen, habe ich

schon früher mitgetheilt¹⁾, allerdings ohne Nachweis; einer gegebenen Anregung folgend, trage ich denselben hier nach.

Es soll also gemacht werden:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int (A u' + B v' + C w') dr = - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \text{oder} \\ A u' + B v' + C w' = - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{array} \right.$$

wobei vorausgesetzt wird, dass A, B, C lineare Functionen der Differentialquotienten von u, v, w sind, da nur lineare Functionen das Beobachtungsergebnis ergaben, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität des Lichtes unabhängig ist.

Nach (4) können A, B, C nur die Differentialquotienten nach der Zeit enthalten, es ist also allgemein zu setzen:

$$\begin{aligned} -\psi &= \sum_{hk} \left(a_{hk} \frac{\partial^h u}{\partial t^h} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} + b_{hk} \frac{\partial^h v}{\partial t^h} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} + \dots \right), \\ -\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \sum_{hk} \left[a_{hk} \left(\frac{\partial^{h+1} u}{\partial t^{h+1}} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} + \frac{\partial^h u}{\partial t^h} \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Soll dies auf die obige Formel führen, also jedes Glied einen ersten Differentialquotienten nach der Zeit enthalten, so sind drei Fälle möglich:

I. h und k sind gleich Null:

$$-\psi_I = a_{11} u^2 + a_{12} u v + \dots$$

II. h und k sind gleich Eins:

$$-\psi_{II} = b_{11} u'^2 + b_{12} u' v' + \dots$$

III. h ist gleich Eins, k gleich Zwei oder umgekehrt, und die Coefficienten sind so bestimmt, dass die Glieder von der Form $u'' v''$ etc. sich fortheben; also:

$$-\psi_{III} = c_{12} (u' v'' - v' u'') + c_{23} (v' w'' - w' v'') + c_{31} (w' u'' - u' w'').$$

Höhere Differentialquotienten können nicht vorkommen, weil dann keine Möglichkeit ist, lauter Glieder mit einem ersten Differentialquotienten zu erhalten.

Ausserhalb dieser Reihe steht der Werth $\partial \psi / \partial t = 0$ oder $\psi = \text{Const.}$, der erhalten wird, indem man setzt:

1) W. Voigt, l. c. p. 877.

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A = \partial_{12} v' - \partial_{13} w', \quad -B = \partial_{23} w' - \partial_{21} u', \\ \quad \quad \quad -C = \partial_{31} u' - \partial_{32} v', \end{array} \right.$$

wobei $\partial_{hk} = \partial_{kh}$ ist.

Die so erhaltene erste Reihe von Kräften bietet nur solche dar, die bei einer Verschiebung eines Volumenelementes Aether ohne Deformation erregt werden.

Zu einer zweiten Reihe gelangt man, wenn man einführt¹⁾:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad -B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ \quad \quad \quad -C = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}, \end{array} \right.$$

und hiernach durch theilweise Integration umformt:

$$(6) \quad S_j = (S_j)_1 - \bar{S}_j, \quad \text{worin:}$$

$$(S_j)_1 = \sum^h \int dr_h \left[A_x \frac{\partial u'}{\partial x} + A_y \frac{\partial u'}{\partial y} + A_z \frac{\partial u'}{\partial z} + B_x \frac{\partial v'}{\partial x} + B_y \frac{\partial v'}{\partial y} + B_z \frac{\partial v'}{\partial z} + C_x \frac{\partial w'}{\partial x} + C_y \frac{\partial w'}{\partial y} + C_z \frac{\partial w'}{\partial z} \right]_h,$$

$$\bar{S}_j = \sum^h \int d\sigma_h (\bar{A}_n \bar{u}' + \bar{B}_n \bar{v}' + \bar{C}_n \bar{w}')_h, \quad \text{falls:}$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n = A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z), \\ B_n = B_x \cos(n, x) + B_y \cos(n, y) + B_z \cos(n, z), \\ C_n = C_x \cos(n, x) + C_y \cos(n, y) + C_z \cos(n, z) \end{array} \right. \text{ ist.}$$

Betrachten wir wiederum eine Lichtbewegung, die ganz innerhalb eines homogenen Theiles des Systems liegt, so fordert das Princip der Energie, dass nunmehr:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int dr_h \left[A_x \frac{\partial u'}{\partial x} + A_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \dots \right]_h = -\frac{\partial X}{\partial t} \quad \text{oder:} \\ A_x \frac{\partial u'}{\partial x} + A_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \dots = -\frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \text{ist.} \end{array} \right.$$

Diese Form zeigt, dass die A_x, \dots nur solche lineare Functionen sein können, die erste Differentialquotienten nach den Coordinaten, aber höhere nach der Zeit enthalten. Setzt man kurz $\partial u / \partial x = u_x$ u. s. f., so ist die allgemeine Form für χ :

$$-\chi = \sum_{hk} \left(e_{hk} \frac{\partial^h u_x}{\partial t^h} \frac{\partial^k u_x}{\partial t^k} + \dots \right); \quad \text{also gilt:}$$

1) W. Voigt, l. c. p. 379.

$$-\frac{\partial \chi}{\partial t} = \sum_{hk} \left[e_{hk} \left(\frac{\partial^{h+1} u_x}{\partial t^{h+1}} \frac{\partial^k u_x}{\partial t^k} + \frac{\partial^h u_x}{\partial t^h} \frac{\partial^{k+1} u_x}{\partial t^{k+1}} \right) \cdot \dots \right].$$

Soll dies auf die Form (8) führen, in der jedes Glied einen ersten Differentialquotienten nach der Zeit enthält, so ergeben sich dieselben drei Fälle möglich wie oben:

I. h und k gleich Null:

$$-\chi_I = e_{11} u_x^2 + e_{12} u_x v_y + \dots$$

II. h und k gleich Eins:

$$-\chi_{II} = f_{11} u_x'^2 + f_{12} u_x' v_y' + \dots$$

III. h gleich Eins, k gleich Zwei oder umgekehrt und die Coëfficienten so bestimmt, dass die Glieder mit zwei zweiten Differentialquotienten nach der Zeit sich fortheben, also:

$$-\chi_{III} = g_{12} (u_x' v_y'' - v_y' u_x'') + \dots$$

Höhere Differentialquotienten sind nicht mit der gestellten Forderung vereinbar. Dagegen kommt auch hier noch eine Form von $A_x \dots$ in Betracht, welche $\partial \chi / \partial t = 0$ macht, nämlich:

$$(IV) \begin{cases} -A_x = h_{12} u_y' + h_{13} u_z' + \dots & -A_y = -h_{21} u_x' + \dots \\ & -A_z = -h_{31} u_x' + \dots \end{cases}$$

Diese zweite Reihe von Kräften enthält solche, die von den Deformationen des Volumenelementes Aether abhängig werden.

Es scheint nun zunächst, als könnte man in der eingeschlagenen Richtung noch weiter gehen, etwa setzen in S_j , fortbildend die Formeln (5):

$$+ A = \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_{zz}}{\partial z^2} \\ + \frac{\partial^2 (A_{yz} + A_{zy})}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 (A_{xz} + A_{zx})}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 (A_{xy} + A_{yx})}{\partial x \partial y}$$

u. s. f. und darauf durch zweimalige Integration ein Raumintegral gewinnen von der Form:

$$(S_j)_n = \sum^h \int dr_h \left(A_{xx} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + A_{zy} \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + \dots \right),$$

welches dann wiederum durch Werthe von $A_{xx} \dots$ zu einem Differentialquotienten nach der Zeit gemacht werden könnte.

Indessen gibt die zweimalige theilweise Integration hier zwei Oberflächenintegrale, das erste von der Form:

$$\sum_h \int d\sigma_h \left[\left(\frac{\partial \overline{A}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{A}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{A}_{xz}}{\partial z} \right) \overline{u}' \cos(n, x) + \dots \right],$$

das zweite:

$$\sum_h \int d\sigma_h \left[\left(\overline{A}_{xx} \frac{\partial \overline{u}'}{\partial x} + \overline{A}_{xz} \frac{\partial \overline{u}'}{\partial y} + \overline{A}_{xz} \frac{\partial \overline{u}'}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \dots \right].$$

Letzteres ist nun im allgemeinen mit dem Princip der Energie nicht vereinbar, tritt aber auf, sobald die Lichtbewegung eine Grenze zwischen mehreren Körpern erreicht hat.

Dies einzusehen bedenke man, dass das Princip der Energie den Zuwachs der Energie in der Zeiteinheit gleich der auf die Zeiteinheit bezogenen zugeführten Arbeit setzt. Die zugeführte Arbeit kann aber, da in unserer Ausgangsgleichung äussere Kräfte, welche auf innere Punkte wirken, nicht eingeführt sind, nur noch von Oberflächendrücken herühren. Es muss also, wenn deren Componenten \overline{X} , \overline{Y} , \overline{Z} sind, die Gl. (4) sich auf die Form bringen lassen:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = S_o = \sum_{hk} \int d\sigma_{hk} (\overline{X} \overline{u}' + \overline{Y} \overline{v}' + \overline{Z} \overline{w}'),$$

wo S_o die Arbeit der in der Oberfläche wirkenden äusseren Kräfte bezeichnet. Nun gilt für ein sehr niedriges, über einem Grenzelement $d\sigma_{hk}$ zwischen dem Körper h und dem Körper k errichtetes cylindrisches Raumelement:

$$\overline{X} + (\overline{X}_n)_h + (\overline{A}_n)_h + (\overline{X}_n)_k + (\overline{A}_n)_k + A_{hk} + A_{kh} = 0$$

u. s. f., falls $(\overline{X}_n)_h$ die Wirkung des Aethers, $(\overline{A}_n)_h$ die Wirkung der Materie im Körper h , A_{hk} aber diejenige der Materie im Körper k auf den an $d\sigma_{hk}$ anliegenden Aether im Körper h bezeichnet. Damit also die in unserer Entwicklung auftretenden Oberflächenintegrale sich zu S_o zusammenfügen können, müssen sie drei mit \overline{u}' , \overline{v}' , \overline{w}' proportionale Glieder enthalten. Dies findet aber bei dem zuletzt erhaltenen Oberflächenintegral nicht statt -- es sei denn A_{xx} , A_{xy} . . . selbst mit u' , v' , w' proportional, was aber nichts Neues gibt -- und demgemäss ist die ihm zu Grunde liegende Verfügung über A , B , C im allgemeinen nicht mit dem Princip der Energie vereinbar. Eine Ausnahme würde nur in dem Falle eintreten, dass das fragliche Oberflächenintegral entweder verschwände,

oder aber die Gestalt eines Differentialquotienten nach der Zeit annähme; dieser scheint aber nicht möglich zu sein.

Wir erhalten also auf dem hier nochmals entwickelten Wege keine anderen Kräfte, als die schon früher für ruhende vollkommen durchsichtige Medien abgeleiteten acht Gattungen. Der Einfluss der Bewegung des Körpers könnte sich also, wie es scheint, nur in den Constanten dieser Ausdrücke äussern.

Aber diese Kräfte sind überhaupt nicht geeignet, die Fundamentalserscheinung bewegter durchsichtiger Medien zu ergeben, nämlich eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen, die in entgegengesetzten Richtungen verschiedene Werthe besitzt, welche Eigenschaft bewegter Medien als durch die Beobachtung von Fizeau über die Verzögerung in bewegter Flüssigkeit wohl erwiesen ist. Alle die entwickelten Kraftgesetze verbinden nämlich mit einer variablen Fortpflanzungsgeschwindigkeit nothwendig Doppelbrechung und führen daher auf durchaus andere Resultate. Wenn also überhaupt die Grundannahme bewegter und dabei vollkommen durchsichtiger Körper haltbar ist, muss die Gleichung der Energie noch auf andere Weise, als bisher gefunden, erfüllbar sein.

Es sollte für eine noch durchaus im Inneren eines homogenen Körpers des Systems befindliche Lichtbewegung die Arbeit der Wechselwirkung zwischen Aether und Materie ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein, d. h. nach (4):

$$\int (A u' + B v + C w') dr = - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}.$$

Diese Form wird anders, als bisher angenommen, erreicht, wenn die linke Seite sich vollständig in ein Oberflächenintegral verwandeln lässt, welches ja bei der gemachten Annahme verschwindet.

Dies findet auf die allgemeinste Weise statt, wenn:

$$(9) \quad A u' + B v' + C w' = - \left(\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

gesetzt werden kann. Dann ist nämlich:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \int (A u' + B v' + C w') dr \\ = - \int d\sigma (\bar{D} \cos(n, x) + \bar{E} \cos(n, y) + \bar{F} \cos(n, z)), \end{array} \right.$$

und an einer Oberfläche, längs welcher u', v', w' Null sind, verschwinden auch die D, E, F als nothwendig homogene Functionen jener Grössen oder ihrer Differentialquotienten.

Damit aber das letzte Oberflächenintegral, wie oben gesagt ist, nur mit u', v', w' proportionale Glieder enthalte¹⁾, müssen wir den allgemeinsten Ansatz machen:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} D = u' D_1 + v' D_2 + w' D_3, \quad E = u' E_1 + v' E_2 + w' E_3, \\ F = u' F_1 + v' F_2 + w' F_3, \end{array} \right.$$

welcher durch Einsetzen in (9) ergibt:

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} A u' + B v' + C w' = - \left[u' \left(\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \right. \\ \quad \left. + v' \left(\frac{\partial D_2}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + w' \left(\frac{\partial D_3}{\partial x} + \frac{\partial E_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \right] \\ - \left[D_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v'}{\partial x} + D_3 \frac{\partial w'}{\partial x} + E_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + E_2 \frac{\partial v'}{\partial y} + E_3 \frac{\partial w'}{\partial y} \right. \\ \quad \left. + F_1 \frac{\partial u'}{\partial z} + F_2 \frac{\partial v'}{\partial z} + F_3 \frac{\partial w'}{\partial z} \right]. \end{array} \right.$$

Damit hierin rechts dieselbe Form wie links entstehe, bieten sich nur zwei Verfügungen über die D_h, E_h, F_h : entweder dieselben sämmtlich linear in u', v', w' zu machen, oder aber linear in $\partial u' / \partial x, \partial u' / \partial y, \dots$ mit so bestimmten Coëfficienten, dass sich rechts die Glieder der zweiten Klammer gegenseitig zerstören.

Die letztere Verfügung gibt aber nichts Neues; denn wir erhalten durch 'sie:

$$\begin{aligned} -A &= \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, & -B &= \frac{\partial D_2}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z}, \\ & & -C &= \frac{\partial D_3}{\partial x} + \frac{\partial E_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}, \end{aligned}$$

1) Wie sich später zeigen wird, erscheint bei den bewegten diese Beschränkung minder zwingend als bei den ruhenden Medien, indessen würde ihre Beseitigung nur den Erfolg haben, dass die Constanten d_{hk}, e_{hk}, f_{hk} in den folgenden Entwicklungen sich als Functionen der Schwingungsdauer darstellen.

worin die $D_1, D_2 \dots$ so bestimmt sind, dass:

$$D_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + E_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + F_1 \frac{\partial u'}{\partial z} + D_2 \frac{\partial v'}{\partial x} + \dots = 0 \text{ ist.}$$

Dies ist aber die Grundeigenschaft der Kräfte (IV) des zweiten Systems (s. p. 376).

Hingegen gibt die erstere Verfügung ein neues Gesetz. Nehmen wir ¹⁾:

$$(13) \quad 2D = d_{11} u'^2 + d_{22} v'^2 + d_{33} w'^2 + 2(d_{23} v'w' + d_{31} w'u' + d_{12} u'v')$$

und analog E und F, so folgt:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} -(Au' + Bv' + Cw') = d_{11} u' \frac{\partial u'}{\partial x} + d_{22} v' \frac{\partial v'}{\partial x} + d_{33} w' \frac{\partial w'}{\partial x} \\ \quad + d_{23} \left(v' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + d_{31} \left(w' \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \\ \quad + d_{12} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \dots \dots \dots \quad \text{also:} \end{array} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A = d_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + d_{12} \frac{\partial v'}{\partial x} + d_{13} \frac{\partial w'}{\partial x} + e_{11} \frac{\partial u'}{\partial y} + e_{12} \frac{\partial v'}{\partial y} + e_{13} \frac{\partial w'}{\partial y} \\ \quad + f_{11} \frac{\partial u'}{\partial z} + f_{12} \frac{\partial v'}{\partial z} + f_{13} \frac{\partial w'}{\partial z} \end{array} \right.$$

und ähnlich $-B$ und $-C$.

Diese Formen sind die einzigen, welche in der erörterten Weise das Princip der Energie erfüllen, und, soviel ich sehe, gibt (15) auch die einzige, welche ausser den acht früher abgeleiteten Gesetzen für die Wechselwirkung zwischen Materie und Aether in vollkommen durchsichtigen Medien noch anzunehmen zulässig ist. Es wird sich zeigen, dass dieselbe in der That geeignet ist, die Erscheinungen, welche bewegte Medien darbieten, zu erklären. Dies darzuthun, wollen wir sie nunmehr in ihrer Wirkung verfolgen, und zwar zunächst, um von den Begrenzungen unabhängig zu sein, unendlich grosse homogene Körper voraussetzen, in welchen die Fortpflanzung des Lichtes stattfindet.

II. Ist der betrachtete Körper isotrop, so ist in ihm nur eine ausgezeichnete Richtung vorhanden, nämlich diejenige der Translationsbewegung, für welche wir die X-Axe

1) Die hier eingeführten Coëfficienten d_{hk}, e_{hk}, f_{hk} haben natürlich mit den früher vorübergehend benutzten nichts gemein.

wählen, und alle mit ihr gleiche Winkel einschliessenden sind gleichwerthig.

Es muss daher, wenn man die Y- mit der Z- und die Z mit der -Y-Richtung vertauscht, A ungeändert bleiben, B in C und C in -B übergehen. Dadurch reduciren sich die Werthe (15) auf:

$$(16) \quad -A = d_{11} \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad -B = d_{22} \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad -C = d_{22} \frac{\partial w'}{\partial x}.$$

Eine Relation zwischen d_{11} und d_{22} ist zunächst nicht zu geben möglich.

Setzt man diese Werthe in die Bewegungsgleichungen ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= A \Delta u - d_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial L}{\partial x}, \\ M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= A \Delta v - d_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial L}{\partial y}, \\ M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= A \Delta w - d_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial L}{\partial z}, \\ \text{neben} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Hierin sind M und A die in früheren Abhandlungen von mir benutzten Constanten des ruhenden durchsichtigen Mediums, L ist der infolge der Incompressibilität auftretende hydrostatische Druck. M und A enthalten im allgemeinsten Falle die Schwingungsdauer. Die Componenten u, v, w werden nur dann von einander unabhängig, d. h. es wird die Fortpflanzung jeder Gattung polarisirten Lichtes möglich, wenn dieser Druck verschwindet. Es gilt für L :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[d_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + d_{22} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right] = \Delta L \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} (d_{11} - d_{22}) = \Delta L.$$

L lässt sich also Null setzen, wenn $d_{11} = d_{22} = d$ ist.

Dann haben die Componenten A, B, C die Werthe:

$$(17) \quad -A = d \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad -B = d \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad -C = d \frac{\partial w'}{\partial x},$$

und ist:
$$D = \frac{d}{2} V^2, \quad E = F = 0,$$

wenn $u'^2 + v'^2 + w'^2 = V^2$ gesetzt wird; die drei Bewegungsgleichungen aber haben die Form:

$$(18) \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \Delta u - d \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}.$$

$$\text{Setzt man:} \quad u = a \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\rho}{\omega} \right),$$

worin: $\rho = \alpha x + \beta y + \gamma z$ und $\tau = T/2\pi$

ist, so folgt: $M\omega^2 = A + d\alpha\omega$, also:

$$(19) \quad \omega = \frac{\pm \sqrt{4AM + d^2\alpha^2} + d\alpha}{2M},$$

wo nur das obere Vorzeichen zu benutzen ist, wenn man ω als absolute Grösse rechnet. Die Wellennormalenfläche gibt also eine Kugel, deren Centrum um die Länge $+d/2M$ auf der X -Axe vom Anfangspunkt abliegt, und deren Radius $R = \sqrt{4AM + d^2}/2M$ beträgt.

Von der neuen Constante d ist zunächst nichts weiter zu sagen, als dass sie mit der Translationsgeschwindigkeit des ponderablen Körpers verschwinden muss. Denn wenn der isotrope Körper ruht, können entgegengesetzte Richtungen sich nicht mehr optisch verschiedenartig erhalten. Ausserdem muss sie im freien Aether gleich Null sein. Man kann also für kleine Translationsgeschwindigkeit Ω jedenfalls setzen:

$$(20) \quad d = D\Omega,$$

wo D eine Grösse ist, die auf noch unbekannte Weise von der Natur des bewegten ponderablen Körpers abhängt. Setzt man $A/M = \omega^0$ als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ruhenden durchsichtigen Körper (wie wir überhaupt durch den Index 0 die verschiedenen Grössen als auf das ruhende Medium bezogen andeuten wollen), so gibt sich auch:

$$\omega^2 = \omega^{02} + \frac{D\alpha}{M} \Omega\omega,$$

oder, da $\Omega\alpha$ die Componente der Translationsgeschwindigkeit Ω nach der Wellennormale ρ ist, die man mit Ω_ρ bezeichnen kann¹⁾, kurz auch:

$$(21) \quad \omega^2 = \omega^{02} + \frac{D\Omega_\rho}{M} \omega.$$

1) Abweichend von den Theorien, welche auf der „Mitführung“ des Aethers durch den ponderablen Körpern beruhen, gibt die unsere auch in der strengen Formel für ω keine Einwirkung der Geschwindigkeitscomponente senkrecht zur Wellennormale,

Ist Ω_0 klein gegen ω , so folgt bis auf zweite Ordnung exclusive:

$$(22) \quad \omega = \omega^0 + \frac{D}{2M} \Omega_0,$$

oder kurz $D/2M = k$ gesetzt:

$$\omega = \omega^0 + k \Omega_0.$$

Diese Form ist vielfach in Arbeiten über unseren Gegenstand nach Fresnel's Vorgang vorausgesetzt und zur Erklärung der bekannten Beobachtungen von Arago, Fizeau, Boscovich u. a. benutzt¹⁾; das erwähnte Fizeau'sche Experiment²⁾ zeigt, dass darin $D/2M = k$ nahe gleich $(n^2 - 1)/n^2$ sein muss, für den Brechungsexponenten n des Mediums einen mittleren Werth gesetzt.

Nach der von uns zumeist vertretenen Anschauung, dass M der Dichtigkeit des freien Aethers nahe oder streng gleich ist, würde dies verlangen, dass:

$$k = \frac{D}{2M} = \frac{A_0 - A}{A_0} \text{ } ^3)$$

ist, wo A_0 den Werth bezeichnet, den A im freien Aether annimmt; denn A_0/A ist gleich n^2 . Da A die Schwingungsdauer enthalten kann, — z. B. in der Form $a - a'/\tau^2$ von uns abgeleitet ist — würde auch D von der Schwingungsdauer abhängig sein müssen, wenn diese Relation für alle Farben gelten soll. Diese Frage kann zunächst noch offen bleiben.

Da bei der Erklärung der Erscheinung der Aberration und ähnlicher ausser der Richtung und Geschwindigkeit der Wellennormalen diejenigen des zugehörigen Strahles zur Anwendung kommen, so gebe ich noch an, dass die Geschwindigkeit ω' des Strahles gegeben ist durch:

1) In ausgedehntestem Maasse in Hrn. E. Ketteler's „Astronomischer Undulationstheorie“. Bonn 1873.

2) Fizeau, Pogg. Ann. Ergbd. 3. p. 457. 1853. Das Experiment ist neuerdings mit demselben Resultat wiederholt worden von A. Michelson und E. W. Morley, Amer. Journ. of Science 1886. p. 377.

3) Nach den von mir früher (Wied. Ann. 19. p. 884. 1883) abgeleiteten Formeln hat hierin $A_0 - A$ die einfache Bedeutung eines Maasses der Einwirkung zwischen Materie und Aether im ruhenden Medium. A_0 der inneren Kraft des Aethers.

$$(23) \quad \omega'^2 = \omega^2 \frac{\omega^{\circ 2} + k^2 \Omega^2}{\omega^{\circ 2} + \alpha^2 k^2 \Omega^2},$$

wobei $\beta^2 = 1 - \alpha^2$ ist; seine Richtungscosinus α' , β' durch:

$$(24) \quad \alpha' = \frac{\omega \alpha + (\beta^2 - \alpha^2) k \Omega}{\sqrt{\omega^{\circ 2} + k^2 \Omega^2}}, \quad \beta' = \frac{\omega \beta - 2 \alpha \beta k \Omega}{\sqrt{\omega^{\circ 2} + k^2 \Omega^2}},$$

endlich der Winkel zwischen Strahl und Normale durch:

$$(25) \quad \sin \chi = \frac{\beta k \Omega}{\sqrt{\omega^{\circ 2} + k^2 \Omega^2}},$$

oder in erster (genauer zweiter) Näherung durch:

$$\omega' = \omega, \quad \sin \chi = \frac{\beta k \Omega}{\omega^{\circ}}.$$

Die Gleichung der Wellenoberfläche erhält man, wenn man in (24) ω nach (23) ausdrückt und dann α (resp. β) eliminirt.

Im Vorstehenden ist angenommen worden, dass die X-Axe des Coordinatensystems in die Translationsrichtung fällt und demgemäss das System der A, B, C bestimmt. Schliesst die letztere hingegen mit den Coordinatenachsen Winkel ein, deren Cosinus gleich α_1 , β_1 , γ_1 sind, so folgt:

$$-A = D \Omega \left(\alpha_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \text{ u. s. f.},$$

oder indem man die Componenten der Translationsgeschwindigkeit nach den Coordinatenachsen Ω_x , Ω_y , Ω_z einführt:

$$(26) \quad \begin{cases} -A = D \left(\Omega_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial u'}{\partial z} \right), \\ -B = D \left(\Omega_x \frac{\partial v'}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial v'}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial v'}{\partial z} \right), \\ -C = D \left(\Omega_x \frac{\partial w'}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial w'}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial w'}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Hierdurch wird, falls wieder $u'^2 + v'^2 + w'^2 = V^2$ ist:

$$(27) \quad D = \frac{1}{2} D \Omega_x V^2, \quad E = \frac{1}{2} D \Omega_y V^2, \quad F = \frac{1}{2} D \Omega_z V^2.$$

Haben wir statt des durchsichtigen ein absorbirendes isotropes Medium, so wird es erlaubt sein, dieselben Kräfte A, B, C für die Einwirkung der Bewegung der ponderabeln Masse auf das Licht beizubehalten, die wir oben benutzt haben. Denn da wir bei ruhenden Körpern gesehen haben, dass die absorbirenden Kräfte sich einfach zu den Energie erhaltenden addiren, so ist kein Grund ersichtlich, warum

es bei bewegten Körpern anders sein soll, und was wir zur näheren Bestimmung und Specialisirung dieser Kräfte A , B , C angewandt haben. nämlich die Unterschiedslosigkeit aller Richtungen rings um die Richtung der Translation, bleibt auch bei absorbirenden isotropen Medien gültig. Demnach würden für solche die Bewegungsgleichungen die Form haben:

$$(28) \quad Mu'' = A \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + c \frac{\partial^2 u'}{\partial q^2} - b u' - D \Omega_e \frac{\partial u'}{\partial q}.$$

Sie integriren sich durch Lösungen der Form:

$$u = a e^{-\frac{x_0}{\tau} \omega} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q}{\omega} \right),$$

welche ebene Wellen mit in ihrer ganzen Ausdehnung constanter Amplituden ergeben; dabei muss sein:

$$(29) \quad \begin{cases} M\omega^2 = A(1 - \kappa^2) + 2\kappa C + D\Omega_e \omega \\ B\omega^2 = 2\kappa A - C(1 - \kappa^2) + D\Omega_e \omega \kappa. \end{cases}$$

wenn abgekürzt gesetzt ist:

$$c/\tau = C, \quad b\tau = B.$$

Besonders einfach wird das Resultat, wenn man, wie ich sonst gethan, $b = 0$ setzt, und ω in dem mit Ω_e multiplicirten Glied durch den Werth ω^o ersetzt, der für das ruhende Medium gilt; dann ist nämlich:

$$(30) \quad \begin{aligned} 0 &= 2\kappa \left(A + \frac{D}{2} \Omega_e \omega^o \right) - C(1 - \kappa^2), & \text{also} \\ \kappa &= \sqrt{1 + \left(\frac{A + \frac{D}{2} \Omega_e \omega^o}{C} \right)^2} - \frac{A + \frac{D}{2} \Omega_e \omega^o}{C}. \end{aligned}$$

Haben wir ein Medium mit Absorption von mässiger Grösse, d. h. mit gegen Eins kleinem κ , so wird bis auf zweite Ordnung exclusive geschrieben werden können:

$$(30') \quad \kappa = \frac{C}{2A + D\Omega_e \omega^o}.$$

Dies κ misst dann sogleich die Grösse der Absorption selbst, denn ω , welches im Exponenten der Lösung u in κ dividirt auftritt, ist unter der gemachten Voraussetzung erst in zweiter Ordnung von κ abhängig.

Besitzt das Medium im Zustand der Ruhe eine auswählende Absorption, so haben wir A und C so von τ ab-

hängig zu denken, dass für die stark absorbirten Farben $\kappa = C/2A$ relativ grosse Werthe annimmt. Die obige Formel, welche sich innerhalb derselben Annäherung auch schreiben lässt:

$$(30'') \quad \kappa = \frac{C}{2A} \left(1 - \frac{k\Omega_e}{\omega^0} \right),$$

da $A = M\omega^0$ gesetzt werden kann, und $D/2M = k$ ist, zeigt, dass, wenn die auswählende Absorption, wie es wahrscheinlich ist, in erster Linie durch die Werthe von C , nicht von A bedingt ist, nur eine allgemeine Verstärkung oder Schwächung, nicht aber eine Verschiebung der Maxima der Absorption auf andere Farben infolge der Bewegung des Mediums eintritt.

Die bei gewöhnlichen isotropen Körpern eingeführten Kräfte A, B, C sind ungeändert auf circularpolarisirende anzuwenden, da auch bei diesen alle Richtungen normal zur Translationsrichtung unterschiedslos sind.

Die Formeln für diese Medien werden sonach in der grössten Allgemeinheit für periodische Schwingungen¹⁾:

$$(31) \quad \begin{cases} Mu'' = A \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + Pv' + Q \frac{\partial^2 v'}{\partial q^2} - D\Omega_e \frac{\partial u'}{\partial q}, \\ Mv'' = A \frac{\partial^2 v}{\partial q^2} - Pu' - Q \frac{\partial^2 u'}{\partial q^2} - D\Omega_e \frac{\partial v'}{\partial q}, \end{cases}$$

worin $P = p - p'/\tau^2$, $Q = q - q'/\tau^2$ ist.

Setzt man hierin:

$$u = a \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q}{\omega} \right), \quad v = b \cos \frac{1}{\omega} \left(t - \frac{q}{\omega} \right),$$

so folgt:

$$a = \pm b$$

und:

$$A - M\omega^2 + D\Omega_e\omega = \pm \tau \left(P\omega^2 - \frac{Q}{\tau^2} \right),$$

$$\text{oder:} \quad \left(A \pm \frac{Q}{\tau} \right) - (M \pm P\tau)\omega^2 + D\Omega_e\omega = 0.$$

Hieraus für gegen ω kleines Ω_e in erster Näherung:

$$(32) \quad \omega = \frac{D\Omega_e}{2(M \pm P\tau)} + \sqrt{\frac{A \pm \frac{Q}{\tau}}{M \pm P\tau}}.$$

Man erkennt, dass diese Formeln nur dann einen ver-

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 890. 1883.

schieden grossen Einfluss der Translation auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden auftretenden circularpolarisirenden Wellen ergeben, wenn P einen merklichen Werth hat. Das Glied P rührt aber von denjenigen Kräften her, welche bei einer Verschiebung ohne Deformation erregt werden, und welche nach anderen Beobachtungsergebnissen von mir für gewöhnlich gleich Null angenommen sind. Man erhält durch die letzte Formel ein neues Mittel, um die Zulässigkeit jener Annahme zu prüfen.

III. Für nicht isotrope Körper sind natürlich die früheren speciellen Werthe A , B , C nicht anwendbar; man hat hier vielmehr auf die allgemeinsten, Formel (15), zurückzugreifen.

Wir wollen der Betrachtung einen dreifach symmetrischen Krystall unterwerfen, der in einer beliebigen Richtung mit der Geschwindigkeit Ω verschoben wird, sodass deren Componenten nach den Krystall- und Coordinatenachsen Ω_x , Ω_y , Ω_z sind.

Da die Differentialgleichungen linear sind, so können wir die Wirkung A , B , C der ganzen Translation Ω durch die Superposition der Wirkungen A_1 , A_2 , $A_3 \dots$ ihrer Componenten Ω_x , Ω_y , Ω_z erhalten.

Sei zunächst nur die Componente Ω_x gegeben, dann muss nach den gemachten Annahmen über die Symmetrie bei einer Drehung des Coordinatensystems um 180° um die X -Axe A_1 ungeändert bleiben, B_1 und C_1 sein Zeichen wechseln; desgleichen bei einer Drehung um 180° um die Y - (resp. Z -)Axe A_1 und C_1 (resp. A_1 und B_1) ungeändert bleiben, und B_1 (resp. C_1) sein Zeichen wechseln, denn bei diesen Drehungen wird auch die Translationsrichtung umgekehrt.

Durch Verfolgung dieses Gedankens findet man:

$$\begin{aligned} -A_1 &= d_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial v'}{\partial y} + f_{13} \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ -B_1 &= d_{22} \frac{\partial v'}{\partial x} + e_{21} \frac{\partial u'}{\partial y}, & -C_1 &= d_{33} \frac{\partial w'}{\partial x} + f_{31} \frac{\partial u'}{\partial z}. \end{aligned}$$

Diese Glieder müssen mit Ω_x proportional sein; wir setzen daher:

$$(33) \quad \begin{cases} -A_1 = \Omega_x \left(D_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial v'}{\partial y} + F_{13} \frac{\partial w'}{\partial z} \right), \\ -B_1 = \Omega_x \left(D_{22} \frac{\partial v'}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial u'}{\partial y} \right), \\ -C_1 = \Omega_x \left(D_{33} \frac{\partial w'}{\partial x} + F_{13} \frac{\partial u'}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Dieselben Betrachtungen sind auch für die übrigen Componenten Ω_y , Ω_z anzuwenden; die in A_2 , B_2 , C_2 und A_3 , B_3 , C_3 auftretenden Constanten mögen analog bezeichnet werden. Alle A_1 , A_2 , $A_3 \dots$ sind dann in die Bewegungsgleichungen für krystallinische doppelsymmetrische Medien einzusetzen. Wir schreiben dieselben¹⁾:

$$(34) \quad \begin{cases} Mu'' = A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial x} \\ - \Omega_x \left(D_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial v'}{\partial y} + F_{13} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \Omega_y \left(E_{11} \frac{\partial u'}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \\ \quad - \Omega_z \left(F_{11} \frac{\partial u'}{\partial z} + D_{13} \frac{\partial w'}{\partial x} \right), \\ Mv'' = A_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial y} \\ - \Omega_x \left(D_{22} \frac{\partial v'}{\partial x} + E_{21} \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - \Omega_y \left(D_{21} \frac{\partial u'}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial v'}{\partial y} + F_{23} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \\ \quad - \Omega_z \left(F_{22} \frac{\partial v'}{\partial z} + E_{23} \frac{\partial w'}{\partial y} \right), \\ Mw'' = A_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial y} \\ - \Omega_x \left(D_{33} \frac{\partial w'}{\partial x} + F_{31} \frac{\partial u'}{\partial z} \right) - \Omega_y \left(E_{33} \frac{\partial w'}{\partial y} + F_{32} \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \\ \quad - \Omega_z \left(D_{31} \frac{\partial u'}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial v'}{\partial y} + F_{33} \frac{\partial w'}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Hierin ist nach der Fresnel'schen Vorstellung über die Lage der Polarisationsenebe²⁾:

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 887. 1883. Oben ist zwar $D_{hk} = D_{kh}$, $E_{hk} = E_{kh}$ und $F_{hk} = F_{kh}$, aber nicht ebenso $A_{hk} = A_{kh}$.

2) Die durch Specialisirungen dieser Art aus den allgemeinen erhaltenen Formeln werde ich weiterhin kurz als „nach“ Fresnel und Neumann gültig bezeichnen.

$$(35_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{11} = A_{12} = A_{13} = A_1, \quad A_{21} = A_{22} = A_{23} = A_2, \\ A_{31} = A_{32} = A_{33} = A_3, \end{array} \right.$$

nach der Neumann'schen hingegen:

$$(35_b) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{12} = A_{21} = A_3, \quad A_{13} = A_{31} = A_2, \quad A_{23} = A_{32} = A_1, \quad \text{und:} \\ A_{11} = A_{12} + A_{13} - A_{23}, \quad A_{22} = A_{21} + A_{23} - A_{13}, \\ A_{33} = A_{31} + A_{32} - A_{12}. \end{array} \right.$$

Dabei sind A_1, A_2, A_3 neue Bezeichnungen. L enthält im wesentlichen den durch die Incompressibilität auftretenden hydrodynamischen Druck.

Setzt man zur Integration:

$$u = a \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\rho}{\omega} \right), \quad v = b \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\rho}{\omega} \right), \quad w = c \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\rho}{\omega} \right),$$

$$L = - \frac{e}{\tau \omega} \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\rho}{\omega} \right),$$

worin $\rho = \mu x + \nu y + \pi z$ ist, und $a^2 + b^2 + c^2$ der Bequemlichkeit halber gleich 1 sein mag, so erhält man:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} e\mu = a [A_{11}\mu^2 + A_{12}\nu^2 + A_{13}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_x D_{11}\mu + \Omega_y E_{11}\nu + \Omega_z F_{11}\pi)] \\ \quad + b\omega(\Omega_x E_{12}\nu + \Omega_y D_{12}\mu) + c\omega(\Omega_x F_{13}\pi + \Omega_z D_{13}\mu), \\ e\nu = b [A_{21}\mu^2 + A_{22}\nu^2 + A_{23}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_x D_{22}\mu + \Omega_y E_{22}\nu + \Omega_z F_{22}\pi)] \\ \quad + c\omega(\Omega_y F_{23}\pi + \Omega_z E_{23}\nu) + a\omega(\Omega_y D_{21}\mu + E_{21}\nu), \\ e\pi = c [A_{31}\mu^2 + A_{32}\nu^2 + A_{33}\pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_x D_{33}\mu + \Omega_y E_{33}\nu + \Omega_z F_{33}\pi)] \\ \quad + a\omega(\Omega_z D_{31}\mu + \Omega_x F_{31}\pi) + b\omega(\Omega_z E_{32}\nu + \Omega_y F_{32}\pi), \end{array} \right.$$

dazu nach der Bedingung der Incompressibilität:

$$a\mu + b\nu + c\pi = 0.$$

Das hieraus sich ergebende Gesetz für die Normalengeschwindigkeit ist sehr complicirt; ich betrachte daher, um durch die Behandlung einfacher Fälle die nöthigen Mittel zur Reduction der grossen Anzahl (15) unbekannter Constanten zu erhalten, zunächst nur die Richtungen der Hauptaxen und sodann die Hauptebenen, ehe ich zu dem Allgemeinen übergehe.

Sei $\mu = 1, \nu = \pi = 0$, so folgt auch:

$a = 0$ und daraus:

$$e = \omega (b D_{12} + c D_{13}), \quad 0 = b (A_{21} - M\omega^2 + \omega \Omega_x D_{22}),$$

$$0 = c (A_{31} - M\omega^2 + \omega \Omega_x D_{33}).$$

Also schwingen die längs der X -Axe fortschreitenden Wellen entweder parallel der Y - oder Z -Axe, wie in ruhenden Medien.

Es ergibt sich für die parallel der Y -Axe schwingende Welle ($b = 1, c = 0$):

$$0 = A_{21} - M\omega^2 + \omega \Omega_x D_{22},$$

aber für die parallel der Z -Axe schwingende ($c = 1, b = 0$):

$$0 = A_{31} - M\omega^2 + \omega \Omega_x D_{33}.$$

Ist $\nu = 1, \mu = \pi = 0$, also $b = 0$, so kommt für die parallel der Z -Axe schwingende Welle:

$$0 = A_{32} - M\omega^2 + \omega \Omega_y E_{33},$$

für die parallel der X -Axe:

$$0 = A_{12} - M\omega^2 + \omega \Omega_y E_{11}.$$

Ist endlich $\pi = 1, \mu = \nu = 0$, also $c = 0$, so findet sich für die parallel der X -Axe schwingende Welle:

$$0 = A_{13} - M\omega^2 + \omega \Omega_z F_{11},$$

für die parallel der Y -Axe:

$$0 = A_{23} - M\omega^2 + \omega \Omega_z F_{22}.$$

Man erhält also für die ordinäre und extraordinäre Welle verschiedenen Einfluss der Translation, wie dies die Beobachtungen zu fordern scheinen, die Hypothese der Entrainirung des Aethers aber nicht zu erklären vermag.¹⁾

Soll parallel den Hauptaxen gleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im ruhenden Zustande auch gleiche Wirkung der Translation entsprechen, wie dies plausibel ist, so verlangt dies nach Fresnel die Relationen:

$$(37_a) \quad E_{11} = F_{11} = D_1, \quad F_{22} = D_{22} = D_2, \quad D_{33} = E_{33} = D_3.$$

nach Neumann:

1) Vgl. hierzu Ketteler, l. c. p. 159. Dasselbst ist allerdings noch vorausgesetzt, dass der Aether an der Bewegung der Erde nicht theilnähme, was nach den neuesten Beobachtungen von H. Michelson (Americ. Journ. (3) 34. p. 333. 1887) nicht richtig zu sein scheint. Die Bedenken, welche ich ehemals gegen eine solche Deutung der Beobachtungen Hrn. Michelson's hatte, kann ich als irrtümlich gegenüber brieflichen Einwänden von Hrn. H. A. Lorenz nicht aufrecht erhalten.

$$(37_b) \quad E_{33} = F_{22} = D_1, \quad F_{11} = D_{33} = D_2, \quad D_{22} = E_{11} = D_3.$$

Hierin sind D_1, D_2, D_3 neue Bezeichnungen.

Liegt die Wellennormale in einer Hauptebene, so zeigen die Gleichungen (36), dass die Schwingungen nicht nothwendig parallel und normal zu dieser Ebene stattfinden. Dies ist einleuchtend, denn durch die Translation wird die ursprünglich vorhandene Symmetrie zu den Hauptebenen aufgehoben; es erschwert aber die Discussion des Resultates unserer Theorie im hohen Grade. Eine Vereinfachung tritt ein, wenn man, wie wir vorläufig thun werden, sich beschränkt auf die Glieder, welche in Bezug auf das Verhältniss Ω/ω von der ersten Ordnung sind, — eine Beschränkung, die praktisch völlig unbedenklich ist.

Betrachtet man die Fortpflanzung der Wellennormalen in der YZ -Ebene, nimmt also $\mu = 0$ an, so erhält man:

$$(38) \quad \begin{cases} 0 = a [A_{12} \nu^2 + A_{13} \pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_y \nu E_{11} + \Omega_z \pi F_{11}) \\ \quad \quad \quad + \omega \Omega_x (E_{12} b \nu + F_{13} c \pi), \\ e\nu = b [A_{22} \nu^2 + A_{23} \pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_y \nu E_{22} + \Omega_z \pi F_{22}) \\ \quad \quad \quad + \omega c (\Omega_y \pi F_{23} + \Omega_z \nu E_{23}) + \omega a \Omega_x \nu E_{21}, \\ e\pi = c [A_{32} \nu^2 + A_{33} \pi^2 - M\omega^2 + \omega(\Omega_y \nu E_{33} + \Omega_z \pi F_{33}) \\ \quad \quad \quad + \omega b (\Omega_y \pi F_{23} + \Omega_z \nu E_{23}) + \omega a \Omega_x \pi F_{31}. \end{cases}$$

Setzt man a bis auf zweite Ordnung gleich 1 (schreibe (1)), so ist b und c selber erster Ordnung, also sind die damit multiplicirten Glieder, welche Ω enthalten, zweiter Ordnung. Daher kann man als eine Lösung der Gleichungen (38) bis zu der gegebenen Genauigkeit aufstellen:

$$(39) \quad a = (1), \\ M\omega_1^2 = A_{12} \nu^2 + A_{13} \pi^2 + \omega_1 (\Omega_y \nu E_{11} + \Omega_z \pi F_{11}).$$

Ist hingegen a von erster Ordnung (schreibe = (0)), so erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung unter Rücksicht auf $\nu b + \pi c = 0$ durch Elimination von e, b und c die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der zweiten Welle, sodass eine zweite Wurzel geschrieben werden kann:

$$(40) \quad \begin{cases} a = (0), \\ M\omega_2^2 = (A_{22} + A_{33}) \pi^2 \nu^2 + A_{23} \pi^4 + A_{32} \nu^4 \\ \quad + \omega_2 [\Omega_y \nu (E_{33} \nu^2 + (E_{22} - 2F_{23}) \pi^2) + \Omega_z \pi ((F_{33} - 2E_{23}) \nu^2 + F_{22} \pi^2)]. \end{cases}$$

Dies gibt nach Fresnel interpretirt in Rücksicht auf (35_a) und (37_a):

$$(41_a) \left\{ \begin{array}{l} M\omega_1^2 = A_1 + \omega_1 \Omega_e D_1, \\ M\omega_2^2 = A_2 \pi^2 + A_3 v^2 \\ + \omega_2 [\Omega_y v (D_3 v^2 + (E_{22} - 2F_{23}) \pi^2) + \Omega_z \pi ((F_{33} - 2E_{23}) v^2 + D_2 \pi^2)], \end{array} \right.$$

hingegen nach Neumann unter Rücksicht auf (35_b) und (37_b):

$$(41_b) \left\{ \begin{array}{l} M\omega_1^2 = A_3 v^2 + A_2 \pi^2 + \omega_1 (\Omega_y v D_3 + \Omega_z \pi D_2), \\ M\omega_2^2 = A_1 + \omega_2 [\Omega_y v (D_1 v^2 + (E_{22} - 2F_{23}) \pi^2) \\ + \Omega_z \pi ((F_{33} - 2E_{23}) v^2 + D_1 \pi^2)]. \end{array} \right.$$

Es zeigt sich, dass schon die bisherigen Annahmen in der Fresnel'schen Form das Resultat ergeben, dass die Welle, welche im ruhenden Krystall constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit besass, sich verhält wie einem isotropen Körper angehörig. Dies plausible Resultat ist in der letzteren, Neumann'schen Form erst durch eine neue Annahme zu erzielen, nämlich durch die Verfügung:

$$(42_b) \left\{ \begin{array}{l} E_{22} - 2F_{23} = F_{33} - 2E_{23} = D_1, \\ \text{welcher sich durch die Rücksicht auf die anderen bei-} \\ \text{den Hauptebenen noch zuordnen:} \\ F_{33} - 2D_{31} = D_{11} - 2F_{31} = D_2, \\ D_{11} - 2E_{12} = E_{22} - 2D_{12} = D_3. \end{array} \right.$$

Diese in sich widerspruchslosen Relationen können als eine Bestimmung der sechs Constanten D_{hk} , E_{hk} , F_{hk} angesehen werden, welche die Ablenkung der Schwingungsebene aus den Hauptebenen bedingen. Ihre Rechtfertigung hat die Beobachtung zu liefern, unsere Theorie vermag sie nur wahrscheinlich zu machen.

Hierdurch gewinnen die Neumann'schen Formeln (41_b) die Gestalt:

$$(43_b) \left\{ \begin{array}{l} M\omega_1^2 = A_3 v^2 + A_2 \pi^2 + \omega_1 (\Omega_y v D_3 + \Omega_z \pi D_2), \\ M\omega_2^2 = A_1 + \omega_2 \Omega_e D_1. \end{array} \right.$$

Man erzielt für die Welle mit nicht constanter Ge-

schwindigkeit in den Fresnel'schen Gleichungen die gleiche einfache Form durch die Verfügungen:

$$E_{22} - 2F_{23} = D_3, \quad F_{33} - 2E_{23} = D_2,$$

die zu ergänzen sind durch:

$$(42_a) \quad \begin{cases} F_{33} - 2D_{31} = D_1, & D_{11} - 2F_{31} = D_3, \\ D_{11} - 2E_{12} = D_2, & E_{22} - 2D_{12} = D_1, \end{cases}$$

Formeln, die eine analoge Bestimmung von D_{12} , D_{13} . . . enthalten wie (42_b). Die Gleichungen (41_a) gewinnen dadurch die Form:

$$(43_a) \quad \begin{cases} M\omega_1^2 = A_1 + \omega_1 \Omega_\rho D_1, \\ M\omega_2^2 = A_2 \pi^2 + A_3 \nu^2 + \omega_2 (\Omega_y \nu D_3 + \Omega_z \pi D_2), \end{cases}$$

die mit der Neumann'schen bis auf die gewöhnliche Unterscheidung der Schwingungsebene identisch ist. Wir fassen sie also praktisch in eine Bezeichnung zusammen.

Setzt man:

$$A_1/M = \omega_x^o, \quad A_2/M = \omega_y^o, \quad A_3/M = \omega_z^o,$$

wo ω_x^o die in der Ebene normal zur X -Axe constante Geschwindigkeit im ruhenden Krystall bezeichnet, und ferner:

$$D_1/2M = k_x, \quad D_2/2M = k_y, \quad D_3/2M = k_z,$$

wo k_x ebenso den Einfluss der Translation auf diese Welle mit constanter Geschwindigkeit misst, so schreibt sich:

$$(44) \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \omega_x^{o2} + 2\omega_1 \Omega_\rho k_x, \\ \omega_2^2 = \omega_y^{o2} \pi^2 + \omega_z^{o2} \nu^2 + 2\omega_2 (\Omega_y \nu k_z + \Omega_z \pi k_y), \end{cases}$$

letzteres auch:

$$\omega_2^2 = \omega_y^{o2} \pi^2 + \omega_z^{o2} \nu^2 + 2\omega_2 \Omega_\rho (k_y \pi^2 + k_z \nu^2) + 2\omega_2 \Omega_\tau \pi \nu (k_y - k_z),$$

wenn man mit Ω_ρ wieder die Componente von Ω nach der Wellennormale ρ , mit Ω_τ diejenige nach der in der Hauptebene zu ρ normalen Richtung τ bezeichnet; vorausgesetzt ist dabei, dass τ zu ρ liegt, wie die Z zur Y -Axe.

Da die bisherige Ableitung die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt hat, so kann man (44) auch schreiben:

$$(45) \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_1^o + \Omega_\rho k_x, \\ \omega_2 = \omega_2^o + \Omega_\rho (k_y \pi^2 + k_z \nu^2) + \Omega_\tau \pi \nu (k_y - k_z). \end{cases}$$

Man geht von diesen Formeln für die Hauptebene YZ der zweiaxigen Krystalle sogleich über zu den allgemeinsten Formeln für einaxige Krystalle mit der Z -Axe als Hauptaxe durch Einführung der den neuen Symmetrieverhältnissen entsprechenden Relationen zwischen den Constanten. Zu diesen gelangt man am bequemsten, wenn man die auf p. 387 ausgeführte Zerlegung der Kräfte A, B, C anwendet und berücksichtigt, dass die A_3, B_3, C_3 bei einer Drehung des Coordinatensystems um die Z -Axe um 90° sich nicht ändern, die A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 aber wegen der Gleichwerthigkeit der X - und Y -Richtung in gewisser Weise in einander übergehen. Durch Verfolgung dieses Gedankens finden sich die folgenden Relationen:

$$D_{11} = E_{22}, \quad D_{22} = E_{11}, \quad D_{12} = E_{12}, \quad D_{13} = E_{23}, \quad D_{33} = E_{33}, \\ F_{11} = F_{22}, \quad F_{13} = F_{23} = 0.$$

Dieselben geben für unsere Endformeln (43) und (44) nur das Resultat, dass die Gleichung:

$$D_1 = D_2 \quad \text{der Relation} \quad A_1 = A_2,$$

welche für die dem ruhenden Medium entsprechenden Constanten gilt, sich zuordnet. Es gilt also bei optisch einaxigen Krystallen für jeden Hauptschnitt, wenn man $\sqrt{1 - \pi^2} = \alpha$, $\omega_x = \omega_y = \omega_n$, $k_x = k_y = k_n$ setzt, wo n die Richtung normal zur Z -Axe im betrachteten Hauptschnitt bezeichnet:

$$(44') \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \omega_n^2 + 2\omega_1 \Omega_0 k_n, \\ \omega_2^2 = \omega_n^2 \pi^2 + \omega_n^2 \alpha + 2\omega_2 (\Omega_n \alpha k_z + \Omega_z \pi k_n). \end{cases}$$

Von letzterer Formel gelangt man sogleich zur Gleichung für die ganze Oberfläche der Normalengeschwindigkeit für einaxige Krystalle:

$$(44'') \quad \begin{cases} \omega_o^2 = \omega_n^2 + 2\omega_o \Omega_0 k_n, \\ \omega_e^2 = \omega_n^2 \pi^2 + \omega_n^2 (u^2 + v^2) + 2\omega_e [(\Omega_x u + \Omega_y v) k_z + \Omega_z \pi k_n]. \end{cases}$$

Bei der (im Grunde hier nothwendigen) Beschränkung auf erste Ordnung lautet (44')¹⁾:

1) Diese Formeln sind identisch mit den von Hrn. Ketteler aus seinen Beobachtungen an Kalkspathprismen abgeleiteten; s. Astronomische Undulationstheorie p. 672. Formel (64); p. 175. Formel (64a).

$$(45') \quad \begin{cases} \omega_o = \omega_o^\circ + \Omega_o k_n, \\ \omega_e = \omega_e^\circ + \Omega_n \kappa k_z + \Omega_z \pi k_n, \\ \quad = \omega_e^\circ + \Omega_z (k_n \pi^2 + k_z \kappa^2) + \Omega_z \pi \kappa (k_n - k_z). \end{cases}$$

Es erscheint besonders bemerkenswerth, dass nach unserer Theorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der extraordinären Welle nicht nur von der Componente der Translation nach der Wellennormalen abhängig ist, sondern auch die hierzu senkrecht im Hauptschnitt gelegene eine Wirkung ausübt.

Die Formel (44'') gestattet leicht den Uebergang zur Wellenfläche, welche bekanntlich die Enveloppe der Wellennormalenfläche ist; ich beschränke mich auf die extraordinäre Welle, da die ordinäre durch das Frühere schon erledigt ist. Wir erhalten zur Bestimmung des Punktes x', y', z' , nach welchem der zur Normale (u, v, π) gehörige Strahl von der Länge ω' führt, die Gleichungen:

$$\mu x' + \nu y' + \pi z' = \omega_e = \omega_e^\circ + (\mu \Omega_x + \nu \Omega_y) k_z + \pi \Omega_z k_n.$$

$$\pi x' - \mu z' = \pi \frac{\partial \omega_e}{\partial \mu} = \pi \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \mu} + \pi \Omega_x k_z - \mu \Omega_z k_n,$$

$$\pi y' - \nu z' = \pi \frac{\partial \omega_e}{\partial \nu} = \pi \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \nu} + \pi \Omega_y k_z - \nu \Omega_z k_n.$$

wozu wir nehmen:

$$\pi z' - \pi z' = 0.$$

Durch die Factoren μ, ν, π erhält man hieraus zunächst:

$$z' = \pi \left(\omega_e^\circ - \mu \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \mu} - \nu \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \nu} \right) + \Omega_z k_n,$$

und durch Einsetzen:

$$x' = \mu \left(\omega_e^\circ - \nu \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \nu} \right) + (1 - \mu^2) \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \mu} + \Omega_x k_z.$$

$$y' = \nu \left(\omega_e^\circ - \mu \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \mu} \right) + (1 - \nu^2) \frac{\partial \omega_e^\circ}{\partial \nu} + \Omega_y k_z;$$

oder indem man die Coordinaten x^o, y^o, z^o , welche dem Ruhezustand ($\Omega = 0$) entsprechen, einführt:

$$x' = x^o + \Omega_x k_z, \quad y' = y^o + \Omega_y k_z, \quad z' = z^o + \Omega_z k_n.$$

Hieraus folgt sogleich die Gleichung der Wellenfläche, indem man in der bekannten Formel für ruhende Medien $x^{o'}$ mit $x' - \Omega_x k_x$ u. s. f. vertauscht¹⁾:

$$(46) \quad \frac{(x' - \Omega_x k_x)^2 + (y' - \Omega_y k_y)^2}{\omega_z^{o'2}} + \frac{(z' - \Omega_z k_z)^2}{\omega_n^{o'2}} = 1.$$

Bei der benutzten (ersten) Annäherung ist also die Wellenfläche für den bewegten einaxigen Krystall nur dadurch von der für den ruhenden verschieden, dass sie um Längen $\Omega_x k_x$, $\Omega_y k_y$, $\Omega_z k_z$ längs der Coordinatenachsen verschoben ist.²⁾

Die Richtung des Strahles wird infolge der Translation um einen Winkel φ gedreht, der sich aus den Winkeln φ_x , φ_y , φ_z bestimmt, um welche seine Projectionen auf die Coordinatenebenen sich verschieben. Es ist nämlich:

$$\varphi_x = \frac{\nu^{o'} \Omega_z k_z - \pi^{o'} \Omega_y k_y}{\omega^{o'}}, \quad \varphi_y = \frac{\pi^{o'} \Omega_x k_x - \mu^{o'} \Omega_z k_z}{\omega^{o'}},$$

$$\varphi_z = \frac{(\mu^{o'} \Omega_y - \nu^{o'} \Omega_x) k_x}{\omega^{o'}}.$$

Umständlicher bestimmt sich die einer gegebenen Wellennormalen entsprechende Strahlengeschwindigkeit ω_e' ; es ist:

$$(46') \quad \omega_e'^2 = \frac{\omega_n^{o'4} \pi^2 + \omega_z^{o'4} \kappa^2 + 2\omega_e^o (\omega_z^{o'2} \Omega_n k_z + \omega_n^{o'2} \Omega_z k_n)}{[\omega_e - (\Omega_n \kappa k_z + \Omega_z \pi k_n)]^2};$$

ähnlich der Winkel χ_e zwischen der Richtung von Strahl und Normale:

$$(46'') \quad \sin \chi_e = \frac{(\omega_z^{o'2} - \omega_n^{o'2}) \pi \kappa + \omega_e^o (\Omega_z k_n \kappa - \Omega_y k_y \pi)}{\omega_e' [\omega_e - (\Omega_n \kappa k_z + \Omega_z \pi k_n)]^2}.$$

Die Bezeichnung ist dieselbe, wie in Formel (44').

1) Auch diese Formel gibt Hr. Ketteler, l. c. p. 183.

2) Für die ordinäre Welle würde sich also eine excentrische Kugel ergeben; auch für isotrope Medien gilt dies angenähert; über das strenge Gesetz s. p. 384.