zusammenfällt, der dem Licht der Kohlenspitzen bei dem electrischen Bogenlicht entspricht, da wir es ja in beiden Fällen mit compacten Massen verbrennender Kohle zu thun haben. Zur Prüfung entwarf ich vermittelst eines achromatischen Linsensystems auf einem Schirme ein scharfes Bild der beiden Kohlenspitzen und des zwischen ihnen liegenden Bogens, sodass ich das Licht der ersteren getrennt von dem des letzteren in das Leukoskop einfallen lassen konnte, indem ich das Bild der Kohlenspitzen so zu richten suchte, dass es gerade auf ein in dem Schirm angebrachtes Loch fiel. Durch dieses richtete ich dann das Leukoskop nach der Lichtquelle hin. Leider verändern die Kohlenspitzen so schnell ihre Lage, was sich natürlich auf die Lage des Bildes (da man der grossen Intensität des Lichtes halber den Schirm sehr weit entfernt aufstellen muss) in stark vergrössertem Maasse überträgt, dass die Beobachtung nur sehr schwer und mangelhaft durchzuführen war. Als Werth für β erhielt ich ungefähr 79^0, während der Grenzwerth bei den Glühlampen ungefähr 78^0 betrug. Ich erachte aber die Beobachtung an dem Kohlenbogenlicht für so ungenau, dass ich in dem Bestehen der Differenz von 1^0 zwischen den beiden Werthen für β keinen Grund sehe, die oben erwähnte Vermuthung für die Gleichheit des von den glühenden Kohlen in beiden Fällen ausgesandten Lichts als experimentell widerlegt zu erklären.

Berlin, Physikal. Inst., Aug. 1882.

XVIII. *Beitrag zur Theorie der Diffraction an Fernröhren; von Hermann Struve.*

In einer in den Memoiren der Petersburger Academie kürzlich veröffentlichten Abhandlung „Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben“[1]) habe ich unter anderem die Intensitätsvertheilung in der Focalebene

1) H. Struve, Mém. de l'Acad. **30**. Nr. 8. 1882.

eines Fernrohrs für den besonderen Fall untersucht, dass das geometrische Focalbild der Lichtscheibe geradlinig begrenzt ist und in allen Theilen dieselbe specifische Intensität besitzt. Die Aufgabe führte auf die Bestimmung eines Doppelintegrals der Bessel'schen Function $J_1(z)$ und wurde von mir am bezeichneten Orte in der Weise gelöst, dass ich das Integral in zwei Theile zerlegte, von denen der eine durch die convergente, der zweite durch die semiconvergente Entwickelung von $J_1(z)$ sich ermitteln liess. So naheliegend dieser Weg auf den ersten Blick erscheint, so kann derselbe in mathematischer Beziehung doch nur als Umweg gelten, der, wie ich mich nachträglich überzeugt habe, leicht zu vermeiden ist. Die Aufgabe lässt sich nämlich auf directerem Wege und in eleganterer Form mittelst einer von Hrn. Mehler[1]) herrührenden Darstellung der Function $J_0(z)$ lösen, welche mir leider bei der Abfassung jener Abhandlung nicht zu Gebote stand. Ich komme deshalb im Folgenden nochmals auf diese Untersuchung kurz zurück.

Die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung für einen Lichtpunkt und eine kreisförmige Oeffnung wird in folgender Weise durch die Bessel'sche Function ersten Ranges dargestellt. Bezeichnet man mit R den Radius der beugenden Objectivöffnung, so ist die Intensität eines Punktes der Focalebene im Abstand ζ vom geometrischen Bildpunkt, bezogen auf die Intensität des letzteren als Einheit, durch den Ausdruck:

$$J = 4\left(\frac{J_1(z)}{z}\right)^2, \tag{1}$$

gegeben, worin $z = 2\pi/\lambda\,(R.\zeta)$ zu setzen ist. Der Kürze halber mögen im Folgenden die Bezeichnungen „Lichtpunkt“, „Lichtlinie“, „Lichtscheibe“, auf deren geometrische Bilder in der Focalebene angewandt werden und die Grösse z einfach der Abstand heissen.

Durch Integration von (1) ergibt sich die Lichtvertheilung an Lichtlinien und Lichtscheiben, deren Punkte unabhängig voneinander leuchten. Fassen wir insbesondere den Fall einer geraden, homogenen, ins Unendliche sich er-

1) Mehler, Mathemat. Ann. 5. p. 141. 1872.

streckenden Lichtlinie ins Auge, so erhalten wir die Intensität im Abstand z von derselben, aus dem Integrale:

$$J = C\int_z^\infty \frac{(J_1(x))^2}{x\sqrt{x^2-z^2}}\,dx, \tag{2}$$

in welchem C eine von z unabhängige Constante bedeutet, die von der Wahl der Intensitätseinheit abhängt. Beziehen wir die Intensitäten auf diejenige der Lichtlinie, so bestimmt sich C daraus, dass für $z = 0$, $J = 1$ werden muss.

Um das Integral (2) auf bekannte Functionen von z zurückzuführen, erinnere ich zunächst an einen von Hrn. C. Neumann gefundenen Satz, nach welchem das Quadrat einer Bessel'schen Function n. Ranges durch ein Integral einer Bessel'schen Function $2n$. Ranges dargestellt werden kann, nämlich:

$$\big(J_n(x)\big)^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2n}(2x\sin\alpha)\,d\alpha.$$

Infolge dieses Satzes und anderer aus der Theorie der Bessel'schen Transcendenten bekannter Relationen lässt sich (2) successive in folgender Weise umformen:

$$\int_z^\infty \frac{(J_1(x))^2}{x\sqrt{x^2-z^2}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_z^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-z^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_2(2x\sin\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-z^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(J_1(2x\sin\alpha) + J_3(2x\sin\alpha)\big)\sin\alpha\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,d\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\beta + \sin 3\beta)\,d\beta\int_z^\infty \frac{\sin(2x\sin\alpha\sin\beta)}{\sqrt{x^2-z^2}}\,dx.$$

Die Aufgabe ist damit auf das Integral:

$$\int_z^\infty \frac{\sin ax}{\sqrt{x^2-z^2}}\,dx$$

zurückgeführt. Wie nun Hr. Mehler a. a. O. bewiesen hat, kann die Function $J_0(y)$ in die Form:

$$J_0(y) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

gebracht werden, welche für beliebige positive y mit Einschluss der 0 gültig bleibt. Demzufolge ist für Werthe von α und β zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und für $z \gtreqless 0$:

$$\frac{2}{\pi}\int \frac{\sin(2x\sin\alpha\sin\beta)}{\sqrt{x^2-z^2}}\,dx = J_0(2z\sin\alpha\sin\beta)$$

und daher:

$$\int_z^\infty \frac{(J_1(x))^2}{x\sqrt{x^2-z^2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\beta+\sin 3\beta)\,d\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2z\sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha\,d\alpha.$$

Beachtet man ferner die leicht zu beweisende Relation:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(z\sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha = \frac{\sin z}{z},$$

sowie, dass $\sin\beta+\sin 3\beta = 4\sin\beta\cos^2\beta$ ist, so erhält man kürzer:

$$\int_z^\infty \frac{(J_1(x))^2}{x\sqrt{x^2-z^2}}\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{z}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2z\sin\beta)\,.\cos^2\beta\,d\beta,$$

oder schliesslich, wenn man der Bessel'schen Function ersten Ranges entsprechend:

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\sin\beta)\cos^2\beta\,d\beta,$$

setzt,

$$\int_z^\infty \frac{(J_1(x))^2}{x\sqrt{x^2-z^2}}\,dx = \frac{H_1(2z)}{2z^2}.$$

Für $z = 0$ wird:

$$\frac{H_1(2z)}{2z^2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\beta\sin\beta\,d\beta = \frac{4}{3\pi};\ \text{mithin}\ C = \frac{3\pi}{4}$$

und folglich die Intensität im Abstande z von der Lichtlinie, bezogen auf die Intensität der letzteren:

(3) $$J = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{H_1(2z)}{z^2}.$$

Die Function $H_1(z)$ gehört zu einer Classe von Functionen, welche mit den Bessel'schen nahe verwandt sind und viele Analogien mit denselben besitzen. In meiner o. c. Abhandlung habe ich sie bei der Untersuchung der Diffraction an Heliometern in etwas anderer Weise eingeführt, nämlich in der Form:

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin\beta) \sin\beta \, d\beta\right) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{z \sin\beta}{2}\right) \sin\beta \, d\beta.$$

Ausgehend von der letzteren gelangt man aber sofort zu der obigen, wenn man den Fourier'schen Lehrsatz:

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha z) \, d\alpha \int_0^{\infty} f(\lambda) \sin(\alpha\lambda) \, d\lambda$$

auf die Function $f(z) = H_1(z)/z$ anwendet und dabei berücksichtigt, dass:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha\lambda) \, . \sin^2\left(\frac{\lambda \sin\beta}{2}\right)}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{ für } \sin\beta > \alpha \\ 0 \;\; \text{,,} \;\; \sin\beta < \alpha. \end{cases}$$

Aus den obigen Darstellungen folgert man die Reihenentwickelungen:

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \cdot \frac{z^{2n}}{(3.5\ldots(2n-1))^2} \qquad \text{und:}$$

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z^4} + \cdots\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\left\{1 + \frac{3.5.1}{2!(8z)^2} - \cdots\right\}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\left\{\frac{3}{8z} - \frac{3.5.7.1.3}{3!(8z)^3} + \cdots\right\},$$

welche denjenigen für $J_1(z)$ analog sind. Erstere Reihe convergirt für jeden Werth von z, letztere ist semiconvergent. Setzt man ferner der Bessel'schen Function $J_0(z)$ entsprechend:

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin\beta) \, d\beta$$

und berücksichtigt die Relation:

$$\frac{\partial H_1(z)}{\partial z} = H_0(z) - \frac{1}{z} H_1(z),$$

so findet man aus (3) die Lage der Intensitäts-Maxima und Minima durch die Wurzeln der Gleichung:

$$3 H_1(2z) = 2z H_0(2z)$$

gegeben, welche mit wachsendem Abstand z sich mehr und mehr den Wurzeln der Gleichung:

$$\sin\left(2z - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi z}}$$

annähern. Da die Function $H_1(z)$ wesentlich positiv ist, so können in diesem Fall keine absoluten Minima auftreten, was sich übrigens von selbst versteht.

Die Intensitätsvertheilung an einer geradlinig begrenzten homogenen Lichtscheibe, die sich nach einer Seite ins Unendliche erstreckt (Kreisscheibe von unendlich grossem Radius), ergibt sich nunmehr unmittelbar aus (3) durch Integration nach z. Offenbar hängt auch in diesem Fall die Intensität eines Punktes der Focalebene nur von dessen Abstand z von der geometrischen Begrenzung der Lichtscheibe ab. Je nachdem aber der Punkt innerhalb oder ausserhalb der Lichtscheibe liegt, haben wir hier zwei Fälle zu unterscheiden, die in einfacher Weise zusammenhängen. Bezeichnen wir nämlich mit $I(+z)$ die Intensität im Abstande z ausserhalb der Lichtscheibe, mit $I(-z)$ die Intensität im selben Abstand innerhalb der Lichtscheibe, und wählen die volle Intensität, welche die Scheibe in unendlicher Entfernung von der geometrischen Begrenzung besitzt, zur Einheit, so gilt die Beziehung:

$$I(+z) + I(-z) = 1,$$

welche ausspricht, dass die Summe der Intensitäten irgend zweier correspondirender Punkte, die in gleicher Entfernung, aber auf entgegengesetzten Seiten vom geometrischen Rande liegen, gleich ist der vollen Intensität. Insbesondere muss also die Randintensität genau die Hälfte der vollen Intensität betragen.

Wir brauchen deshalb nur die Intensität ausserhalb der

Scheibe in Betracht zu ziehen. Aus (3) geht aber für diesen Fall:

$$I(+z) = C\int_z^\infty \frac{H_1(2z)}{z^2}\,dz$$

hervor, und die Constante C bestimmt sich, gemäss der von uns getroffenen Wahl der Intensitätseinheit, daraus, dass für $z = 0$, $I(+z) = {}^1/_2$ wird. Wegen:

$$\int_0^\infty \frac{H_1(2z)}{z^2}\,dz = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\beta\, d\beta \int_0^\infty \frac{\sin(2z\sin\beta)}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}$$

hat man nun $C = 1/\pi$ und folglich:

$$I(+z) = \frac{1}{\pi}\int_z^\infty \frac{H_1(2z)}{z^2}\,dz = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^z \frac{H_1(2z)}{z^2}\,dz \tag{4}$$

Einer weiteren Reduction scheint dies Integral nicht fähig zu sein; es muss also entweder durch die convergente oder semiconvergente Entwickelung von $H_1(z)$ berechnet werden. Unter Zugrundelegung der ersteren findet man die rasch convergirende Reihe:

$$I(+z) = \tfrac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{2^{2n}}{(3.5\ldots(2n+1))^2}\,z^{2n-1}.$$

Für grössere Argumente ist es dagegen bequemer, die semiconvergente Reihe zu benutzen, deren Anfangsglieder unmittelbar zu dem genäherten Ausdruck:

$$I(+z) = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{12z^3}\right) - \frac{1}{2\pi^{3/2}}\cdot\frac{\cos\left(2z + \frac{\pi}{4}\right)}{z^{5/2}}$$

führen; derselbe ist auf anderem Wege bereits a. a. O. abgeleitet. Beschränkt man sich auf das erste Glied, so hat man:

$$I(+z) = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{\pi^3}\cdot\frac{\lambda}{R.\zeta}$$

und damit folgenden Satz:

„In grösseren Entfernungen vom geometrischen Rande ist die Intensität umgekehrt proportional der Entfernung ζ

und dem Radius der Objectivöffnung. Die Intensitätscurve nähert sich daher einer Hyperbel, welche die Abscissenaxe (senkrecht zum Rande gedacht) zur Asymptote hat."

Mit geringen Abänderungen lässt sich das obige Verfahren auch auf das allgemeinere Integral:

$$\int_z^\infty \frac{J_n(ax) \, . \, J_n(bx)}{x\sqrt{x^2 - z^2}} \, dx$$

ausdehnen, wobei man von der allgemeineren Transformationsformel:

$$J_n(ax) . J_n(bx) = \frac{x \; a^n \, b^n}{2^n \sqrt{\pi} \, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \frac{J_n(x\sqrt{a^2 - 2ab\cos\psi + b^2})}{\sqrt{a^2 - 2ab\cos\psi + b^2}} \sin^{2n}\psi \, d\psi$$

Gebrauch machen kann. Für $n = 1$ folgt hieraus in der nämlichen Weise wie oben:

$$(5) \quad \int_z^\infty \frac{J_1(ax) \, . \, J_1(bx)}{x\sqrt{x^2 - z^2}} \, dx = \frac{ab}{\pi z} \int_0^\pi \frac{\sin(z\sqrt{a^2 - 2ab\cos\psi + b^2})}{a^2 - 2ab\cos\psi + b^2} \sin^2\psi \, d\psi.$$

Die rechte Seite kann nunmehr wieder in eine convergente Reihe nach geraden Potenzen von z entwickelt werden, und die Entwickelungscoëfficienten lassen sich durch die vollständigen elliptischen Integrale K und E darstellen.

Wie leicht einzusehen, wird man auf das Integral (5) geführt, wenn man die oben besprochene Aufgabe für eine ringförmige Objectivöffnung verallgemeinern will. Unter der Annahme einer solchen Oeffnung geht nämlich der Intensitätsausdruck (1) in den folgenden über:

$$J = \frac{4}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{(J_1(z) - pJ_1(pz))^2}{z^2}$$

wo $z = 2\pi/\lambda . R\zeta$, R den Radius der äusseren und pR den Radius der inneren Begrenzung des Ringes bedeutet. Demnach erhält man in diesem Fall an Stelle von (2) ein Integral, welches sofort aus (5) bestimmt werden kann.

Zum Schluss mag hier noch die auf p. 35 meiner Abhandlung gegebene Intensitätstabelle Platz finden, die auf 1 bis 2 Einheiten der letzten Decimale sicher ist.

Intensitätstabelle für eine geradlinig begrenzte Lichtscheibe.

$$I(-z) = 1 - I(+z).$$
$$z = \left(\frac{2\pi}{\lambda} R \sin 1''\right) \cdot \zeta''.$$

z	$I(+z)$	z	$I(+z)$	z	$I(+z)$	z	$I(+z)$
0,0	0,5000	2,0	0,1073	4,0	0,0528	9,0	0,0222
0,1	0,4780	2,1	0,0993	4,2	0,0506	9,4	0,0213
0,2	0,4461	2,2	0,0923	4,4	0,0484	9,8	0,0206
0,3	0,4195	2,3	0,0862	4,6	0,0459	10,2	0,0200
0,4	0,3934	2,4	0,0810	4,8	0,0434	10,6	0,0194
0,5	0,3678	2,5	0,0765	5,0	0,0410	11,0	0,0186
0,6	0,3424	2,6	0,0728	5,2	0,0389	11,4	0,0178
0,7	0,3187	2,7	0,0696	5,4	0,0369	11,8	0,0170
0,8	0,2955	2,8	0,0670	5,6	0,0353	12,2	0,0164
0,9	0,2732	2,9	0,0648	5,8	0,0339	12,6	0,0160
1,0	0,2521	3,0	0,0630	6,0	0,0328	13,0	0,0156
1,1	0,2321	3,1	0,0615	6,2	0,0319	13,4	0,0152
1,2	0,2132	3,2	0,0602	6,4	0,0311	13,8	0,0148
1,3	0,1956	3,3	0,0591	6,6	0,0305	14,2	0,0143
1,4	0,1793	3,4	0,0581	6,8	0,0299	14,6	0,0139
1,5	0,1642	3,5	0,0572	7,0	0,0293	15,0	0,0135
1,6	0,1504	3,6	0,0564	7,4	0,0280		
1,7	0,1379	3,7	0,0556	7,8	0,0264		
1,8	0,1265	3,8	0,0547	8,2	0,0248		
1,9	0,1163	3,9	0,0538	8,6	0,0233		

Pulkowa, August 1882.

XIX. *Ueber die elliptische Polarisation des reflectirt gebeugten Lichtes; von Walter König.*

Die Untersuchungen, die im Folgenden besprochen werden sollen, schliessen sich unmittelbar an diejenigen Arbeiten über Polarisation des gebeugten Lichtes an, welche die Herren Fröhlich und Réthy einst in diesen Annalen veröffentlicht haben. Die früheren Versuche über diesen Gegenstand — ich erinnere an die Arbeiten von Stokes[1]), Holtz-

1) Stokes, Trans. of the Cambr. Phil. Soc. **9.** p. 1. 1850.

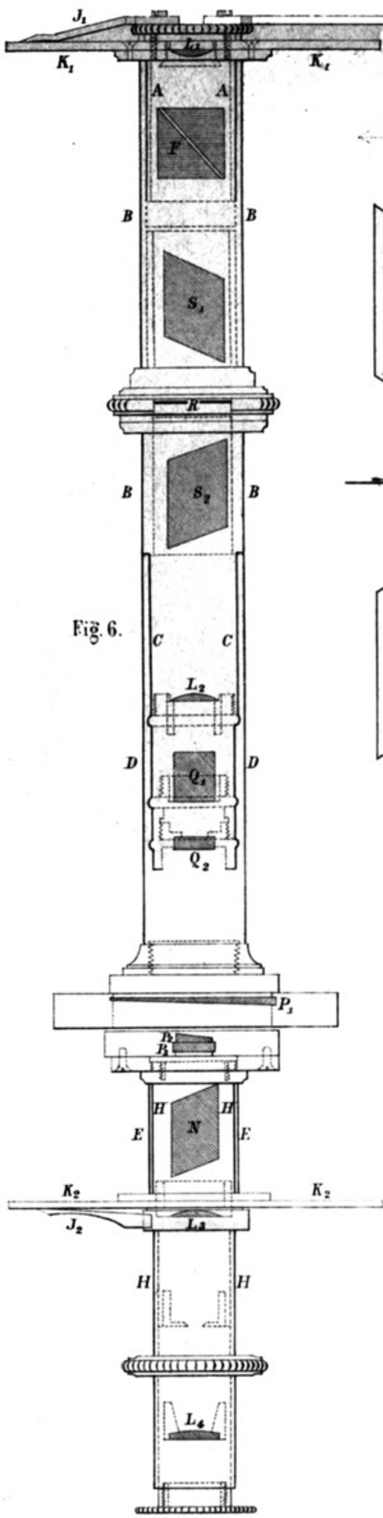


Fig. 6.

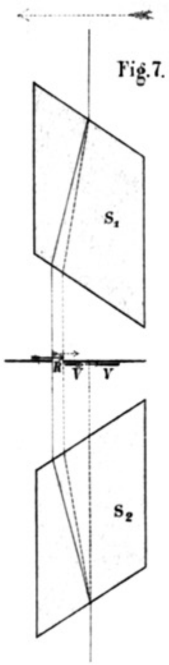


Fig. 7.

Fig. 3.

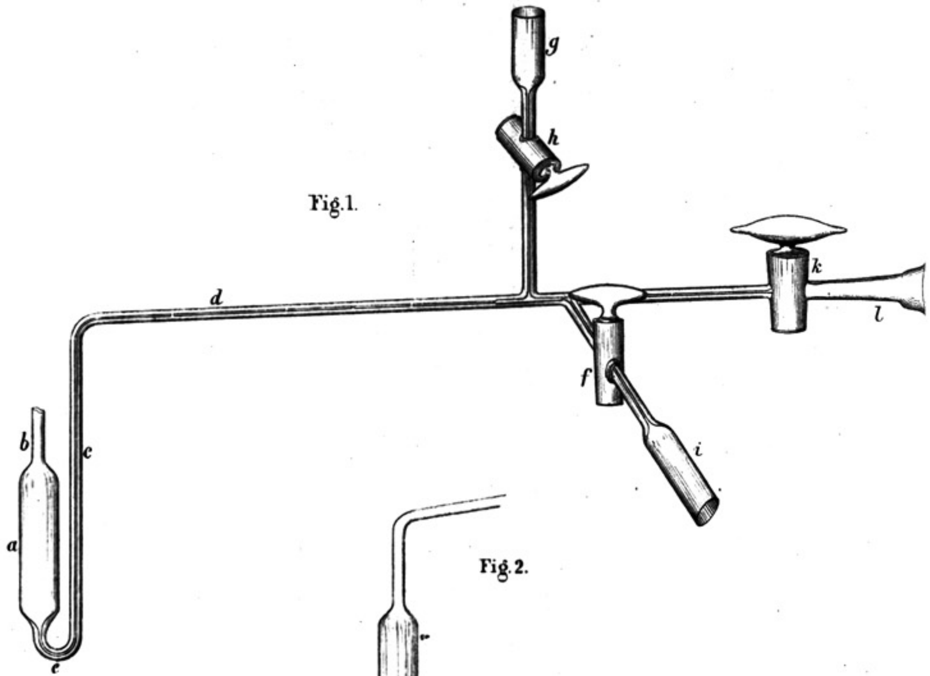


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 5.

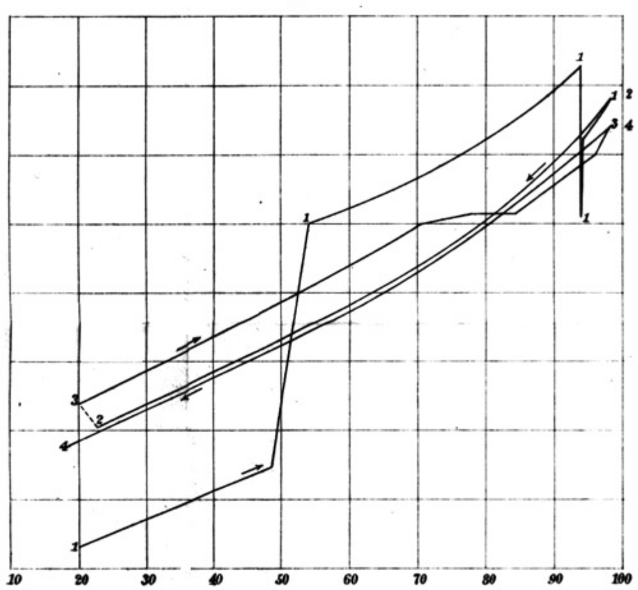
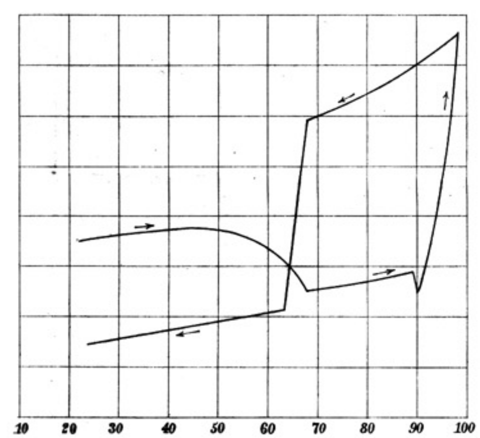


Fig. 4.



E. Wiedemann Fig. 1-5. A. König Fig. 6-7.

Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig