

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

## NEUE FOLGE BAND VII.

---

*I. Ueber die Fortpflanzung der Electricität;  
von L. Lorenz.*

---

Es wird kaum der Aufmerksamkeit derer, die sich mit Untersuchungen über die Bewegung der Electricität beschäftigt haben, entgangen sein, dass wir in Bezug auf die Fortpflanzung periodischer electrischer Ströme in Drahtleitungen noch keine Versuche haben, die in voller Uebereinstimmung mit der Theorie sind. Nachdem Hr. Feddersen<sup>1)</sup> durch seine schönen Versuche über die electrische Flaschenentladung die schon von W. Thomson<sup>2)</sup> auf theoretischem Wege abgeleitete, unter gewissen Bedingungen eintretende, oscillirende Entladung nachgewiesen und durch eine Reihe von Messungen näher quantitativ bestimmt hatte, war hierdurch ein gutes Material zu Wege gebracht, das auch kurz nachher von Hrn. Kirchhoff<sup>3)</sup> theoretisch behandelt wurde. Es eigneten sich hierfür diese Versuche in ausgezeichnetem Grade, und im grossen und ganzen bestand auch die Theorie die Probe gut, allein in einem Punkte leistete dieselbe nicht Genüge, indem die beobachteten Oscillationsdauern der Entladungsströme mit den berechneten nicht übereinstimmten und namentlich durchgehends ungefähr doppelt so gross ausfielen. Zwar leitet Kirchhoff<sup>4)</sup> seine Berechnung mit der Bemerkung ein, dass „die mangelhaften Kenntnisse, welche man von den Bedingungen besitzt, unter denen der electrische Funke

---

1) Pogg. Ann. CXIII. p. 437. 1861 u. CXVI. p. 132. 1862.

2) Philos. Mag. V. p. 393. 1853.

3) Pogg. Ann. CXXI. p. 551. 1864.

4) a. a. O. p. 552.

zu Stande kommt und fortbesteht“ ein wesentliches Hinderniss sei, „welches sich der Aufstellung einer strengen Theorie des Entladungsstromes einer Leydener Flasche entgegensetzt“, allein es ging aus den Versuchen selbst hervor, dass die Schlagweite oder die Höhe der Ladung keinen merklichen Einfluss auf die Oscillationsdauer ausübte, woraus zu folgen schien, dass wir überhaupt in den Vorgängen im Funken nicht die Ursache der Nichtübereinstimmung würden finden können. Ich kann hinzufügen, dass, wenn man in Betracht zieht, dass der Funke, nachdem derselbe bei jeder einzelnen Oscillation erloschen ist, nur bei einem gewissen Potentialunterschiede an der Unterbrechungsstelle wieder auftritt, man eine kürzere und nicht eine längere Oscillationsdauer finden wird. Auch die Berücksichtigung der Edlund'schen Disjunctionsströme würde eine Correction in demselben Sinne mit sich führen.

Ebenso wenig als die Theorie bei diesen Entladungsversuchen eine volle Bestätigung gewonnen hat, ist dies der Fall bei allen an Telegraphendrähten über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Electricität angestellten Versuchen. Zwar kann dafür die Ursache darin gesucht werden, dass die Beobachter die verschiedenen Bedingungen, von welchen die Fortpflanzungszeit hier wesentlich abhängt, nicht berücksichtigt haben und zum Theil auch nicht berücksichtigen konnten, allein es bleibt doch das Resultat bestehen, dass wir uns vergebens nach Erfahrungsbeweisen für die volle Richtigkeit der Theorie umsehen, überall wo diese auf die sehr schnellen Bewegungen der Electricität, wovon hier die Rede ist, Anwendung finden sollte.

Es erhebt sich so zunächst die Frage, in welchem Punkte die jetzt angenommene Theorie noch einer Modification fähig sei. Die Theorie geht darauf hinaus, dass die in einem gegebenen Punkte erzeugte Stromdichtigkeit proportional der im Punkte wirkenden electromotorischen Kraft sei. Diese Kraft wird ferner zweien Ursachen zugeschrieben, nämlich den influenzirenden Wirkungen der umgebenden statischen Electricität und den indu-

cirenden Wirkungen der umgebenden electricischen Ströme und Magnete. Für die ersteren müssen die einfachen Gesetze, denen sie folgen, als vollkommen sicher festgestellt betrachtet werden, namentlich nachdem man gelernt hat, auf das von inneren leitenden Partikeln herrührende verschiedene Vertheilungsvermögen der verschiedenen Isolatoren Rücksicht zu nehmen. In Bezug auf die Gesetze der Induction kann zwar über Wirkungen der einzelnen Stromelemente noch Zweifel obliegen, allein praktisch bleiben es nur die Wirkungen geschlossener Stromkreise, worauf es vornehmlich ankommt, und die Gesetze der Induction dieser Ströme müssen wir als wenigstens im wesentlichen sicher festgestellt betrachten. Zwar ist es möglich, dass diese Gesetze rücksichtlich solcher Ströme, deren Oscillationsdauern mit denjenigen des Lichtes vergleichbar sind, erweitert und modificirt werden müssen, und ich habe es selbst versucht<sup>1)</sup>, eine solche Modification einzuführen, allein diese bleibt doch, wenigstens so wie sie von mir gefunden ist, noch nicht bei Strömen, die bis einige Millionen Male in der Secunde wechseln können, von irgend einem Belange.

Wenn aber die Fernwirkungen der electricischen Kräfte wenigstens für die hier betrachteten Fälle als festgestellt betrachtet werden können, so bleibt nur noch die Frage übrig, ob die Bewegung der Electricität allein von diesen Fernwirkungen abhängig sei, in der Weise, dass die in einem gegebenen Punkte vorhandenen Stromänderungen keine unmittelbare Wirkung electromotorischer Art in dem Punkte selbst ausüben können. Es ist diese Frage auch nicht der Wissenschaft fremd. In der That sind die Herren W. Weber<sup>2)</sup> und Lorberg<sup>3)</sup> auf die Folgerungen der Annahme einer Trägheit und Masse der Electricität näher eingegangen, wodurch eben ein von den Fernwir-

---

1) Pogg. Ann. CXXXI. p. 243. 1867.

2) Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. IX. p. 573. 1864.

3) Borchard's Journ. LXXI. p. 53.

kungen unabhängiges Glied in die Gleichungen für die Bewegungen der Electricität eingeführt wird. Wir werden hier einfach die Möglichkeit eines solchen, von den Stromänderungen in dem betrachteten Punkte abhängigen Gliedes festhalten, ohne irgend eine physikalische Deutung desselben im voraus versuchen zu wollen.

Indem wir jetzt zur Aufstellung der Gleichungen für die Bewegung der Electricität in Drähten übergehen, betrachten wir zunächst den Fall, dass in allen Theilen des Drahtes gleichzeitig die gleiche Stromstärke stattfindet. Dieser Fall umfasst in der That sozusagen alle Laboratorienversuche, was sowohl aus den Versuchen Weber's als aus der Kirchhoff'schen Berechnung der Versuche Feddersen's hervorgeht. Diese letztere Berechnung zeigte sich in dieser Beziehung in guter Uebereinstimmung mit den Versuchen, und man wird aus denselben z. B. ableiten können, dass die gemachte Annahme für einen 100 m langen Draht selbst bei 100 000 Oscillationen in der Secunde nur einen Fehler von ungefähr  $\frac{1}{25}$  Procent in der berechneten Oscillationsdauer mit sich führen würde.

Die Gleichungen für die Bewegung der Electricität reduciren sich in dem fraglichen Falle auf die einzige Gleichung:

$$(1) \quad ri = V - C \frac{di}{dt},$$

wo  $r$  der Widerstand der Leitung ist,  $i$  die Stromstärke,  $V$  der electrostatische Potentialunterschied an den Endpunkten des Drahtes und  $-C \frac{di}{dt}$  der entsprechende electrodynamische, von der Stromänderung herrührende Potentialunterschied. Dieser letztere ist die über die ganze Leitung ausgedehnte Summe aller in jedem Elemente des Drahtes und in dessen Richtung erzeugten electromotorischen Kräfte, insofern diese von den theils im Elemente selbst, theils in der übrigen Leitung vorhandenen Stromänderungen herrühren. Die Wirkungen der Stromände-

rungen im Elemente selbst können nur von den Aenderungen der Stromdichtigkeit abhängen, und sie müssen deshalb für alle Elemente des cylindrischen Drahtes gleich werden. Im übrigen werden wir der Einfachheit wegen annehmen, dass diese durch die Stromänderung in dem Elemente selbst erzeugte electromotorische Kraft in gleicher Weise, wie die anderen inducirenden electromotorischen Kräfte dem ersten Differentialquotienten der Stromstärke in Bezug auf die Zeit proportional ist. Die „electrodynamische Constante“  $C$  wird also die Summe zweier Summanden werden, von welchen die eine, die ich die „Inductionsconstante“ benennen und durch  $C'$  bezeichnen werde, allein von den inducirenden Fernwirkungen abhängig ist und in gewöhnlicher Weise berechnet werden kann, während die andere durch  $\frac{al}{\sigma}$  wird ausgedrückt werden können, wo durch  $l$  die Länge des Drahtes, durch  $\sigma$  der Querschnitt und durch  $a$  eine unbekannte Constante bezeichnet wird. Man wird also haben:

$$(2) \quad C = C' + \frac{al}{\sigma}.$$

Eine experimentelle Bestimmung der electrodynamischen Constanten einer Leitung kann durch Beobachtung der in der Leitung durch Oeffnen oder Schliessen eines Stromes entstandenen Extraströme ausgeführt werden. Die ersten Versuche einer quantitativen Bestimmung des Extrastromes verdanken wir dem Hrn. Edlund.<sup>1)</sup> Nachher haben Hr. Rijke<sup>2)</sup> und mehrere andere Physiker sich mit derselben Aufgabe beschäftigt, ohne dass es doch bisher auf diese Weise gelungen ist, eine nur einigermaßen genaue quantitative Bestimmung der electrodynamischen Constanten zu gewinnen. Auch andere, mehr mittelbare Bestimmungen, z. B. durch die bei der Flaschenentladung in verzweigten Leitungen erzeugte Wärmeentwicklung haben nur zu unbefriedigten Resultaten geführt. So finden

1) Pogg. Ann. LXXVII. p. 161. 1849.

2) Pogg. Ann. CII. p. 481. 1857.

wir, dass die „äquivalente Länge“ des Hrn. Knochenhauer, die, wie Hr. Feddersen<sup>1)</sup> gezeigt hat, als mit der electrodynamischen Constante identisch betrachtet werden kann, noch um 16 Procent<sup>2)</sup> von dem theoretischen Werthe abweicht.

Mein erstes Bestreben ging daher darauf hinaus, eine Methode zu einer genauen Bestimmung der electrodynamischen Constanten ausfindig zu machen. Wenn man Versuche nach der Wheatstone'schen Methode über den relativen electrischen Widerstand zweier Drahtleitungen anstellt, so hat man bisweilen Gelegenheit, zu beobachten, dass das in der Brücke eingeschaltete Galvanometer beim Oeffnen und Schliessen des Stromes Ausschläge in entgegengesetzten Richtungen macht, wenn es bei constantem Strome in Ruhe bleibt. Diese Wirkungen an der Galvanometernadel rühren von den in den beiden Zweigen entstandenen Extrastömen her, und sie sind in der That auch schon von Hrn. Herwig<sup>3)</sup> zu Beobachtungen der Extrastöme in Eisenstangen verwerthet worden.

Die Versuche könnten auch in solcher Weise angestellt werden, dass die Wirkungen der beiden Extrastöme auf das Galvanometer compensirt würden, indem man den Widerstand des einen der beiden Zweige, wo sich der Extrastrom am stärksten zeigte, vergrösserte, bis das Galvanometer beim Oeffnen und Schliessen des Stromes in Ruhe verbleibt. Ist alsdann das Verhältniss der Widerstände der beiden Zweige  $m:1$ , so verhalten sich die gleichzeitig vorhandenen Stromintensitäten wie  $1:m$ , und wenn die electromotorischen Kräfte der Extrastöme sich jetzt in dem Galvanometerdrahte compensiren, so müssen dieselben bei gleicher Stromintensität sich wie  $m:1$  verhalten. Dieses Verhältniss muss also auch dasjenige der electrodynamischen Constanten der beiden Zweige sein.

---

1) Pogg. Ann. CXXX. p. 439. 1867.

2) Pogg. Ann. CXLI. p. 596. 1870.

3) Pogg. Ann. CLIII. p. 115. 1874.

Zwar entstehen auch in dem Messdrahte selbst Extraströme, allein diese compensiren sich gerade auch in dem beobachteten Falle, indem die electrodynamischen Constanten der beiden Theile des Messdrahtes sich wenigstens äusserst nahe wie die Längen derselben verhalten, das heisst wie  $m:1$ .

Hinderlich für diese Methode ist, dass es nicht möglich ist, dafür ein hinlänglich empfindliches Galvanometer herzustellen. Schaltet man aber anstatt des Galvanometers ein Telephon in die Brücke ein, so kann man in einem vollkommen ruhigen Zimmer selbst die schwächsten momentanen Extraströme wahrnehmen, und die Methode lässt alsdann in Bezug auf Einfachheit und Genauigkeit nichts zu wünschen übrig.

Bei allen folgenden Messungen habe ich mich eines Telephons mit kurzem und dickem Drahte bedient. Von einem gewöhnlichen Telephon wurde die Drahtrolle entfernt, an deren Stelle das Endstück des Magnets mit einem  $\frac{1}{2}$  mm dicken, 3 bis 4 m langen, überspannenen Kupferdrahte umgewickelt wurde. Die beiden Enden desselben wurden mit zwei, an dem Messdrahte angelötheten Kupferdrähten verbunden. Als Stromgeber diente gewöhnlich ein einfaches Leclanché'sches, bisweilen ein Daniell'sches Element. Der Strom war stets so schwach, dass Ungenauigkeiten wegen der Erwärmung der Leitungen nicht zu befürchten waren. Der eine Pol des Elements wurde mit den beiden Leitungen, deren electrodynamische Constanten verglichen werden sollten, verbunden, und diese Leitungen wurden zu den beiden Enden des Messdrahtes, eines 0,5 mm dicken und 0,8 m langen Neusilberdrahtes geführt. In der einen der beiden Leitungen wurde ferner ein 0,25 mm dicker Neusilberdraht, dessen Länge beliebig verändert werden konnte, eingeschaltet. Das mit dem Messdrahte verbundene Telephon wurde an das Ohr gehalten, während ein mit dem andern Pole des galvanischen Elements verbundener Kupferdraht, der „Fühl-draht“, über den Messdraht geführt wurde. Bisweilen war

auch ein Galvanometer neben dem Telephon in der Brücke eingeschaltet.

Wenn ein grösserer Unterschied zwischen den electrodynamischen Constanten der beiden Leitungen stattfand, so wurde ein lautes Geräusch bei jeder Berührung des Messdrahtes mit dem in einer Spitze endigenden Fühl-drahte im Telephon gehört, und oft konnte nicht einmal ein Minimum an dem Punkte, wo das Galvanometer keinen Ausschlag machte, vernommen werden. Wurde nun der Widerstand in demjenigen Zweige, wo der Extrastrom am stärksten war, durch Verlängerung des eingeschalteten dünnen Neusilberdrahtes vergrössert, ging das Geräusch allmählich in vollständiges Schweigen über. Dieser „tode Punkt“ an dem Messdrahte ist sehr charakteristisch und scharf markirt. Das Verhältniss der electrodynamischen Constanten der beiden Leitungen, dabei der in dem einen Zweige eingeschaltete Neusilberdraht mitgerechnet, ergibt sich dann aus dem Verhältnisse der beiden Entfernungen des toten Punktes von den mit dem Telephon verbundenen beiden Punkte des Messdrahtes. Die bei mehreren vorläufigen, zu verschiedenen Zeiten angestellten Versuchen mit den nämlichen Leitungen erhaltenen Resultate wichen nur um einen Bruchtheil eines Procents voneinander ab.

Dieselbe Methode führt auch zu einer absoluten Bestimmung der electrodynamischen Constanten, wenn man davon ausgeht, dass die gegenseitigen inducirenden Wirkungen zweier Stromleitungen, wobei nur die Fernwirkung der Induction in Betracht kommt, sich durch die gewöhnliche Theorie berechnen lassen. Man schaltet z. B. in dem einen der beiden Zweige zwei nahe aneinander angebrachte Drahtrollen ein und führt zwei Versuche in der Weise aus, dass der Strom in den beiden Versuchen in entgegengesetzten Richtungen durch die eine Drahtrolle geleitet wird, während im übrigen alles ungeändert bleibt. Wenn man nun die den gegenseitigen Wirkungen der beiden Rollen entsprechende electrodynamische Constante in



absolutem Maasse berechnet hat, so lassen sich aus den beiden Versuchen auch die electrodynamischen Constanten beider Zweige in absolutem Maasse ableiten.

Bei Versuchen mit ausgespannten Drähten müssen die schwer zu berechnenden inducirenden Rückwirkungen der Umgebungen möglichst vermieden werden. Es gelang mir dies sehr gut in der ehemaligen Kirche des Schlosses Friedrichsberg. Hier konnten die Drähte 4,8 m hoch über dem Boden zwischen zwei Chorstühlen ausgespannt werden. Die Entfernung der Drähte von der Decke betrug 3,3 m, die Breite des Locals 7,5 m.

Die Drähte wurden zwischen den Geländern der Chorstühle auf eine Strecke von 15,334 m parallel und mit dem Zwischenraume eines Decimeters vor- und rückwärts gezogen, gestützt durch Nägel, die mit Kautschukröhren oder lackirten Glasröhren überzogen waren. Der eine Draht, ein 0,5 mm dicker, übersponnener Kupferdraht, war fünfmal vor- und rückwärts gezogen. Das erste Fünftel dieses Drahtes werde ich durch Nr. 1, den ganzen Draht durch Nr. 2 bezeichnen. Der nächstfolgende Draht (Nr. 3), ein 1 mm dicker, doppelt übersponnener Kupferdraht, war einmal vor- und rückwärts gezogen. Der darauf folgende, ein 1,9 mm dicker, unbesponnener Draht, war viermal vor- und rückwärts gezogen. Das erste Viertel desselben ist durch Nr. 4, der ganze Draht durch Nr. 5 bezeichnet. Die electrodynamischen Constanten dieser Drähte seien resp. durch (1), (2), (3), (4) und (5) bezeichnet.

Hierzu kamen noch zwei auf Glascylinder gewickelte Drahtrollen. Die eine bestand aus einem 1 mm dicken übersponnenen Kupferdrahte, welcher in einer Länge von 24,77 m auf dem Cylinder in einer Reihe von 96 Windungen aufgewickelt war. Die Höhe der Rolle, von den äussersten Grenzen der Windungen gerechnet, betrug 121 mm. Die Drahtenden, jedes 1,65 m lang, wurden zur Mitte der Rolle zurückgeführt und von da ab zusammen weiter. Die andere Rolle bestand aus einem 1,3 mm dicken, mit Guttapercha überzogenen Kupferdrahte. Die

Länge des aufgewickelten Drahtes war 20,562, die Zahl der Windungen 76, die Höhe 216 mm. Mit den je 0,77 m langen Drahtenden wurde ebenso verfahren, wie bei der ersten Rolle. Die electrodynamischen Constanten dieser Rollen werde ich durch (*A*) und (*B*) bezeichnen.

Bei der Berechnung der von den Fernwirkungen abhängigen Inductionsconstanten dieser Leitungen bin ich davon ausgegangen, dass die den gegenseitigen inducirenden Wirkungen entsprechenden Inductionsconstanten eines jeden von zwei Stromelementen gleich  $\frac{ds ds'}{r} \cos \varepsilon$  sind, wenn *ds* und *ds'* die Länge der Elemente, *r* ihre Entfernung und  $\varepsilon$  der Winkel zwischen ihnen ist. Für einen Draht vom Radius  $\alpha$ , welcher in parallelen, um *d* voneinander entfernten Windungen von der Länge *l* *m*-mal vor- und *m*-mal rückwärts gezogen ist, wird die so berechnete Inductionsconstante:

$$C' = 4l \left[ m \left( \log \frac{d}{\alpha} + \frac{3}{4} \right) - (2m-2) \log 2 + (2m-3) \log 3 \dots \right] \\ + 2d(2m-1) \left( \log \frac{2d}{\alpha} - \frac{1}{4} \right) + \frac{d}{2} \left( \frac{m-1}{1} + \frac{m-2}{1} + \dots \right) \\ + \frac{d}{2} \left( \frac{m-2}{1} + \frac{m-3}{2} + \dots \right) \dots$$

Hierbei sind auch die kleineren Drahtstücke, welche die längeren parallelen Drähte an den beiden Enden abwechselnd verbinden, mit in Rechnung genommen.

Die Berechnung der Inductionsconstante einer Drahtrolle mit einer einzelnen Reihe von Windungen habe ich durch Integration über den ganzen, vom Drahte eingenommenen Raum ausgeführt. Das in dieser Weise gefundene Resultat ist:

$$C' = \frac{32\pi r^3}{3a^2} \left[ -1 + \frac{2c^2-1}{c^3} E + \frac{1-c^2}{c^3} K \right],$$

welche Formel bequemer ist für die Anwendung, als die Kirchhoffsche Summationsformel. Hier ist *r* der Radius der Windungen, *a* die Entfernung zweier Windungen, be-

rechnet durch Division der ganzen, von den äussersten Grenzen ab gemessenen Höhe  $h$  der Rolle mit der Zahl der Windungen. Ferner ist:

$$c^2 = \frac{4r^2}{h^2 + 4r^2},$$

während  $K$  und  $E$  die bekannten Bezeichnungen der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul  $c$  sind.

Ferner habe ich die den gegenseitigen inducirenden Wirkungen zweier Drahtrollen entsprechende Inductionsconstante für den Fall berechnet, dass die Axen beider in einer Geraden zusammenfallen, und dass die Radien der Windungen nur wenig verschieden sind. Die gefundene Formel ist:

$$C' = \frac{128 r^2 r'^2 \sqrt{r r'}}{3 a a' (r + r')^2} S \left[ -\frac{3\pi (r' - r) \sqrt{1 - c^2}}{2 (r' + r) c} + \frac{2c^2 - 1}{c^3} E + \frac{1 - c^2}{c^3} K \right],$$

wo  $r$  und  $r'$  die Radien der Windungen sind,  $a$  und  $a'$  die Entfernungen zweier Windungen, und  $S$  die Summe derjenigen vier verschiedenen Werthe bezeichnet, die der eingeklammerte Ausdruck annimmt, wenn resp.:

$$c^2 = \frac{4 r r'}{d^2 + (r + r')^2}, \quad \frac{4 r r'}{(d + h + h')^2 + (r + r')^2}, \quad \frac{4 r r'}{(d + h)^2 + (r + r')^2},$$

$$\frac{4 r r'}{(d + h')^2 + (r + r')^2},$$

gesetzt wird, und die den beiden letzteren Werthen entsprechenden Ausdrücke mit negativen Vorzeichen gerechnet werden. Es sind ferner  $h$  und  $h'$  die Höhen der beiden Rollen und  $d$  die Entfernung derselben. Wird in dieser Formel  $r' = r$ ,  $h' = h$  und  $d = -h$  gesetzt, so erhält man den doppelten Werth der einer einzelnen Rolle entsprechenden, oben berechneten Inductionsconstanten.

Bei den mit den beiden gesammten Rollen ausgeführten Versuchen war die Rolle  $A$  oben auf die Rolle  $B$  conaxial gestellt, und die nächste Entfernung derselben betrug 48 mm. Es war hier in Millimetern:

$$r = 41,06, \quad r' = 43,07, \quad h = 121, \quad h' = 216, \quad d = 48, \quad a = 1,260, \\ a' = 2,842.$$

Die relative Inductionsconstante der beiden Rollen sei  $(A, B)$ . Für die nach den angegebenen Formeln berechneten Inductionsconstanten der verschiedenen Leitungen habe ich die folgenden Werthe gefunden:

$$(1) = 414,8 \text{ m}, \quad (2) = 1992,9 \text{ m}, \quad (3) = 372,1 \text{ m}, \quad (4) = 332,6 \text{ m}, \\ (5) = 1271,4 \text{ m}, \quad (A) = 3880 \text{ m}, \quad (B) = 1666 \text{ m}, \quad (A, B) = 166,4 \text{ m}.$$

Bei den Versuchen waren ausser diesen Leitungen auch noch kleinere Drahtstücke vorhanden, deren Inductionsconstanten hinlänglich genau geschätzt werden konnten. Für die dickeren Kupferdrähte wurde die Constante gleich zehnmal die Länge des Drahts, für den dünnen Neusilberdraht gleich fünfzehnmal die Länge, für die beiden dicht aneinander laufenden, zu den Rollen führenden Kupferdrähte gleich fünfmal die Länge gerechnet. Die in dieser Weise in Metern berechneten Inductionsconstanten der kleineren Drahtstücke sind im Folgenden neben den Constanten der grösseren Leitungen in Zahlen angegeben.

Meine ersten Versuche zur Vergleichung der electrodynamischen Constanten der ausgespannten Drahtleitungen zeigten sogleich eine sehr nahe Uebereinstimmung mit der Theorie, indem die Resultate die folgenden waren:

$$\frac{(1)+4}{(3)+17} = 1,083 \text{ (ber. 1,067)}, \quad \frac{(3)+8}{(5)+18,5} = 0,292 \text{ (ber. 0,295)}, \\ \frac{(2)+6}{(3)+17} = 5,137 \text{ (ber. 5,137)}, \quad \frac{(3)+6}{(4)+6} = 1,108 \text{ (ber. 1,117)}.$$

Die Abweichungen von den berechneten Werthen betragen durchschnittlich nur 0,6 Procent und liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Aus der Vergleichung der Drahtrollen mit dem Drahte Nr. 5 ergab sich:

$$\frac{(A)+37,2}{(5)+6,2} = 3,233 \text{ (ber. 3,067)}, \quad \frac{(B)+17,2}{(5)+6,2} = 1,391 \text{ (ber. 1,318)}.$$

Hier sind die beiden, durch Versuche gefundenen Zahlen um 5 bis 6 Procent grösser als die berechneten,

und diese Abweichung überschreitet weit die Grenzen der Beobachtungsfehler.

Endlich wurde auch der Draht Nr. 5 mit den beiden conaxial gestellten Rollen verglichen, indem der Strom in dem ersten Versuche durch beide Rollen in gleicher Richtung und in dem zweiten Versuche in entgegengesetzter Richtung geleitet wurde. Die Resultate dieser mit besonderer Sorgfalt angestellten Versuche waren:

$$\frac{(A) + (B) + (A, B) + 55,4}{(5) + 6,2} = 4,776,$$

$$\frac{(A) + (B) - (A, B) + 54,4}{(5) + 6,2} = 4,490.$$

Wird hierin  $(A, B) = 166,4$  m eingesetzt, so findet sich:

$$(A) + (B) = 5352 \text{ m (ber. 5546)}; \quad (5) = 1162 \text{ m (ber. 1271)}.$$

Da die Fehler der einzelnen Beobachtungen hier bedeutend vergrößert hervortreten, so muss das für die Drahtrollen gefundene Resultat als befriedigend betrachtet werden, und nehmen wir für die beiden Versuche die berechneten Werthe von  $(A)$  und  $(B)$  als die richtigen an, so ergibt sich aus den Versuchen  $(5) = 1204$  und  $1201,5$ , im Mittel  $1203$  (ber.  $1275$ ). Also zeigen auch hier die Versuche Abweichungen von den berechneten Werthen, sodass allen den ausgespannten Drähten Constanten, die um 5 bis 6 Procent kleiner sind als die berechneten, zugeschrieben werden müssen.

Diese für die ausgespannten Drähte sich zeigenden Abweichungen lassen sich ohne Zweifel in vollständig befriedigender Weise durch die inducirende Rückwirkung der Umgebungen erklären, welche jedenfalls die Constanten verringern müssen. Wir können also die Resultate der Versuche als vollständig mit der Theorie übereinstimmend ansehen.

Es bleibt jedoch noch eine Möglichkeit in Betracht zu ziehen. Bei den Versuchen verhalten sich nämlich die electrodynamischen Constanten  $C$  und  $C_1$  der beiden

vergleichenen Leitungen wie ihre Widerstände  $r$  und  $r_1$ . Aus dem Versuche folgt das Verhältniss:

$$m = \frac{r}{r_1} = \frac{C}{C_1},$$

allein es lässt sich hieraus auch das Verhältniss:

$$m = \frac{C + Ar}{C_1 + Ar_1}$$

ableiten, wo  $A$  ein willkürlicher Factor ist. Die electro-dynamische Constante einer Leitung würde also ein dem Leitungswiderstande proportionales Glied enthalten können, ohne dass es möglich wäre, dasselbe durch die befolgte Beobachtungsmethode zu entdecken. Gehen wir zu der in der Gleichung (2) für die electrodynamische Constante aufgestellte Form zurück, nämlich  $C = C' + \frac{at}{\sigma}$ , so kann folglich aus der Uebereinstimmung der Versuche mit den Berechnungen nur der Schluss gezogen werden, dass die Constante  $a$ , wenn sie überhaupt von Null verschieden ist, für die verschiedenen Metalle (wie Kupfer und Neusilber) dem specifischen Leitungswiderstande proportional sein muss.

Es lag nun nahe, zu untersuchen, wie sich die Resultate gestalten würden, wenn anstatt des dünnen Neusilberdrahtes ein Flüssigkeitsrheostat eingeschaltet wurde. Ich bediente mich hierzu eines Troges mit einer concentrirten Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd, in welche zwei Kupferplatten als Electroden eingesetzt wurden. Es liessen sich indess die Versuche in dieser Weise gar nicht ausführen, da die Wirkungen auf das Telephon nur bis zu einem gewissen Minimum gebracht werden konnten, nicht aber bis zu dem „todten Punkte“; die in den beiden Leitungen entstandenen Extraströme hoben sich also nicht auf.

Von dem beobachteten Minimumspunkte an gerechnet, bewirkte der Flüssigkeitsrheostat eine Verminderung der electrodynamischen Constanten, was möglicherweise von der Wirkung der Polarisation beim Oeffnen des Stromes

herrühren konnte. Zugleich zeigte ein, neben dem Telephon in der Brücke eingeschalteter Multiplicator an dem Minimumspunkte des Telephons einen Ausschlag, der vom Ueberwiegen des Stromes in dem Zweige mit dem Flüssigkeitsrheostate herrührte.

Da auch thermoelectrische Ströme ähnliche störende Einwirkungen auf die Versuche hätten ausüben können, schaltete ich eine ganze Batterie von thermoelectrischen Elementen in den einen Zweig ein, indess ohne dass sich ein merklich störender Einfluss auf die Versuche zeigte.

Eine andere Methode zur Bestimmung der electro-dynamischen Constanten haben wir in den Feddersen'schen Flaschenentladungsversuchen. Nur durch die Wiederholung dieser Versuche konnten die Ursachen der Nichtübereinstimmung der von Feddersen gefundenen Resultate mit der Theorie aufgefunden werden. Doch hielt ich es nicht für nothwendig, die ganze Reihe der von Hrn. Feddersen in so bewunderungswürdiger Weise ausgeführten Versuche wieder durchzugehen, einige wenige gute und zuverlässige Messungen genügten für den beabsichtigten Zweck.

Durch einen isolirt aufgestellten, mit der Hand getriebenen Rotationsapparat wurde ein stählerner Planspiegel, 27 mm im Durchmesser, in schnelle Rotation versetzt.  $468\frac{3}{4}$  Umdrehungen des Spiegels entsprechen einer Umdrehung der Handhabe, und man konnte mit Leichtigkeit dem Spiegel 100 bis 200 Rotationen in der Secunde, worauf ich mich beschränkte, ertheilen. Zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit war auf der Axe der Handhabe eine Messingscheibe, 210 mm in Diameter, angebracht, welche mit einer Schicht Collodium überzogen und in einer Petroleumflamme geschwärzt wurde. Eine mit einer Messingspitze versehene Stimmgabel war auf einer festen und isolirten Unterlage in horizontaler Lage vor der Scheibe angebracht, sodass die Spitze gegen die berusste Fläche andrückte. Wenn eine Klemme, die die Zweige der Gabel zusammendrückte, abgezogen wurde, so zeichnete die Spitze eine Wellenlinie auf die rotirende Scheibe.

Von der Rückseite des rotirenden Spiegels ging ein kurzer Arm aus, an den ein kurzer und dünner Metalldraht gelöthet war. Beide Theile waren bis an die Spitze des Drahtes mit Schellack überzogen. Bei einer bestimmten Stellung des Spiegels befand sich diese Drahtspitze gerade gegenüber der Mündung eines Glasrohres, in welchem einige Millimeter hinter der Mündung ein Kupferdraht mit Schellack eingeschmolzen war.

Als electrischer Ansammelungsapparat diente eine Batterie von 9 Flaschen, die mit einer Holtz'schen Electrirmaschine geladen wurde. Die Entladung wurde dadurch eingeleitet, dass, kurz nachdem die Stimmgabel in Schwingungen gesetzt war, ein mit einer Kugel versehener Draht zu der innern Belegung der Batterie geführt wurde, was blos durch das Ausstrecken eines Fingers der den Rotationsapparat bewegendenden Hand geschehen konnte. Die Leitung führte von der innern Belegung der Batterie zu dem oben erwähnten, in einem Glasrohre eingeschmolzenen Kupferdrahte, von welchem die Entladung in dem Augenblicke, als die auf der Rückseite des Spiegels angebrachte Spitze sich gerade gegenüber der Mündung des Glasrohres befand, nach dem Spiegel, dem Rotationsapparate und durch die Collodiumschicht nach der Stimmgabel überging. Von hier ab führte eine kurze Leitung zu dem Funkenapparate, der aus zwei, in einer Entfernung von etwa 5 mm horizontal einander gegenüber gestellten kleinen Kugeln von Kupfer oder Zinn bestand, welche bis auf zwei kleine Flecke mit Schellack überzogen waren. Sodann ging endlich die Electricität durch eine der früher erwähnten grösseren, überall isolirten Drahtleitungen zur äussern Belegung der Batterie zurück.

Zwischen dem Funkenapparate und dem rotirenden Spiegel war ein photographischer Linsenapparat angebracht, welcher die von dem Funken ausgesandten Lichtstrahlen in der Weise sammelte, dass das ganze gebrochene Strahlenbündel von dem Spiegel aufgenommen und von diesem nach einer über dem Funkenapparate angebrachten



photographischen Platte reflectirt wurde, an welcher Platte sich ein um etwas vergrößertes Bild des Funkens erzeugte. Die von mir angewendeten Platten waren sehr empfindliche, trockene Platten mit einer Gelatineschicht (von Mawson und Swan, Newcastle-on-Tyne).

Die bei den kürzeren Leitungen erhaltenen photographischen Bilder waren undeutlich, dagegen gelang es mir, bei den längeren Leitungen drei Bilder zu erhalten, wo die den einfachen Oscillationen des Entladungsfunkens entsprechenden, äquidistanten Querstreifen für die Messung hinlänglich deutlich hervortraten. Die gleichzeitige Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels wurde aus der von der Spitze der Stimmgabel auf die berusste Messingscheibe beschriebenen Wellenlinie bestimmt, indem ich auf der Scheibe einen Papiersector von  $20^{\circ}$  concentrisch anbrachte in der Weise, dass die Marke des Funkens in einer in der Mitte des Sectors gemachten Spalte gesehen wurde, wonach ich mit zwei Strichen den von dem Sector begrenzten Theil der Wellenlinie markirte. Die Anzahl der zwischen den beiden Marken von der Stimmgabel beschriebenen Schwingungen wurde sodann gezählt.

Ist  $r$  die Entfernung der photographischen Platte von dem Spiegel, so bewegt sich das auf der Platte erzeugte Bild um die Strecke  $4\pi r$  bei jeder Umdrehung des Spiegels. Macht der Spiegel  $n$  Umdrehungen in der Secunde, so hat das Bild während der Zeit  $T$  den Weg:

$$b = 4\pi r n T$$

zurückgelegt. Wenn also  $T$  die Dauer der einfachen Oscillationen im Funken bedeutet, so wird  $b$  der Entfernung zweier Streifen im photographischen Bilde entsprechen.

Ist ferner  $m$  die Anzahl der Schwingungen, welche die Stimmgabel zwischen den beiden Marken beschrieben hat, so hat man:

$$n = 468 \frac{3}{4} \cdot \frac{226}{18 \text{ m}},$$

indem die Entfernung der Marken  $20^\circ$  beträgt, und die Stimmgabel 226 Schwingungen in der Secunde macht.

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir, da  $r = 455,7$  mm ist, wenn  $b$  in Millimetern gemessen ist:

$$T = 0,02967 \cdot 10^{-6} \text{ } b m.$$

Bei dem einen Versuche war die ganze, oben erwähnte ausgespannte Drahtleitung (Nr. 2, 3 und 5) und ein mit Guttapercha umgebener Kupferdraht (Nr. 0), der von den ausgespannten Leitungen nach dem angrenzenden dunkeln Versuchszimmer führte, in die Schliessung eingefügt. Für den Kupferdraht (Nr. 0) wurde durch directe Vergleichung mit einer der ausgespannten Leitungen die electrodynamische Constante  $(0) = 216,8$  m gefunden.

Das photographische Bild zeigte fünf äquidistante schmale Streifen. Die Entfernung der äussersten war 26,2 mm, woraus  $b = 6,55$ . Zugleich war  $m = 42$ , woraus die Dauer der einfachen Oscillationen in Secunden gefunden wird:

$$T = 8,16 \cdot 10^{-6} \text{ für die Leitung Nr. 0, 2, 3, 5.}$$

Die beiden andern Versuche wurden allein mit den Leitungen Nr. 0 und 2 vorgenommen. Hier waren beziehungsweise vier und fünf schmale äquidistante Streifen sichtbar. Die Entfernung der Streifen betrug 5,67 mm für  $m = 38,5$  und 5,65 mm für  $m = 36,7$ . Es ergibt sich hieraus als Mittel:

$$T = 6,32 \cdot 10^{-6} \text{ für die Leitung Nr. 0, 2.}$$

Rücksichtlich der theoretischen Bestimmung der Oscillationsdauer könnte ich auf die Kirchhoff'sche Abhandlung verweisen, da indessen die Berechnung der den ausgeführten Versuchen entsprechenden Fälle sehr einfach ist, führe ich dieselbe der Uebersicht wegen hier durch. Wir führen sogleich eine Voraussetzung ein, deren Richtigkeit für die hier betrachteten Fälle aus der Berechnung Kirchhoff's hervorgeht, dass der Widerstand im Schliessungsbogen zu klein sei, um einen merkbaren Einfluss auf die Oscillations-

dauer auszuüben. Wird also in die Gleichung (1)  $r = 0$  eingesetzt, so erhält man:

$$V = C \frac{di}{dt}.$$

Hierzu kommt, dass der Potentialunterschied  $V$  an den beiden Endpunkten des Schliessungsbogens durch:

$$\beta V = a^2 Q$$

bestimmt werden kann, wo  $Q$  die „disponible Ladung“ der Batterie und  $\beta$  die „Capacität“ derselben bedeutet, die als die dem Potentialunterschiede Eins entsprechende disponible Ladung definiert werden kann, wenn beide in mechanischem Maasse gemessen werden. In diesem Maasse würde die oben eingeführte Constante  $a = 1$  zu setzen sein, allein da wir das electromagnetische Maass für unsere Rechnung angenommen haben, so muss sie bekanntlich wenigstens sehr nahe der Geschwindigkeit des Lichts gleich gesetzt werden, dass heisst:

$$a = 300 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

Endlich entspricht während der Entladung ein Verlust ( $-dQ$ ) der disponiblen Ladung einer ebenso grossen gleichzeitigen Vermehrung ( $idt$ ) der im Schliessungsbogen vorhandenen Electricitätsmenge, welche als electricischer Strom auftritt. Also ist:

$$-\frac{dQ}{dt} = i.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Elimination von  $Q$  und  $V$  die Differentialgleichung:

$$a^2 i + \beta C \frac{d^2 i}{dt^2} = 0,$$

deren Integral von der Form:

$$i = A \cos \frac{t}{T} \pi + B \sin \frac{t}{T} \pi$$

ist. Die hieraus berechnete Oscillationsdauer ist:

$$T = \frac{\pi}{a} \sqrt{\beta C}.$$

Die Bestimmung der in diesen Ausdruck noch eingehenden Capacität  $\beta$  der Batterie wurde durch Vergleichung der Batterie mit zwei grossen Condensatoren von einfachen Formen ausgeführt. Der eine bestand aus zwei 0,997 m hohen Cylindern von 1,3 mm dickem Zinkbleche, und beide waren concentrisch, der eine innerhalb des andern, auf Schellackfüssen vertical aufgestellt. Der Umfang des äussern Cylinders betrug auf seiner innern Fläche 1,253 m, und der des innern Cylinders auf seiner äussern Fläche 1,105 m.

Wird die Capacität  $\beta_1$  dieses Condensators durch die Formel  $\beta_1 = \frac{h}{2 \lg \alpha}$  berechnet, wo  $h$  die Höhe der Cylinder und  $\alpha$  das Verhältniss ihres Umfanges ist, so wird:

$$\beta_1 = 3,983 \text{ m.}$$

Dabei wird jedoch in der angenommenen Formel die Entfernung der Cylinder als unendlich klein gegen die Höhe derselben vorausgesetzt. Die wirkliche Capacität muss um nicht wenig grösser sein.

Der andere Condensator bestand aus zwei horizontalen, kreisrunden Platten von Bessemerstahl von 1,471 m Durchmesser und 6,5 mm Dicke. Die untere war auf einem hölzernen Stative aufgestellt. Sechs auf derselben Platte angebrachte, 52,6 mm hohe Glascylinder trugen die obere Platte. Wird ihre Capacität  $\beta_2$  nach der Formel  $\beta_2 = \frac{R^2}{4e}$  berechnet, in der  $R$  der Radius und  $e$  die Entfernung der Platten bedeutet, so erhält man:

$$\beta_2 = 2,571 \text{ m.}$$

Dieses Resultat ist auch um nicht wenig zu klein. Eine vollständige Lösung dieses Problems ist noch nicht gefunden, doch hat Kirchhoff<sup>1)</sup> die Correction, welche der oben angeführten Formel hinzuzufügen sein würde, für den Fall berechnet, dass die Entfernung und die Dicke

---

1) Ber. d. Berl. Acad. 1877.

der Platten als unendlich klein gegen den Radius derselben betrachtet werden konnten. Nach der Kirchhoff'schen Formel würde man  $\beta_2 = 2,92$  m finden, also um fast 14 Procent höher. Wenn aber die Correction, die in der Berechnung als unendlich klein vorausgesetzt ist, einen so grossen Werth erreichen kann, so hat man keine Garantie dafür, dass der corrigirte Werth dem wahren näher kommen würde, als der nicht corrigirte. Deshalb ziehe ich es vor, den letztern zu benutzen, von dem man wenigstens mit Sicherheit wissen kann, dass er zu klein ist. Kleinere Entfernungen zwischen den Platten oder den beiden Cylindern zu wählen, was ich auch versuchte, bringt Ungenauigkeiten anderer Art mit sich, zum Theil wegen Isolationsschwierigkeiten, zum Theil auch, weil die unvermeidlichen kleinen Verschiedenheiten in den Entfernungen an den verschiedenen Stellen alsdann einen zu grossen Einfluss bekommen.

Um zuerst die 9 Flaschen meiner Batterie miteinander zu vergleichen, wurden sie miteinander verbunden, geladen und nachher jede Flasche für sich durch ein mit sehr vielen Windungen versehenes Spiegelgalvanometer entladen. In der Leitung war zugleich ein mit Wasser gefülltes Glasrohr eingeschaltet. Die Capacitäten der Flaschen verhielten sich alsdann wie die im Fernrohre beobachteten Ausschläge. Die Flaschen zeigten sich bis auf zwei, deren Capacität um ungefähr 20 Procent die der übrigen überstieg, als ziemlich gleich. Die Capacität der ganzen Batterie war 9,37 mal grösser, als die Capacität derjenigen Flasche, welche zur Vergleichung mit den erwähnten Condensatoren dienen sollte.

Zu dieser Vergleichung bediente ich mich eines Torsionselectrometers, dessen beweglicher horizontaler Stab durch den Aufhängungsdraht mit dem festen Stabe in leitende Verbindung gesetzt war, sodass beide immer auf dasselbe Potential geladen waren. Bei den Messungen wurde der Torsionsdraht durch eine isolirte Handhabe gedreht, bis der Ausschlag auf einen constanten Winkel

(von 20°) gebracht war, wonach der Torsionswinkel auf dem oben angebrachten Theilkreise abgelesen wurde.

Das Electrometer war mit der innern Belegung der Leydener Flasche verbunden, während ihre äussere Belegung, sowie der äussere Cylinder des Cylindercondensators oder die untere Platte des Plattencondensators zu der Erde durch die Gas- und Wasserleitung abgeleitet war. Die Flasche wurde zuerst mit Electricität geladen und der Torsionswinkel gemessen, wonach die Flasche durch Verbindung mit dem Condensator partiell entladen und der Torsionswinkel wieder gemessen wurde. Bei drei mit dem Cylindercondensator angestellten Versuchen wurden die folgenden Verhältnisse zwischen den beiden Torsionswinkeln betrachtet:

$$\frac{55}{38} = 1,45, \quad \frac{78}{53} = 1,47, \quad \frac{74}{50} = 1,48, \quad \text{Mittel } 1,466.$$

Das electricische Potential der Flasche und des Electrometers ist also von  $\sqrt[3]{1,466} = 1,211$  bis 1 herabgegangen, woraus folgt, dass die Capacität der Flasche (diejenige des Electrometers war so klein, dass sie ausser Acht gelassen werden kann) sich zu der Capacität  $\beta_1$  des Cylindercondensators wie 1 zu 0,211 verhält. Bezeichnen wir die Capacität der Flasche durch  $k$ , so erhalten wir mit dem früher angegebenen Werthe von  $\beta_1$ :

$$k = 18,88 \text{ m.}$$

In ähnlicher Weise wurde die Flasche mit dem Plattencondensator verglichen, nur mit dem Unterschiede, dass die Flasche dreimal schnell nacheinander zu dem Condensator entladen wurde, während der Condensator jedesmal zur Erde wieder abgeleitet wurde. Das Potential ging hierbei von 1,466 bis 1, bei jeder Entladung also von  $\sqrt[3]{1,466} = 1,136$  bis 1 herab. Wenn der berechnete Werth  $\beta_2$  der Capacität dieses Condensators eingesetzt wird, so ist also:

$$k = 18,90 \text{ m.}$$

Die beiden so gefundenen Werthe von  $k$  sind indess wegen der unvollständigen Berechnung der Capacitäten der beiden Condensatoren nicht wenig zu klein, und die Correctionen fallen in den beiden Fällen wahrscheinlicherweise etwas verschieden aus.

Die Capacität der ganzen Batterie ist also um etwas grösser als:

$$9,37 \cdot 18,89 \text{ m} = 177,0 \text{ m}.$$

Wird nun dieser Werth für  $\beta$  in die Gleichung (3) eingesetzt, und mit den früheren Bezeichnungen zugleich  $C = (0) + (2) + (3) + (5)$  gesetzt, wo  $(0) = 216,8 \text{ m}$  ist und die drei anderen electrodynamischen Constanten aus den früher berechneten Werthen, mit einem Abzuge von 5,5 Procenten, bestimmt werden, so findet man:

$$C = 3653 \text{ m} \text{ und } T = 8,42 \cdot 10^{-6} \text{ (beob. } 8,16 \cdot 10^{-6} \text{)}.$$

Den beiden anderen Beobachtungen über die Oscillationsdauer entspricht  $C = (0) + (2) = 2100 \text{ m}$ , welcher Werth, in die Gleichung (3) eingesetzt, gibt:

$$T = 6,38 \cdot 10^{-6} \text{ (beob. } 6,32 \cdot 10^{-6} \text{)}.$$

Diese Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie ist sehr befriedigend, indess ist sie in der That geringer, als es hier scheint, da die Capacität der Batterie ganz gewiss grösser ist, als angenommen wurde. Die beobachtete Oscillationsdauer ist also in der That um etwas kleiner als die berechnete, welches Resultat gerade demjenigen entgegengesetzt ist, das aus der Kirchhoff'schen Berechnung der Versuche Feddersen's hervorging. Hiernach ist bis jetzt kein Grund vorhanden, der Electricität eine Trägheit beizulegen oder dem in der Gleichung (2) hinzugefügten hypothetischen Gliede eine Bedeutung zuzuschreiben. Was wir die Inductionsconstante genannt haben, wird mit der electrodynamischen Constante identisch, und die letztere ist mit der bisher angenommenen Theorie übereinstimmend nur von den Fernwirkungen abhängig. Wollen wir den hier gefundenen Abweichungen

eine Bedeutung beilegen, so ist die Erklärung derselben am nächsten in dem Funken selbst zu suchen, indem, wie ich schon am Anfange dieser Abhandlung erwähnt habe, die hier eintretenden eigenthümlichen Vorgänge wahrscheinlich eine Verminderung der Oscillationsdauer zur Folge haben.

Nunmehr wird der Nachweis nicht schwierig, wo der Fehler in der Berechnung der Versuche Feddersen's zu suchen ist. Hr. Feddersen hatte selbst nicht die Capacität seiner Batterie bestimmt, und Kirchhoff berechnet dieselbe, indem er nach einer Angabe von Siemens voraussetzt, dass die Dielectricitätsconstante des Glases gleich 2 ist. Diese Zahl ist indess viel zu klein. Da eine meiner Leydener Flaschen durch einen Unfall zerschlagen wurde, fand ich bei Messungen an vielen verschiedenen Stellen die Glasdicke für den cylindrischen Theil durchschnittlich 2,30 mm und für den Boden 7,4 mm. Ferner betrug die Höhe der innern Belegung 232 mm und der Durchmesser derselben 107 mm, woraus sich die Capacität der Flasche gleich  $2,853 \mu$  ergibt, wenn durch  $\mu$  die Dielectricitätsconstante des Glases bezeichnet wird. Durch frühere Messungen war die Capacität dieser Flasche um 3 Procent grösser gefunden als die Capacität derjenigen Flasche, welche ich bei den obenerwähnten Messungen gebraucht hatte. Man wird so haben:

$$2,853 \mu = 19,46, \text{ woraus } \mu = 6,82.$$

Richtiger ist diese Constante noch um etwas grösser zu setzen. Daraus folgt, dass der Fehler bei der Berechnung der Versuche Feddersen's in der Bestimmung von  $\mu$  liegt. Wird diese Constante gleich 6,82 oder 3,41 mal grösser gemacht, so wird die berechnete Oscillationsdauer  $\sqrt{3,41} = 1,85$  mal grösser und stimmt alsdann gut mit dem beobachteten Werthe.

Auch andere Physiker haben eine auffallend grosse Dielectricitätsconstante für das Glas gefunden. So gibt



Wüllner<sup>1)</sup> für Glas die Zahl 6,10 an, Hopkinson<sup>2)</sup> für Flintglas 6,57 bis 10,1, Schiller<sup>3)</sup> für halbweisses Glas 2,96, 3,66, für weisses Spiegelglas 5,78 bis 6,34. Endlich findet sich in derselben Abhandlung von Siemens<sup>4)</sup>, wo die Dielectricitätsconstante des Glases als ungefähr gleich 2 angegeben wird, ein Versuch erwähnt, aus welchem ein ganz anderes Resultat hervorgeht. Ein zwei engl. Linien dicker Eisendraht von einer Länge von 120,85 m war 8 m über die Erde isolirt aufgespannt. Das Verhältniss der Capacität zu der einer 1 mm dicken Glasplatte, deren Belegung 2,25 Quadratdecimeter betrug, ergab sich wie 2138 : 2948. Danach ergibt sich für das Glas die Dielectricitätsconstante 5,21.

Ausser den erwähnten Bestimmungen der electrodynamischen Constanten verschiedener Kupferdrähte führte ich auch einige Messungen über die Constanten von Eisendraht aus. Ein 2,2 mm dicker, galvanisirter Eisendraht war neben den Kupferdrähten aufgespannt und einmal vor- und rückwärts zwischen den beiden Chorsthühlen gezogen. Bei der Vergleichung mit einem der Kupferdrähte konnten die Extraströme in den beiden Drähten nicht bis zur gegenseitigen Vernichtung gebracht werden, doch trat ein deutliches Minimum hervor, nach welchem die electrodynamische Constante des Eisendrahtes sich ungefähr um sechsmal grösser berechnet, als diejenige des Kupferdrahtes Nr. 4 von derselben Länge und einer um ein wenig kleineren Dicke. Durch Vergleichung mit der einen Drahtrolle (*B*) wurde ein entsprechender Werth für die Constante dieses Eisendrahtes, nämlich 2080 m gefunden. Etwa das nämliche Resultat fand ich für einen ebenso langen, aber nur 1 mm dicken Eisendraht. Durch Vergleichung der beiden Eisendrahte unter sich ergab sich aber genauer, dass die

---

1) Wied. Ann. I. p. 401. 1878.

2) *Proced. Roy. Soc.* XXVI. p. 298. 1877.

3) *Pogg. Ann.* CLII. p. 557. 1872.

4) *Pogg. Ann.* CII. p. 66. 1857.

Constante des dünnern und weichern Drahtes um 1,13 mal grösser als diejenige des dickern Drahtes war, wobei jedoch die Extraströme auch nicht zum vollständigen Erlöschen gebracht werden konnten.

Dass eine bedeutende Vergrößerung des Extrastromes in Eisendrähnen stattfindet, ist namentlich seit den Untersuchungen von Villari bekannt.<sup>1)</sup> Hr. Herwig<sup>2)</sup> hat die Extraströme mit Hülfe der Wheastone'schen Drahtcombination mit einem Galvanometer in der Brücke untersucht und gefunden, dass die Extraströme in Eisenstangen von verschiedenen Dicken sich wie die Quadrate ihrer Querschnitte verhalten. Dieses Resultat steht mit dem von mir gefundenen im Widerspruche, man wird aber leicht einsehen, dass mit den benutzten kurzen (1,6 m und 1,7 m langen) Stangen und mit einem so wenig empfindlichen Apparate, wie es das Galvanometer für diese Messungen ist, die Versuche Herwig's nur zu unsicheren Resultaten führen konnten.

Sowohl G. Wiedemann als Herwig schreiben diese starken Extraströme dem transversalen ringförmigen Magnetismus zu, welcher in einem Eisendrahte beim Hindurchleiten eines electrischen Stromes entsteht. Ich werde es versuchen, diesen Magnetismus und die inducirenden Wirkungen desselben für einen ausgespannten cylindrischen Draht zu bestimmen.

Ein Stromelement, dessen Stromdichtigkeit durch  $u$  und dessen semipolare Coordinaten durch  $x, r, \theta$  bezeichnet werden, wirkt in einem Punkte  $(0, a, 0)$  mit einer magnetisirenden Kraft, deren tangential Componente ist:

$$u \frac{(a - r \cos \theta) r dr dx d\theta}{(x^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Integral dieses Ausdrucks, von  $x = -\infty$  bis  $x = +\infty$ , von  $\theta = 0$  bis  $\theta = 2\pi$  und von  $r = 0$  bis  $r = a$ , mit der Magnetisirungsfuction  $k$  des Eisens multiplicirt, gibt das

1) Wied. Galv. II. p. 55. 1874.

2) Pogg. Ann. CLIII. p. 115. 1874.

in der Entfernung  $a$  von der Axe erzeugte magnetische Moment für die Raumeinheit:

$$M = 2\pi uak.$$

Für ein den Coordinaten  $x, a, \theta$  entsprechendes Raumelement ist also das magnetische Moment gleich  $M a da dx d\theta$ .

Eine Aenderung dieses Moments erzeugt in einem durch die Coordinaten  $0, r, 0$  bestimmten Punkt eine electromotorische Kraft, deren Componente in der Richtung der Axe des Drahtes gleich:

$$-\frac{dM}{dt} \frac{(a - r \cos \theta) a da dx d\theta}{(x^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, woraus durch Integration von  $x = -\infty$  bis  $x = +\infty$ , von  $a = 0$  bis  $a = \alpha$  und  $\theta = 0$  bis  $\theta = 2\pi$  erhalten wird:

$$-4\pi^2 k \frac{du}{dt} (\alpha^2 - a^2).$$

Die inducirte electromotorische Kraft ist also am grössten in der Axe und verschwindet in der Oberfläche des Drahtes. Wird der durchschnittliche Werth derselben für den ganzen Querschnitt des Drahtes genommen, und die Stromstärke durch  $i = \pi \alpha^2 u$  bezeichnet, so erhält man:

$$-2\pi k \frac{di}{dt}$$

als den Mittelwerth der inducirten electromotorischen Kraft. Es folgt ferner hieraus, dass die electrodynamische Constante eines ausgespannten Eisendrahtes von der Länge  $l$  durch:

$$(3) \quad C = l \left( 2 \lg \frac{l}{\alpha} + 2\pi k \right)$$

auszudrücken ist. Die Magnetisirungsfuction  $k$  geht in diesen Ausdruck in sehr einfacher Weise ein, und die von dem Magnetismus erzeugte Vergrösserung der Constante zeigt sich von der Dicke des Drahtes unabhängig. In den erwähnten Versuchen war  $l = 31$  m, und für den dickern Draht  $C = 2080$  m, woraus  $k$  ungefähr gleich 9 gefunden

wird, während für den dünnern und weichern Draht  $k=10$  wird, Resultate, welche recht gut mit dem, was wir sonst über die Magnetisirungsfuction des Eisens wissen, übereinstimmen.

Die letztere kann indessen bekanntlich nicht als eine eigentliche Constante betrachtet werden, und, was namentlich hier die Resultate beeinflusst, die Aenderung des magnetischen Moments ist nicht eine momentane, der gleichzeitigen Aenderung der magnetisirenden Kräfte entsprechende. Infolge dessen dauert der Extrastrom in einem Eisendrahte eine längere Zeit an als in einem Kupferdrahte, weshalb auch, wie die Versuche zeigten, die Extrastrome in einem Kupferdrahte und einem Eisendrahte oder sogar bloss in zwei verschiedenen Eisendrähten sich nicht einander aufheben können.

Die magnetischen Eigenschaften eines eisernen Telegraphendrahtes sind für das Telegraphiren nicht unbedingt schädlich. Zwar entspricht der grössern electro-dynamischen Constanten eine grössere Fortpflanzungszeit, allein damit folgt auch ein kleinerer Absorptionscoefficient oder eine mit wachsender Entfernung weniger stark abnehmende Intensität der periodischen Ströme. Dagegen wirkt die magnetische Trägheit unbedingt schädlich, indem sie die gemachten Impulse auswischt. Dieselben treten also etwas kräftiger aber weniger markirt hervor.

Die Berücksichtigung des Magnetismus des Eisens ist also für die Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Electricität in eisernen Telegraphenleitungen von wesentlicher Bedeutung. Für andere Metalldrähte dürfte sowohl der Einfluss des Magnetismus der umgebenden Luft als die eigenen magnetischen oder diamagnetischen Eigenschaften der Drähte verschwindend klein sein. Dagegen bekommt die Rückwirkung der in der Erde selbst inducirten Ströme eine wesentliche Bedeutung. Die Berechnung führt hier zu dem interessanten Resultate, dass ein durch eine unterirdische, horizontale Telegraphenleitung hindurchgeleiteter electricischer Strom

in der Erde inducirte Ströme erzeugt, welche wieder auf Leitungen über der Erde in solcher Weise zurückwirken, wie wenn sich unter der Erde und mit deren Niveaufläche symmetrisch eine ähnliche Telegraphenleitung mit entgegengesetztem Strome von derselben Intensität befände. Dies ist das nämliche Gesetz wie dasjenige, welches für die statische Electricität schon bekannt ist.

Beim ersten Anblicke könnte es den Anschein haben, als ob die Zurückwirkung der in der Erde inducirten Ströme sowohl von der Leitungsfähigkeit der Erde als von der Schnelligkeit der Stromänderungen abhängig sein müsste, allein eine bessere Leitung und eine schnellere Stromänderung würden beide nur eine Verstärkung der inducirten Ströme in der Oberfläche der Erde zur Folge haben, welche alsdann gewissermassen die unterliegenden Schichten schützen, sodass die Wirkungen der Induction nur bis zu einer geringern Tiefe eindringen werden.

Der exacte Beweis des ausgesprochenen Satzes kann in folgender Weise geführt werden. In einem Elemente  $ds$  einer horizontalen, überirdischen Telegraphenleitung sei zu einer gegebenen Zeit  $t$  die Stromstärke  $i$ , und man setze  $\frac{di}{dt} = \lambda i$ . Ferner bezeichnen wir durch  $u$  und  $u'$  die Stromdichtigkeiten der mit  $ds$  parallelen, in der Erde inducirten Ströme, bezüglich in den durch die sphärischen Coordinaten  $r, \theta, \omega$  und  $r', \theta', \omega'$  bestimmten Punkten, während die feste Coordinatenaxe durch das Element  $ds$  gelegt und die Entfernung desselben von dem Mittelpunkte der Erde durch  $a$  bezeichnet wird.

Da wir den Radius der Erde als unendlich gross gegen die Entfernung der Telegraphenleitung von der Oberfläche der Erde betrachten können, werden die im Innern der Erde inducirten electricischen Ströme zu einer Ansammlung freier Electricität an der Oberfläche nicht Veranlassung geben können, und wir können deshalb die im Innern der Erde erzeugten Ströme nur als von der

Induction der umgebenden Ströme herrührend betrachten. Die Componente  $u$  der Stromdichtigkeit ist also durch die Gleichung:

$$(4) \quad u = -k\lambda \left( \int dv' \frac{v'}{q} + \frac{id s}{q} \right)$$

zu bestimmen, wo  $k$  die specifische Leitungsfähigkeit der Erde,  $q'$  und  $q$  die Entfernungen des betrachteten Punktes  $(r, \theta, \omega)$  von dem Punkte  $r', \theta', \omega'$  und dem Elemente  $ds$  bezeichnet, während die Integration über alle den Coordinaten  $r', \theta', \omega'$  entsprechende Raumelemente  $dv'$  der ganzen Erdkugel auszudehnen ist.

Diese Gleichung genügt der bekannten Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 u}{d\omega^2} = \varepsilon^2 r^2 u,$$

wo der Kürze wegen  $4\pi k\lambda = \varepsilon^2$  gesetzt wird.

Das Integral dieser Gleichung kann auch durch eine Summe von der Form:

$$(6) \quad u = \sum C_n P_n \varphi_n(r)$$

ausgedrückt werden, wo  $n$  alle ganzen positiven Werthe von 0 bis  $\infty$  durchläuft, und ferner  $C_n$  eine Constante,  $P_n$  der Coëfficient von  $r^n$  in der Entwicklung von:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}$$

nach aufsteigenden Potenzen von  $r$ , und  $\varphi_n(r)$  allein Function von  $r$  ist. Diese letztere Function muss alsdann der Bedingung:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi_n(r)}{dr} \right) = (n(n+1) + \varepsilon^2 r^2) \varphi_n(r)$$

Genüge leisten, welche Bedingung durch die convergente Reihenentwicklung:

$$(7) \quad \varphi_n(r) = r^n \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 r^2}{2(2n+3)} + \frac{\varepsilon^4 r^4}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} + \dots \right)$$

erfüllt ist.

Werden nun diese Werthe für  $u$  und  $u'$  in die Glei-

chung (4) eingesetzt, so findet man für die Constanten  $C_n$  den Werth:

$$(8) \quad C_n = - \frac{\varepsilon^2 R^{n-1} i d s}{4 \pi a^{n+1} \varphi_{n-1}(R)},$$

wo  $R$  der Radius der Erde ist.

Diese im Innern der Erde erzeugten Ströme induciren in einem ausserhalb der Erde liegenden Punkte  $(r, \theta, \omega)$  eine den Strömen parallele electromotorische Kraft, welche:

$$X = - \lambda \int dv' \frac{u'}{q}$$

ist. Dieses Integral unterscheidet sich von demjenigen der Gleichung (4) nur dadurch, dass der feste Punkt  $(r, \theta, \omega)$  hier ausserhalb der Erde ( $r > R$ ) liegt. Die Ausführung der Integration gibt:

$$(9) \quad X = - 4 \pi \lambda \sum \frac{C_n P_n R^{n+2} \varphi_{n+1}(R)}{(2n+1)(2n+3)r^{n+1}}.$$

In diesen Ausdruck kann der in der Gleichung (8) gegebene Werth von  $C_n$  eingesetzt werden, während die Function  $\varphi_{n+1}(r)$  durch die Formel:

$$\varepsilon^2 r \varphi_{n+1}(r) = (2n+1)(2n+3)(r \varphi_{n-1}(r) - \varphi_n(r))$$

reducirt und schliesslich durch die Functionen:

$$\varphi_0(r) = \frac{e^{r\varepsilon} - e^{-r\varepsilon}}{2r\varepsilon}, \quad \varphi_{-1}(r) = \frac{e^{r\varepsilon} + e^{-r\varepsilon}}{2r}$$

ausgedrückt werden kann.

Im vorliegenden Falle können wir  $R\varepsilon$  als eine sehr grosse Zahl betrachten. Man hat nämlich  $\varepsilon^2 = 4\pi k\lambda$ , wo  $\lambda$  von der Schnelligkeit der Stromänderung abhängig ist. Nehmen wir die Secunde als Zeiteinheit und betrachten  $\lambda$  als eine complexe Zahl, so übersteigt der Modul dieser Zahl nur bei sehr langsamen Stromänderungen, die praktisch nicht in Betracht kommen können, die Einheit. Es kommt also darauf an, ob  $R^2 k$  als eine sehr grosse Zahl betrachtet werden kann. Nehmen wir das Meter als Längenmaass an, so wird  $R^2$  ungefähr gleich  $4 \cdot 10^{13}$  und z. B. die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers gleich 0,1,

woraus hervorgeht, dass, selbst wenn  $k$ , die Leitungsfähigkeit der Erde, mehrere millionenmal kleiner wäre als diejenige des Quecksilbers, dennoch  $R^2k$  sehr gross sein würde. Nur in dem Falle, dass die Erde den eigentlichen Isolatoren angehörte, wäre unsere Annahme unrichtig.

Es ergibt sich nun mit dieser Voraussetzung:

$$\varepsilon^2 \varphi_{n+1}(R) = (2n+1)(2n+3) \varphi_{n-1}(R),$$

wodurch schliesslich die Gleichung (9) in:

$$(10) \quad X = \lambda i d s \sum \frac{P_n R^{2n+1}}{a^{n+1} r^{n+1}} = \frac{R \lambda i d s}{a \sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2 - 2r \frac{R^2}{a} \cos \theta}}$$

übergeht. Anstatt  $\lambda i$  kann hier wiederum  $\frac{di}{dt}$  eingeführt werden. Wird  $a - R = h$ ,  $r - R = h_1$ ,  $R \sin \theta = d$  gesetzt, und  $R$  als unendlich gross gegen diese Grössen angenommen, so erhalten wir:

$$(11) \quad X = \frac{di}{dt} \cdot \frac{ds}{\sqrt{(h+h_1)^2 + d^2}},$$

wo  $h$  die Höhe der Telegraphenleitung über die Erde,  $h_1$  die Höhe desjenigen Punktes, in welchem die von den in der Erde erzeugten Strömen inducirte electromotorische Kraft gleich  $X$  ist, und  $d$  die Entfernung der beiden durch diese Punkte gehenden Senkrechten bedeuten. Der erwähnte Satz ist also bewiesen.

Durch dieses Resultat reducirt sich die electrodynamische Constante der Längeneinheit eines überirdischen Telegraphendrahtes auf den Werth:

$$C = 2 \log \frac{2h}{\alpha} + 2\pi k,$$

wo  $h$  die Höhe über der Erde,  $\alpha$  der Radius des Drahtes und  $k$  die Magnetisirungsfunktion ist. Für unmagnetische Drähte fällt das letztere Glied hinweg.

Wenden wir diese Formel z. B. auf die Versuche von Fizeau und Gounelle<sup>1)</sup> über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Electricität in Telegraphendraht an, und

1) Compt. rend. XXX. 1850.



setzen wir für den Eisendraht die Magnetisirungsfuction gleich 10, so finden wir für diesen unter den gegebenen Bedingungen die Geschwindigkeit 126 000 km, während die beobachtete Geschwindigkeit gleich 101 710 km war. Der Unterschied zwischen der berechneten und der beobachteten Geschwindigkeit fällt hier bedeutend kleiner aus, als nach der gewöhnlichen Berechnungsweise der Fall sein würde, und die noch vorhandene Abweichung kann sicherlich im wesentlichen den Isolationsfehlern der Leitung zugeschrieben werden. Wenn überhaupt Versuche über die Fortpflanzung der Electricität durch überirdische Telegraphenleitungen theoretisches Interesse haben sollen, so ist es nothwendig, sowohl die Grösse der Isolationsfehler, als auch bei Eisendrähten die electrodynamische Constante zu bestimmen.

---

## II. *Ueber die zeitliche Ausbildung der Ströme einer Gramme'schen dynamoelectrischen Maschine; von Hermann Herwig.*

---

Zur Aufklärung über die verwickelten Bedingungen der Strombildung bei einer dynamoelektrischen Maschine, die ohne Zweifel noch manche Untersuchung veranlassen werden, schien es mir auch von besonderem Interesse zu sein, die anfängliche Stromentwicklung in Abhängigkeit von der Zeit genauer festzustellen.

Die dynamoelectrische Maschine meines Instituts ist im wesentlichen nach Gramme'schem Systeme für einseitigen Strom durch Herrn F. Becker in der Maschinenfabrik der Gebrüder Meer zu München-Gladbach construirt worden und gleicht am meisten der unter Nr. 32 im Fontaine'schen Werke<sup>1)</sup> abgebildeten Form. Sie besitzt die folgenden Maasse:

---

1) Die electrische Beleuchtung von Fontaine, deutsch von Ross. p. 73. Wien 1878.