

DER PHYSIK UND CHEMIE.

BAND CLVIII.

I. *Experimental-Untersuchungen über die elastische Nachwirkung bei der Torsion, Ausdehnung und Biegung; von F. Kohlrausch.*Dritte Mittheilung ¹⁾.(Der k. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen im Auszuge vorgelegt am 9. Januar 1875.)

Die Arbeit, welche ich mir erlaube, hier mitzutheilen, ist ausschließlich experimentellen Inhalts. Ich gebe zuerst einen kleinen Nachtrag zu meinen früheren Untersuchungen über die Torsion eines Silberdrahtes. Hiernach folgt eine gröfsere Anzahl Nachwirkungen eines gedrehten oder ausgedehnten Kautschukfadens und endlich eines gebogenen Stabes aus Hartkautschuk.

Ich habe versucht, diese Beobachtungen durch die früher von mir aufgestellte Formel auszudrücken, welche alle bis dahin bekannten statischen Nachwirkungen, theilweise mit überraschender Schärfe, dargestellt hat, und habe überall eine befriedigende Uebereinstimmung gefunden. Wenn nun durch diese allseitige Anwendbarkeit die Formel eine entschiedene Bedeutung für die elastische Nachwirkung besitzt, so kann sie doch nicht den Anspruch eines Naturgesetzes erheben. Um aus diesem Grunde das Beobachtungsmaterial als experimentelle Grundlage einer wirklichen Theorie der Nachwirkung geeignet zu machen, zu welcher jetzt wohl einige Aussicht vorliegt²⁾, muß ich die

1) Vgl. diese Annalen CXIX, 350; CXXVIII, 1, 207, 399.

2) Boltzmann, diese Ann. Ergänzungsbd. VII, S. 624; Wien. Sitzungsberichte 1874, Octob. 8.

Beobachtungen mit einer gewissen Breite mittheilen, welche für die bloße Prüfung der erwähnten Formel nicht nothwendig seyn würde.

Ich habe endlich eine wie ich glaube merkwürdige Folgerung aus dem allgemeinen Charakter der Nachwirkung durch den Versuch bestätigt, daß nämlich, nach geeignet auf einander folgenden Deformationen entgegengesetzten Vorzeichens, in einem elastischen Körper Bewegungen der Nachwirkung zurückbleiben können, welche von selbst aus einer in die entgegengesetzte Richtung übergehen; oder mit anderen Worten, Bewegungen, welche zeitweilig die Gestalt eines Körpers von der Gleichgewichtsgestalt entfernen.

Ich werde im Folgenden überall bezeichnen als Formel I den Ausdruck

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t^n} \text{ oder } x = C \cdot e^{-at^n},$$

wo $\alpha = am$ und $n = 1 - m$;

als Formel II die specielle Form

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t} \text{ oder } x = \frac{c}{t^\alpha}.$$

Ferner soll immer bedeuten t die Zeit nach der einem Körper mitgetheilten Gestaltsänderung, deren Nachwirkung beobachtet wird; T die Dauer einer zeitweiligen Gestaltsänderung; als Zeiteinheit gilt die Minute. τ bedeutet die Temperatur. Durch \mathcal{A} endlich soll stets dargestellt werden der Ueberschuß einer berechneten über die entsprechende beobachtete Größe.

1. Nachwirkungen in einem Silberdraht nach verschieden großen Torsionen von je 1^{min} Dauer.

Meine früheren Beobachtungen (CXXVIII, 401) hatten dahin geführt, daß in einem Silberdrahte nach einer nicht zu großen Torsion φ von mäßiger Dauer eine allmählich verschwindende Verschiebung der Ruhelage um einen

Winkel α zurückbleibt, welcher durch die Formel II darzustellen ist. Dabei wurde α nahe constant gefunden; c erwies sich (gleiche Dauer der Torsion und gleiche Temperatur vorausgesetzt) dem Winkel φ ungefähr proportional.

Die jetzt mitzutheilenden, schon 1866 an demselben Silberdraht angestellten Beobachtungen bezwecken die Prüfung, ob diese Proportionalität mit aller Schärfe stattfindet, eventuell die Feststellung der Abweichungen.

Die Absicht, bei nahe gleicher Temperatur zu beobachten, erheischte eine rasche Aufeinanderfolge der Beobachtungen, die also nicht bis zur Rückkehr des Drahtes in die Ruhelage fortgesetzt werden konnten, wozu immer Tage erfordert werden. Indessen war dieser Zeitaufwand, den ich bei der Aufsuchung des Ausdruckes für die elastische Nachwirkung niemals gescheut habe, hier nicht mehr nothwendig; man konnte sich darauf beschränken, die Aehnlichkeit des Verlaufes der Nachwirkung innerhalb entsprechender Zeiträume nach den verschiedenen großen Torsionen zu prüfen und zweitens die Gesamtbeträge der Verschiebung in dieser bestimmten Zeit zu vergleichen. Dieser Zeitraum geht im Folgenden von $\frac{1}{3}^{\text{min}}$ bis 10^{min} , und y bedeutet den Weg von der Zeit t bis zu 10^{min} . Die Wege von 10^{min} bis 20^{min} sind für die meisten Reihen auch verzeichnet (Tab. I), entstammen aber einer geringeren Anzahl von Beobachtungen als die früheren Zahlen. Der noch übrige, nicht beobachtete Rest der Nachwirkung beträgt nur etwa ein Viertel des beobachteten Theiles.

Jeder Torsionswinkel wurde mehrmals beobachtet; die entsprechenden y (welche übrigens sehr nahe übereinstimmen) und die Temperaturen wurden zum arithmetischen Mittel zusammengefaßt. Im Ganzen liegen der folgenden Tabelle 31 Beobachtungsreihen zu Grunde. Sie umfaßten etwa 1 Woche, und der Zeitraum zwischen je zweien war hinreichend groß, daß innerhalb 10 Minuten keine in Betracht kommende Bewegung des Drahtes von der vorigen Nachwirkung vorhanden war. Der Draht war bereits lange

in Benutzung, so daß die gesammte Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze nach den 31 Torsionen von zusammen etwa 5000° sich auf höchstens 0°,5 belief.

Die folgende Tabelle I zeigt zunächst, in welchem Maaße die einzelnen Nachwirkungen ähnlich verlaufen. Fügt man zu jedem y das nebenstehende Δ , so erhält man genau ähnliche Reihen.

Tabelle I.

Torsionen des Silberdrahts von je einer Minute Dauer.

t	$\varphi = 19^\circ$		$\varphi = 29^\circ$		$\varphi = 44^\circ$		$\varphi = 90^\circ$		$\varphi = 135^\circ$	
	y	Δ	y	Δ	y	Δ	y	Δ	y	Δ
min										
0,33	1,77	-0,04	2,70	-0,08	4,05	-0,03	8,44	-0,07	12,63	-0,04
0,5	1,38	+0,05	2,17	-0,01	3,31	\pm	7,02	-0,11	10,43	-0,04
1	0,97	-0,01	1,45	+0,01	2,25	-0,01	4,65	+0,02	7,06	-0,03
2	0,57	+0,01	0,83	+0,05	1,29	+0,06	2,71	+0,10	4,18	+0,05
5	0,21	-0,01	0,27	+0,04	0,43	+0,04	0,93	+0,05	1,43	+0,05
20										
min			0,3	-0,1	0,5	-0,1	0,8	\pm	1,0	+0,2

t	$\varphi = 180^\circ$			$\varphi = 234^\circ$		$\varphi = 269^\circ$		$\varphi = 340^\circ$	
	y	Δ	Δ' 1)	y	Δ	y	Δ	y	Δ
min									
0,33	17,21	-0,05	+0,45	23,93	+0,03	28,42	+0,06	37,52	+0,23
0,5	14,18	-0,02	-0,03	19,80	-0,03	23,45	+0,05	30,97	+0,18
1	9,56	+0,02	-0,26	13,33	+0,04	15,90	\pm	21,12	-0,05
2	5,72	+0,04	-0,13	8,10	-0,05	9,65	-0,08	12,87	-0,19
5	2,00	+0,01	-0,01	2,80	+0,01	3,37	-0,03	4,60	-0,17
min									
20	1,4	+0,2	+0,1	2,1	+0,1	2,6	\pm	3,6	-0,2

Die Abweichungen von der Aehnlichkeit übersteigen selten 0,1 Scalentheile. Man findet also eine Bestätigung des früher Gesagten (CXXVIII, 402), daß *die Curven der Nachwirkung nach Torsionen von verschiedener Größe bei dem Silberdraht sehr nahe ähnlich sind*. Trotz dem kleinen Betrage zeigen die Differenzen indessen eine Regelmäßigkeit.

1) Δ' bei $\varphi = 180^\circ$ gilt für die Rechnung nach Formel II mit $c = 15,75$ und $\alpha = 0,387$. Vgl. CXXVIII, S. 218 ff.

keit des Vorzeichens, welche anzudeuten scheint, daß die Nachwirkungen nach größeren Torsionen verhältnißmäßig ein *wenig* langsamer verschwinden.

Wir stellen zweitens die Frage, wie der Gesamtweg y_0 zwischen $t = 0,33$ und 10^{min} von dem vorausgegangenen Torsionswinkel abhängt. Zu diesem Zweck reduciren wir zuerst die Beobachtungen, welche bei nicht ganz gleichen Temperaturen (Tab. II) angestellt worden waren, auf ihre Mitteltemperatur $19^{\circ},3$, nach der in dem früheren Aufsätze gefundenen Regel (CXXVIII, 220). Die reducirten Werthe sind in der vorletzten Spalte von Tab. II enthalten.

Es ist früher schon bemerkt worden, daß ungefähr Proportionalität zwischen der Nachwirkung und dem Torsionswinkel herrscht. Die jetzigen genaueren Beobachtungen erlauben zu constatiren, daß y_0 ein wenig beschleunigt wächst¹⁾. In einem quadratischen Ausdruck findet sich jetzt

$$y_0 = 0,08501 \cdot \varphi + 0,0000728 \cdot \varphi^2,$$

und zwar mit einer Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten y_0 , auf welche ich, als auf einen Prüfstein der Beobachtungen, besonders hinweisen möchte.

Tabelle II.

Anzahl der Beob.	φ	Temp.	y_0	y_0 bei $19^{\circ},3$	Δ
4	19°	19,25	1,77	1,77	-0,12
2	29	19,27	2,70	2,70	-0,17
2	44	19,50	4,05	4,08	-0,15
4	90	19,38	8,44	8,42	-0,18
4	135	19,19	12,63	12,66	+0,15
4	180	18,89	17,21	17,38	+0,28
3	234	19,12	23,93	24,08	-0,15
4	269	19,67	28,42	28,16	-0,02
4	340	19,55	37,52	37,29	+0,04

1) Auch in den früheren Beobachtungen (CXXVIII, 402 und Taf. IV, Fig. 4) spricht sich die Beschleunigung aus, man konnte aber damals nicht sicher sein, ob sie nicht aus Ungleichheiten der Temperatur entsprang.

Die y_0 sind hier in Scalentheilen gegeben, deren Bogenwerth $0^{\circ},01177$ betrug. Führen wir den Bogengrad als Einheit ein, so erhalten wir *den Winkel x , welchen das Ende des 125^{mm} langen Silberdrahtes von 0^{mm},092 Dicke 1) nach einer 1^{min} dauernden Torsion von φ° vermöge der elastischen Nachwirkung in dem Zeitraum $\frac{1}{3}$ bis 10^{min} nach Aufhebung der Torsion zurücklegt* bei $19^{\circ},3$

$$x = 0,001001 \cdot \varphi + 0,000000857 \cdot \varphi^2.$$

Modificiren wir hiernach den Ausdruck, welcher (CXXVIII, S. 405) für unseren Draht nach einer Torsion von φ° und der Dauer T^{min} bei der Temperatur τ den Winkel x der Nachwirkung zur Zeit t^{min} nach Aufhebung der Torsion darstellt, so wird

$$x = \frac{1}{t^{0,39}} (0,0000219 \cdot \varphi + 0,0000000187 \cdot \varphi^2) T^{0,59} (\tau + 21,5).$$

Bis $\varphi = 360^{\circ}$, $T = 3^{\text{min}}$ und für τ von 0 bis 25° kann dieser Ausdruck als Darstellung der elastischen Nachwirkung für unseren Draht bis auf einige Procent Unsicherheit angesehen werden, selbstverständlich mit Ausschluss von $t = 0$ und den allerersten Secunden.

2. Nachwirkung nach der Torsion eines Kautschukfadens.

Der Kautschuk ist wegen seiner Veränderlichkeit nicht sehr geeignet für die langwierigen Untersuchungen der elastischen Nachwirkung. Auf der anderen Seite bietet er durch die Gröfse seiner elastischen Form-Aenderungen auch Vortheile und gewinnt Interesse dadurch, dafs er, wie der von Weber untersuchte Cocon, einen enormen Bruchtheil der ganzen Verschiebung als Nachwirkung auftreten läfst.

Für mich lag eine besondere Veranlassung, den Kautschuk zu untersuchen, in der ersten Mittheilung Neesen's²⁾, wonach dieses Material bei der Nachwirkung andere Gesetze zu befolgen schien, als der Cocon nach Weber und Glas, Messing und Silber nach meinen eigenen Beobach-

1) CXXVIII, S. 207 soll es heißen: der Halbmesser (anstatt die Dicke) beträgt 0^{mm},046.

2) Neesen, Berl. Mon.-Ber. 1874, 142.

tungen. Nachdem ich aus den seither ausführlich veröffentlichten Beobachtungen Neesen's den Nachweis geführt habe (CLV, 579), daß sehr wohl eine Uebereinstimmung zwischen seinen und den übrigen Beobachtungen herzustellen ist, muß ich beinahe bedauern, der Torsion des Kautschuks selbst noch eine ausführliche Untersuchung gewidmet zu haben; denn die Resultate entsprechen nicht ganz der aufgewandten Mühe.

Es zeigt sich eben, wie zu erwarten war, die Hauptschwierigkeit bei den Beobachtungen über die Nachwirkung, nämlich die schließliche Gleichgewichtsgestalt festzustellen, bei dem Kautschuk in verstärktem Maafsstabe. Ueberschreitungen der Elasticitätsgrenze waren viel schwieriger zu vermeiden als bei den Metallen. Aber auch hiervon abgesehen war die Ruhelage meistens langsamen Aenderungen unterworfen, die theilweise jedenfalls mit den Schwankungen der Temperatur zusammenhängen, theilweise aber auch mit Ursachen, die ich nicht aufdecken konnte. Wahrscheinlich gehörte zu den Letzteren eine Veränderung des Materials mit der Zeit, eine Umlagerung der Theilchen, die ja bei den Kautschukwaren, besonders wenn sie unbenutzt sind, eine bekannte lästige Eigenschaft bildet.

Die mir zu Gebote stehenden runden Kautschukfäden erwiesen sich bei näherer Besichtigung zusammengerollt. Ich habe deswegen den in Spielwaarenläden käuflichen Faden mit nahe quadratischem Querschnitt benutzt, welcher vermuthlich aus dünnen Platten geschnitten wird. Die Seite des Quadrats betrug $0^{\text{mm}},9$; da 1^{mm} des Fadens $0^{\text{gr}},98$ wog, so war das specifische Gewicht = 1,2.

Es wurden zwei, äußerlich gleiche Exemplare untersucht, die ich durch I und II bezeichnen will. Die freie Länge der Fäden, in dem früher beschriebenen Torsionsapparat geeignet befestigt (CXXVIII, Taf. 4, Fig. 1), betrug 178^{mm} . Das Gewicht des angekitteten Spiegels nebst Halter aus Aluminiumdraht betrug am Faden I 6130^{gr} , an II nur 3450^{gr} . In Folge des verschiedenen Trägheitsmomentes waren die *Schwingungsdauern* (4,8 bez. 2,6 Sec.)

und die *Dämpfungen* durch die Viscosität des Fadens von verschiedener Größe. Das Verhältniß auf einander folgender Schwingungsbögen betrug 1,18 für I und 1,31 für II. Letzterer Faden erlaubte deswegen schon 30^{sec} nach vorgenommener Drehung eine Beobachtung, und nach 40^{sec} waren jedenfalls keine merklichen Schwingungen mehr vorhanden. Bei I dagegen dauerten die Schwingungen einige Minuten lang, wesswegen man hier anfangs die Ruhelage aus den Umkehrpunkten des schwingenden Drahtes bestimmte.

Der *Abstand der Scale vom Spiegel* betrug für den Faden I 1170 Scalenth. (1 Scalenth. = 0°,0245), für II 1400 Scalenth. (1 Scalenth. = 0°,0206). Wo nicht anderes bemerkt wird, sind die Winkel der Nachwirkung in Scalentheilen ausgedrückt, nach Correction der Ablesungen auf Größen, welche den Bogen proportional sind.

Torsionen von kurzer Dauer.

Die folgenden sechs Beobachtungsreihen wurden mit einer gemeinsamen Torsionsdauer $T = 0^{\text{min}},5$ an dem Faden II ausgeführt. Zwischen den aufeinanderfolgenden Versuchen lagen stets Zeiträume von einem bis mehreren Tagen, so daß man den Verlauf einer jeden Nachwirkung als unbeeinflusst von den früheren Versuchen ansehen kann.

Trotzdem ist es unthunlich, die Endeinstellungen des Spiegels aus der Beobachtung zu ermitteln, weil sich die Ruhelage fast immer im Laufe der Zeit änderte, auch wenn der Faden tagelang unbenutzt gewesen war. Diese Zufälligkeiten von der, schließlicly auch sehr langsam verlaufenden Nachwirkung zu trennen, ist unmöglich, so lange man der ersteren Grund nicht kennt (vgl. die Anmerkung).

Ich beschränke mich deswegen darauf, die erste Stunde der Rechnung zu unterwerfen und einige spätere Beobachtungen ohne Anspruch auf Reinheit beizufügen. Die erste Ablesung ($t = 0^{\text{min}},5$) macht auf Exactheit keinen Anspruch, weil damals meistens noch geringe Schwingungen des Spiegels vorhanden waren.

Man wird finden, daß die Formel $x = \frac{c}{t^\alpha}$ die Beobachtung genügend darstellt. Die jedesmalige Endeinstellung ist so angenommen worden, wie sie dieser Formel, aus je einigen Drillingen von Beobachtungen berechnet, am besten entspricht ¹⁾. Dann berechnete man α aus einigen Beobachtungspaaren und bestimmte endlich c so, daß die Summe der Fehler von 0,66 . . . bis 30^{min} nahe Null wurde. Kleinste Quadrate wurden nicht gebraucht.

Ueber den einzelnen Reihen der Tabelle findet sich der Torsionswinkel φ , die Temperatur, bei welcher gedrillt wurde (welche in der Regel nach der ersten Stunde um einige Zehntel Grad gewachsen war), und unter No. die zeitliche Reihenfolge der Versuche.

- 1) Die so berechneten Endeinstellungen harmoniren ziemlich gut mit der Beobachtung. Die Ueberschreitungen der Elasticitätsgränze würden danach betragen haben (in der Reihenfolge wie die Versuche in der Tabelle geordnet sind) 0,7, 3,8, 8,2, 2,7, 6,1 und 1,8 Scalenth. Wollte man die Einstellungen nach 24^h als Ruhelagen ansehen, so würden den x der Tabelle zuzufügen sein 1,2, 6, 12, 7, 7, 13 Scalenth. Aber es ist wahrscheinlich, daß hier Einflüsse, welche aufserhalb des Versuches liegen, eine Verschiebung bewirkt haben. Bei den ersten dreien und dem letzten Werth ist dies offenbar der Fall, denn die Differenzen sind ja grösser als die angenommenen Ueberschreitungen der Elasticitätsgränze. Ohne ausführlich auf den Gegenstand einzugehen, will ich nur bemerken, daß offenbar Temperaturänderungen bei diesen Einflüssen mitspielen. Theilweise schien die Ruhelage direct von der Temperatur abzuhängen. Theils aber auch möchte ich glauben, daß durch Temperaturänderungen, insbesondere durch temporäre Steigerungen derselben, Reste von alten Nachwirkungen hervortreten, die bei constanter Temperatur als Ueberschreitungen der Elasticitätsgränze erscheinen. Der Gegenstand verlangt und verdient wohl auch eine eingehende Untersuchung.

Tabelle III.
Torsion des Kautschukfadens No. II.

t	No. 3. $\varphi = 4^{\circ},5$ Temp. = $17^{\circ},3$		5. $9^{\circ},4$ $16^{\circ},0$		2. $20^{\circ},1$ $18^{\circ},0$		1. $40^{\circ},0$ $18^{\circ},3$		4. $82^{\circ},5$ $18^{\circ},7$		6. $8^{\circ},5$ $9^{\circ},5$	
	x	A	x	A	x	A	x	A	x	A	x	A
0,5	12,3	+0,2	25,6	+0,2	62,0	+1,2	123,3	+0,3	209,7	-2,2	25,0	+0,3
0,66	10,3	-0,1	21,6	-0,1	53,0	+0,5	106,5	-0,3	173,6	-0,7	21,1	-0,1
1	7,8	-0,1	16,7	=	42,4	-0,1	86,2	-0,6	143,4	+0,7	16,4	-0,2
1,5	5,8	=	13,0	-0,1	33,3	+0,1	69,3	-0,2	125,5	+1,1	12,5	=
2	4,7	=	10,8	=	28,2	+0,1	59,4	-0,1	104,3	+1,1	10,4	=
3	3,4	+0,1	8,3	=	22,3	+0,1	47,5	+0,3	83,2	+0,6	8,0	=
5	2,5	=	6,0	+0,1	16,5	+0,1	36,2	+0,3	71,8	+0,2	5,8	=
7	2,1	-0,1	4,9	=	13,7	=	30,4	+0,1	61,5	-0,1	4,7	=
10	1,5	=	3,9	=	11,2	-0,1	25,3	=	51,3	-0,2	3,7	=
15			3,0	=	9,1	-0,3	20,3	+0,1	45,3	-0,4	2,8	+0,1
20			2,4	+0,1	7,6	-0,2	17,3	+0,2	37,7	-0,2	2,4	=
30	0,6	+0,1	1,9	+0,1	6,0	-0,1	14,0	+0,1	29,5	+0,3	1,8	=
50			1,2	+0,2	4,0	+0,4	10,0	+0,8	20,5	-1,3		
80			0,7	+0,4	2,3	+1,0	6,3	+2,1				
100												
128												
	c = 7,69		16,70		42,27		85,63		172,9		16,24	
	$\alpha = 0,70$		0,63		0,58		0,53		0,45		0,64	

Was nun den Gang der Coëfficienten mit dem Torsionswinkel φ betrifft, so ist c (die zur Zeit $t = 1^{\text{min}}$ vorhandene Nachwirkung) beiläufig mit φ proportional und läßt sich darstellen $c = 2,08 \cdot \varphi$. Oder, wenn man für c anstatt des Scalentheils den Bogengrad ($1 \text{ Scalenth.} = 0^{\circ},0206$ vgl. S. 344) einführt, der ja die Einheit von φ ist,

$$c = 0,0428 \cdot \varphi.$$

Der Exponent α , welcher die Geschwindigkeit des Verschwindens der Nachwirkung darstellt, zeigt sich hier mit wachsendem φ erheblich abnehmend. Als lineare Function von φ angesehen, läßt er sich etwa darstellen

$$\alpha = 0,67 - 0,003 \cdot \varphi.$$

Das vorliegende Exemplar des Kautschukfadens weist also die am Silberdrahte bereits wahrscheinlich gemachte Erscheinung, daß die grössere Nachwirkung relativ langsamer verschwindet, in verstärktem Maasse auf.

Zu beachten ist noch, daß die α von derselben Ordnung sind, wie bei dem Silber, was man bei der grossen Verschiedenheit des Materials kaum erwartet hätte.

Der Faden I gab ähnliche Resultate, von denen ich zwei Beispiele in Tab. IV einschalten werde.

Die letzte Reihe No. 6 in Tab. III ist bei einer etwa 8° niedrigeren Temperatur beobachtet worden, als die übrigen. Es fällt auf, daß ein erheblicher Einfluß der Temperatur wie er bei dem Silber vorhanden war, hier nicht hervortritt. c sowohl wie α ordnet sich in die Reihe der übrigen fast ohne Abweichung ein. Indessen muß hier hervorgehoben werden, daß zwischen No. 5 und 6 ein Zeitraum von etwa 1 Monat liegt, und daß der Kautschuk bekanntlich in niederer Temperatur mit der Zeit seine Beschaffenheit bedeutend ändert. Einen positiven Schluss also kann man kaum ziehen.

Nachwirkung nach länger dauernden Torsionen.

An dem Silberdraht hatte sich herausgestellt, daß nach Torsionen, denen der Draht eine grössere Zeit ausgesetzt gewesen war, die Nachwirkung nicht mehr genügend

durch die bisher gebrauchte Formel II dargestellt wurde, sondern daß man zu der allgemeineren Formel I greifen mußte. Der Exponent m , durch dessen Verschwinden eben II aus I entsteht, entfernte sich mit wachsender Torsionsdauer von 0. Doch blieb er kleiner als 1.

Der Kautschukfaden scheint ähnliche Gesetze zu verfolgen. Nachstehende Beobachtungen beziehen sich auf den Kautschukfaden I und enthalten die Nachwirkungen nach Torsionen von etwa 45° und bez. 10^{sec} , 15^{min} und 75^{min} Dauer, sowie nach einer Torsion von 180° und 10^{sec} Dauer.

Ich habe schon erwähnt, daß in Folge des größeren Trägheitsmoments des Spiegels die Anfangs-Schwingungen mehrere Minuten andauerten. Man beobachtete so lange die Umkehrpunkte, indem ein Gehülfe die Zeiten notirte. Jeder Umkehrpunkt wurde mit dem arithmetischen Mittel zusammengefaßt, welches nahe als Einstellung zu der mittelsten Umkehrzeit gelten kann¹⁾. Durch graphische Aufzeichnung glich man die Ungenauigkeiten aus, welche dieses Verfahren enthält, solange die Schwingungen beträchtlich sind.

Die Bedeutung der Zahlen in der Tab. IV ist dieselbe wie in III; nur habe ich, weil es Interesse bieten kann, unter Amp. die zur Zeit t vorhandene Schwingungsweite hinzugefügt. Sie wurde aus einer Aufzeichnung der beobachteten Schwingungsbögen graphisch abgeleitet.

Die beiden Reihen von kurzer Dauer wurden nach Formel II, die anderen nach I mit den unten angegebenen Constanten berechnet²⁾.

- 1) So ergaben die ersten Beobachtungen der Reihe für $\varphi = 45^\circ$ und $T = 15^{\text{min}}$ an der Scale:

Um- kehr- {	Zeit	22 ^{sec}	26	31	36	40	45	49	53	58	62	66
	Punkt	924	579	852	613	803	633	768	646	743	655	724
	Mittel $x =$		733	724	720	713	709	704	701	697	694	...

Die Beobachtungen sind bereits auf den Bogenwerth corrigirt.

- 2) Die Ueberschreitungen der Elasticitätsgränze, d. h. die Verschiebung der der Rechnung zu Grunde liegenden Ruhelage gegen die vor dem Versuch beobachtete, betrug resp. 30, 7, 14 und 14 Scalenth.

Die Uebereinstimmung der Beobachtung und Rechnung ist während der ersten Stunden durchaus befriedigend, wenn man die erste Minute mit den noch ziemlich starken Schwingungen ausnimmt. Immerhin geben die Formeln auch für diese ersten Zeiten noch eine beachtenswerthe Annäherung.

Es möge hier endlich hervorgehoben werden, wie weit die einzelnen Verläufe der Nachwirkung von der Congruenz entfernt sind. Die Verschiebung betrug für

		No. 2	3	4	
von 0,7 bis	1 ^{min}	14	16	15	Scalenth.
"	2 "	2,5	5,4	9,1	9,9 "
"	7 "	10	4,8	11,5	14,9 "
"	30 "	40	2,6	5,0	9,5 "
"	40 "	90	7,6	9,7	25,5 "

Während die anfängliche Geschwindigkeit also fast gleich ist, sehen wir sie nach einer Stunde bei der Nachwirkung nach der Torsion von 75 Minuten den 3 bis 4fachen Werth der beiden andern Geschwindigkeiten erreichen.

Der Exponent α hat für die Beobachtungsreihen No. 1 und 2 nahe denselben Werth. Bei dem anderen Exemplar des Kautschukfadens war er für $\varphi = 40^\circ$ und $T = \frac{1}{2}$ Min. beträchtlich größer gefunden worden (S. 347). Um zu entscheiden, ob dieser Unterschied in einer Verschiedenheit des Materials liegt, hätte man die beiden Fäden unter gleichen Umständen beobachten müssen. Vielleicht wäre aber auch die Frage aufzuwerfen, ob der Unterschied mit der rascheren Beruhigung der anfänglichen Schwingungsbögen bei den früheren Versuchen zusammenhängt.

Haben die mitgetheilten Beobachtungen über die Torsion des Kautschukfadens auch nicht ganz die Beweiskraft der früheren am Silberdrahte gewonnenen Resultate, weil in der Annahme der Ruhelagen eine gewisse freilich begrenzte Willkür liegt, so genügen sie doch, um Folgendes zu zeigen:

1. Nach kurz dauernden Torsionen wird die Nachwirkung α nach der Zeit t auf weite Strecken durch Formel II mit großer Annäherung dargestellt. Der Exponent α nimmt mit wachsendem Torsionswinkel ab; die anfängliche Größe der Nachwirkung (also beiläufig die Constante c) ist bei gleicher Zeitdauer der Torsion dem vorausgegangenen Torsionswinkel ungefähr proportional.

2. Für länger dauernde Torsionen verläuft die Nachwirkung nahe nach der Formel I; m wächst mit der Dauer.

3. Es folgt hiernach der gedrillte Kautschukfaden wesentlich den Beziehungen, welche früher für einen Silberdraht gefunden wurden.

3. Boltzmann's Beobachtungen über die Torsion eines Glasfadens.

In der von Boltzmann veröffentlichten Arbeit über die elastische Nachwirkung¹⁾ sind als Anhang einige Beobachtungen über die Torsion eines langen Glasfadens mitgetheilt, hauptsächlich zu dem Zwecke angestellt und verworthen, das Gesetz der Superposition verschiedener Nachwirkungen zu prüfen. Indem ich hoffe, zu der letzteren Frage und überhaupt zu der Boltzmann'schen Theorie der Nachwirkung bald weiteres Material zu liefern, will ich hier die Resultate Boltzmann's benutzen, um auch an ihnen meine Formeln zu prüfen.

Dem Glasfaden war eine Torsion von je 180° während der Zeiten $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 oder 2 Minuten mitgetheilt gewesen. Man wird aus folgender Zusammenstellung erschen, daß die Nachwirkungen nach den zwei kürzeren Zeiten durch Formel II, die letzten beiden durch I sich mit durchaus befriedigender Uebereinstimmung darstellen lassen, wobei für 2^{min} m größer ist, als für 1^{min} . Es gelten also genau die nämlichen Beziehungen, wie die von mir für Silber gefundenen.

1) Boltzmann, Wien. Sitzungsber. 1874, Okt. 8 u. 22.

Es ist zu beachten, daß Boltzmann die Zeiten nicht von dem Ende, wie hier, sondern von der Mitte der Torsionsdauer an zählt.

Tabelle V.

Boltzmann's Beobachtungen über die Torsion eines Glasfadens.

$T = \frac{1}{4} \text{min}$			$\frac{1}{2} \text{min}$			1min			2min		
t	x	A	t	x	A	t	x	A	t	x	A
min			min			min			min		
1,87	5,5	\pm	1,75	11	+0,3	1,5	21	\pm	1	43	+0,3
2,87	3,6	\pm	2,75	7,5	-0,1	2,5	14	-0,2	2	28	-0,3
3,87	2,8	-0,1	3,75	5,7	-0,1	3,5	10,3	+0,1	3	21	-0,1
5,87	1,8	\pm	5,75	3,9	-0,1	5,5	7	\pm	5	14,2	+0,1
7,87	1,4	\pm	7,75	2,8	+0,1	7,5	5,3	\pm	7	10,9	+0,1
11,87	0,9	\pm	11,75	1,9	\pm	11,5	3,6	\pm	11	7,5	\pm
15,87	0,7	\pm	15,75	1,4	+0,1	15,5	2,6	+0,1	15	6	-0,3
						23,5	1,8	\pm	23	3,7	+0,2
						31,5	1,3	\pm	31	2,8	+0,1
	$c = 10,13$			$c = 18,90$			$C = 472400$			$C = 3455$	
	$\alpha = 0,968$			$\alpha = 0,923$			$a = 9,701$			$a = 4,387$	
							$m = 0,08$			$m = 0,14$	

Die beiden Coëfficienten α unterscheiden sich wenig von einander. Sie sind bedeutend grösser als bei dem Silber (0,39), ja sogar als bei dem Kautschuk (0,33 bis 0,70). Dafs die Torsionsdauer 1^{min} ein grösseres C ergibt, als 2^{min} , zeigt wieder die Unanwendbarkeit der Formeln für den ersten Augenblick. Doch tritt der Fall, dafs das für die Dauer 1^{min} berechnete α grösser wird als dasjenige für 2^{min} erst für die Zeit $t = 0,115$ ein. Lügen Beobachtungen für diese ersten Zeiten vor, so würden sich die Constanten also etwas anders ergeben.

4. Ausdehnung des Kautschukfadens.

Bekanntlich bezog sich die erste grundlegende Arbeit Weber's¹⁾ über die elastische Nachwirkung auf die Ausdehnung; seitdem ist die letztere nicht wieder Gegenstand der Untersuchung gewesen. Diese Beobachtungen wieder aufzunehmen, schien aber aus mehreren Gründen wünschenswerth: erstens, damit man auch an anderen Substanzen als am Coconfaden ihre Gesetze kennen lerne, sodann aber auch, weil noch eine Vereinfachung der Verhältnisse gegenüber Weber's Verfahren möglich ist. Damals näm-

1) Weber, Ann. Bd. XXXIV, S. 247; *Comm. Soc. Gött. Vol. VIII*, 45.

lich geschah die primäre Längenänderung nicht plötzlich, sondern erforderte mehrere Minuten Zeit, weil sie durch Anziehen einer Schraube hervorgebracht wurde. Hierdurch wird die Einführung eines gegebenen Anfangspunktes der Nachwirkung verhindert; was freilich nach Weber's Auffassung der Nachwirkung gleich war, nicht aber nach derjenigen, welche sich nach meinen Beobachtungen über die Torsion ergab. Weber nämlich nahm an, daß einem und demselben Abstände des Körpers von der endlichen Gleichgewichtslage immer die nämliche Geschwindigkeit der Gestaltsänderung zukomme. Bei der Torsion erwies sich jedoch diese Anschauung unzulässig (vergl. auch S. 359). Nun habe ich freilich schon früher zu zeigen versucht, daß Weber's Beobachtungen mit denen der Torsion in Uebereinstimmung zu bringen sind; jedoch lag ein Hinderniss gegen positive Schlüsse in dem erwähnten Mangel der bestimmten Anfangszeit, sowie dann noch darin, dass die spannenden Kräfte bei Weber's Beobachtungsweise mit der allmählig eintretenden Nachwirkung sich in einem gewissen Verhältniss änderten.

Wegen der Kleinheit der Verlängerung sind die meisten Substanzen, z. B. alle unorganischen, wenig geeignet, die Ausdehnung genau zu studiren. Ich habe den Kautschukfaden genommen, und zwar die gleiche Sorte wie die vorhin für die Torsion gebrauchte. Der Faden war oben an einem Halter in der Wand befestigt und trug in der Nähe des unteren Endes eine Marke. Ich werde den Abstand dieser Marke vom Befestigungspunkt des Fadens kurz seine Länge nennen. Dicht hinter der Marke befand sich ein verticaler Millimeter-Maafsstab, auf welchem die Einstellung der Marke mittelst eines Fernrohres abgelesen wurde. Das letztere war parallel mit sich in verticaler Richtung verschiebbar und wurde so verschoben, daß die Mitte des Gesichtsfeldes immer der Marke nahe blieb.

An dem Faden hing unterhalb der Marke ein kleines Waagschälchen zur Aufnahme von Belastungen; wiederum an dickerem hing an dünnem Draht ein kleiner verticaler

Hohlcyylinder aus Messingblech, welcher zur Beruhigung von Pendelschwingungen in ein Gefäß mit Wasser untertauchte. Eine Beruhigung für longitudinale Schwingungen war unnöthig.

Die durch die unbelastete Schale und die genannte Vorrichtung zum Beruhigen hervorgebrachte *constante Belastung* des Fadens betrug 4,1 Grm. und die *Länge des hierdurch gespannten Fadens* war 2300^{mm}.

Vor dem Beginn der Versuche wurde der Faden 20 Minuten lang um etwa 600^{mm} ausgedehnt und alsdann einen Tag lang sich selbst überlassen.

Längsnachwirkung nach kurz dauernden constanten Verlängerungen des Fadens.

Man faßte den Faden unterhalb der Marke mit der Hand und dehnte ihn um eine Länge l aus, hielt diese Verlängerung eine Minute lang constant und führte dann den Faden rasch aber behutsam in seine natürliche Lage zurück. Losgelassen hatte er binnen 10^{sec} seine Schwankungen so weit beruhigt, daß man mit den Beobachtungen am Fernrohr beginnen konnte; doch macht diese erste Ablesung noch keinen Anspruch auf große Genauigkeit. (Tab. VI.)

Ueberschreitungen der Elasticitätsgränze und Unregelmäßigkeiten der Einstellung machten sich bei diesen Versuchen weit weniger fühlbar als bei der Torsion. Nach Verlauf einer halben Stunde war der Faden regelmäßig bis auf weniger als 1^{mm} wieder seiner Länge vor dem Versuch nahe gerückt, welche letztere deswegen immer als Gleichgewichtslänge angesehen wurde; *die unten angegebenen Größen x sind also die temporären Verlängerungen des Fadens gegen die dem Versuche vorausgehende Länge.*

Zwischen zwei Versuchen lag eine hinreichende Zeit, daß durch die vorausgehende Nachwirkung in 50^{min} eine merkliche Verschiebung nicht mehr eintrat¹⁾. Die zeit-

1) Mit Ausnahme von No. 3 mit der Verlängerung 200^{mm}. Damals war 23^{min} vorher der Versuch mit 120^{mm} angestellt worden. Nach der

liche Reihenfolge der verschiedenen Sätze (innerhalb dreier Tage) ist durch die Nummern angegeben. No. 1 ist das Mittel aus zwei Beobachtungen.

Bei dem Versuche, die Beobachtungen durch Gesetze darzustellen, führt gleich die Formel II zu einem günstigen Resultat. Unter jeder Reihe sind die Zahlen der Constanten c und α aufgeführt, welche die durch die Differenzen d (ber. — beob.) angezeigte Uebereinstimmung geben. Letztere ist bis auf die zu $t = 10^{\text{sec}}$ gehörenden Werthe überall befriedigend. An sich würde auf die anfängliche geringere Uebereinstimmung kein großer Werth zu legen seyn, da wie schon bemerkt, die Unsicherheit der Ablesung hier beträchtlich war, und weil deswegen bei der Bestimmung der Constanten die Zeit $0^{\text{min}},167 = 10^{\text{sec}}$ nicht mit berücksichtigt worden ist. Indessen springt doch zugleich eine Regelmäßigkeit der Vorzeichen ins Auge, nach welcher die Rechnung für die allererste Zeit etwas zu große Werthe zu liefern scheint. In der That findet sich bei Anwendung der allgemeinen Formel I, daß m nicht ganz Null wird. Ich habe die Reihe No. 7 (250^{mm}) nach $x = 31990 \cdot e^{-8,401 \cdot t^{0,07}}$ berechnet und die Differenzen unter d' hinzugefügt. Die Uebereinstimmung läßt nichts mehr zu wünschen.

Ueber die letzte in niederer Temperatur gemachte Beobachtung folgen in §. 6 einige Bemerkungen.

Unten angegebenen Formel für letztere Nachwirkung wurde die Verschiebung der Ruhelage durch letztere während der Beobachtung No. 4 berechnet (höchstens $0,2^{\text{mm}}$) und als Correction der Ablesungen angebracht.

Tab. VI.

Dehnungen des Kautschukfadens von 1 min Dauer.

t	No. 1. $\tau = 18^{\circ}, 5$		5. + 17 $^{\circ}, 7$		2. + 18 $^{\circ}, 5$		6. + 17 $^{\circ}, 3$		No. 3. + 18 $^{\circ}, 6$		7. + 17 $^{\circ}, 6$		4. + 18 $^{\circ}, 7$		8. + 19 $^{\circ}$	
	x	A	x	A	x	A	x	A	x	A	x	A	x	A	x	A
min																
(0,167)	3,9	+ 0,43	6,6	+ 0,8	10,3	+ 0,2	10,5	+ 0,3	15,8	+ 1,0	18,6	+ 0,7	21,3	+ 1,7	15,9	+ 0,6
0,25	3,45	+ 0,09	5,7	+ 0,3	8,6	+ 0,2	9,1	+ 0,1	13,0	+ 0,2	15,6	+ 0,6	17,7	+ 0,4	13,8	+ 0,3
0,333	3,05	+ 0,01	5,1	=	7,5	=	7,3	=	11,1	+ 0,1	13,4	+ 0,2	15,2	=	11,4	- 0,2
0,5	2,55	- 0,05	4,2	- 0,1	6,1	- 0,1	6,4	- 0,2	8,9	- 0,1	10,9	- 0,2	12,1	- 0,2	9,8	- 0,3
0,667	2,15	+ 0,02	3,6	- 0,1	5,2	- 0,1	5,0	=	7,6	- 0,2	9,3	- 0,3	10,2	- 0,2	7,9	- 0,3
1	1,70	+ 0,07	2,9	=	4,1	=	4,0	=	6,0	- 0,1	7,3	- 0,3	8,0	- 0,1	6,3	- 0,3
1,5	1,45	=	2,3	=	3,2	=	3,2	=	4,7	- 0,1	5,7	- 0,2	6,2	=	5,2	- 0,1
2	1,22	+ 0,03	1,9	+ 0,1	2,7	=	3,3	+ 0,1	3,9	=	4,6	=	5,2	=	4,0	+ 0,1
3	0,97	+ 0,05	1,6	=	2,2	=	2,6	+ 0,1	3,0	+ 0,1	3,6	=	4,0	+ 0,1	4,0	+ 0,1
5	0,80	- 0,01	1,2	=	1,6	=	2,0	=	2,2	+ 0,1	2,6	+ 0,1	2,9	+ 0,1	2,9	+ 0,2
7	0,71	- 0,05	1,05	=	1,4	=	1,6	+ 0,1	1,8	=	2,1	+ 0,1	2,4	=	2,5	+ 0,1
10	0,60	- 0,04	0,9	- 0,1	1,2	- 0,1	1,4	=	1,5	=	1,7	+ 0,1	2,0	=	2,0	+ 0,1
15	0,52	- 0,06	0,7	=	0,8	=	1,2	- 0,1	1,2	=	1,4	=	1,5	=	1,5	+ 0,1
20	0,48	- 0,08	0,6	=	0,8	=	1,0	- 0,2	1,1	=	1,1	+ 0,1	1,3	=	1,3	+ 0,1
30			0,6	- 0,1			0,8	- 0,3	0,9	=	0,9	- 0,1	0,9	=	0,9	+ 0,1
50			0,6	- 0,1			0,8	- 0,2	0,8	=	0,6	+ 0,1	0,9	- 0,1		
c	= 1,77		2,86		4,06		4,97		5,84		7,04		7,86		7,60	
α	= 0,50		0,53		0,56		0,56		0,59		0,60		0,60		0,56	

Die c sowohl wie die α zeigen einen sehr regelmäßigen Verlauf bei den Reihen von ungefähr gleicher Temperatur.

Die gefundenen Geschwindigkeitscoefficienten oder Exponenten α liegen zwischen 0,5 und 0,6, entfernen sich also nicht aus der Gränze, innerhalb deren die für die Torsion gefundenen α lagen (§. 2). Hingegen zeigt ihre Aenderung bei verschiedenen großen Verlängerungen den umgekehrten Gang. Während Torsions-Nachwirkungen mit wachsendem primären Torsionswinkel verhältnißmäßig langsamer verschwinden, haben wir bei der Ausdehnung die verhältnißmäßig größere Zähigkeit der Nachwirkung für die geringeren Ausdehnungen.

Als lineare Function der Verlängerung l^{mm} nach kleinsten Quadraten bestimmt ist

$$\alpha = 0,50 + 0,00038 \cdot l,$$

oder, die Verlängerung in Bruchtheilen der Gesamtlänge 2300^{mm} ausgedrückt, d. h. $\lambda = \frac{l}{2300}$ gesetzt

$$\alpha = 0,50 + 0,88 \cdot \lambda.$$

Als Gränzwert für kleine Verlängerungen entsteht hiernach für unseren Fall $\alpha = \frac{c}{\sqrt{t}}$, was aber nur zufällig seyn dürfte.

Die Größe der Nachwirkung c wächst mit steigender Verlängerung der letzteren beiläufig proportional, doch ist eine Verzögerung deutlich ausgesprochen. Man findet nach kleinsten Quadraten

$$c = 0,0383 \cdot l - 0,0000410 \cdot l^2$$

oder, wenn wieder für l die Größe λ eingeführt und nun natürlich auch c in Bruchtheilen der ganzen Länge 2300^{mm} gemessen wird,

$$c = 0,0383 \cdot \lambda - 0,0943 \cdot \lambda^2.$$

Große Bedeutung für die Erkenntnis der Nachwirkung hat unstreitig die Vergleichung dieses Vorganges bei der Torsion und der Ausdehnung. Es ist zu wünschen, daß solche Beobachtungen an einem und demselben Faden

combinirt werden. Bei uns liegt nun wenigstens die gleiche Sorte Kautschuk den eben mitgetheilten Versuchen und denen des §. 2 über Torsion zu Grunde. Durch Vergleichung der Formeln für c und α (S. 347 und 357), und in Anbetracht der beiderseitigen Versuchsverhältnisse, sieht man, daß die Nachwirkung nach der Torsion größer ist als bei der Ausdehnung, daß aber immerhin die *Größe und der Verlauf der Längs- und Torsionsnachwirkung von derselben Ordnung sind*. Auch ohne genaue quantitative Vergleichung gewährt diese Thatsache Interesse.

5. Längsnachwirkung des Kautschukfadens bei dauernder Aenderung der Belastung.

Eine zweite Gruppe von Beobachtungen habe ich in der Weise angestellt, daß die Belastung des Fadens plötzlich um 4, 2 oder 1 Gramm vermehrt oder vermindert und nun die allmähliche Annäherung des Fadens an die neue Ruhelage beobachtet wurde. Es zeigt sich, dass hier bei dem Kautschuk sehr bedeutende Nachwirkungen auftreten, welche lange Zeiträume in Anspruch nehmen.

Der letztere Umstand verhinderte leider wiederum die experimentelle Feststellung der neuen Gleichgewichtslage, wozu wie es scheint, ein wochenlanges Beobachten nothwendig wäre. Wollte man sich auch dieser Arbeit unterziehen, so wäre damit doch nicht viel erreicht, denn es scheint, daß auch hier Aenderungen des Fadens mit der Zeit eintreten, welche von der Nachwirkung unabhängig sind. Selbst wenn der Faden lange Zeit „unbelastet“ war (d. h. nur mit dem constanten Gewicht seiner Waagschale beschwert), verlängerte er sich fortwährend täglich um einen Betrag von etwa 1^{mm} .

Es ist hiernach zugleich wahrscheinlich, daß die länger fortgesetzten Beobachtungen bei *Mehrbelastung* etwas zu *große Verlängerungen*, bei *Entlastung* etwas zu *kleine Verkürzungen* ergeben haben.

Mehrbelastungen. Ich gebe in der folgenden Tabelle die Resultate einiger Versuche, wobei die Zahl y die zur

Zeit t vorhandene Verlängerung gegen die dem Versuch vorausgehende Fadenlänge bedeutet.

Die Reihe mit + 4 Gr. Belastung habe ich dann nach dem Ausdruck II darzustellen gesucht. Wie früher (§. 2) wurde diejenige Endlage gesucht, welche sich unter Anwendung des Ausdrucks auf die erste Stunde ergab, und dann die Bestimmung von α und c durch Berechnung einiger Werthe und Mittelnehmen ausgeführt. Man wird (Tab. VII) die Uebereinstimmung in den ersten Stunden recht befriedigend finden. Später nähert sich die Beobachtung der endlichen Gleichgewichtslage rascher als die Rechnung. Möglich, daß hier eine wirkliche Abweichung der Formel vorliegt, möglich aber auch, daß die, nach 3^h etwa um 1° gewachsene Temperatur und der S. 358 erwähnte Umstand eine Einwirkung äußerte.

Die Endverlängerung des Fadens ist = 176,4 gesetzt, $c = 55,5$, $\alpha = 0,109$, so daß die Rechnung nach der Formel

$$y = 176,4 - \frac{55,5}{\rho^{0,109}}$$

ausgeführt wurde. Nach Verlauf eines Tages würde also noch nahe der zehnte Theil der gesammten durch 4 Gr. bewirkten Verlängerung, gefehlt haben.

Nennt man λ die Verlängerung des Fadens in Bruchtheilen der Gesamtlänge (2300^{mm}), so wird

$$\lambda = 0,0767 - \frac{0,0241}{\rho^{0,109}}.$$

Was nun die Ausdehnungen bei den anderen Belastungen 2 bez. 1 Gr. betrifft, so beschränke ich mich auf die Frage, wie sie sich zu derjenigen bei 4 Gr. verhalten.

Dabei ist zuerst zu untersuchen, ob die von Weber angenommene Congruenz der verschiedenen Nachwirkungen, von geeigneten Punkten an gerechnet, stattfindet (S. 353). Es zeigt sich jedoch, daß die verschiedenen Curven auf keine Weise zur Deckung gebracht werden können, wodurch die Vermuthung bestätigt wird, daß die beiden Curven Weber's nur wegen der geringen Verschieden-

heit der primären Veränderungen eine ungefähre Congruenz zeigten.

Dagegen findet sich nun auch hier die *Aehnlichkeit* der Curven mit grosser Annäherung ausgesprochen. Nennt man die zur Zeit t durch die Belastung 4^{ter} hervorgebrachte Verlängerung y_4 , so kann man diejenige durch 2^{ter} bez. 1^{ter} darstellen durch

$$y_2 = 0,463 \cdot y_4 \quad y_1 = 0,227 \cdot y_4,$$

oder

$$\frac{y_4}{y_2} = 2,16 \quad \frac{y_4}{y_1} = 4,41.$$

Die beiden Verhältnisse sind ein wenig grösser als das Verhältniss der Belastung, was zu erwarten war; denn wenn man mit Verlängerungen bis zu $\frac{1}{3}$ der Gesamtlänge arbeitet, so weiss man schon, dass die Verlängerung nicht mehr der Belastung genau proportional ist, sondern etwas beschleunigt wächst.

Ich schreibe wieder neben die beobachteten y die Ueberschüsse Δ der als aus der ersten Reihe berechneten Werthe über y .

Die eingeklammerten y sind graphisch interpolirt worden.

Tab. VII.

Ausdehnung des Kautschukfadens durch dauernde Mehrbelastungen.

t	+ 4 ^{er} 17 ^o ,3		+ 2 ^{er} 19 ^o ,5		+ 1 ^{er} 18 ^o ,7	
	y	Δ	y	Δ	y	Δ
min	mm		mm		mm	
0,25	112,2	-0,3	52,0	≐	24,7	+0,8
0,33	113,8	≐	52,9	-0,2	25,3	+0,8
0,5	116,5	≐	54,1	-0,1	26,1	+0,4
0,66	118,4	≐	54,6	+0,2	26,5	+0,4
1	120,9	≐	55,7	+0,3	27,1	+0,4
2	124,9	≐	57,4	+0,5	28,0	+0,4
3	127,2	≐	58,4	+0,5	28,6	+0,3
5	129,8	≐	59,6	+0,5	29,2	+0,3
7	131,4	+0,1	60,3	+0,6	29,7	+0,1
10	133,2	≐	61,0	+0,7	30,1	+0,1
15	135,0	+0,1	61,7	+0,8	30,7	≐
20	136,2	+0,2	62,5	+0,6	31,0	-0,1
30	138,0	+0,1	63,1	+0,8	31,4	-0,1
50	140,1	+0,1	64,3	+0,6	32,1	-0,3

<i>t</i>	+ 4 ^{sr} 17° ₃		+ 2 ^{sr} 19° ₅		+ 1 ^{sr} 18° ₇	
	<i>y</i>	<i>Δ</i>	<i>y</i>	<i>Δ</i>	<i>y</i>	<i>Δ</i>
min	mm		mm		mm	
70	141,3	+0,2	65,1	+0,3	32,4	-0,3
120	143,6	-0,1	66,4	+0,1	33,2	-0,6
200	146,1	-0,9	67,6	+0,1	33,9	-0,7
300	(148,6)	-2,0	(68,8)	≐	34,4	-0,6
400	150,6	-3,1	(69,7)	≐	(34,7)	-0,5
1050	(156,9)	-6,5	74,3	-1,6	36,1	-0,5
1260	157,7	-6,8	75,0	-2,0	36,4	-0,6
1440	158,2	-6,9	75,9	-2,6	36,5	-0,6
∞	176,4	ber.				

Auf die letzten Werthe ist wie erwähnt kein großes Gewicht zu legen. Im Uebrigen halten sich die Differenzen unterhalb 1^{mm}. Hiernach nehmen *die allmählichen Ausdehnungen durch verschieden große Belastungen einen nahezu ähnlichen Verlauf*. Für die *Torsion* wurde dasselbe nachgewiesen (LXIX, 345).

Nachwirkung nach Entlastungen. Die im Vorigen gebrauchten Mehrbelastungen wurden nach längerer Zeit wieder entfernt, und zwar 1^{sr} nach 23^h, 2^{sr} nach 120^h, 4^{sr} nach 29^h. Zur Zeit *t* nach der Entlastung hatte sich dann der Faden um *y* verkürzt (Tab. VIII).

Die nächstliegende Frage ist offenbar, wie diese Verkürzungen sich zu den bei den entsprechenden Belastungen stattgefundenen Verlängerungen verhalten. Die Antwort darauf liefert die Größe *Δ*, welche zu *y* hinzugefügt eben die Verlängerungen der Tab. VII ergibt.

Tabelle VIII.

Verkürzung des Kautschukfadens durch dauernde Minderbelastungen.

<i>t</i>	- 4 ^{sr} 17° ₄		- 2 ^{sr} 16° ₆		- 1 ^{sr} 18° ₃	
	<i>y</i>	<i>Δ</i>	<i>y</i>	<i>Δ</i>	<i>y</i>	<i>Δ</i>
min						
0,25	119,3	-7,1	53,3	-1,3	24,8	-0,1
0,5	123,0	-6,5	54,9	-0,8	26,0	+0,1
1	126,7	-5,8	56,5	-0,8	27,0	≐
2	130,2	-5,3	58,4	-1,0	27,9	+0,1
5	134,3	-4,5	60,5	-0,9	29,2	≐
10	137,1	-3,9	62,0	-1,0	30,1	≐
20	139,9	-3,7	63,5	-1,0	30,9	+0,1

<i>t</i>	- 4 ^{er} 17°,4		- 2 ^{er} 16°,6		- 1 ^{er} 18°,3	
	<i>y</i>	<i>Δ</i>	<i>y</i>	<i>Δ</i>	<i>y</i>	<i>Δ</i>
min						
50	143,3	-3,2	65,4	-1,1	31,8	+0,3
120	146,2	-2,6	67,0	-0,6	32,6	+0,6
300	148,6	≠	68,9	-0,1	33,1	+0,3
1260					33,5	+2,9
1440	151,6	+6,6	71,0	+4,9		

Man wolle beachten, dafs für 1^{er} und 4^{er} *Be-* oder *Entlastung* die Temperaturen fast gleich waren, dafs für 2^{er} dagegen die *Belastung* bei einer etwas höheren Temperatur stattfand.

Dafs nach längerer Zeit die Verlängerung allgemein gröfser beobachtet worden ist, als die Verkürzung, war zu erwarten. Im Uebrigen sieht man, dafs *Ent-* und *Be-*lastung mit 1^{er} einen sehr nahe congruenten Verlauf der Nachwirkung geben. Für 2^{er} verläuft die Verkürzung ein wenig rascher, und die Unterschiede würden in gleicher Temperatur noch etwas wachsen (vergl. § 6). Für 4^{er} sind die Differenzen von gleichem Vorzeichen aber noch gröfser. Diese Resultate dürften folgendermaafsen zu deuten sein:

Verkürzung und Verlängerung bei der Belastung oder Entlastung um dasselbe Gewicht verlaufen congruent, so lange die Längenänderungen relativ klein sind; werden dieselben jedoch gröfser, so dafs der belastete Faden eine wesentlich andere Beschaffenheit besitzt als der unbelastete, so treten Abweichungen ein. Ob diese Abweichungen stets in einer Beschleunigung der Verkürzung bestehen, mag dahin gestellt bleiben. Vermuthlich treten sie bei hart elastischen Körpern, in dem gleichen Maafse vermindert auf, wie auch die Abweichungen der elastischen Verschiebungen von dem Gesetze der Proportionalität kleiner sind.

Dafs die Nachwirkung in einem Coconfaden bei gleicher Dehnung oder Verkürzung nahe congruent verläuft, hat schon Weber gezeigt.

Dem so für die Ausdehnung gefundenen Verhalten scheint die *Torsion* zu entsprechen. Bd. CXIX, S. 341 und 345,

Tab. I und III habe ich die Drehungsmomente mitgetheilt: erstens eines Glasfadens, der plötzlich um 1080° gedreht wurde, und zweitens desselben Fadens, welcher diese Torsion einen Tag lang besessen hatte und dann plötzlich abgewunden worden war. Man wird leicht erkennen, daß die beiden Nachwirkungen in der ersten Stunde so gut wie congruent verlaufen.

6. Einfluß der Temperatur.

Die Temperatur äußert einen eigenthümlichen Einfluß auf die Längsnachwirkung des Kautschuks.

Vergleicht man zunächst die in Tab. VI gegebene Nachwirkung nach einer 1^{min} dauernden Verlängerung von 160^{mm} bei 9° mit der gleichen bei $17^{\circ},3$, so sind die Zahlen der ersteren Reihe überall um etwas mehr als die Hälfte größer. Die Curven sind einander *ähnlich* und ergeben in der That denselben Exponenten α . In letzterer Hinsicht stimmt die Erscheinung mit den am gedrehten Silberdraht beobachteten Verhältnissen. Der Einfluss der Temperatur auf die *Größe* der Nachwirkung aber ist gerade umgekehrt, denn bei dem Silber wächst letztere mit der Temperatur (CXXVIII, 216).

Ich habe ferner die Mehrbelastung mit 2^{gr} bei verschiedenen Temperaturen beobachtet. Dabei fand sich (wobei die Reihe für $19^{\circ},5$ aus Tab. VII entnommen worden ist):

Tabelle IX.

Einfluß der Temperatur auf die Längsnachwirkung des Kautschukfadens.

t	$19^{\circ},5$	$18^{\circ},7$	$9^{\circ},0$	$7^{\circ},6$
min	mm	mm	mm	mm
0,033				24
0,083				28
0,166		49		32
0,25	52,0	50,9		33,5
0,33	52,9	51,7	43	35,0
0,5	54,1	53,0	46,9	37,4
1	55,7	55,0	50,0	41,4
2	57,4	57,1	52,8	45,4
5	59,6		56,4	49,5
10	61,0		58,7	
20	62,5		61,1	
1440	75,9			

Hier spricht sich ein enormer Einfluß der Temperatur aus. In höherer Temperatur sind die anfänglichen Verlängerungen viel größer als in niedriger; die Differenzen nehmen aber mit wachsender Zeit ab. Man darf annehmen, daß sie schließlich verschwinden (da der durch einige Gramm gespannte Kautschukfaden jedenfalls keinen erheblichen Temperatur-Ausdehnungscoefficienten zeigt) und daß die Verlängerungen nach einem Tag in allen Reihen etwa 76^{mm} betragen würden.

Aehnliches wurde für die allmähliche Verkürzung nach einer plötzlichen Entlastung des Fadens beobachtet.

Vergleicht man nun mit der Gesamtverlängerung 76^{mm} Anfangszahl 24^{mm} der Reihe mit $7^{\circ},6$, so zeigt sich, daß bei dem Kautschuk in solcher Temperatur die Gesamtausdehnung zum bei weitem größten Theile als Nachwirkung vor sich geht. Man kann überschlagen, daß zur Zeit $t = 0,008^{\text{min}}$ ($\frac{1}{2}$ Sec.) die vorhandene Verlängerung etwa 14 bis 16^{mm} betragen hat. Also geht in der ersten halben Secunde nur etwa der 5. Theil der Gesamtausdehnung vor sich.

Hiernach dürfte man zweifelhaft werden, ob für den Kautschuk überhaupt eine Theilung der elastischen Formänderungen in plötzliche und nachwirkende statthaft ist.

Jedenfalls aber hat es unter solchen Verhältnissen gar keinen Sinn mehr, von einem Elasticitätsmodul schlechthin zu reden, denn derselbe wird, aus Schwingungen bestimmt, das mehrfache von der Zahl betragen, welche man durch dauernde Belastungen erhält.

Mit dem hier gefundenen großen Einfluß der Temperatur auf die Nachwirkung stimmen die Resultate von Exner¹⁾ überein, welche eine bedeutende Zunahme der Schallgeschwindigkeit im Kautschuk mit sinkender Temperatur ergeben: bei 60° etwa die Hälfte von derjenigen bei 0° .

Hingegen scheint mir der von Exner aus diesen Resultaten gezogene Schluß nicht ohne weiteres statthaft, daß

1) Wiener Sitz.-Ber. 1874, Jan. 22.

man nicht zur Erklärung der bekannten, auffälligen Contraction des belasteten Kautschuk durch Temperatursteigerung eine Zunahme des Elasticitätsmodul mit der Temperatur annehmen dürfe. Denn aus obiger Tabelle ergibt sich, daß man von der Schallgeschwindigkeit durchaus nicht auf den statischen Elasticitätsmodul, welcher doch hier in Betracht kommt, schliessen darf.

7. Beobachtungen in den ersten Secunden.

Gegen den Ausdruck $\Pi x = \frac{c}{t^\alpha}$ kann, wie ich selbst natürlich gleich bemerkt habe (CXIX, 360), eingewandt werden, daß er die Zeit Null nicht mit darstellt. Hierauf läßt sich zunächst antworten, daß dies auch nicht seine Aufgabe seyn kann, denn für die statische Nachwirkung kommt diese Zeit nicht mehr in Betracht. Man könnte natürlich unserer Zeit t eine Constante hinzufügen, um das Unendlichwerden für $t = 0$ zu verhindern, wodurch zugleich noch eine bessere Uebereinstimmung zu erzielen wäre; indessen ergeben die Beobachtungen, daß diese Constante von Null wenig verschieden ist, und aus den vorliegenden Beobachtungen läßt sich eine numerische Bestimmung nicht mit einiger Sicherheit ausführen.

Ferner wird aber der Einwand erheblich entkräftigt werden, wenn wir einmal fragen, von welcher Ordnung diese Zeit „Null“ ist, für welche die Formel mit den erfahrungsgemäß gefundenen Coëfficienten sinnlos große Zahlen liefert. Rechnen wir z. B. zurück bis zu dem Augenblick t , in welchem die Formel S. 359 für die allmähliche Ausdehnung durch 4^{er} den Werth $y = 0$ ergibt, so findet sich $t = 0^{\text{min}},000025$. Das ist ein Werth, welcher selbst nur ein kleiner Bruchtheil ist von der Schwingungsdauer eines unbelasteten Kautschukfadens von unserer Länge.

Stellt man die gleiche Frage für die früheren Versuche mit dem Silberdraht, etwa für den Fall, daß der Draht 1^{min} gedreht gewesen war, und berechnet, für welches t die damals gefundene Formel eine Nachwirkung gleich

der ganzen vorausgegangenen Torsion ergibt, so findet man (in mittlerer Temperatur) $t = 0^{\text{min}},00000002$, also eine noch viel kleinere Zeit.

Bei den Längs-Nachwirkungen nach kürzeren Drehungen (§. 4) kommt man freilich durch das größere α auf größere t , allein selbst im ungünstigsten Falle doch nur auf $0^{\text{min}},0025$, sowie an dem Glasfaden nach Boltzmann (§. 3) auf $0^{\text{min}},0006$.

Es ist also der erwähnte Einwand praktisch hinfällig.

Um nun aber zu prüfen, wenn auch nur angenähert, ob für die allerersten, der Beobachtung zugänglichen Zeiten wirklich eine Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung stattfindet oder nicht, habe ich die Ablesungen am Kautschukfaden schon 1^{sec} nach vermehrter Belastung anzustellen gesucht. Ich legte zur Zeit 0 rasch aber vorsichtig ein Gewicht von 2^{gr} auf, welches, um den Stofs zu verringern, aus vier durch Fädchen verbundenen Gewichtchen zusammengesetzt war, die sich nach einander auf die Wagschale aufsetzten. Der Faden senkte sich dann, ohne daß beträchtliche Längsschwingungen eintraten, allmählich, und es gelang, schon 1^{sec} nach der Belastung eine Ablesung zu erhalten. Natürlich wurde mit bloßem Auge abgelesen. Indem aber der Versuch oft wiederholt wurde, erhielt man auch hier durch Mittelnehmen leidlich genaue Resultate. Nach kurzer Zeit wurde stets entlastet und zum nächsten Versuch gewartet, bis der Faden für einige Minuten merklich constant blieb.

Ich las bei der einen Hälfte der Versuche auf 1, 4, 7 . . , bei der andern Hälfte auf 2, 5, 8 . . Sekunden ab, so daß ein vollständiges Bild des ganzen Vorganges erhalten wird. (Tab. X.)

Berechnet man nun für die Beobachtungszeiten t nach der Formel (S. 359) $y = 176,4 - \frac{55,5}{t^0,109}$, so findet man, daß die gewonnenen Zahlen mit 0,495 multiplicirt die hier beob-

achteten so vollkommen darstellen, als die Genauigkeit der Beobachtung es nur erwarten läßt¹⁾.

Tabelle X.

Beobachtungen des Kautschukfadens in den ersten Sekunden.

t		y	A
sec	min	mm	
1	= 0,017	44,9	-0,5
2	0,033	47,3	+0,2
4	0,067	50,2	+0,2
5	0,083	51,1	+0,2
7	0,117	52,5	+0,1
10	0,167	54,0	±
15	0,250	55,4	±
20	0,333	56,4	-0,1
30	0,5	57,7	±
40	0,667	58,6	±
60	1,0	59,8	±
80	1,33	60,5	+0,2

In unserem Falle kann man also nach der aus den späteren Zeiten entwickelten Formel mit naher Uebereinstimmung bis auf sehr frühe Zeiten zurückrechnen.

8. Nachwirkung nach Biegungen.

Die Biegung von Metall- oder Glasstäben lieferte keine Nachwirkung; welche genügend groß gewesen wäre, um sie, ohne feinere Messungsmittel, genau zu beobachten. Ein Holzstab gab viel beträchtlichere Nachwirkungen, am stärksten jedoch zeigte sie ein Stab aus *Hartkautschuk*, welcher zu den folgenden Beobachtungen diente.

Der Stab war 16^{mm} breit, 3^{mm} dick. Er wurde hochkant mit dem einen Ende in einen Schraubstock geklemmt; die freie Länge betrug 600^{mm}. Die Biegungen erfolgten also in einer horizontalen Ebene und wurden vom Gewicht des Stabes nicht beeinflusst.

1) Das Verhältniß 0,495 ist etwas größer als das früher gefundene 0,463. Diefs kann daher rühren, daß die Belastung vielleicht etwas mehr als 25^r betrug. Sie war aus Drahtstücken zusammengebunden und vielleicht nicht vollkommen abgeglichen worden. Da die Stückchen nicht mehr existiren, kann ich dies leider nicht entscheiden.

Nachwirkung nach einer 18 Stunden dauernden Krümmung des Stabes zu einem Krümmungshalbmesser von 300^{mm}.

Diese Krümmung war über den ganzen Stab ziemlich gleichmäÙig vertheilt gewesen. Die Nachwirkung äufserte sich in einer zurückbleibenden, anfangs sehr beträchtlichen Krümmung, welche zuerst rasch, dann langsam abnahm und während einer ganzen Woche verfolgt werden konnte. Alsdann war der Stab wieder fast vollständig gestreckt. Die Krümmungshalbmesser waren beiläufig nach

5 ^{sec}	1 ^{min}	10 ^{min}	1 ^h	10 ^h	1 ^t	2 ^t	4 ^t	6 ^t
1,4	1,6	2,0	2,7	5,8	8,6	12,5	29	50 ^{met} .

Zur Beobachtung der Krümmung war unterhalb des freien Endes des Stabes ein Mm.-Maafsstab befestigt; auf demselben las man die Abweichungen x dieses freien Endes von der Einstellung bei gestreckter Gestalt ab. Zur Vermeidung der Parallaxe diente ein dem Maafsstab untergelegter Spiegel.

Die folgende Tabelle enthält diese x in Millimetern, aber bereits in der Weise corrigirt, daß sie dem augenblicklichen Krümmungshalbmesser ϱ umgekehrt proportional sind, also ein Maafß für die Krümmung selbst darstellen. Man erhält ϱ in Metern:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{x}{180}. \quad 1)$$

- 1) Wenn ein an einem Ende eingeklemmter Stab von der Länge l zu einem constanten Krümmungshalbmesser ϱ gebogen ist, und wenn man dabei den Abstand des freien Endes vom Klemmpunkte durch r , von der geraden Richtung des Stabes durch x bezeichnet, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{2x}{r^2}$. Für mäÙige Werthe von x wird aber $\frac{l^2}{r^2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2}$, also

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2}{l^2} x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Es ist also die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ der Ablenkung x , nach Anbringung einer Correction, einfach proportional. Die x der Tabelle sind bereits in dieser Weise corrigirt.

Es zeigte sich nun, daß auch hier die Krümmung x sehr nahe der Formel I (S. 338) verschwindet. Setzt man

$$C = 136,7 \quad a = 0,1979 \quad m = 0,312,$$

so bedeutet Δ (Tab. XI) den Ueberschuß der Rechnung über die Beobachtung.

Tabelle XI.

Nachwirkung nach einer 18stündigen Biegung eines Stabes aus Hartkautschuk.

t	x	Δ	t	x	Δ
min			min		
0,083	126,5	-1,7	20	82,5	+0,1
0,2	122,0	-0,7	30	76,7	+0,5
0,33 ..	119,0	-0,1	50	70,0	-0,1
0,5	116,5	=	80	64,0	-1,2
0,66 ..	114,5	+0,3	350	37,9	+2,1
1	112,0	+0,1	633	30,3	+0,8
1,5	108,5	+0,7	1310	22,2	-0,9
2	106,6	+0,3	1745	18,5	-0,5
3	102,9	+0,5	2850	14,4	-1,6
5	98,3	+0,1	2970	12,4	=
7	94,6	+0,5	4300	8,4	+0,9
10	90,9	+0,2	5700	6,3	+0,9
15	86,1	+0,1	8530	3,6	+1,3

Die Anfangstemperatur war $17^{\circ},8$; sie stieg in den ersten 30^{min} auf $18^{\circ},1$. Später schwankte sie zwischen $16,2$ und $19^{\circ},6$. Dabei zeigte sich deutlich eine Einwirkung der Temperatur in gleichem Sinne, wie früher an dem Silberdraht gefunden wurde. Eine Temperatur-Erhöhung beschleunigte jedesmal die Rückkehr zur gestreckten Gestalt.

Am deutlichsten sieht man dies an den Beobachtungen für 2850 und 2970^{min} . In der Zwischenzeit war durch eine Unvorsicht der Stab etwa 10^{min} lang den Sonnenstrahlen ausgesetzt gewesen, wodurch alsbald ein Rückgang von etwa 1,5 Mm. erfolgte.

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist so gut, wie diese Einflüsse es erwarten lassen.

Nachwirkung nach gewöhnlichen Durchbiegungen.

Zum Schluß theile ich noch einige Nachwirkungen mit, welche an demselben Stabe aus Hartkautschuk beobachtet worden sind. Man hatte dem freien Ende des Stabes in gewöhnlicher Weise eine Durchbiegung von 150, 100 oder 50^{mm} ertheilt, sie während einer Minute bestehen lassen und dann den Stab in seine natürliche Lage zurückgeführt. Die x der folgenden Tabelle bedeuten die zur Zeit t dann vorhandenen Verticalabstände des freien Endes von der gestreckten Gestalt.

An der Reihe für die Durchbiegung 150^{mm} werde ich zeigen, daß sie sich durch

$$x = 29,92 \cdot e^{-2,578 \cdot t^{0,21}}$$

sehr genähert darstellen läßt.

Die anderen Reihen zeigen sich der genannten so gut wie genau proportional. Berechnet man

$$x_{100} = 0,703 \cdot x_{150} \quad x_{50} = 0,333 \cdot x_{150},$$

so bleiben nur die Unterschiede Δ . Die Verhältnisse 0,703 und 0,333 sind wie man sieht nahe gleich $\frac{100}{150}$ und $\frac{50}{150}$, d. h. den Verhältnissen der vorausgegangenen Durchbiegungen.

Die Temperatur hat hier einen ganz ähnlichen Einfluß wie auf die Torsion des Silberdrahtes: die Nachwirkung ist in niederer Temperatur geringer, wie man aus der vierten Reihe (Tab. XII) sieht. Diese Reihe, bei 10°, 0 beobachtet, läßt sich darstellen durch Multiplication der bei 16°, 4 erhaltenen Zahlen mit 0,623. Es ist also bei 10° die Nachwirkung nicht einmal $\frac{2}{3}$ von derjenigen bei 16°, 4.

Ähnlich verhalten sich Nachwirkungen nach Durchbiegungen von 100^{mm} in niederer Temperatur.

Jede Reihe ist das Mittel aus mehreren Beobachtungen, wesswegen die Ablenkungen auf Hundertel des Millimeters angegeben werden.

Tabelle XII.

Nachwirkung nach Durchbiegungen des Stabes aus Hartkautschuk
von 1^{min} Dauer.

Durchbiegung = 150 ^{mm}			100 ^{mm}		50 ^{mm}		150 ^{mm}	
Temperatur = 16°,4			17°,9		17°,8		10°,0	
t	x	Δ	x	Δ	x	Δ	x	Δ
min								
0,083 .	6,43	+0,05	4,70	-0,18	2,15	-0,01		
0,166 .	5,18	-0,08	3,53	+0,11	1,67	+0,06	3,40	-0,16
0,33 . .	3,83	+0,03	2,67	+0,02	1,29	-0,01	2,35	+0,04
0,66 . .	2,78	+0,03	1,97	-0,02	0,94	-0,01	1,80	-0,06
1	2,22	+0,05	1,60	-0,04	0,77	-0,03	1,35	+0,04
1,5	1,80	+0,01	1,22	+0,05	0,58	+0,02	1,12	≐
2	1,50	+0,02	1,03	+0,02	0,48	+0,02	0,95	-0,01
3	1,10	+0,06	0,77	≐	0,35	+0,02	0,80	-0,11
5	0,87	-0,06	0,58	+0,03	0,25	+0,04	0,47	+0,07
7	0,65	-0,03	0,45	+0,01	0,22	≐0	0,35	+0,06
10	0,55	-0,09	0,33	+0,06	0,15	+0,03	0,26	+0,08
15	0,30	+0,02	0,27	-0,06			0,20	-0,01

Die beobachtete Nachwirkung nach der Durchbiegung unterscheidet sich von den früher für Torsion und Ausdehnung gefundenen dadurch, daß für kleine Durchbiegungen nicht die einfachere Form II des Verlaufs auftritt. Zu beachten ist aber auch, daß die Durchbiegung eine verwickeltere Gestaltsänderung darstellt. Erstens sind die Längsfasern theilweise verkürzt, theilweise ausgedehnt, ferner aber waren bei den Biegungen dieses § wie bei jeder gewöhnlichen Durchbiegung ja auch die Krümmungen der einzelnen Stabtheile ungleich, nämlich von dem freien Ende mit Null anfangend und bis zum größten Werth an dem eingeklemmten Querschnitt wachsend. Es ist also die gewöhnliche Durchbiegung überhaupt zur Erforschung elementar einfacher Verhältnisse wenig geeignet.

9. Nachwirkung aufeinanderfolgender Deformationen von entgegengesetzter Richtung.

Allgemein hat die elastische Nachwirkung ihren Charakter dahin geäußert, daß eine ihr zugehörige Formänderung eines Körpers um so langsamer verschwindet,

je längere Zeit bereits seit der primären Gestaltsänderung verflossen ist.

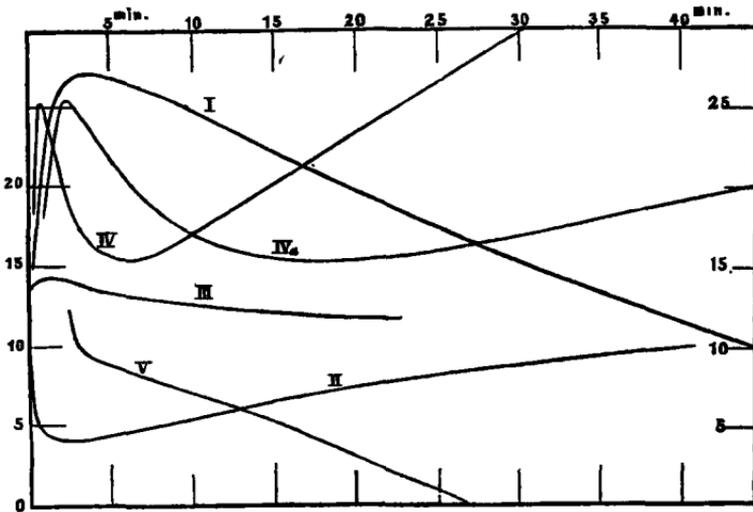
Falls nun verschiedene Nachwirkungen in einem Körper sich gewissermaßen übereinanderlagern, so erschien es nach dem Obigen denkbar, daß man einem Körper einen Zustand mittheilen kann, in welchem er von selbst aus einer Bewegungsrichtung in die entgegengesetzte übergeht. Wenn man z. B. einem elastischen Körper zuerst eine große oder lange dauernde Deformation mitgetheilt hatte und demnächst eine kleinere und kürzere von entgegengesetztem Vorzeichen, worauf man den Körper sich selbst überläßt, so wäre zu erwarten, daß anfangs die frischere Nachwirkung von der späteren Deformation überwiegt. Als die frischere aber wird sie rascher vergehen, und bei geeigneten Größenverhältnissen kann nach einiger Zeit die ältere Nachwirkung wieder das Uebergewicht erhalten. Die Bewegungsrichtung des Körpers würde demnach ihr Vorzeichen wechseln.

Diese Vermuthung erschien mir interessant genug, sie zu prüfen. Denn, abgesehen von der Merkwürdigkeit, welche ein elastischer Körper bietet, der sich temporär freiwillig von seiner Gleichgewichtsgestalt weiter entfernt, wünschte ich das hervorgehobene Characteristicum der Nachwirkung auf diese Weise schlagend zu bestätigen. Auch die Frage nach der Uebereinanderlagerung verschiedener Nachwirkungen verdient eine Prüfung.

Wie man aus dem Folgenden sehen wird, erfüllt sich in der That die obige Vermuthung in vollkommenster Weise, und zwar habe ich bei Torsion, Ausdehnung und Biegung Nachwirkungen bewirkt, die ihre Richtung wechselten.

Diese Beobachtungen ausführlich in Zahlen darzustellen würde nur dann einen Zweck haben, wenn man mit einem Material arbeitet, welches eine constante Gleichgewichtslage besitzt. Die unvermeidliche Ueberschreitung der Elasticitätsgränze macht bei dem Kautschuk die Einstellungen vor und nach der Deformation unvergleichbar. Ich

beschränke mich deswegen auf eine graphische Darstellung einiger von diesen sonderbaren Bewegungen.



Die Curve I bezieht sich auf die Torsion eines 300^{mm} langen Kautschukfadens von der früher gebrauchten Sorte. Er war oben fest aufgehängt und trug unten einen sehr leichten Zeiger über einer Kreistheilung. Zuerst war der Faden einen Tag lang um 1080° gedreht gewesen. Losgelassen hatte er eine sehr starke Nachwirkung gezeigt, von welcher in 10^{min} etwa 180° abgelaufen waren. Die anfängliche Geschwindigkeit von etwa 10° in 1^{sec} war nach und nach auf etwa $\frac{1}{36}$ ° gefunden. Nun drehte man 40^{sec} lang um 360° nach der anderen Seite. Die Bewegung, welche der Zeiger hiernach zeigte, wird durch die Curve I dargestellt. Als Ordinaten-Einheit gilt der Bogen-Grad.

Der Faden bewegte sich also zuerst rasch im Sinne der zweiten Nachwirkung, dann verlangsamte sich diese Bewegung und ging nach 3,5^{min} in die entgegengesetzte über, mit einem Wendepunkte nach abermals etwa 10^{min}.

Nr. II gibt die anfängliche Verlängerung und nach etwa 1,5^{min} darauf folgende Verkürzung des in § 4 bis 7 gebrauchten Kautschukfadens in Mm.; seine Belastung war

zunächst um 4 Gr. vermindert worden, nach 6^{min} hatte man den Faden 1^{min} lang um 40^{mm} verkürzt festgehalten und nun sich selbst überlassen. Die Temperatur war 6°,6.

Ebenso giebt Nr. III eine Nachwirkung des Kautschukstabes (§ 8), den man 27^{min} um 150^{mm} durchgebogen festgehalten hatte und demnächst nach 5^{min} während 1^{min} um 100^{mm} entgegengesetzt. Die Ordinaten-Einheit ist = $\frac{1}{4}$ ^{mm}.

Nr. IV (und IVa mit dreifacher Abscisse) zeigt endlich eine Bewegung, welche ihre Richtung zweimal wechselt. Der Kautschukfaden I war zunächst 19^{min} lang nach links um 180° gedreht gewesen. Nach 50^{min} betrug die anfangs bedeutende Geschwindigkeit nur noch etwa 1 Sc. Th. in 30^{sec}. Nun drehte man 3^{min} lang um 55° nach rechts und gleich darauf 5^{sec} lang um 180° nach links. Man sieht, wie hierauf zuerst (bis $\frac{3}{4}$ ^{min}) die Bewegung des Fadens der dritten Deformation entspricht. Daran schließt sich (etwa 5^{min} lang) eine Bewegung im Sinne der zweiten Drehung und dann macht allmählig die hartnäckige Nachwirkung von der ersten Drehung her ihr Recht geltend.

Diese Versuche wird Jeder leicht wiederholen können. Sehr geeignet für dieselben ist, wegen seiner colossalen Nachwirkung, auch ein Wachsstab (von einem Wachsstock abgeschnitten), den man biegt.

Selbstverständlich muß man die Verhältnisse der Dauer und Grösse der Deformationen geeignet auswählen, um die Umkehrbewegungen zu erhalten; sonst entstehen nur Curven mit Wendepunkten, so wie z. B. Nr. V eine Nachwirkung nach drei abwechselnd gerichteten Torsionen darstellt.

Ich kenne wenig so überraschende Vorgänge, wie diese freiwilligen Bewegungsänderungen eines leblosen Körpers. Wenn schon die ganze elastische Nachwirkung höchst merkwürdig erscheint und bis jetzt keine befriedigende physikalische Erklärung gefunden hat, so fordert dieses gleichzeitige Bestehen mehrerer Nachwirkungen in einem und demselben Körper unbedingt eine Abänderung der Vorstellungen, welche der gegenwärtigen Elasticitäts-

theorie zu Grunde liegen. Durch die freiwillige Umkehr der in einer Richtung stattfindenden Gestaltsänderung in die entgegengesetzte Richtung wird direct bewiesen, *dafs mit einer und derselben äufseren Gestalt verschiedene Anordnungen der Molecüle verbunden seyn können, und dafs es Kräfte der Elasticität giebt, welche die Gestalt eines Körpers zeitweilig von seiner Gleichgewichtslage entfernen können.*

Würzburg, Februar 1876.

II. *Methoden zur Bestimmung der Brechungs- exponenten von Flüssigkeiten und Glasplatten; von Eilhard Wiedemann.*

Bereits vor mehr als einem Jahr habe ich in den *Archives des sciences physiques et naturelles*¹⁾, eine vorläufige Notiz über einige neue Methoden zur Bestimmung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten und Glasplatten publicirt. Ich erlaube mir hier diese Methoden ausführlich mitzutheilen, umsomehr als die HH. Terquem und Trannin²⁾, wohl ohne jene Notiz zu kennen, ein halbes Jahr später die eine derselben von Neuem veröffentlicht haben.

Es seyen *AA* und *BB* (siehe umstehender Figur) zwei Glasplatten, die an den Rändern so aneinander gekittet sind, dafs sich zwischen ihnen eine von allen Seiten vollkommen begränzte planparallele Luftschicht befindet. Die beiden Glasplatten tauchen in eine Flüssigkeit.

Ist dann *QR* ein auf die Platte *AA* fallender Lichtstrahl; *RM*, *MN*, *NO*, *OP* sein Weg in *AA*, in der

1) *Arch. d. sc. phys. et nat.* 1874 Bd. LI, p. 340.

2) *Journ. de phys.* 1875 Bd. IV, p. 232; cf. auch diese Ann. Bd. 157, S. 302.