1875. ANNALEN № 10.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND CLVI.

I. *Ueber Reibung und Wärmeleitung verdünnter Gase;*

von A. Kundt und E. Warburg.

(Schluſs von Bd. 155, S. 550.)

II. Wärmeleitung.

§. 26.

Allgemeine Uebersicht der Versuche und Resultate.

Die Berechnung der Wärmeleitung aus der Gastheorie beruht bei Weitem nicht auf so sicherer Grundlage wie die Berechnung der Reibung. Die Theorie von Maxwell, nach welcher die Gasmolecüle sich abstossen mit einer Kraft umgekehrt proportional der 5. Potenz der Entfernung, liefert den Wärmeleitungscoëfficienten der Luft nach Boltzmann[1]) $\frac{3}{2}$mal so groſs als ihn Stefan[2]) experimentell gefunden. Die Ursache liegt nach Boltzmann in der Art, wie die intramoleculare Bewegung in Rechnung gezogen ist, welche bekanntlich in den Wärmeleitungscoëfficienten eingeht, und über die man noch wenig weiſs. Es scheint daher zur Zeit nicht zweckmäſsig, die Theorie der Wärmeleitung verdünnter Gase in derselben Weise ausführlich zu entwickeln, wie die der Reibung.

Wenn es indeſs feststeht, daſs — von der Wirkung der inneren Strahlung abgesehen — die Wärmeleitung besteht in Ueberführung kinetischer Energie der Agitationsbewegung durch diese Bewegung selbst, so sieht man

1) Berichte der Wien. Akad. LXVI, S. 58—59.
2) Berichte der Wien. Akad. LXV, S. 45—49.

leicht, dafs man betreffs der Wärmeleitung verdünnter Gase zu analogen Folgerungen geführt wird, wie wir sie im ersten Theil für die Reibung entwickelt haben.

Denken wir uns nämlich eine der Schwere entzogene Gasmasse zwischen zwei festen Wänden eingeschlossen, diesen aber nicht verschiedene Translationsgeschwindigkeiten, sondern verschiedene Temperaturen beigelegt, und betrachten den stationären Wärmeflufs von einer Wand zur anderen, so sieht man zunächst durch Ueberlegungen, wie sie für die Reibung angestellt wurden, dafs die Temperaturen einer festen Wand und der ihr anliegenden Gasschicht sich um einen endlichen Werth unterscheiden müssen. Die gewöhnliche Theorie der Wärmeleitung wird ohne merklichen Fehler anwendbar seyn, so lange der Abstand der Wände gröfser ist, als ein gewisses, näher zu bestimmendes Vielfache der mittleren Weglänge. Ist diese Gröfse überschritten, so verliert der Begriff des Wärmeleitungsindex seine Bedeutung und bei gleicher Temperaturdifferenz der Wände wird die übergeführte Wärmemenge auch aus anderen Gründen, als wegen des Temperatursprunges an den Wänden, mit abnehmender Dichte abnehmen. Man kann den Coëfficienten, von welchem dieser Sprung abhängt, experimentell bestimmen, wie den Gleitungscoëfficienten, indessen ist der dazu erforderliche Apparat nicht leicht in hinreichender Vollkommenheit bezüglich der luftdichten Verschlüsse herzustellen, und wir haben uns einen für die Versuche geeigneten Apparat noch nicht verschaffen können.

Wir haben uns daher auf diesem Gebiete vorläufig darauf beschränkt, zur Vervollständigung des über die Reibung Ermittelten die Wärmeleitung verdünnter Gase zu studiren durch Versuche, bei denen die genannten Verschlüsse leicht in grofser Vollkommenheit hergestellt werden können.

Wir beobachteten nämlich die Abkühlung von Quecksilberthermometern in Hüllen verschiedener Gestalt; Versuche ähnlicher Art wurden angestellt von Dulong und

Petit, de la Provostaye und Desains[1]), Jamin und Richard[2]) und Narr[3]).

Wir stellen die von uns erhaltenen Resultate unter folgenden Gesichtspunkten zusammen.

Im ersten Theil §. 27—29 untersuchen wir, ob und unter welchen Umständen Wärmeleitungscoëfficienten mittels der von uns benutzten Apparate bestimmt werden können. Es ergiebt sich, daſs dies möglich ist — sofern die Strahlung eliminirt werden kann — wenn die Dichte des Gases hinreichend klein ist, wobei der erforderliche Grad der Verdünnung von der Gestalt der Apparate abhängt.

Die Abkühlung eines Thermometers in den genannten Apparaten beruht nämlich erstens auf Strahlung, zweitens auf Wärmeleitung. Die Wirkung der letzteren wird aber im Allgemeinen verwickelt durch die Strömungen, welche sich in Folge der Schwerkraft bilden und durch welche eine die Wärmeleitung befördernde, nicht berechenbare Verschiebung und Verzerrung der isothermen Flächen eintritt. Wir zeigen nun, daſs diese Verschiebungen mit abnehmender Dichte geringer werden müssen; wird ihre Wirkung bei hinreichend kleiner Dichte unmerklich, so kann nach der Gastheorie bei weiterer Verdünnung, da der Wärmeleitungscoëfficient vom Druck unabhängig ist, die Abkühlungszeit des Thermometers sich nicht mehr ändern, so lange die mittlere Weglänge verschwindet gegen die linearen Dimensionen des Abkühlungsraumes. Dieses Verhalten haben wir beobachtet an drei verschiedenen Abkühlungsapparaten, die weiter unten beschrieben werden und die wir dort mit den Nummern I, II und III bezeichnen.

Apparat I (Kugelapparat von Geissler).

Luft	zwischen	30^{mm}	und	$0{,}5^{mm}$	Quecksilberdruck
Kohlensäure	„	$7{,}7^{mm}$	„	$1{,}5^{mm}$	„
Wasserstoff	„	154^{mm}	„	$8{,}8^{mm}$	„

1) Pogg. Ann. 68, S. 235.
2) *Compt. rend.* 1872, *tom.* LXXV, *p.* 105 u. 453.
3) Pogg. Ann. 142, S. 123. 1871

Apparat II (Kugelapparat mit eingeschmolzenem Thermometer).

Luft	zwischen	$9{,}8^{mm}$	und	$1{,}3^{mm}$	Quecksilberdruck
Kohlensäure	„	$9{,}5^{mm}$	„	$4{,}5^{mm}$	„

Apparat III (Cylinderapparat mit eingeschmolzenem Thermometer).

Luft	zwischen	154^{mm}	und	$1{,}3^{mm}$	Quecksilberdruck
Kohlensäure	„	150^{mm}	„	$1{,}3^{mm}$	„

Wir schliefsen daraus, dafs innerhalb vorstehender Druckdifferenzen in den bezüglichen Apparaten die Wirkung der Strömungen unmerklich war, und können daher, falls die Wirkung der Strahlung zu eliminiren ist, diese Versuche zur Bestimmung der Wärmeleitungscoëfficienten verwenden.

Diese Versuche beweisen zugleich die Unabhängigkeit des Wärmeleitungscoëfficienten vom Druck innerhalb der Gränzen 150^{mm} und circa 1^{mm} für Luft und Kohlensäure und 150 bis 9^{mm} für Wasserstoff. Es haben diese Resultate noch ein weiteres Interesse wegen ihrer Beziehung zu den Dulong-Petit'schen Versuchen über das Gesetz der Strahlung.

Bekanntlich haben Dulong und Petit ein Emissionsgesetz aufgestellt, das von de la Provostaye und Desains bestätigt ist und nach welchem der Wärmeverlust, den ein Körper von der Temperatur t in einer schwarzen Hülle von Nullgrad erfährt, gleich ist

$$m\,(a^t - 1)$$

wo m eine von der Natur des Körpers abhängige Constante und a für Centigrade $= 1{,}0077$ ist.

Dem experimentellen Beweise dieses Gesetzes liegt die Annahme zu Grunde, dafs der Wärmeverlust, den das Thermometer in den Vacuis der Dulong-Petit'schen Versuche erleidet, bis auf einen kleinen, als Correction auftretenden Bruchtheil von der Strahlung herrührt.

Man wird annehmen können, dafs Dulong und Petit bei ihren Strahlungsversuchen einen kleineren Druck als $0{,}5^{mm}$ bis 1^{mm} nicht erreicht haben. Aufserdem arbeiteten sie mit feuchter Luft. Wir werden daher zum Zweck einer Schätzung nach unseren Versuchen dem Gase in den Dulong-Petit'schen Abkühlungsräumen den Wärmeleitungscoëfficienten der Luft zuschreiben können.

Unter dieser Annahme läfst sich mit Hülfe der von Hrn. Lehnebach[1]) auf unsere Veranlassung angestellten Versuche das Verhältnifs der durch Leitung und Strahlung übergeführten Wärmemengen, bei einer Temperaturdifferenz von 100° von Thermometer und Hülle, für die Dulong-Petit'schen Vacua berechnen. Befindet sich nämlich eine Kugel vom Radius r_1 und der Temperatur t in einer concentrischen kugelförmigen Hülle von der Temperatur 0° und dem Radius r_2, so ist das Verhältnifs der durch Strahlung und der durch Leitung entzogenen Wärmemenge

$$\delta = \frac{h_{t-0}}{k_0 \frac{r_2}{(r_2 - r_1) r_1} . f(t)}$$

wo nach Maxwell's Theorie

$$f(t) = t + \frac{1}{2a} t^2$$

und h_{t-0} die Differenz der bei t^0 und 0^0 per Flächeneinheit ausgestrahlten Wärmemenge bedeutet.

Nach Stefan ist $k_0 = 0{,}000055 \frac{\text{Grm.}}{\text{Cent. Sec.}}$ und nach den Versuchen des Hrn. Lehnebach

$$h_{100-0} = 0{,}015 \frac{\text{Grm. Centigrade}}{\text{Centim.}^2 \text{ Secunde}}$$

Bei Dulong und Petit war in der ersten Versuchsreihe

$$r_1 = 3 \text{ Ctm.}$$
$$r_2 = 15 \text{ Ctm.}$$

in der zweiten

$$r_1 = 1 \text{ Ctm.}$$
$$r_2 = 15 \text{ Ctm.}$$

Daraus ergiebt sich δ für die erste Versuchsreihe zu 5,54, für die zweite zu 2,16.

1) Pogg. Ann. Bd. 151, S. 96.

Hiernach kann man die Dulong-Petit'schen Versuche nicht als scharf beweisend für das auf sie gegründete Gesetz ansehen, dessen Bedeutung aufserdem nach den Verfassern selbst beeinträchtigt wird durch die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Quecksilbers von der Temperatur.

In einem zweiten Abschnitte §. 30 — 31 gehen wir zu höheren Graden der Verdünnung über. Wir finden es äufserst schwierig, die Störungen, welche der Wasserdampf veranlafst, zu beseitigen. Derselbe haftet mit grofser Hartnäckigkeit an den festen Wänden und geht erst bei Temperaturen weit über 100^0 theilweise von denselben fort. Aeufserst geringe Spuren von Wasserdampf, die manometrisch durchaus nicht nachzuweisen sind, werden mit Leichtigkeit erkannt durch die Aenderung der Wärmeleitung, welche sie bewirken, und das Thermometer erweist sich somit als ein feines Reagens auf die Beschaffenheit eines Vacuums.

Nachdem dies ermittelt war, haben wir uns die Aufgabe gestellt, ein wirkliches Vacuum in Bezug auf die Wärmeleitung in unseren Apparaten hervorzubringen. Es ist uns dies annähernd gelungen, indem wir die Apparate bei 200^0 trockneten. In den so getrockneten möglichst gut evacuirten Apparaten ergab sich die Abkühlungsgeschwindigkeit unabhängig von der Gestalt der Hülle, woraus folgt, dafs die Wärmeleitung auf einen kleinen Bruchtheil ihres Werthes reducirt ist.

Wir haben in erster Annäherung von dem noch übrigen Rest von Wärmeleitung abgesehen; unter dieser Voraussetzung konnten wir aus den letzterwähnten Versuchen einen angenäherten Werth des Emissionsvermögens des Glases erhalten, mittels dieses Werthes die Strahlung aus den früheren Versuchen eliminiren und so die Wärmeleitungscoëfficienten bestimmen (§. 38).

Wir finden den Wärmeleitungscoëfficienten des Wasserstoffs übereinstimmend mit Maxwell's Theorie und Stefan's Versuchen 7,1 mal so grofs als den der Luft; den der Kohlensäure 0,082 von dem des Wasserstoffs, also merklich kleiner als ihn Maxwell's Theorie ergiebt.

Die erhaltenen absoluten Werthe der Constanten können wir nicht als zuverlässig ansehen, da der Wasserwerth unseres Thermometers von uns nur angenähert ermittelt werden konnte. Wir führen an, daſs wir das Emissionsvermögen des Glases in Uebereinstimmung mit Hrn. Lehnebach (l. c.) und den Wärmeleitungscoëfficienten der Luft zu $\frac{48}{55}$ des von Hrn. Stefan (l. c.) erhaltenen Werthes finden.

§. 27.

Beschreibung der benutzten Apparate.

Von den Apparaten, deren wir uns für unsere Versuche bedienten, sind zwei, und zwar einer mit kugelförmiger und einer mit cylindrischer Hülle, in welche das Thermometer eingeschliffen war, in Fig. 2, Taf. IX gezeichnet.

a' ist die kugelförmige Hülle, der Radius der Kugel beträgt 2,972 Ctm. An dieselbe ist für die Einführung des Thermometers ein cylindrisches Rohr von 14 Ctm. Länge und 1,1 Ctm. Durchmesser angeschmolzen. In dieses Rohr ist bei *d* das Thermometer sehr gut eingeschliffen; der cylindrische Theil hat oben einen seitlichen Auslauf mit einem Glashahn *g* und dieser Auslauf steht durch die Leitung *ghikr* mit der Pumpe in Communication.

Ein cylindrischer Abkühlungsapparat ist in der Figur mit *bb'* bezeichnet. Die Hülle ist unten bei *b'* etwas aufgeblasen, damit das Thermometer bei kleinen Erschütterungen nicht gegen die Wandungen schlägt. Bei *b* paſst gleichfalls in einen Glasschliff das Thermometer *ce*, welches in der Zeichnung sich in dem Kugelapparat befindet. Dieses in beide Apparate passende Thermometer hat ein kugelförmiges Gefäſs von 0,461 Ctm. Radius. Der Stiel von *e* bis *d* ist nur 2^{mm} dick, die Theilung zwischen *d* und *c* geht von ungefähr 15^0 bis 75^0. Oben ist das Thermometerrohr zu einer kleinen Cüvette aufgeblasen, so daſs dasselbe, ohne zu springen, bis über 200° erwärmt werden kann.

Der Cylinderapparat hat gleichfalls einen seitlichen Auslauf mit Hahn *f* und steht durch *fhikr* mit der Pumpe in Verbindung. — Die Apparate mit dem in beide passenden Thermometer sind von Geiſsler in Bonn gefertigt.

Der Apparat *aa'* soll in der Folge als Apparat No. I oder Kugelapparat von Geiſsler bezeichnet werden.

Auſser den beschriebenen bedienten wir uns einer Anzahl ähnlicher Apparate, bei denen indeſs das Thermometer bei *d* in die äuſsere Hülle eingeschmolzen war. In diesen Apparaten hatte der hineinragende Stiel des Thermometers *de* einen Durchmesser von 5^{mm}. Ein solcher Apparat, dessen Kugel einen Durchmesser von 6,2 Ctm. hatte, ist bereits oben (S. 180) erwähnt und wird in der Folge als Apparat No. II (Kugelapparat mit eingeschmolzenem Thermometer) bezeichnet. Für einen Versuch wurde zunächst der betreffende Apparat mit dem gut getrockneten Gase (cf. oben §. 16) bis zu dem gewünschten Druck gefüllt und durch den Hahn von der Leitung abgesperrt. Alsdann wurde der Apparat so lange in kochendes Wasser getaucht, daſs das Quecksilber in der Cüvette oben hinreichend hoch stand, hierauf in schmelzendes Eis gebracht, und nun beobachtete man die Abkühlungszeit des Thermometers zwischen 60° und 20° von 5 zu 5° nach einer Secundenuhr.

§. 28.

Empirisches Gesetz der Abkühlungsversuche.

Wir haben gefunden, daſs sich die Versuche befriedigend darstellen lassen durch die Annahme

$$dt = - d\vartheta\,(\alpha t + \beta t^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo t die Temperatur, ϑ die Zeit, α und β für jeden Versuch Constanten sind.

Es folgt hieraus wenn für $\vartheta = 0$, $t = t_0$ ist

$$\vartheta \log e = \frac{1}{\alpha} \log \left\{ \frac{1 + \frac{\beta}{\alpha} t}{1 + \frac{\beta}{\alpha} t_0} \cdot \frac{t_0}{t} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ist $\frac{\beta}{\alpha} t$ und $\frac{\beta}{\alpha} t_0$ gegen 1 zu vernachlässigen, so erhält man das Newton'sche Abkühlungsgesetz. Bei den mit Wasserstoff angestellten Versuchen fallen wegen der Kleinheit der Abkühlungszeiten die Abweichungen von diesem Gesetz innerhalb der Fehlergränzen; daher ist für die Darstellung *dieser* Versuche das genannte Gesetz beibehalten worden.

Wir lassen jetzt die vollständige Berechnung einer Reihe von Versuchen folgen, welche hernach discutirt werden sollen.

Die Versuche wurden angestellt mit dem oben beschriebenen und in der Figur gezeichneten Kugelapparat von Geifsler (No. I).

Atmosphärische Luft. $p = 19^{mm},5$.

$\alpha = 0,00366$.

$\frac{\beta}{\alpha} = 0,0025$.

$\vartheta = 629,7 \log \left(\frac{408 + t}{t}\right)$.

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59,3	0	—	—
54,3	21″	21,1	+0,1
49,4	44,5	44,1	—0,4
44,4	70	70,3	—0,3
39,5	100	99,3	—0,7
34,6	132	132,5	+0,5
29,7	172	171,2	—0,8
24,7	219	218,5	—0,5
19,6	277	278,5	+1,5

Bemerkung. Auch bei 30^{mm} Druck wurde die ganze Abkühlungszeit ($59^{\circ},3$ bis $19^{\circ},6$) zu 277″ gefunden; bei 50^{mm} hingegen merklich kleiner.

Atmosphärische Luft. Druck $p = 9^{mm}$.

$$\alpha = 0{,}00376.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}0017.$$

$$\vartheta = 612{,}17 \log\left(0{,}0932 \frac{577 + t}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59°,3	—	—	—
54,3	21″	21,4	+0,4
49,4	44,5	44,4	—0,1
44,4	70	70,7	+0,7
39,5	100	99,7	—0,3
34,6	133	132,8	—0,2
29,7	171,5	171,3	—0,2
24,7	219	218,2	—0,8
19,6	277	277,4	+0,4

Atmosphärische Luft. Druck $p = 4^{mm}$.

$$\alpha = 0{,}00368.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}0022.$$

$$\vartheta = 626{,}1 \log\left(0{,}11691 \frac{448 + t}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59°,3	—	—	—
54,3	20″,5	21,5	+0,8
49,4	45	44,3	—0,7
44,4	70,5	70,6	+0,1
39,5	100	99,7	—0,3
34,6	133	132,9	—0,1
29,7	172,5	171,7	—0,8
24,7	219	219,0	0
19,6	278	278,9	+0,9

Atmosphärische Luft. Druck $p = 0^{mm},5$.

$$\alpha = 0,00363.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0,0023.$$

$$\vartheta = 634,5 \log\left(0,12 \frac{435 + t}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59°,3	—	—	—
54,3	21″,5	21,6	+0,1
49,4	45	44,8	+0,2
44,4	71	71,4	—0,4
39,5	101	100,7	+0,3
34,6	134	134,4	—0,4
29,7	174	173,6	+0,4
24,7	221,5	221,4	+0,1
19,6	280	282	—2,0

Kohlensäure. Druck $p = 7^{mm},7$.

$$\alpha = 0,00281.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0,0036.$$

$$\vartheta = 820,27 \log\left(0,1748 \frac{280 + t}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59°,3	—	—	—
54,3	26″	26,2	—0,2
49,4	55	54,6	+0,4
44,4	87	87,1	—0,1
39,5	124	123,4	+0,6
34,6	165	165,1	—0,1
29,7	214	213,9	+0,1
24,7	274	273,7	+0,3
19,6	349	350,1	—1,1

Kohlensäure. Druck $p = 1^{mm},5$.

$$\alpha = 0{,}00282.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}0033.$$

$$\vartheta = 815{,}5 \log\left(0{,}16189 \frac{307 + t}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59°,3	—	—	—
54,3	26″	26″,3	—0,3
49,4	55	55	—0
44,4	87	87,8	—0,8
39,5	124	124,2	—0,2
34,6	167	166,2	+0,8
29,7	216	215,1	+0,9
24,7	276	275,1	+0,9
19,6	350	351,5	—1,5

Wasserstoff. Druck $p = 154^{mm}$.

$$\alpha = 0{,}01671.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}000.$$

$$\vartheta = 137{,}8 \log\left(\frac{t_0}{t}\right) \quad t_0 = 59^0{,}3.$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59°,3	—	—	—
49,4	11″	10,9	+0,1
39,5	24	24,3	—0,3
29,7	42	41,4	+0,6
19,6	66	66,3	—0,3

Wasserstoff. Druck $p = 8^{mm},8$.

$$\alpha = 0{,}0163.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}000.$$

$$\vartheta = 141 \log\left(\frac{t_0}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59°,3	—	—	—
49,4	11″	11,2	—0,2
39,5	25	24,9	+0,1
29,7	42	42,3	—0,3
19,6	68	67,8	+0,2

Bestes Vacuum, welches erzielt werden konnte.

$$\alpha = 0{,}00159.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}0050.$$

$$\vartheta = 1449 \log \left(0{,}22984 \frac{198{,}7 + t}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59,3°	—	—	—
54,3	43″	43,1	−0,1
49,4	91	90,3	+0,7
44,4	144	144,7	−0,7
39,5	206	205,4	+0,6
34,6	276	275,7	+0,3
29,7	359	358,5	+0,5
24,7	461	460,5	+0,5
19,6	588	591,5	−3,5

Auf diese Versuche werden wir hernach die numerische Bestimmung der Leitungscoëfficienten der betreffenden Gase, sowie des absoluten Emissionsvermögens gründen. Wir fügen noch zwei andere Versuche bei, welche den Einfluſs der Strömungen zeigen.

Atmosphärische Luft. Druck $p = 760^{mm}$.

$$\alpha = 0{,}00512.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}0072.$$

$$\vartheta = 449{,}83 \log \left(0{,}30056 \frac{138 + t}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59,3°	—	—	—
54,3	12″	12,2	−0,2
49.4	26	25,6	+0,4
44,4	42	41,2	+0,8
39,5	59	58,7	+0,3
34,6	79	79,1	−0,1
29,7	104	103,3	+0,7
24,7	133	133,4	−0,4
19,6	171	172,4	−1,4

Kohlensäure. Druck 760^{mm}.

$$\alpha = 0{,}00463.$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}0068.$$

$$\vartheta = 496{,}95 \log\left(0{,}28885 \frac{146+t}{t}\right).$$

t	ϑ beob.	ϑ ber.	Diff.
59,3°	—	—	—
54,3	15″	14,5	+0,5
49,4	31	30,5	+0,5
44,4	49	49	0
39,5	70	69,8	+0,2
34,6	94	94	0
29,7	123	122,7	+0,3
24,7	158	158,3	−0,3
19,6	203	204,3	−1,3

Das Versuchsthermometer war mit einem Normalthermometer verglichen worden, und unter der Rubrik t ist in den Tabellen die so corrigirte Temperatur angegeben; t_0 ist gleich 59,3°. Die Reduction auf das Luftthermometer haben wir bei den benutzten niedrigen Temperaturen nicht für nöthig gehalten. Zur Berechnung der Constanten $\frac{\beta}{\alpha}$ und α wurde ein Verfahren benutzt ähnlich demjenigen, welches O. E. Meyer[1]) bei einer ähnlichen Gelegenheit angewendet hat.

Nur in der letzten Beobachtung jeder Versuchsreihe zeigt sich eine die Beobachtungsfehler übersteigende Abweichung zwischen Rechnung und Beobachtung, und zwar findet die Abweichung immer in demselben Sinne statt. Indeſs beträgt dieselbe nie 1 Proc. des beobachteten Werthes und wir haben es daher nicht für zweckmäſsig gehalten, sie durch Anwendung einer complicirteren Formel zu beseitigen.

Da $\frac{\beta}{\alpha}$ aus den Abweichungen vom Newton'schen Abkühlungsgesetz berechnet wird, so ist die Bestimmung die-

1) Pogg. Ann. 142, S. 513 ff.

ses Werthes keine sehr genaue. Nichtsdestoweniger lassen die Versuche deutlich erkennen, dafs das quadratische Glied um so kleiner wird, je mehr die Wirkung der reinen Leitung gegen die der Strahlung oder der Strömungen hervortritt. Dies zeigt folgende Zusammenstellung der erhaltenen Werthe des $\frac{\beta}{\alpha}$. Wir müssen dabei vorgreifend bemerken, dafs, wie hernach gezeigt wird, bei Atmosphärendruck die Wirkung der Strömungen bedeutend war, unmerklich hingegen, wenn die Gase in so verdünntem Zustande angewandt wurden, wie in den drei letzten Versuchsreihen nachfolgender Tabelle.

	Druck (mm)	$\frac{\beta}{\alpha}$
Atm. Luft	760	0,0072
Kohlensäure	760	0,0068
Bestes Vacuum	. . .	0,0050
Kohlensäure	7,7	0,0036
	1,5	0,0033
Atm. Luft	19,5	0,0025
	9	0,0017
	4,0	0,0022
	0,5	0,0023
Wasserstoff	154	0,0000
	8,8	0,0000

Wir erwähnen noch, dafs für den Fall, in welchem die Abkühlung merklich allein durch reine Wärmeleitung bewirkt wird, nach **Maxwell's** Theorie, in welcher der Wärmeleitungscoëfficient eines Gases sich der absoluten Temperatur proportional ergiebt

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{546} = 0{,}0018 \text{ ist.}$$

§. 29.

Theorie der Versuche.

Wir betrachten die dünnwandige, mit Quecksilber gefüllte Thermometerkugel nach **Dulong** und **Petit** wie einen Körper von durchweg gleicher Temperatur; wir sehen ab von der sehr kleinen Vermehrung der Masse durch das Herabsinken des Quecksilbers aus dem Stiel in die Kugel und nehmen weiter an, daſs die Temperatur dieses Körpers in jedem Moment an der Thermometerscala richtig abgelesen werde, sehen also ab von der sehr kleinen Correction wegen des herausragenden Quecksilberfadens. Wir sehen ferner ab von dem schwer genau zu bestimmenden Einfluſs des Stiels des Thermometers, dessen Wirkung sich bei dem für obige Versuche benutzten Apparat nicht merklich machte, während dieselbe bei anderen Apparaten mit dickerem Stiel allerdings aus dem Gesetz der Abkühlung erkannt wurde. Unter diesen Annahmen beruht die Abnahme der am Thermometer abgelesenen Temperatur

1) auf Wärmeleitung des Gases, modificirt durch Strömungen, welche sich in Folge der Schwere bilden;
2) auf Wärmestrahlung.

Nehmen wir zunächst an, der Apparat sey der Schwere entzogen, und die Temperaturen der inneren Kugel und äuſseren Hülle seyen constant bezüglich t^0 und 0^0. Die der inneren Kugel in dem Zeitelement dz durch Leitung entzogene Wärmemenge dW_1 ist dann

$$d W_1 = 4 \pi k_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} f(t) \, . \, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo k_0 der Werth der Wärmeleitungsconstante bei 0^0 und $f(t)$ abhängt von dem Gesetz, nach welchem sich k mit der Temperatur ändert. Ist k entsprechend Maxwell's Theorie proportional der absoluten Temperatur

$$a + t = 273 + t$$

so ist

$$f(t) = t + \frac{1}{2a} t^2.$$

Nehmen wir sodann an, die Temperatur der inneren Kugel ändere sich mit der Zeit. Verstehen wir jetzt unter t die Temperatur zur Zeit z, so wird im Allgemeinen dW_1 nicht genau durch (3) angegeben, weil die Lage der isothermen Flächen zur Zeit z nicht genau diejenige ist, welche dem thermometrischen Gleichgewicht für die Temperatur t des Thermometers entspricht. Durch eine einfache Betrachtung können wir aber zeigen, daſs für einen Theil unserer Versuche dennoch die Gleichung (3) benutzt werden darf. Sie wird unter den Umständen, welche wir betrachten, um so genauer richtig seyn, je gröſser k. Wir wollen daher, um einen Ueberschlag zu gewinnen, dem Gase durchweg den kleinsten in den Versuchen vorkommenden Werth von k nämlich k_0 beilegen; ferner setzen wir, was gleichfalls nahe in den Versuchen der Fall ist

$$t = t_0 e^{-\alpha z}.$$

Dann wird die Temperatur des Gases im Abstand r vom Mittelpunkt zur Zeit z angegeben durch die Gleichung

$$r t = t_0 r_1 e^{-\alpha z} \left\{ \frac{x}{c} - \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty (-1)^n \sin\left(\frac{n \pi x}{c}\right) \frac{\eta}{n(n^2 \eta - \alpha)} \right\},$$

$$\text{wo } a^2 = \frac{k}{\varrho C}, \quad r_2 - r_1 = c$$

$$\eta = \frac{a^2 \pi^2}{c^2}.$$

$$x = r_2 - r,$$

wo ϱ die Dichte und C die specifische Wärme bei constantem Volumen ist. Denn diese Gleichung genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial (r t)}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 (r t)}{\partial r^2}$$

und den Bedingungen

$$\text{für } r = r_1 \qquad t = t_1 = t_0 e^{-\alpha z}$$

$$\text{für } r = r_2 \qquad t = 0.$$

Für welches System auch gesetzt werden kann:

$$r t = u$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \begin{cases} x = c \\ u = t_0 r_1 e^{-\alpha z} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

Der Anfangszustand braucht nicht berücksichtigt zu werden, wenn, wie es in den Versuchen der Fall war, für jeden vorkommenden Werth von z, $e^{-\eta z}$ gegen $e^{-\alpha z}$ zu vernachlässigen war.

Aus der Thermometerkugel tritt in der Zeit dz aus die Wärmemenge

$$-k\frac{dt}{dr}_{r=r_1}.4r_1^2\pi.dz = 4\pi k\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}\left\{1-2.\frac{r_1}{r_2}\delta\right\}dz$$

wo, wie sich leicht zeigen läſst

$$\delta < 1{,}64\frac{\psi}{1-\psi}\,;\; \psi = \frac{\alpha}{\eta}.$$

Setzen wir nun nach Stefan für 760^{mm} Druck für Luft $a^2 = 0{,}25\ \frac{\text{cent.}}{\text{sec.}}$, so hat man mit Benutzung der später mitzutheilenden Resultate in runder Zahl:

		a^2
für	H	1,8
„	Luft	0,25
„	CO_2	0,15.

Ist der Wärmeleitungscoëfficient unabhängig vom Druck, so ist a^2 umgekehrt proportional dem Druck.

Es war $c = r_2 - r_1 = 2{,}51$ Ctm.

Hieraus findet man, wenn aus den betreffenden a die η berechnet werden für

Wasserstoff	bei	154^{mm}	bis	$8{,}8^{mm}$	Druck	η zu	14	bis	250
Luft	„	195^{mm}	„	$0{,}5^{mm}$	„	„	15	„	590
Kohlensäure	„	$7{,}7^{mm}$	„	$1{,}6^{mm}$	„	„	23	„	110.

Gefunden wurden die α bei diesen Drucken:

	α
Wasserstoff .	0,017
Luft . . .	0,0037
Kohlensäure .	0,0028.

Berücksichtigt man, daſs $\frac{r_1}{r_2} = 0{,}155$ war, so findet man mittels der gegebenen Zahlen leicht, daſs $\frac{2\delta r_1}{r_2}$ bei diesen Versuchen gegen 1 zu vernachlässigen ist und daſs daher auch in dem zuletzt betrachteten Falle $d W_1$ richtig durch Gl. (3) angegeben wird.

Wir wollen jetzt endlich auch die Voraussetzung, dafs das Gas der Schwere entzogen sey, fallen lassen. Durch die Strömungen, welche sich jetzt in Folge der im Gase vorhandenen Temperaturdifferenzen und der Schwerkraft bilden, tritt eine Verschiebung und Verzerrung der isothermen Flächen ein, und hierdurch wird der Wärmeflufs am Thermometer modificirt.

Verstehen wir nun unter Θ die kleinste Zeit, nach Ablauf deren durch die Strömungen eine solche Verschiebung der isothermen Flächen eintreten würde, dafs durch diese Verschiebung die dem Thermometer entzogene Wärmemenge eine merkliche Aenderung erlitte.

Die Zeit τ sey weiter folgendermafsen definirt. Denken wir uns den Apparat, nachdem derselbe durchweg auf die Temperatur t_1 gebracht ist, plötzlich in Eis getaucht, so dafs die Temperatur der Hülle plötzlich auf 0^0 erniedrigt wird, das Thermometer werde fortwährend durch irgend eine Ursache auf der Temperatur t_1 gehalten. τ sey nun die Zeit, nach Ablauf deren der der stationären Temperaturvertheilung entsprechende Differentialquotient $\frac{dt}{dr}$, dem die entführte Wärmemenge proportional ist, sich an der Kugel bis auf den Bruchtheil γ herstellt. Ist nun $\frac{\tau}{\Theta}$ unendlich klein, so können die Strömungen die Wirkung der Wärmeleitung nicht modificiren. Es ist daher für diese Versuche von Interesse, die Zeit τ zu berechnen. Legen wir wieder dem Gas durchweg den Leitungscoëfficienten bei 0^0 bei, so können wir τ finden. In dem gedachten Experiment wäre die Temperatur t mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen gegeben durch

$$t = \frac{t_1}{r}\left\{\frac{r_1 x}{c} + \frac{2r_1}{\pi}\sum_1^\infty \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)\frac{e^{-n^2\eta z}}{n}\right\}$$

woraus

$$\frac{dt}{dx}_c = -\frac{dt}{dr}_{r_1} = \frac{t_1 r_2}{r_1(r_2 - r_1)} \{ 1 - 2\delta \},$$

wo

$$\delta = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n^2 \eta z}$$

$$\delta < e^{-\eta z}$$

oder in den zu betrachtenden Fällen sehr nahe

$$\delta = e^{-\eta z}.$$

Setzen wir nun etwa $2\delta = \gamma = \frac{1}{110}$, so finden wir mit Benutzung der angegebenen Werthe von η für $z\ (= \tau)$:

	Druck	η	
Wasserstoff	154,5^{mm} bis 8,8^{mm}	14 bis 250	0″,4 bis 0″,02
Luft	19,5^{mm} bis 0,5^{mm}	15 bis 590	0″,4 bis 0″,009
Kohlensäure	7,7^{mm} bis 1,6^{mm}	23 bis 110	0″,2 bis 0″,05

Um jetzt zu entscheiden, unter welchen Umständen $\frac{\tau}{\Theta}$ hinreichend klein sey, müssen wir das Experiment zu Rathe ziehen, da wir über Θ Nichts wissen. Einen Anhalt zur Beurtheilung dieser Frage bietet die Aenderung der Abkühlungsgeschwindigkeit mit dem Druck. Da nämlich τ dem Druck umgekehrt proportional ist, während für eine Verkleinerung des Θ mit abnehmendem Druck kein Grund vorliegt, da endlich k nach der Gastheorie vom Druck unabhängig ist, so kann man schliefsen, dafs, wenn mit abnehmendem Druck keine Aenderung der Abkühlungsgeschwindigkeit mehr eintritt, dann die Strömungen keinen merklichen Einflufs mehr ausüben. Die folgenden Tabellen zeigen, innerhalb welcher Gränzen der Drucke dies für drei verschiedene Apparate der Fall ist.

Von diesen Apparaten ist No. I derjenige, mit welchem die oben in den Tabellen (S. 185 ff.) mitgetheilten Versuche ausgeführt wurden. No. II ist diesem nahe gleich an Gröfse und Gestalt, nur ist das Thermometer nicht mit Glasschliff in die äufsere kugelförmige Hülle eingesetzt, sondern eingeschmolzen [1]). In Apparat No. III ist Hülle und Thermometergefäfs cylindrisch.

ϑ bedeutet hier die Zeitdauer der Abkühlung von 60° Cels. bis 20°.

Apparat No. I. Kugelapparat von Geifsler.

Kohlensäure. Druck	ϑ	Luft. Druck	ϑ	Wasserstoff. Druck	ϑ
760mm	203″	760mm	171″	760mm	59″,5
155	274	148	234	154	66
7,7	349	19,5	277	8,8	68
1,50	350	9	277	3	72
0,5	355	4	278		
		0,5	280		

Apparat No. II.

Kohlensäure. Druck	ϑ	Luft. Druck	ϑ	Wasserstoff. Druck	ϑ
760mm	277″	760mm	225″	760mm	81″,5
150	380	154	313	150	90,5
9,5	460,5	9,8	363	9,2	92
4,5	459	4	369	5	95
1,26	470	1,3	364	0,9	105,5

Apparat No. III.

Kohlensäure. Druck	ϑ	Luft. Druck	ϑ	Wasserstoff. Druck	ϑ
760mm	261″	760mm	219″	760mm	46″
150	300	154	223	150	45,5
9,5	306,5	9,8	225	8,3	49,5
4,5	295	4	226	4,4	51
1,26	302	1,26	225	1,26	66,5

1) cf. S. 184.

Wir schliefsen aus diesen Tabellen gemäfs den angestellten Ueberlegungen, dafs innerhalb der Druckgränzen, welche durch wagerechte Striche markirt sind, die Strömungen einen merklichen Einflufs nicht gehabt haben. Diese Druckgränzen sind natürlich abhängig von der geometrischen Gestalt der Apparate; so ist z. B. die obere Gränze bei dem cylindrischen Apparat III eine viel höhere, als bei I und II.

Es folgt aus diesem Ergebnifs, dafs diese Versuche zur Bestimmung der Wärmeleitungsindices benutzt werden können, falls man die Strahlung zu eliminiren im Stande ist.

Zugleich sind die in Rede stehenden Versuche zu betrachten als Beweise für die Unabhängigkeit des Wärmeleitungscoëfficienten vom Druck. (Bei der Kohlensäure z. B. zwischen 150^{mm} und $0{,}5^{mm}$.)

Wir bemerken hier, dafs ähnliche Versuche schon angestellt wurden von de la Provostaye und Desains. Die graphische Darstellung unserer Resultate liefert ähnliche Curven, wie sie von den genannten Physikern gezeichnet sind (cf. Pogg. Ann. l. c.).

§. 30.

Einflufs des Wasserdampfes auf die Wärmeleitung sehr verdünnter Gase (Vacua).

Wir gehen jetzt über zur Untersuchung der „Vacua“ in Hinsicht auf Wärmeleitung und beschreiben zunächst die Versuche, durch welche wir die störende Wirkung des Wasserdampfes aufgefunden und studirt haben. Wir brachten in einem der früher erwähnten cylindrischen Abkühlungsapparate mittels der Quecksilberluftpumpe ein Vacuum hervor und mafsen die Zeit, innerhalb deren das Thermometer von 60° bis 20° sank. Ueberliefsen wir nun den Apparat längere Zeit sich selbst und wiederholten den Versuch, so ergab sich jedesmal, dafs die Abkühlungsgeschwindigkeit gewachsen war. In den folgenden Tabellen ist ϑ die Abkühlungszeit von 60° auf 20° C.

Luftvacuum.

Zeit der Beobachtung.	ϑ.	Differenz.
0	300″	—
gleich darauf	295″	5″
12 Stunden später	289″	11″

Luftvacuum.

0	351″	—
12 Stunden später	307″,5	43″,5

Wasserstoffvacuum.

0	340″,5	—
gleich darauf	331″,0	9″,5
12 Stunden später	312″,0	28″,5.

Wir bemerken, dafs die obigen Vacua, wie alle anderen dieses Paragraphen, ohne Benutzung des Hahnes H_2 der Pumpe erhalten wurden.

Aus diesen Tabellen ist ersichtlich:

1. dafs, wenn man einen Raum, der mit einem Gase gefüllt ist, sorgfältig trocknet und mit einer Quecksilberluftpumpe auspumpt, man Vacua erhält, die sich in Bezug auf Abkühlungsgeschwindigkeit sehr verschieden verhalten (cf. oben 300″, 351″, 340″,5).
2. dafs die Beschaffenheit und Zusammensetzung der in diesen Vacuis noch vorhandenen gasförmigen Körper sich mit der Zeit ändert.

Nachdem wir diese Facta constatirt hatten, untersuchten wir, ob man constante Abkühlungszeiten erhält bei *kleinen* aber *genau reproducirbaren* Drucken, und ob sich bei solchen kleinen Drucken die Beschaffenheit des Gases in Bezug auf die Wärmeleitung mit der Zeit merklich ändert.

Zu den folgenden Versuchen dienten zwei Abkühlungsapparate mit cylindrischer Hülle mit eingeschmolzenen Thermometern; die Apparate waren miteinander verbunden, konnten mithin zusammen ausgepumpt und gefüllt und dann je durch einen Glashahn abgesperrt werden.

Luft.

	Druck.	ϑ Apparat *A*.	ϑ Apparat *B*.
	$7{,}12^{mm}$	225″	—
neue Füllung	$7{,}12^{mm}$	226″,5	—
	$0{,}8^{mm}$	235″,5	217″
neue Füllung	$0{,}8^{mm}$	234″,5	216″,5
neue Füllung	$0{,}8^{mm}$	236″,5	217″.

Die Versuche lehren, daſs, wenn in die getrockneten Apparate trockene Luft von $0{,}8^{mm}$ Druck eingelassen wird, dieselbe in Bezug auf Wärmeleitung stets gleiche Beschaffenheit zeigt.

Dies ist schon nicht mehr der Fall für einen Druck von $0{,}1^{mm}$.

Wir fanden z. B.:

	Druck.	ϑ Apparat *A*.	ϑ Apparat *B*.
	$0{,}1^{mm}$	281″,5	259″
neue Füllung	$0{,}1^{mm}$	271″	250″.

Die Drucke wurden genommen in der früher (§. 15) beschriebenen Weise durch die an der Pumpe angebrachte Millimeterscale.

Wir constatirten ferner, daſs die mit der Zeit eintretenden Veränderungen der Gase verschwinden, wenn die. Drucke hinreichend groſs sind. So ergab sich z. B die Abkühlungsgeschwindigkeit constant während 12 Stunden in Wasserstoff von 2^{mm} Druck. Wir fanden mit einem Apparat:

Wasserstoff.

	ϑ.
23. October Abends	122″
24. October Morgens	121″.

Die Veränderlichkeit der Vacua mit der Zeit schien erklärt werden zu können durch die Annahme, daſs Wasser, welches an Glaswänden bekanntlich sehr hartnäckig haftet, mit der Zeit langsam verdampft und so die Wärmeleitung des sehr dünnen Gases vermehrt.

Es ist uns gelungen, dies experimentell zu beweisen, indem wir jene Ablösung des Wassers, die sich mit der Zeit langsam von selbst herstellt, künstlich durch Glühen einzelner Stellen der Glaswände beschleunigten.

Der Apparat *B* (S. 200) wurde evacuirt und darauf durch Abschmelzen von der Pumpe getrennt. Wir fanden:

Zeit der Beobachtung	ϑ
26. Mai	269
gleich darauf	268
27. Mai	267.

Jetzt wurde der Apparat in der Nähe der abgeschmolzenen Spitze, wo er beim Abschmelzen nicht rothglühend geworden war, bis zur Rothgluth erhitzt. Es ergab sich

$$\vartheta = 255'',5.$$

Der Apparat *A* (S. 200) wurde durch einen Glashahn von der Pumpe abgesperrt und gab:

Zeit der Beobachtung	ϑ
26. Mai	299″
27. Mai	282″,5
gleich darauf	282″
an einer Stelle zur Rothgluth erhitzt	274″,5
an einer zweiten geglüht	264″,5
28. Mai, Morgens	273″
28. Mai, Nachmittags	272″.

In den mit dem letzten Apparate angestellten Versuchen hat sich somit Folgendes gezeigt: nachdem die Abkühlungszeit des sich selbst während eines Tages überlassenen Apparates um 17″ gesunken war, wurde sie durch Glühen zweier Stellen der Wandung um weitere 17″ herabgedrückt. Als darauf der Apparat sich selbst 12 Stunden lang überlassen ward, stieg sie wieder um 8″,5 und blieb fortan constant. Es scheint demnach, daſs das durch Glühen von den Wänden vertriebene Wasser sich zum Theil langsam wieder an dieselben hinbegeben hat. Es scheint sich ein von der Temperatur abhängiger Gleichgewichtszustand zwischen dem an der Wand condensirten und dem als Dampf vorhandenen Wasser herzustellen und dieser Gleichgewichtszustand bei dem letzten Versuch in dem Sinne überschritten zu seyn, daſs mehr Wasser von der Wand gelöst war, als der Zimmertemperatur entsprach.

Wir haben uns überzeugt, daſs Erhitzung auf 100° das Wasser nicht von den Wänden entfernt.

Um das Glühen bequemer ausführen zu können, wurden in anderen Versuchen an einen Apparat seitlich Röhren angeschmolzen und diese hernach an einzelnen Stellen durch einen Bunsen'schen Brenner geglüht.

Es ergab sich z. B.:

Luft.

Zeit der Beobachtung	ϑ
29. Mai	290″
gleich darauf	284″,5
geglüht	265″
30. Mai	265″.

Dieser Versuch und andere, die nicht speciell angeführt werden sollen, bestätigen die früheren Resultate.

Wir haben endlich noch einen Versuch gemacht zum Beweise dafür, daſs nur in *sehr dünnen* Gasen (Vacuis) und nicht in Gasen von einigen Millimetern Druck die Wärmeleitung merklich modificirt wird durch die Spuren von Dampf, die durch das Glühen von den Wänden abgelöst werden.

Luft.

Druck 5,2^{mm}.

	ϑ
Vor dem Glühen	212″,5
Nach dem Glühen	212″,5.

Die Quantitäten von Wasserdampf, um die es sich hier handelt, sind auſserordentlich klein und mit dem Manometer durchaus nicht nachzuweisen. *Die Abkühlungs-*

geschwindigkeit eines Thermometers, — welche mit grofser Schärfe gemessen werden kann — erweist sich somit als ein äufserst feines Reagens auf die Güte eines Vacuums und wir zweifeln, ob ein feineres gefunden werden kann.

§. 31.

Herstellung eines möglichst guten Vacuums.

Nachdem die obigen Thatsachen constatirt waren, haben wir uns die Aufgabe gestellt, von den in unseren Abkühlungsapparaten vorhandenen Spuren von Materie soviel herauszuschaffen, dafs die betreffenden Räume in Bezug auf die Wärmeleitung als wirkliche Vacua zu betrachten seyen. Zunächst gelang es uns mit Hülfe des Hahnes H_2 der Pumpe, die Abkühlungszeit zu vergröfsern. Die folgenden Versuche wurden mit dem oben S. 184 mit No. II (Kugelapparat) bezeichneten Apparat angestellt:

Atm. Luft.

Druck	ϑ
9,3^{mm}	363″
4,0^{mm}	369″
1,2^{mm}	364″
3 weitere Evacuirungen Vacuum I	444″
5 weitere Evacuirungen Vacuum II	555″
So lange gepumpt bis durch H_2 nichts mehr hindurchging . . Vacuum III	602″

Das Vacuum I ist etwa als ein solches zu betrachten, welches man ohne Benutzung von H_2 nur mit Benutzung des oberen Hahnes H der Pumpe erhält.

Es gelang uns nicht, durch weiteres Pumpen die Abkühlungszeit ϑ über 602″ hinaus (Vacuum III) zu steigern. Es gelang uns indefs, dieselbe erheblich zu vergröfsern dadurch, dafs wir den Apparat bei 200° im Oelbad trockneten, bei dieser Temperatur mittels des Hahnes H_2 so weit als möglich evacuirten und sodann bei derselben Temperatur mittels eines Glashahnes von der übrigen Leitung absperrten.

Es ergab sich so:

	Luft	Kohlensäure
Bestes Vacuum, bei 200° getrocknet, evacuirt und abgesperrt	$\vartheta = 712{,}5''$	708''.

Man sieht, dafs durch dieses Verfahren die Abkühlungszeit noch im Verhältnifs von 6 : 7 gesteigert ist.

Es handelte sich nunmehr darum, zu untersuchen, ob in dem so hergestellten Vacuum die Abkühlungszeit noch merklich durch Wärmeleitung der immerhin noch vorhandenen Spuren gasiger Materie beeinflufst werde.

Um dies zu entscheiden, benutzten wir den in der Fig. 2, Taf. IX gezeichneten, von Geifsler angefertigten Apparat. Das Thermometer wurde successive in die kugelförmige und in die cylindrische Hülle eingesetzt, es wurde jedesmal mit dem sehr gut getrockneten Apparat zunächst eine Reihe von Versuchen bei höheren Drucken gemacht, und endlich auf die oben beschriebene Weise durch Trocknen und Auspumpen bei 200° ein möglichst gutes Vacuum erzeugt.

Die folgende Tabelle zeigt die Resultate:

Wasserstoff.

	ϑ	
Druck	Thermometer in kugelförmiger Hülle	Thermometer in cylindrischer Hülle
760^{mm}	60''	25''
154^{mm}	66''	25''
$8{,}8^{mm}$	68''	30''
Bestes Vacuum	586''	578''

Luft.

760^{mm}	171″	114″
148^{mm}	234″	114″
$9{,}5^{mm}$	270″	116″
$0{,}5^{mm}$	280″	154″
Bestes Vacuum	576″	576″

Kohlensäure.

Bestes Vacuum	588″	578″.

Die Abkühlungszeit ϑ von 59,3° C. bis 19,6°, welche für mittlere Drucke beim Kugelapparat über doppelt so grofs ist, als beim Cylinderapparat, unterscheidet sich in den besten Vacuis um nicht 2 Proc. bei beiden Apparaten. Wir schliefsen daraus, dafs in diesen Vacuis die dem Thermometer entzogenen Wärmemengen bis auf wenige Procente von der Strahlung herrühren. Allerdings ergiebt die Gastheorie, dafs von gewissen Graden der Verdünnung an die übergeleitete Wärmemenge nur abhängig ist von der Zahl der Molecüle in der Raumeinheit und unabhängig von den Dimensionen des Gefäfses. Allein bei solchen Graden der Verdünnung ist die totale übergeführte Wärmemenge ein äufserst kleiner Bruchtheil von der bei normalen Drucken übergeführten.

Wir erwähnen noch, dafs die Veränderlichkeit mit der Zeit auch bei den besten Vacuis trotz aller Bemühungen nicht verschwand, und daher die Beobachtung immer möglichst schnell nach Herstellung des Vacuums ausgeführt wurde. Bei einem Versuch sank z. B. die Abkühlungszeit in mehreren Stunden von ihrem gröfsten Werth 576″ auf 466″.

Ob die Dämpfe, welche dies bewirken, sich von den Wänden loslösen, oder aus dem Fett, welches zum Schmieren der Glasschliffe nöthig ist, sich entwickeln, wissen wir nicht anzugeben.

Die Zusammensetzung der Spuren gasiger Materie, die in unsern besten Vacuis noch vorhanden ist, wird jeden-falls eine ziemlich complicirte seyn, es werden in den Vacuis enthalten seyn Spuren des ausgepumpten Gases, Quecksilberdampf, Wasserdampf, der sich von den Wänden oder von dem Fett ablöst, Zersetzungsproducte dieses Fettes selbst, und möglicher Weise gar Zersetzungsproducte des Glases.

§. 31.

Aenderung der Wärmeleitung in sehr dünnen Gasen mit der Dichte.

Nehmen wir dem Vorhergehenden gemäfs an, dafs die in dem besten Vacuum erhaltene Abkühlungszeit (ϑ) nicht merklich von der Wärmeleitung beeinflufst wird, so können wir die mit dem Kugelapparat (cf. S. 203) angestellten Versuche benutzen, um die stufenweise Abnahme der Wärmeleitung in den successiven Vacuis zu zeigen.

Wir wollen bei der folgenden Schätzung absehen von den Abweichungen der Abkühlungsgeschwindigkeit von dem Newton'schen Gesetz. Dann sind die beobachteten Werthe von ϑ umgekehrt proportional den früher durch α bezeichneten Coëfficienten, folglich, wenn wir durch α_0 den betreffenden Coëfficienten für die reine Strahlung bezeichnen, die Werthe von $\alpha - \alpha_0$ proportional den übergeleiteten Wärmemengen. Hiernach ergiebt sich aus den mitgetheilten Versuchen:

Apparat II.

Atmosphärische Luft.

Druck	α	$\alpha - \alpha_0$
$1^{mm},3$	0,00275	0,00135
3 weitere Evacuirungen. Vacuum I		
nach Mariotte's Gesetz und Evacuirungen gerechnet $p = 0^{mm},03$	0,00225	0,00085
5 weitere Evacuirungen. Vacuum II	0,00180	0,00040
Vacuum III	0,00166	0,00026
Bestes Vacuum	0,00140	0,0000

Man sieht, daſs entsprechend den für die Reibung erhaltenen Resultaten verhältniſsmäſsig groſse Quanta von Energie durch Spuren gasiger Materie in der Zeiteinheit transportirt werden können.

§. 32.

Berechnung der Wärmeleitungscoëfficienten und der Strahlungsconstante.

Wir wollen nun zum Schluſs die oben mitgetheilten Versuche benutzen, um aus ihnen die Wärmeleitungscoëfficienten der drei Gase Luft, H und CO_2 und die Strahlungsconstante des Glases zu berechnen.

Setzen wir den Wasserwerth der Thermometerkugel gleich $C_0 (1 + \varepsilon t)$, ferner die durch Strahlung per Flächeneinheit und Zeiteinheit entzogene Wärmemenge, da ein cubisches Glied in den Versuchen nicht erkennbar

$$\sigma_1 t + \sigma_2 t^2$$

und die durch Leitung entzogene

$$\lambda_1 t + \lambda_2 t^2,$$

so haben wir, wenn Strömungen ausgeschlossen sind

$$C_0 (1 + \varepsilon t)\, dt = - d\vartheta\, 4\pi r_1^2 [(\sigma_1 + \lambda_1) t + (\sigma_2 + \lambda_2) t^2].$$

Entwickeln wir unter der Annahme, daſs $\varepsilon t < 1$, so erhalten wir

$$dt = - d\vartheta \frac{4\pi r_1^2}{C_0} [(\sigma_1 + \lambda_1) t + P t^2].$$

Durch Vergleichung mit der empirischen Formel (S. 184) hat man

$$\alpha = \frac{4\pi r_1^2}{C_0} (\sigma_1 + \lambda_1),$$

wo

$$\lambda_1 = k_0 \frac{r_2}{(r_2 - r_1) r_1},$$

so lange das normale Gesetz besteht, daſs die Wärmeleitung vom Druck unabhängig ist.

Für unser bestes Vacuum setzen wir $\lambda_1 = 0$; die Abkühlung in diesem Vacuum führt mithin zur Bestimmung von σ_1, und damit können wir sodann λ_1 für die verschiedenen Gase aus den betreffenden Versuchen finden.

Für absolute Bestimmungen mufs C_0 genau bekannt seyn, wir besitzen indessen nur eine genäherte Schätzung dieses Werthes. Wir können daher den absoluten Werthen von k_0 und σ_1, wie sie sich aus diesen Versuchen ergeben, keinen grofsen Grad von Sicherheit beilegen. Für genaue Messungen wird man Eis als calorimetrische Substanz benutzen müssen.

Aus dem gemessenen Radius $r_1 = 0{,}4609$ Ctm. der Thermometerkugel und Regnault's Bestimmung der specifischen Wärme des Quecksilbers bei 0° schätzen wir:

$$C_0 = 0{,}15663 \text{ Grm. Centigrad.}$$

Wir haben nun für das beste Vacuum

$$\alpha = 0{,}00159,$$

mithin

$$\sigma_1 = \frac{\alpha C_0}{4\pi r_1^2} = 0{,}00093.$$

Um dieses Resultat mit dem von Hrn. Lehnebach auf anderem Wege gefundenen zu vergleichen, wollen wir das Dulong-Petit'sche Gesetz zu Grunde legen, nach welchem die totale, bei der Temperatur t ausgestrahlte Wärme $= ma^t$ ist, wo a in Bezug auf Centigrade $= 1{,}0077$. Die Constante m ergiebt sich dann aus unseren Versuchen in Bezug auf die Flächeneinheit für Glas $= 0{,}0121$ und daraus die von Hrn. Lehnebach durch

h_{100-0} bezeichnete Zahl

$$h_{100-0} = 0{,}014 \frac{\text{Grm. Centigrad.}}{\text{Centim.}^2 \text{ Secunde.}},$$

Hr. Lehnebach fand 0,015.

Wir beabsichtigen, die Versuche über diese Strahlungsconstante später wieder aufzunehmen und fortzusetzen.

Um weiter den Wärmeleitungscoëfficienten k_0 der Luft zu finden, benutzen wir die bei Drucken zwischen 20^{mm} und $0^{\text{mm}},5$ angestellten Versuche. Es ist gefunden worden:

p.	α.
$19{,}5^{\text{mm}}$	0,00366
9	376
4	368
0,5	363
Mittel	0,00368.

Rechnet man nach der angegebenen Formel und benutzt den gefundenen Werth von σ_1, so ergiebt sich

$$k_0 = 0{,}000048 \frac{\text{Grm.}}{\text{Cent. Secunden.}}$$

Stefan findet aus Versuchen bei Drucken von 1 bis $\frac{1}{2}$ Atmosphäre

$$k_0 = 0{,}000055.$$

Wegen der Unsicherheit in der Bestimmung von C_0 legen wir der Abweichung unserer Zahl von der Stefan'schen keine Bedeutung bei[1]).

Bezeichnen wir endlich durch α_0 den Werth der Gröfse α für das beste Vacuum, durch α_1 und α_2 denselben Werth für 2 Gase 1 und 2, so verhalten sich die Wärmeleitungscoëfficienten derselben wie:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0}.$$

Wir heben hervor, dafs diese Beziehung unabhängig ist von der Gestalt des Thermometers und der Hülle. Dies ergiebt sich aus der Bemerkung, dafs die Lage der isothermen Flächen in der zwischen Thermometer und Hülle befindlichen leitenden Substanz unabhängig ist von der Leitungsfähigkeit dieser, mag sie nun ein Metall oder ein Gas seyn. Vorausgesetzt ist dabei, dafs die Lage der iso-

1) In unserer Mittheilung an die Akademie in Berlin (Sitzung vom 25. Februar 1875) haben wir in Folge fehlerhafter Berechnung des α statt 0,000048 für k angegeben 0,000050, d. i. $\frac{10}{11}$ des von Hrn. Stefan erhaltenen Werthes. Wir bitten jenen Werth durch den hier gegebenen (0,000048) zu ersetzen. In Folge des erwähnten Fehlers in der Berechnung des α erleidet auch der Werth des relativen Wärmeleitungs-Coëfficienten der Luft bezogen auf den des Wasserstoffs als Einheit eine kleine Modification. Der Werth 0,137 des Auszuges ist auf der folgenden Seite durch den richtigen 0,140 ersetzt.

thermen Flächen in jedem Moment diejenige ist, welche dem thermometrischen Gleichgewicht für die augenblickliche Temperatur des Thermometers entspricht. Ueber die Bedingungen, unter welchen dies der Fall ist, vergl. man S. 193.

Bei der Berechnung benutzen wir die folgenden Werthe:

		α	
Vacuum		0,00159	
Kohlensäure	7,7mm	0,00284	0,002815
	1,6mm	0,00282	
Luft . . .	19,5mm	0,00366	0,00368
	9,0mm	0,00376	
	4,0mm	0,00368	
	0,5mm	0,00363	
Wasserstoff	15,4mm	0,0167	0,0165.
	8,8mm	0,0163	

Es ergeben sich sodann mittels der Werthe α der vorstehenden Tabelle die relativen Wärmeleitungsindices folgendermaſsen.

Relative Wärmeleitungscoëfficienten.

	k_0 beob.	k_0 nach Maxwell berechnet
Luft	1	1
Kohlensäure	0,59	0,70
Wasserstoff	7,1	7,0

oder

Wasserstoff	1	1
Luft	0,140	0,142
Kohlensäure	0,082	0,99.

Das Verhältniſs der Leitungscoëfficienten der Luft und des Wasserstoffs stimmt, wie auch schon Stefan gefunden hat, mit dem aus der Theorie berechneten nahe überein.

Der relative Wärmeleitungscoëfficient der Kohlensäure kann aus der Theorie nicht genau berechnet werden, da das Verhältniſs der specifischen Wärmen der Kohlensäure mit der Temperatur veränderlich ist und in der Theorie diese Veränderlichkeit nicht berücksichtigt ist. — Benutzt wurde für die Berechnung des obigen Werthes das Verhältniſs des Reibungscoëfficienten der Kohlensäure zu dem der Luft 0,806. Ferner:

$$\frac{Cp}{C_v} \text{ für Luft} = 1{,}405$$

$$\frac{Cp}{C_v} \text{ für } CO_2 = 1{,}305.$$

Dichte der Kohlensäure = 1,5291.

Der benutzte Werth von $\frac{Cp}{C_v}$ für CO_2 ist von Hrn. Röntgen (cf. diese Annalen Bd. 148) bei 19° C. experimentell bestimmt. — Nimmt man die am angeführten Ort gegebenen, aus Regnault's Beobachtungen berechneten Werthe:

$$\frac{Cp}{C_v} = 1{,}3220 \text{ bei } 0^0$$

$$\frac{Cp}{C_v} = 1{,}2603 \text{ bei } 100^0,$$

so erhält man für den Wärmeleitungscoëfficienten der Kohlensäure bezogen auf den der Luft als Einheit die beiden Gränzwerthe 0,66 und 0,82.

Selbst der kleinste dieser Werthe ist noch merklich gröfser, als der von uns bei Drucken von circa $1-8^{mm}$ experimentell ermittelte Werth. Schliefslich sey noch bemerkt, dafs die in unserer Mittheilung an die Akademie angegebenen, nach Maxwell berechneten relativen Coëfficienten für Luft (0,141) und CO_2 (0,103) durch die genaueren hier gegebenen zu ersetzen sind, bei deren Berechnung die oben angegebenen, uns am zuverlässigsten erscheinenden Werthe für $\frac{Cp}{C_v}$ (für Wasserstoff ist der gleiche Werth $\frac{Cp}{C_v}$ wie für Luft genommen) benutzt wurden.

II. *Weitere Beiträge zur Theorie der Schallbildung; von Prof. Dr. S. Stern.*

(Schlufs von S. 78.)

Sollen alle bisher angeführten Thatsachen ihre causale Begründung erhalten, so mufs man aufser den bereits oben formulirten Fragen noch zwei andere in Betracht ziehen.