1863. ANNALEN №. 7.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND CXIX.

I. *Ueber die elastische Nachwirkung bei der Torsion;*

von Dr. F. Kohlrausch in Göttingen.

Vor etwa 30 Jahren veröffentlichte Hr. Prof. W. Weber in den Abhandlungen der Göttinger Societät eine Untersuchung, welche auf die Natur der elastischen Körper ein ganz neues Licht warf [1]). Man hatte bis dahin allerdings schon von unvollkommener Elasticität gesprochen, dabei jedoch nur die »bleibenden« Gestaltsveränderungen der Körper beachtet, welche durch Ueberschreitung der Elasticitätsgränze bewirkt werden. Dafs aber durch Ausdehnung, Beugung und Torsion auch temporäre Veränderungen hervorgebracht werden, darauf machte zuert Weber aufmerksam und stellte in der erwähnten Abhandlung ein Gesetz der longitudinalen Veränderungen in einem Coconfaden auf. Die Untersuchung dieses merkwürdigen Vorgangs, der elastischen Nachwirkung, welche bei allen bisher darauf geprüften Körpern beobachtet ist, wurde sehr wenig weitergeführt. Mir sind nur einige Bemerkungen meines verstorbenen Vaters bekannt, nämlich bei Gelegenheit der Untersuchungen mit dem Dellmann'schen Elektrometer über die Gröfse der Fehler, welchen man bei Messungen mit der Torsionswaage ohne die Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung ausgesetzt ist [2]), wobei Versuche an einem

1) G. E. Weber, *de fili bombycini vi elastica. Comm. Soc. Vol. VIII, p.* 45, 1841. — Pogg. Ann. Bd. 34, S. 247. — Auch einzeln abgedruckt, Göttingen 1841.

2) Pogg. Ann. Bd. 72, S. 353.

Glas- und einem Cocon-Faden angestellt sind, und einige Gedanken über die Analogie zwischen dem elektrischen Rückstand und der elastischen Nachwirkung [1]).

Aber wegen der grofsen Bedeutung des Gegenstandes, in der Praxis für die in vielen Fällen unersetzlichen Messungen mit Hülfe von Elasticitätskräften, in der Theorie sowohl für die gesammte mathematische Behandlung der Bewegungen elastischer Körper, welche, wenn sie die Wirklichkeit wiedergeben will, die Nachwirkung berücksichtigen mufs, als auch für die Kenntnifs der innersten Natur der Körper, wird die Beschäftigung mit demselben nicht unangemessen erscheinen. Da nun an Leichtigkeit der Ausführung und wegen der unmittelbaren Anwendbarkeit der Resultate auf die Correctionen der Torsionswaage die Versuche über Nachwirkung bei der Torsion anderen voranzustehen scheinen, so habe ich zunächst auf diese mein Augenmerk gerichtet und werde mir erlauben im Folgenden einige Beobachtungen wiederzugeben.

I.

Die Messungen sind in dem physikalischen Institute zu Göttingen angestellt, in welchem Hr. Hofrath Weber mir gütigst Raum und die nöthigen Apparate angewiesen hatte. — Der erste Theil der Beobachtungen ist mit Anwendung des Sinus-Elektrometers [2]) ausgeführt, d. h. mit Hülfe der erdmagnetischen Directionskraft ist das Torsionsmoment gemessen. Um Veränderungen der Elasticität des zu prüfenden Körpers zu vermeiden, wählte ich als solchen einen Glasfaden, indem nach allen bisherigen Erfahrungen bei dem Glase keine bleibende Veränderung der Elasticitätsverhältnisse zu fürchten ist; wenigstens keine solche, die sich nicht durch Zerbrechen des Fadens kund gäbe.

In dem obern Rand des Mantels vom Sinus-Elektrometer wurde ein Querstab befestigt, in dessen Mitte Schellack eingeschmolzen war. Ferner wurde in der Stahlnadel

1) Pogg. Ann. Bd. 91, S. 191 bis 197.

2) Pogg. Ann. Bd. 88, S. 497.

des Instruments die kleine eingeschraubte Hülse, mit welcher sie bei den elektrischen Versuchen auf einer Spitze ruht, durch ein eingeschraubtes Stückchen Holz ersetzt, an welches ebenfalls Schellack angeschmolzen war. In das letztere und das Schellack am Querstabe wurden die beiden Enden eines Glasfadens eingekittet. Die Magnetnadel hängt also nach Entfernung des festen abstofsenden Armes frei drehbar an dem Glasfaden, und nun mufs zunächst durch Verschiebung des Querstabes ihr Aufhängungspunkt so gedreht werden, dafs bei der Einstellung die magnetische Axe mit dem vorher bestimmten magnetischen Meridian zusammenfällt. In dieser Lage ist dann offenbar der Glasfaden nicht tordirt.

Nun kann man demselben durch Drehung des Conus, mit welchem der obere Theil des Elektrometers in einer festen Säule steckt, eine beliebige Torsion ertheilen. Die Nadel wird sich in der Richtung der Torsion so weit aus dem magnetischen Meridian entfernen, dafs das erdmagnetische Drehungsmoment dem Torsionsmoment gleich ist. Die von mir angewandten Fäden brauchten eine Torsion von etwa 1200 Grad, bis die Nadel in die senkrechte Stellung zum Meridian gebracht wurde, d. h. das Maximum ihres Drehungsmoments ausübte.

Man beobachtet bei dem Sinus-Elektrometer in einem Spiegel der Nadel das Bild einer Marke, welche im Innern des Mantels angebracht ist, indem man durch einen unter der Marke befindlichen Einschnitt des Mantels visirt. Da nun eine jede Ablesung, sowohl die der Ruhelage als jede spätere nur bei dem »Einspielen« der Nadel geschieht, d. h. wenn das Bild der Marke in einem bestimmten bezeichneten Punkt des Spiegels erscheint, so ist klar, dafs die Ablesung nur bei einem Torsionswinkel erfolgen kann, welcher ein ganzes Vielfaches einer Umdrehung ist. Die Zahl dieser Umdrehungen bestimmt sich durch die anfängliche Drehung des Conus. Man folgt, ganz wie bei den elektrischen Versuchen, der Nadel mit dem drehbaren Theil des Instruments, mit welchem der Aufhängungspunkt des Fadens fest verbunden ist, und notirt die jedesmalige Zeit, zu welcher die Nadel in verschiedenen Stellungen des Instruments einspielt. Also behält der Torsionswinkel bei jeder Versuchsreihe fortwährend dieselbe Gröfse, ein Umstand, welcher eben die Anwendung des Sinus-Elektrometers sehr empfiehlt. Denn da die Nachwirkung von der Gröfse des Torsionswinkels sowie von der Zeit abhängig ist, da man also aufser der letzteren zwei Variable hat, so wird man, um die Verhältnisse zu vereinfachen und dadurch die Auffindung der Gesetze zu erleichtern, gern eine der beiden für jede Versuchsreihe constant nehmen.

Es wird sich zeigen, dafs die Versuche eine ziemlich lange Zeit in Anspruch nehmen können, und daraus folgt die Nothwendigkeit, die Variationen des Erdmagnetismus aus den mit seiner Hülfe gefundenen Resultaten zu eliminiren. Diefs geschah dadurch, dafs die Variationen der Declination an einem mit Dämpfer versehenen Galvanometer mit Fernrohr und Skale abgelesen, und die der Intensität durch die Schwingungsdauer eines aufgehängten Magnets bestimmt wurden. Auf beliebig angenommene mittlere Werthe konnten die, mit dem Sinus-Elektrometer gemachten Beobachtungen dann leicht reducirt werden. Die fortwährende gleichzeitige Beobachtung aller drei Instrumente war für einen einzelnen Beobachter unmöglich und ist, wie man leicht sieht, unnöthig, wenn nur die Schwankungen des Erdmagnetismus ziemlich stetig sind. Man bemerkt diefs an den einzelnen Tagen bald, und es genügt dann, wie auch hier geschehen ist, die Beobachtung der Declination und Intensität von Zeit zu Zeit anzustellen und die zwischenliegenden Werthe unter der Voraussetzung einer gleichmäfsigen Aenderung zu interpoliren.

Ich will noch bemerken, dafs es nöthig war, die Schwingungen, in welche die Nadel des Elektrometers bei der Drehung des Instruments kam, durch einen von aufsen genäherten kleinen Magnet zu beruhigen, wodurch die Zeit (durchschnittlich 1 Minute) erklärt wird, welche bis zur ersten Beobachtung verstrich.

Ich gebe nachfolgend zwei Tabellen, deren Werthe auf die angegebene Weise erhalten sind und die Torsionskraft zweier Glasfäden bei einem Torsionswinkel von 1080° repräsentiren. Die ersten Columnen enthalten die Zeit nach der Mittheilung der Torsion in Minuten, die zweiten das zu dieser Zeit beobachtete Torsionsmoment; als Einheit das Drehungsmoment genommen, welches die Nadel in ihrer senkrechten Stellung zum magnetischen Meridian ausübt.

Die Werthe der dritten Columnen sind nach der Formel

$$x = x_0 + c \cdot e^{-at^m}$$

berechnet, wenn für t die Werthe der ersten Columne und für die Constanten x_0, c, a, m die unter jeder Tabelle angegebenen Gröfsen eingesetzt werden. Die Begründung dieser Formel wird weiter unten folgen.

Tabelle I.

t	x beobachtet	x berechnet	t	x beobachtet	x berechnet
1',25	0,9247	0,9249	25'	0,9154	0,9154
1 ,92	0,9238	0,9238	26	0,9152	0,9153
2 ,50	0,9231	0,9230	28	0,9148	0,9150
3 ,08	0,9225	0,9224	31	0,9147	0,9146
3 ,92	0,9218	0,9217	33	0,9146	0,9144
4 ,75	0,9213	0,9211	35	0,9145	0,9142
5 ,25	0,9211	0,9208	48	0,9141	0,9130
6 ,07	0,9204	0,9203	50	0,9138	0,9129
7 ,58	0,9197	0,9196	52	0,9136	0,9127
8 ,25	0,9195	0,9193	53	0,9134	0,9127
9 ,67	0,9188	0,9188	110	0,9120	0,9099
10 ,33	0,9185	0,9185	160	0,9079	0,9086
11	0,9184	0,9183	168	0,9073	0,9084
12	0,9181	0,9180	184	0,9076	0,9081
13	0,9178	0,9178	195	0,9072	0,9079
14	0,9175	0,9175	206	0,9071	0,9077
15	0,9175	0,9173	300	0,9054	0,9063
16	0,9171	0,9170	355	0,9042	0,9058
17	0,9170	0,9168	452	0,9051	0,9050
18	0,9168	0,9166	1310	0,9042	0,9019
19	0,9164	0,9164	1460	0,9024	0,9016
20	0,9162	0,9162	1780	0,8995	0,9011
22	0,9158	0,9159	2760	0,8995	0,9001

$x_0 = 0,8970$
$c = 0,04054$
$a = 0,35272$
$m = 0,25$

Tabelle II.

t	x beobachtet	x berechnet	t	x beobachtet	x berechnet
1′,33	0,8773	0,8775	61′	0,8622	0,8620
2 ,33	0,8755	0,8757	69	0,8615	0,8614
2 ,93	0,8750	0,8750	75	0,8610	0,8610
3 ,75	0,8739	0,8741	82	0,8606	0,8605
4 ,67	0,8729	0,8733	90	0,8600	0,8600
5 ,58	0,8725	0,8726	97	0,8597	0,8596
6 ,75	0,8718	0,8719	107	0,8588	0,8591
9 ,17	0,8707	0,8707	113	0,8583	0,8588
10 ,25	0,8701	0,8702	124	0,8579	0,8583
12 ,00	0,8694	0,8696	130	0,8577	0,8581
17 ,00	0,8684	0,8681	140	0,8574	0,8577
18 ,17	0,8679	0,8678	197	0,8548	0,8559
20 ,50	0,8674	0,8673	205	0,8548	0,8556
23 ,92	0,8667	0,8665	216	0,8542	0,8554
30 ,0	0,8657	0,8655	446	0,8507	0,8514
42 ,0	0,8644	0,8639	1343	0,8469	0,8457
56 ,5	0,8626	0,8624			

$$x_0 = 0{,}8320$$
$$c = 0{,}05889$$
$$a = 0{,}24129$$
$$m = 0{,}25$$

Man sieht aus diesen Zahlen zunächst, dafs das Torsionsmoment bei constantem Torsionswinkel durchaus nicht constant bleibt, sondern mit der Zeit beträchtlich abnimmt. Diese Abnahme ist anfangs am bedeutendsten und scheint mit der Zeit sich der Null zu nähern, so dafs der Werth nach sehr grofser Zeit constant wird. Die Gröfse der Aenderung von dem ersten beobachteten Werthe an bis zu dem nach 1300′ also fast einem Tage beträgt in Theilen des anfänglichen Werthes 0,022 in der ersten und 0,035 in der zweiten Tabelle. Es folgt also, dafs trotz der gleichen Länge und des ungefähr gleichen Torsions-Coëfficienten die Nachwirkung der beiden Fäden verschieden ist. Die Gröfse der Aenderung ist in beiden Fällen nicht unbeträchtlich, würde wenigstens bei vielen Messungen mit der Torsionswaage die Beobachtungsfehler weit übersteigen. So beträgt die Aenderung vom ersten Werth an in der zweiten Tabelle während 5 Minuten $\frac{1}{2}$ Proc. der ganzen Kraft. Diese Veränderlichkeit ist um so störender für Versuche mit der Drehwaage, als man bei der grofsen Hartnäckigkeit derselben nicht warten kann, bis der Gleichgewichtszustand eingetreten ist. In I. ist die Abnahme während des zweiten Tages noch deutlich zu bemerken. Dafs die letzte mit der vorletzten Beobachtung nach den Reductionen genau stimmt, halte ich für Zufall.

Zur gröfsern Uebersichtlichkeit ist Tab. II für die ersten zwei Stunden durch die Curve AA (Fig. 1 Taf. IV) graphisch dargestellt, indem t als Abscisse, x als Ordinate aufgetragen ist. Für x gelten die rechts stehenden eingeklammerten Zahlen.

Das Coulomb'sche Gesetz sagt, dafs das Torsionsmoment dem Ablenkungswinkel und dem Torsionscoëfficienten proportional ist. Daraus folgt, dafs die beobachtete Abnahme durch die Aenderung einer dieser beiden oder beider Gröfsen hervorgebracht seyn kann. Von vornherein ist diese Frage schwer zu entscheiden, aber es wird gewifs, dafs eine Aenderung des Torsionswinkels stattgefunden hat, wenn man die Torsion aufhebt und die neue Ruhelage beobachtet. Man findet dann wie bekannt, dafs dieselbe sich mehr oder weniger im Sinne der mitgetheilten Torsion geändert hat, je nachdem die letztere von längerer Dauer war [1]), also entsprechend der erfolgten Abnahme des Torsionsmomentes.

II.

Das Sinuselektrometer eignet sich nicht, die Ruhelage nach Aufhebung der Torsion zu beobachten, weil das Einspielen der Nadel nur in der alten Ruhelage geschehen kann. Aber unter einer etwas andern Form kann man Beobachtungen anstellen, von denen ich, weil sie vielleicht einiges theoretische Interesse haben, mehrere wiedergeben will. Die Torsion wurde durch Zurückdrehen des Instrumentes aufgehoben, und nun die Beobachtung ebenso wie früher angestellt. Das Einspielen der Nadel erfolgt nur in der ursprünglichen Ruhelage; da aber die augenblickliche

1) Pogg. Ann. Bd. 72, S. 394.

Ruhelage eine abweichende ist, so wird in der frühern ein Drehungsmoment ausgeübt, welches durch die Ablenkung der Nadel aus dem magnetischen Meridian gemessen wird. Die folgenden Tabellen werden demnach die Kraft geben, welche zu verschiedenen Zeiten nöthig ist, um den Faden nach der Aufhebung der Torsion in der alten Ruhelage zu erhalten.

Ob übrigens die Abnahme des Torsionsmomentes in den vorigen Tabellen allein von der Aenderung der jedem Zeitpunkt entsprechenden gewissermafsen virtuellen Ruhelage herzuleiten sey, oder ob auch eine Aenderung des Torsionscoëfficienten stattfinde, läfst sich durch diese Versuche nicht entscheiden, weil sowohl die erste Zeit nach dem Mittheilen der Torsion als die nach ihrer Aufhebung für die Beobachtung verloren geht. Es ist aufserdem, wie Weber bemerkt hat, wahrscheinlich, dafs die augenblickliche und die Nachwirkung gar nicht scharf getrennt sind, weil doch factisch die Änderung der Stellung stetig ist. Demnach würde es auch bei einer Vorrichtung, welche die Beobachtung von Anfang an möglich machte, schwer seyn über diese Frage eine Entscheidung zu geben.

Tab. III. und IV. gelten für den ersten Faden und sind erhalten, nachdem zwei verschiedene Torsionen eine ungefähr gleiche Zeit gewirkt hatten, bei III. nämlich eine Torsion von 1080° während 2790', bei IV. eine von 720° während 2866'. Die Reihen sind nicht vollständig gegeben, sondern nur einzelne zum Theil direct erhaltene, zum Theil als Mittel aus benachbarten Werthen berechnete Gröfsen, die in den beiden Tabellen gleichen Zeiten entsprechen. Wie aus der gezeichneten Curve zu ersehen war, leiden die ganzen Reihen an Beobachtungsfehlern.

Tabelle III und IV.

	Torsionswinkel von 1080°	Torsionswinkel von 720°	
t	x	x_1	$\frac{x}{x_1}$
4',33	0,0259	0,0184	1,41
5 ,77	0,0249	0,0177	1,41
6 ,97	0,0247	0,0175	1,41
7 ,97	0,0246	0,0173	1,42
14	0,0221	0,0154	1,44
20	0,0210	0,0149	1,41
30	0,0199	0,0141	1,41
54	0,0178	0,0127	1,40
70	0,0168	0,0121	1,39
140	0,0147	0,0095	1,55
177	0,0141	0,0094	1,50
1570	0,0067	0,0045	1,49

Die letzte Columne giebt das Verhältnifs der Werthe aus der zweiten und dritten. Man sieht, dafs dasselbe sich nicht weit von einem Mittelwerth entfernt. Das Mittel aus allen ist 1,437, während das Verhältnifs der Torsionen, welche mitgetheilt gewesen waren, 1,5 ist. Nimmt man hinzu, dafs die Torsion bei dem zweiten Versuch etwas länger gedauert hat, als bei dem ersten, so sieht man, dafs in unserm Falle dafs Verhältnifs der zu gleichen Zeiten in der alten Ruhelage noch ausgeübten Kräfte dem Verhältnisse der mitgetheilten Torsionen nahe gleich seyn würde, wenn die letzteren gleiche Zeit gedauert hätten. Es wäre gewagt, aus diesem einzigen Versuch auf ein allgemeines Gesetz schliefsen zu wollen, doch scheint dasselbe in der angedeuteten Weise nicht unmöglich.

Es mag noch bemerkt werden, dafs die schliefsliche Ruhelage nach diesen Versuchen wo eine Torsion von 3 und eine von 2 ganzen Umdrehungen jede fast zwei Tage gewirkt hatten, mit der ursprünglichen so gut als genau wieder zusammenfiel, so dafs der kurze Glasfaden wenigstens bis zu einer so bedeutenden Torsion als vollkommen elastisch zu betrachten ist.

Aufser diesen Versuchen, wo verschiedene Torsionen eine gleiche Zeit gewirkt hatten, mögen noch einige andere folgen, wo der Torsionswinkel gleich, die Dauer der Wirkung aber verschieden gewesen war. Sie sind an dem zweiten Glasfaden angestellt und zwar nach einer Torsion von 1080° und von 10, 20, 40 und 1380 Minuten Dauer. Von den Tabellen gilt das nämliche wie von I und II, nur ist x_0 überall gleich Null zu setzen.

Tabelle V.

t	x beobachtet	x berechnet
1,08	0,0285	0,0287
1,75	0,0267	0,0271
2,75	0,0244	0,0254
3,83	0,0235	0,0242
5,25	0,0225	0,0230
6,50	0,0219	0,0221
9,25	0,0205	0,0207
11,00	0,0198	0,0200
12,50	0,0192	0,0195
15,00	0,0187	0,0187
18,67	0,0182	0,0178
21,17	0,0176	0,0173
24,17	0,0171	0,0167
27,50	0,0165	0,0162
31,67	0,0159	0,0156
37,0	0,0154	0,0149
41,5	0,0149	0,0145
51,0	0,0138	0,0136
56,5	0,0131	0,0132
66	0,0130	0,0126
70	0,0125	0,0123
82	0,0118	0,0117
107	0,0103	0,0106
117	0,0100	0,0103
198	0,0077	0,0084
207	0,0076	0,0082
282	0,0065	0,0071
480	0,0046	0,0055
610	0,0039	0,0048
1450	0,0020	0,0028
1780	0,0016	0,0024
1840	0,0013	0,0024
3150	0,0006	0,0015

$c = 0,04551$
$a = 0,45204$
$m = 0,25$

Tabelle VI.

t	x beobachtet	x berechnet
1,08	0,0124	0,0139
2,00	0,0107	0,0116
2,92	0,0100	0,0102
4,08	0,0090	0,0090
5,25	0,0079	0,0081
6,92	0,0074	0,0072
7,92	0,0069	0,0068
8,67	0,0065	0,0065
11,25	0,0060	0,0058
12,25	0,0057	0,0055
14,0	0,0052	0,0051
15,5	0,0050	0,0049
18,5	0,0045	0,0044
21,0	0,0040	0,0041
30,0	0,0034	0,0033
32,5	0,0030	0,0031
37	0,0030	0,0029
40	0,0027	0,0027
44	0,0024	0,0026
54	0,0020	0,0022
60	0,0020	0,0020
72	0,0020	0,0018
93	0,0015	0,0014
120	0,0009	0,0012
140	0,0007	0,0010

$c = 0,04225$
$a = 1,0886$
$m = 0,25$

Tabelle VII.

t	x beobachtet	x berechnet
1',33	0,0108	0,0109
2,17	0,0093	0,0092
2,83	0,0085	0,0083
3,50	0,0077	0,0076
4,75	0,0068	0,0066
6,0	0,0062	0,0059
6,83	0,0056	0,0055
7,50	0,0054	0,0053
9,33	0,0047	0,0047
10,17	0,0047	0,0044
13,50	0,0037	0,0038
15,00	0,0036	0,0036
19,00	0,0029	0,0031
23,00	0,0023	0,0027
29,50	0,0021	0,0023
35,00	0,0018	0,0020
41,75	0,0016	0,0017
54	0,0015	0,0014
70	0,0011	0,0011

$c = 0{,}04178$
$a = 1{,}2497$
$m = 0{,}25$

Tabelle VIII.

t	x beobachtet	x berechnet
0',95	0,0084	0,0089
1,83	0,0070	0,0071
2,38	0,0061	0,0064
3,50	0,0056	0,0054
4,00	0,0052	0,0051
4,96	0,0047	0,0046
5,83	0,0042	0,0042
8,67	0,0038	0,0034
9,50	0,0032	0,0033
11,00	0,0029	0,0030
12,50	0,0026	0,0028
13,50	0,0023	0,0026
16,75	0,0022	0,0023
25	0,0016	0,0017
38	0,0015	0,0013

$c = 0{,}03240$
$a = 1{,}3086$
$m = 0{,}25$

Wie zu erwarten war, erfolgt auch hier die Aenderung im Anfang rasch, später immer langsamer, und sowohl die Zeit, welche bis zum Verschwinden der Ablenkung verstreicht, als die Ablenkung selbst ist um so gröfser, je länger die Torsion gedauert hat. In Tab. V, ist nach Verlauf eines Tages der beobachtete Winkel der Nadel mit dem Meridian noch 7 Minuten grofs; diese Abweichung kann also nicht aus einem Beobachtungsfehler entspringen. Wenn die Torsion von 3 ganzen Umdrehungen einen Tag lang gedauert hat, dann aber der Faden in seine alte Ruhelage zurückgeführt und während eines Tages mit Gewalt darin festgehalten ist, so ist also der Gleichgewichtszustand noch nicht erreicht, sondern die Bewegung der Molecüle nach ihrer alten Ruhelage dauert noch fort.

Nimmt man für die Ordinate x (Fig. 1 Taf. IV.) die rechtsstehenden Zahlen, so wird Tabelle V. durch die Curve BB dargestellt.

Fragen wir, welchem Torsionswinkel die Drehungsmomente entsprechen, unter der Voraussetzung, dafs der Torsionscoëfficient sich nicht ändere, so können wir letztern leicht daraus finden, dafs einem Torsionswinkel $= 1080^{\circ}$ das Drehungsmoment 0,877 (Tab. II.) entspricht. Es ergiebt sich dann, dafs zu der Kraft $= 1$ ein Torsionswinkel von 1230° gehört. Dem anfänglichen Drehungsmoment $= 0{,}0285$ in Tab. V. entspricht also ein Torsionswinkel von 35°, d. h. die augenblickliche Ruhelage differirte unter der gemachten Voraussetzung von der alten um 35°.

In der Tabelle II betrug die Abnahme des Torsionsmomentes von der ersten bis zur letzten Beobachtung 0,0304. Tab. V. ist nach Tab. II. erhalten, indem die Torsion aufgehoben wurde, und man kann bemerken, dafs das nach der ersten Minute noch vorhandene Drehungsmoment 0,0285 in V. dem ebenfalls von Minute 1 an gerechneten Verluste in II. nahe gleich ist. Dasselbe sieht man in Tab. I. u. III., welche wie die vorigen beiden zusammengehören.

Es ist noch übrig, über die Glasfäden selbst einiges zu sagen. Es wurden aus einem Büschel von Fäden diejenigen gewählt, bei denen die Abweichung des Querschnitts von der kreisförmigen Gestalt möglichst gering war. Die Länge betrug etwa 35^{mm}; sie konnte wegen der Höhe des Elektrometer-Mantels nicht gröfser genommen werden. Es leuchtet übrigens ein, dafs die Länge unwesentlich ist. Denn unter der Voraussetzung der Homogeneität und eines constanten Querschnitts wird eine bestimmte Torsion sich offenbar über einen cylinderförmigen Faden gleichmäfsig vertheilen und in allen Theilen dieselbe moleculare Veränderung hervorbringen wie die $n$malige Torsion bei einem Faden von $n$facher Länge. Also wird auch die Nachwirkung in den einzelnen Elementen beider Fäden gleich seyn. Behält man dabei im Auge, dafs das Torsionsmoment nur von der Beschaffenheit des letzten Elements abhängt, so mufs man schliefsen, dafs in allen angeführten Versuchen dieselben Zahlen erhalten wären, wenn je einem gleichen Draht von $n$facher Länge die $n$fache Torsion mitgetheilt wäre.

Der Querschnitt der Fäden berechnet sich aus Gewicht, Länge und dem specifischen Gewicht des Glases ungefähr $= 0{,}0029$ Quadratmillimeter.

III.

Es liegt nach den Versuchen der Wunsch nahe, dieselben durch Gesetze darzustellen, und da in der schon öfter erwähnten Abhandlung von Weber ein solches Gesetz vorliegt, dessen Uebereinstimmung mit der dort gegebenen Beobachtung nichts zu wünschen übrig läſst, so ist der Versuch zu machen, dasselbe auch hier anzuwenden.

Halten wir uns zunächst an die bequeme Formel, welche die Curve für die Nachwirkung als gleichseitige Hyperbel betrachtet

$$x = a + \frac{b}{c+t}$$

so finden wir, daſs dieselbe in einzelnen Tabellen (VI, VII und VIII) eine sehr gute Uebereinstimmung giebt, in andern aber durchaus nicht anzuwenden ist. Eine practische Anwendung ist aber vielleicht möglich, denn die ersten Theile der Tab. I. und II. lassen sich ziemlich genau durch sie darstellen, wenn man die Constanten entsprechend bestimmt.

Dauert also eine Versuchsreihe mit der Drehwaage nicht zu lange, und ist die Aenderung des Torsionswinkels nicht bedeutend, so wird man, wenn die Constanten a, b und c bekannt sind, die Nachwirkung für verschiedene Augenblicke berechnen können. Die Constanten müssen freilich für den angewandten Aufhängungsfaden, wenn sich nicht bestimmte Gesetze für sie herausstellen, durch Beobachtung bei verschiedenen Torsionswinkeln und durch Interpolation für die zwischenliegenden Werthe gefunden werden: eine allerdings beschwerliche, aber bei feinen Messungen von etwas längerer Dauer, wie es scheint, nicht zu umgehende Arbeit.

Suchen wir in der andern von Weber gegebenen Formel $x = a + \frac{b}{(c+t)^m}$ die Constanten passend zu bestimmen, so ergiebt sich, dafs auch ihre Anwendung nicht überall möglich ist. Wenigstens gelang mir eine genügende Bestimmung der Constanten für Tab. V, wo $a = o$ ist, nicht, und auch für Tabelle I. und II., wo die Gröfse a durch die endlichen Werthe des Torsionsmoments näherungsweise gegeben ist, konnten die andern Constanten nicht so gefunden werden, dafs die Berechnung gut mit der Beobachtung stimmte.

Es wird daher, um einen Ausdruck für die Gesetze der Nachwirkung bei der Torsion zu finden, welcher alle beobachteten Fälle umfafst, von andern Voraussetzungen ausgegangen werden müssen.

Als Grundlage nehmen wir natürlich an, dafs der betrachtete Körper vollkommen elastisch sey, d. h. dafs für bestimmte äufsere auf ihn wirkende Kräfte nur eine einzige Lage der Molecüle existirt, in welcher die auf jedes von ihnen ausgeübten Kräfte sich gegenseitig aufheben. Ist also einem Faden eine Torsion mitgetheilt, und Gleichgegewicht eingetreten, so sind die Molecüle in einer bestimmten gegenseitigen Lage, und die aus derselben entspringenden Molecularkräfte halten irgend einem Drehungsmoment das Gleichgewicht. Wird nun die Torsion des Fadens geändert, so ist für das Gleichgewicht eine bestimmte andere Stellung der Molecüle nöthig, der ein anderes Drehungsmoment entspricht. Um in diese Lage zu gelangen, müssen die Molecüle sich bewegen. Wir nehmen aber an, dafs ein Theil dieser Bewegung wegen irgend eines molecularen Widerstandes nur langsam vor sich gehe. Unter dieser Voraussetzung wird zu einer gewissen Zeit t nach Veränderung der Torsion noch ein gewisser Abstand z der Molecüle von der Gleichgewichtslage vorhanden seyn, (worunter jedoch nicht der Linear-Abstand zu verstehen ist, sondern irgend eine Verschiedenheit der augenblicklichen Lage von der des Gleichgewichts).

Daraus resultirt eine Kraft y, welche die Molecüle in die Gleichgewichtslage treibt. Direct können wir diese Kraft nicht beobachten, aber sie äufsert sich wegen des Widerstandes der Molecüle als ein Torsionsmoment x, welches zu dem in der endlichen Gleichgewichtslage ausgeübten hinzukommt. x wird also eine Function von y seyn.

$$x = f(y)$$

Entwickeln wir diese Function nach der Maclaurin'schen Reihe, so wird

$$x = f(0) + y . f'(0) + \frac{y^2}{1.2} f''(0) + \ldots$$

Nehmen wir nun an, dafs die Function x stetig sey, und dafs die anfängliche Bewegung der Molecüle sehr grofs gegen die spätere sey, — was ja den wirklichen Vorgängen entspricht — so wird zu jeder Zeit, wo wir beobachten, der Abstand von der Gleichgewichtslage, also auch die Kraft y sehr klein seyn, so dafs man wenigstens den Versuch machen wird, mit der ersten Potenz in der Entwicklung von x auszukommen. Bemerkt man ferner, dafs $f(0) = 0$, weil eben für $y = 0$ überall Gleichgewicht herrscht, so hat man

$$x = y . f'(0) = my.$$

Ebenso erhält man unter der Voraussetzung, dafs y eine stetige Function von dem Abstande z sey, und beide als sehr klein betrachtet werden können,

$$y = nz$$

so dafs $$x = mnz = hz$$

also $$\frac{dx}{dz} = h.$$

Der Abstand z nimmt ab, und die Geschwindigkeit dieser Abnahme werde der Kraft y proportional gesetzt, aber irgend einem Widerstand W umgekehrt proportional; so bekommt man

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{p.y}{W} = \frac{p}{m}\frac{x}{W}.$$

Wir suchen jedoch das, was wir unmittelbar beobachten, das Torsionsmoment, und erhalten, weil

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt} = h\frac{dz}{dt}$$

als Differentialgleichung für dasselbe

$$-\frac{dx}{dt} = b \cdot \frac{x}{W}.$$

Für W müssen, damit die Gleichung integrirt werden kann, Hypothesen gemacht werden. Betrachten wir W als eine Function von x, so kommen wir auf die Gleichung, welche Weber angewandt hat, sobald wir für W eine Potenz von x setzen. Wie schon gesagt, genügte diese Gleichung nicht allen Versuchen, deshalb betrachten wir einmal W als einer Function von t proportional, z. B. einer Potenz; dann wird die Differential-Gleichung

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{g \cdot x}{t^n}.$$

Deren Integration ergiebt:

$$x = c \cdot e^{-at^m}$$

Diefs ist der vermöge der Nachwirkung hinzukommende Theil des Drehungsmoments. Ist dasselbe im endlichen Zustand des Gleichgewichts $= x_0$, so erhalten wir als das Drehungsmoment in jedem Augenblicke t

$$x = x_0 + c \cdot e^{-at^m}$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen ist von meinem Vater dieselbe Formel für den elektrischen Rückstand abgeleitet [1]) und brauchbar befunden, und darauf hingewiesen, wie vielleicht die elastische Nachwirkung in einer nahen Beziehung zu dieser elektrischen Erscheinung stehe. Es ist vielleicht von Interesse, dafs, wie man aus der Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe in den vorigen Tabellen sieht, wirklich dieselbe Formel auf beide Erscheinungen anwendbar ist. — Die Entwicklung ist freilich nicht streng, sondern beruht auf mehreren Hypothesen, von denen die über den Widerstand die unsicherste ist.

Denselben unmittelbar als Function der Zeit zu betrachten, welche seit der Veränderung der Torsion verflossen ist, würde nur dann einen Sinn haben, wenn man annähme, dafs dieser Widerstand eine Eigenschaft des Molecüls sey, welche durch die Veränderung der Torsion modificirt würde.

1) Pogg. Ann. Bd. 91 S. 191, 197.

Will man eine solche Eigenschaft, von der es schwer ist, sich irgend eine Vorstellung zu machen, nicht annehmen, so ist man genöthigt, die Abhängigkeit von der Zeit als mittelbar zu betrachten, z. B. *den Widerstand als Function* von der gegenseitigen Lage der Molecüle, und da diese von der Zeit abhängt, als Function der letztern anzusehen.

Dafs die Hypothese, die Aenderung sey blofs von dem Abstande der Molecüle von der Gleichgewichtslage abhängig, nicht überall anzuwenden ist, wenigstens nicht so, dafs die Form dieser Abhängigkeit eine Eigenschaft des Körpers, also für denselben Faden dieselbe sey, sieht man aus der Vergleichung von Tab. V. und VI., welche für denselben Draht gelten. In V. entspricht nämlich der Zeit von 70 Minuten derselbe Werth wie in VI. der von 1'. Die folgenden Theile der Curven fallen aber nichts desto weniger gar nicht zusammen, sondern um auf den gleichen Werth 0,002 zu gelangen, braucht Tab. VI. etwa eine Stunde, Tab. V. aber einen Tag. Dieser Umstand würde übrigens die Möglichkeit nicht ausschliefsen, die Aenderung in jeder Versuchsreihe als Function des Abstandes anzunehmen, wenn man nur die Form dieser Function von der Zeit abhängig seyn läfst, während welcher der frühere Zustand gedauert hat.

Nur scheint es, dafs damit ein Hauptvorzug der Hypothese wegfalle, welche nun nicht mehr den Zusammenhang zwischen der Bewegung der Molecüle und dem Abstand der letztern von der Gleichgewichtslage als eine Eigenschaft des Körpers betrachtet. Ist ferner die Geschwindigkeit der Aenderung nach Aufhebung der Torsion von der Zeit abhängig, während welcher die letztere gewirkt hat, und nicht nur von der Gröfse des Abstandes der Molecüle, so liegt es nahe, anzunehmen, dafs auch die Aenderung während der Wirkung der Torsion von dieser Zeit abhänge. Uebrigens liefsen sich die Constanten für die erstere Formel, z. B. für Tab. V, auch dann nicht passend bestimmen, wenn man die Bestimmung ganz unabhängig von den anderen Curven versuchte.

Ich habe demnach nur die zweite Formel der Berechnung zu Grunde gelegt. Bei mehren Curven ergab sich für den Exponenten m eine Gröfse nahe $= \frac{1}{4}$, so dafs ich diese Annahme für die andern ohne weiteres machte. Es wäre möglich, dafs andere Exponenten manche Curven etwas genauer wiedergäben, aber man sieht, dafs die Abweichungen auch so nicht sehr grofs sind. Auch bei der Bestimmung der Constanten für die elektrische Rückstandsbildung hat sich der Exponent der Zeit für alle Versuche constant ergeben [1]).

Stellen wir im Folgenden die verschiedenen Constanten der vier letzten Tabellen zusammen, so bekommen wir

$$m = 0{,}25$$

Dauer der Torsion	c	a
1380'	0,04551	0,45204
40'	0,04225	1,0886
20'	0,04178	1,2497
10'	0,03240	1,3086.

Es ist aber, wie man bei der Integration der Formel

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{gx}{t^n} \text{ (S. 352) sieht,}$$

$$n = 1 - m$$

$$g = m \, . \, a$$

c ist die Integrationsconstante und bedeutet das berechnete Torsionsmoment zur Zeit 0. Wir haben gefunden, dafs m, also auch n für alle Versuche constant ist; c wächst, wie zu erwarten war, mit der Dauer der Torsion; a aber nimmt im Gegentheil ab. Je länger die Torsion gedauert hat, desto gröfser ist der anfängliche Abstand von der Ruhelage, desto langsamer verschwindet er.

Ich will diese Stelle, wo über die Anwendbarkeit der aufgestellten Formel auf unsere Versuche gehandelt ist, gleich benutzen, um über die mangelhafte Uebereinstimmung zu sprechen, welche die Rechnung bei der Anwendung auf die Weber'schen Versuchsreihen ausweist [2]). Ich

1) Pogg. Ann. Bd. 91, S. 199.
2) Vgl. Pogg. Ann. Bd. 91, S. 197. Anm.

meine nämlich, obwohl einerseits die Möglichkeit da ist, dafs die Uebereinstimmung in den oben gegebenen Resultaten eine zufällige sey, oder wenigstens dafs die Verallgemeinerung der Formel sich nur auf die Torsion erstrecken werde, dafs anderseits durch Webers Beobachtungen die Anwendbarkeit auf longitudinale Veränderungen nicht abgeschnitten ist.

In Weber's Versuchen nämlich ist keine der Gröfsen constant, sondern die Aenderung der Spannung der Aenderung der Verlängerung proportional. Weber beweist die Anwendbarkeit seiner Formel, wenn sie für den Fall constanter Spannung richtig ist, auch für diese Verhältnisse; etwas anders aber steht es mit unserer Formel. Denn betrachten wir den unter der Form $k.t^m$ eingeführten Widerstand als Function von der Lage der Molecüle, so leuchtet ein, dafs diese Lage sich auf andere Weise verändern wird bei constanter als bei veränderlicher Spannung, dafs also die Form $k.t^m$ wohl im erstern Falle richtig seyn kann, ohne mit Nothwendigkeit für den letztern zu folgen. Es ist demnach möglich, dafs Beobachtungen mit constanter Spannung, welche bisher nicht vorliegen, die Formel anwenden lassen.

IV.

Während im Vorhergehenden die Abnahme der Torsionskraft bei constantem Torsionswinkel gemessen wurde, wählte ich, um auch die umgekehrten Verhältnisse zu haben, den einfachsten und für die Praxis wichtigsten Fall mit der constanten Kraft $= 0$; d. h. ein Faden wurde in *einer beliebigen Torsion eine Zeit* lang gehalten, dann diese Torsion aufgehoben, und die Ruhelage des Fadens zu verschiedenen Zeiten bestimmt.

Als Waagebalken diente jetzt natürlich ein unmagnetischer Körper, ein Gewicht, welches einen Spiegel trug. Die Ablesung wurde mit Fernrohr und Skale gemacht.

Um nach Aufhebung der Torsion die Beruhigung zu erzielen, welche früher mit einem kleinen Magnet erreicht werden konnte, tauchte das Gewicht zum Theil in ein Gefäfs mit Oel. Der Apparat befand sich zur möglichsten Vermeidung von Luftströmungen unter einem Kasten, welcher eine mit einem Spiegelglase verschlossene Oeffnung hatte, wodurch beobachtet wurde, und das Ganze stand auf einem starken Stativ, welches seinerseits auf einer fundirten Platte ruhte.

Der zu untersuchende Draht war oben mit Schellack an den Arm eines metallenen Stativs angekittet und auf dieselbe Weise unten an das Gewicht. Das letztere konnte mittels eines horizontalen Arms, welchen es trug, hinter einem Hebelarm so gehalten werden, dafs die Ablenkung etwa 90° betrug. Wenn man den Hebel auslöste, so kehrte der Draht in die Ruhelage zurück und wurde nun beobachtet.

Da sich fand, dafs der bei den vorigen Versuchen benutzte Glasfaden bei einiger Länge das Gewicht zu langsam im Oele bewegte, mir aber kein stärkerer Glasfaden zu Gebote stand, so wählte ich einen hart gezogenen Messingdraht. Die Länge desselben betrug 131^{mm} der Querschnitt etwa $0{,}011^{mm}$. Die Zeit, welche nach dem Auslösen nöthig war, um die anfänglichen kleinen Schwingungen durch das Oel vollständig zu beruhigen, betrug durchschnittlich $\frac{3}{4}$ Minute.

Es war nun zwar die Vorsicht gebraucht, welche Weber angiebt, den Draht vor den Versuchen in der Richtung der Ablenkung um einen bedeutend gröfseren Winkel als 90° zu drehen, um gewissermafsen die Elasticitätsgränze zu erweitern, aber dennoch stellte sich nach den Versuchen selten die frühere Ruhelage wieder vollständig her. Ueberhaupt mufs ich bemerken, dafs die Ruhelage mit der Zeit manchen kleinen Schwankungen unterworfen war, ohne dafs sich ein äufserer Einflufs bemerken liefs, so dafs die Beobachtungen nur einen beschränkten Werth haben.

Andererseits aber fand sich auch, dafs äufsere Einwirkungen z. B. Klopfen an dem Stativ, worauf der Apparat stand, Vorbeifahren von Wagen, trotz der festen Aufstellung des Apparats einen Einflufs auf die Ruhelage hatten; und merkwürdiger Weise zeigten sich dabei Erscheinungen, welche mit der elastischen Nachwirkung grofse Aehnlichkeit haben. Wenn nämlich die Ruhelage durch fortwährendes Klopfen in einem bestimmten Sinn geändert war, so bewegte sie sich nach Aufhören des Klopfens ganz langsam und regelmäfsig zurück, und zwar zuerst rascher dann langsamer.

Um einige Versuche anzuführen, stand das Fadenkreuz auf 816, Klopfen brachte es auf 858, die Ruhelage ging aber allmählich wieder zurück, so dafs sie im Verlauf eines Tages auf 821 fiel. Abermaliges ziemlich starkes Klopfen verursachte die Einstellung auf 875; nach 12 Stunden aber war die Rückbewegung auf 828 erfolgt.

Nun trat der merkwürdige Umstand ein, dafs der Draht nur einmal in Schwingung versetzt zu werden brauchte, damit die Ruhelage sich wieder auf 712, fast genau die Einstellung vor den ersten hierher gehörigen Versuchen begab. — Eine etwaige Reibung im Oele kann diese Erscheinungen nicht veranlafst haben, weil sie so regelmäfsig verliefen, und die Aenderung stets nach derselben Seite stattfand. Auch habe ich die Versuche öfters wiederholt.

Ich führe diese Erscheinungen deswegen an, um zu zeigen, dafs die Torsionskraft von Metalldrähten nur mit grofser Vorsicht zu Messungen benutzt werden kann. Bei den früheren Versuchen mit dem Glasfaden habe ich übrigens die Unregelmäfsigkeiten nicht bemerkt; freilich war die Beobachtung mit Spiegel und Skale auch ungemein empfindlicher als mit dem Elektrometer, indem der Skalentheil nahe den Werth von 0,85 Minuten hatte, und die Ablesung bis auf ein Zehntel der letzteren verbürgt werden kann.

Gehen wir zu den Beobachtungen selbst über, so leuchtet ein, dafs es bei dieser Genauigkeit nicht sowohl darauf ankam, eine grofse Ablenkung von der früheren Ruhelage zu erzielen, als die Fehler, die aus den erwähnten Unregelmäfsigkeiten entspringen, zu vermeiden. Daher wurde der Torsionswinkel nur 90 Grad grofs genommen, um die Elasticitätsgränze nicht zu überschreiten, und auch dann noch ergab sich eine Versuchsreihe nur brauchbar, wenn die Dauer der Torsion klein gewesen war, weil die Nachwirkung in anderen Fällen sich so weit hinzog, dafs regelmäfsig Störungen dazwischen traten, und die endliche Ruhelage von der früheren beträchtlich abwich.

Ich gebe daher nur zwei Reihen wieder, welche nach einer Dauer der Torsion von 1 resp. 2 Minuten erhalten wurden.

V.

Man kann, um eine Formel für diese Erscheinungen, welche in den folgenden Tafeln wiedergegeben werden sollen, zu finden, dieselben Betrachtungen anstellen wie früher, wenn man nur berücksichtigt, dafs hier nicht das Torsionsmoment, sondern der Ablenkungswinkel aus der Gleichgewichtslage ohne eine äufsere Kraft gemessen wird. Da dieser auch eine Function des Abstands der Molecüle von ihrer Gleichgewichtslage ist, so haben die obigen Schlüsse hier dieselbe Geltung wie dort.

Was nun die Anwendbarkeit der aus den verschiedenen Hypothesen über den Widerstand entstehenden Gesetze betrifft, so bemerke ich, dafs sowohl die von Weber angewandte, als die im Vorhergehenden gebrauchte Formel stimmende Resultate giebt, und zwar so, dafs sie für den ersten Theil kaum besser zu erwarten wären. Später sinken die beobachteten Werthe unter die nach beiden Formeln berechneten. Eine andere Bestimmung der Constanten hätte dem letzteren Fehler abhelfen können, aber der anfänglichen vollständigen Uebereinstimmung einigen Eintrag gethan. Es ist nun aber sehr leicht denkbar, dafs die Nachwirkung von äufseren Einflüssen, welche oft am Spiegel bemerkt werden konnten, z. B. den sehr kleinen Erschütterungen durch vorbeifahrende Wagen afficirt wird, und zwar in dem beobachteten Sinne, dafs nämlich die Annäherung der Molecüle an die Gleichgewichtslage dadurch beschleunigt wird. Es liegt ja auch ein anderes ähnliches Factum in der Physik vor, welches durch diese Hypothese erklärt wird, ich meine den Umstand, dafs die Magnetisirung des Eisens unter dem Einflusse von magnetischen Kräften, z. B. des Erdmagnetismus, durch Erschütterung beschleunigt wird, welches Factum eben mit zum Beweise vom Daseyn molecülarer drehbarer Magnete benutzt wird. Es heifst diefs doch nichts anderes als: die Erschütterung befördert die Drehung der Molecüle in die ihnen durch die äufseren Kräfte angewiesene Ruhelage.

Ich habe auch während meiner Beobachtungen öfters bei vorbeifahrenden Wagen, welche merkliche Erschütterungen verursachten, eine kleine Aenderung in dem erwarteten Sinne wahrgenommen. In den beiden Reihen sind übrigens die ersten 40 Minuten davon frei.

Die schliefsliche Ruhelage ist bei IX. beobachtet und fiel mit der anfänglichen ziemlich genau zusammen. Bei X. ist die letzte Beobachtung nach einem Tage gemacht, und es ist nach dem Gang der Curve und nach Tab. IX. anzunehmen, dafs von da noch eine kleine Bewegung stattfand.

Nimmt man an, dafs die schliefsliche Gleichgewichtslage ganz die frühere sey, von der bei der letzten Beobachtung noch ein Abstand um 2,7 Skalentheile vorhanden ist, so ergeben sich die entsprechenden Constanten bis auf die, welche in beiden Formeln als Factor des ganzen Ausdrucks hinzukommt, für beide Reihen gleich, so dafs die nach gleichen Zeiten vorhandenen Ablenkungen proportional sind.

Aufserdem findet sich in der Formel

$$x = \frac{b}{(c+t)^m}$$

die Integrationsconstante c so nahe gleich Null, dafs dieser Werth dafür angenommen wurde. Demnach ist die Abweichung einfach einer Potenz der Zeit proportional

$$= x \frac{b}{t^m}$$

Ob man diese Formel allgemein anwenden könne, ist natürlich nach den beiden Versuchsreihen noch zweifelhaft, und es kann sehr wohl ein Zufall seyn, dafs $c = 0$ wird.

Ein Einwand gegen die beiden Formeln mufs noch erwähnt werden: dafs sie beide nach Bestimmung der Constanten für $t = 0$ einen viel gröfseren Werth geben, als die ursprüngliche Torsion betrug; die eben besprochene Formel sogar den Werth unendlich. Es zeigt sich daraus offenbar, dafs sie für den Anfang nicht anwendbar sind. Allein nach der Art ihrer Ableitung, welche ja ausdrücklich voraussetzt, dafs der gröfste Theil der Bewegung vor der Beobachtung bereits vollendet sey, kann man eine Uebereinstimmung für die allererste Zeit gar nicht erwarten.

Die beiden letzten Columnen der folgenden Tabellen enthalten die nach beiden Formeln berechneten Gröfsen unter Zugrundelegung der unten angegebenen Werthe für die Constanten.

Tabelle IX. Dauer der Torsion 1'.

t	x		
	beobachtet	berechnet nach den Formeln: $x=bt^{-m}$	$x=ce^{-at^m}$
0',77	28,0	28,00	27,92
0 ,95	27,0	27,05	27,00
1 ,21	26,0	25,99	25,98
1 ,53	25,0	25,01	25,01
1 ,73	24,5	24,51	24,52
1 ,97	24,0	24,00	24,02
2 ,23	23,5	23,53	23,54
2 ,55	23,0	23,00	23,04
2 ,91	22,5	22,51	22,54
3 ,35	22,0	21,99	22,03
3 ,91	21,5	21,44	21,48
4 ,57	21,0	20,90	20,95
5 ,26	20,5	20,42	20,46
6 ,10	20,0	19,93	19,98
7 ,07	19,5	19,46	19,49
8 ,25	19,0	18,97	19,00
9 ,62	18,5	18,50	18,53
11 ,38	18,0	17,99	18,02
13 ,58	17,5	17,48	17,49
16 ,47	17,0	16,94	16,94
19 ,92	16,5	16,41	16,40
24 ,23	16,0	15,89	15,87
28 ,83	15,5	15,45	15,41
35 ,13	15,0	14,95	14,90

t	x		
	beob-achtet	berechnet nach den Formeln: $x = bt^{-m}$	$x = ce^{-at^m}$
40,92	14,5	14,59	14,52
46,30	14,0	14,29	14,22
53,28	13,5	13,97	13,88
68,17	13,0	13,41	13,31
80,0	12,5	13,07	12,95
89,5	12,0	12,83	12,70
99,8	11,5	12,60	12,46
118,7	11,0	12,25	12,10
143	9,8	11,88	11,74
190	8,7	11,34	11,15
300	7,4	10,52	10,29
500	6,2	9,67	9,40
620	5,4	9,34	9,05
1440	2,1	8,13	7,78
		$b = 26,80$	$c = 322540$
		$m = 0,16426$	$m = 0,0170$
			$a = 9,3964$

Tabelle X. Dauer der Torsion 2'.

0,73	45,3	45,26	45,16
0,97	43,3	43,20	43,17
1,11	42,3	42,25	42,24
1,28	41,3	41,27	41,29
1,49	40,3	40,25	40,30
1,73	39,3	39,28	39,33
2,02	38,3	38,29	38,37
2,35	37,3	37,35	37,43
2,76	35,3	36,38	36,46
3,27	35,3	35,38	35,48
3,92	34,3	34,34	34,44
4,68	33,3	33,36	33,46
5,67	32,3	32,32	32,42
6,92	31,3	31,28	31,37
6,45	30,3	30,27	30,35
10,37	29,3	29,27	29,33
11,50	28,8	28,78	28,84
12,75	28,3	28,29	28,35
14,07	27,8	27,84	27,89
15,70	27,3	27,34	27,38
17,75	26,8	26,80	26,81
20,13	26,3	26,25	26,26
23,12	25,8	25,66	25,65
26,25	25,3	25,13	25,11
29,62	24,8	24,64	24,61
33,47	24,3	24,14	24,10
37,62	23,8	23,69	23,63

t	x beob.	x ber. nach den Formeln: $x = bt^{-m}$	$x = ce^{-at^n}$
42,50	23,3	23,22	23,14
46,45	22,8	22,88	22,80
50,17	22,3	22,59	22,50
54,00	21,8	22,32	22,22
60,58	21,3	21,90	21,78
67,67	20,3	21,51	21,37
82,00	19,3	20,84	20,68
104,25	18,3	20,03	19,84
125,6	17,3	19,43	19,21
137	16,8	19,16	18,93
183	14,3	18,23	17,96
217	13,3	17,76	17,46
307	10,7	16,78	16,43
425	8,3	15,91	15,52
492	5,3	15,53	15,12
569	4,9	15,16	14,73
1440	2,7	13,02	12,47
		$b = 42,98$	$c = 517310$

Die Constanten aufser b und c sind in X. dieselben wie in IX. Zu Tab. IX. gehört die Curve CC. (Fig. 1 Taf. IV) mit den links stehenden Zahlen.

Die berechneten und beobachteten Gröfsen sind in Skalentheilen gegeben, sind also mit 0,85 zu multipliciren, um die Ablenkung in Bogenminuten zu erhalten, da bei der geringen Abweichung die Tangenten für die Bogen gesetzt werden können. Es war selbstverständlich dafür gesorgt, dafs die Ruhelage nahe in die Mitte der Skale fiel.

Das Verhältnifs der beiden Factoren b oder c für beide Versuchsreihen ist.

1.6038.

Die Factoren werden von der Zeit abhängig seyn, während welcher die Torsion gewirkt hat. Ihr Verhältnifs ist in unserem Falle nahe $= p^{\frac{2}{3}}$, wenn p das Verhältnifs dieser Zeiten ist. Ich hatte die Hoffnung überhaupt die Abhängigkeit der Coëfficienten von der Zeit zu finden, allein wegen der

Unbrauchbarkeit der späteren Reihen mit längerer Dauer der Torsion war diefs nicht möglich.

Merkwürdig ist jedenfalls der Umstand, dafs Torsionen von so kurzer Dauer eine so lange Nachwirkung zur Folge haben können.

VI.

Will man von den mitgetheilten Versuchen einige Anwendungen machen, so bemerkt man sofort die Bestätigung dessen, was Weber über den Grund des grofsen logarithmischen Decrements eines schwingenden Körpers sagt, welcher von der Torsion getrieben wird [1]). Weber setzte diesen Grund in die Nachwirkung, und es läfst sich leicht erweisen, dafs dieselbe wirklich eine Abnahme der Schwingung zur Folge haben mufs.

Es sey das Trägheitsmoment eines solchen Körpers um der Einfachheit willen gleich der Einheit, so ist im luftleeren Raume die Differentialgleichung für seine Bewegung

$$-\frac{d^2x}{dt^2}=D$$

wenn x die zur Zeit t bestehende Elongation, und D das Drehungsmoment ist. Das letztere zerfällt nun bei der Torsion in zwei Theile. Ist a der Torsionscoëfficient, so ist ax das Drehungsmoment, wenn der Gleichgewichtszustand erreicht ist. Vermöge der Nachwirkung aber ist diefs noch nicht der Fall, und es komme deswegen noch das Moment γ hinzu.

Dann wird die Differentialgleichung

$$-\frac{d^2x}{dt^2}=ax+\gamma.$$

Deren Integral ist

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-ax^2-2\int\gamma dx+\text{Const.}$$

wo v die Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Zur Zeit Null gehe der Körper durch die Ruhelage und habe die Winkelgeschwindigkeit v_0, dann ist

$$v_0{}^2=\text{Const.}$$

1) *Comm. Soc. Gott. VIII*, p. 50.

weil ax^2 und das Integral in der vorigen Gleichung offenbar Null wird.

Demnach hat man

$$v^2 = v_0{}^2 - ax^2 - 2\int_0^x \gamma dx$$

γ ist eine wegen der fortwährenden Veränderung der Torsion unbekannte Function von x und t; da wir aber t als Function von x ansehen können, so ist es erlaubt, γ als Function von x zu betrachten; nur müssen verschiedene Formen dieser Function angenommen werden, je nachdem sich der Balken von der Ruhelage fort oder zu derselben hin bewegt; denn im letzteren Falle hat die Torsion bereits länger und auch für gröfsere Torsionswinkel gewirkt. Wenn wir für den ersten Fall γ_1 für den zweiten γ_2 als Function annehmen, so ist γ_1 also gröfser als γ_2 für dasselbe x. Zerlegen wir, um die Geschwindigkeit auf dem Rückwege zu bestimmen, das bestimmte Integral und schreiben, wenn φ die gröfste Elongation ist:

$$\int_0^x \gamma dx = \int_0^\varphi \gamma_1 dx + \int_\varphi^x \gamma_2 dx = \int_0^x \gamma_1 dx + \int_x^\varphi (\gamma_1 - \gamma_2) dx,$$

so haben wir für die Geschwindigkeit v_1 auf dem Rückwege

$$v_1{}^2 = v_0{}^2 - ax^2 - 2\int_0^x \gamma_1 dx - 2\int_x^\varphi (\gamma_1 - \gamma_2) dx$$

$\gamma_1 - \gamma_2$ ist wie schon erwähnt positiv, ferner $\varphi > x$, also das zweite Integral positiv. Daraus folgt, dafs für jeden Winkel auf dem Rückwege die Geschwindigkeit kleiner ist, als auf dem Hinwege. Dasselbe gilt für den Nullpunkt, wo man hat

$$v_1{}^2 = v_0{}^2 - 2\int_0^\varphi (\gamma_1 - \gamma_2) dx.$$

Die Geschwindigkeit bei dem nächstfolgenden Durchgang durch die Ruhelage ist also kleiner als die bei dem vorhergehenden. Mit dieser Geschwindigkeit nimmt aber offenbar die Amplitude ab, und es folgt, dafs ohne einen äufseren Widerstand allmählich Ruhe eintreten mufs.

Diese unter geeigneten Verhältnissen sehr bedeutende Dämpfung ist sofort in die Augen fallend, wenn man eine schwingende Magnetnadel mit einem ungefähr gleichen Waagebalken vergleicht, welcher von der Torsion getrieben wird. Die erstere schwingt meistens stundenlang fort, der letztere aber kommt sehr bald zur Ruhe. Weber hat indefs den nicht vom Luftwiderstand herrührenden Theil des logarithmischen Decrements direct nachgewiesen, indem er die Wirkung des ersteren mittelst der Luftpumpe eliminirte [1]).

Die Nachwirkung verursacht demnach einen Verlust an lebendiger Kraft, und zwar ohne dafs demselben eine äufsere Arbeit zu entsprechen scheint. Die Dämpfung durch die Luft wird durch Uebertragung von Bewegung an dieselbe hervorgebracht; in unserem Falle dagegen findet sich nach der Beruhigung der Schwingung nichts äufseres, was wir als die entsprechende Arbeit bezeichnen könnten. Auch von einer bleibenden Veränderung des Fadens kann kaum die Rede seyn, weil eine solche bei einem Faden, welcher lange gebraucht wird, in infinitum fortgehen müfste, ebensowenig, wie nach abwechselnden Bewegungen der Molecüle in entgegengesetztem Sinne, welche immer kleiner und zuletzt Null werden, bei dem Aufhören der Schwingungen eine von der Nachwirkung herrührende also allmählich verschwindende Veränderung zurückbleiben wird, welche als Arbeit aufgefafst werden könnte. Eine Arbeit aber mufs vorhanden seyn, und man wird demgemäfs auf den Schlufs geführt, dafs bei den Bewegungen in elastischen Körpern durch die Nachwirkung Wärme frei wird. — Versuche über den Gegenstand sind mir nicht bekannt.

Dieser Vorgang wäre dann aber ganz eigenthümlicher Art, denn während man annimmt, dafs die Wärme, welche sonst durch die Gestaltsveränderung eines elastischen Körpers hervorgebracht wird, bei dem Zurückkehren in die

1) *Comm. Soc Gott. VIII, p.* 50.

frühere Gestalt wieder verbraucht wird, oder umgekehrt, woraus bei periodischen Bewegungen in Summa gar keine frei gewordene oder verbrauchte Wärme resultirt, müfste eben der Theil, welcher mit der Nachwirkung zusammenhängt, diesem Gesetze nicht unterworfen seyn.

Man kann ferner aus den mitgetheilten Versuchen das freilich negative Resultat ziehen, dafs die Torsionskraft als Mittel zur Messung sehr mifslich oder im günstigsten Falle unbequem ist, wenn es nämlich gelingt, die Nachwirkung in Rechnung zu ziehen. Auch der elastischen Kraft des Glases, welches den Metallen wenigstens noch weit vorzuziehen scheint, darf man sich zu vielen Versuchen nicht bedienen, wenn man grofse Genauigkeit erreichen will. Doch wird es gerade bei ihm wegen seiner Unveränderlichkeit am ersten möglich seyn, die oben gegebenen oder andere Formeln zur Correction anzuwenden. Keine Frage aber ist, dafs die bifilare Aufhängungsmethode, welche doch auch eine sehr grofse Empfindlichkeit erlaubt, von den Fehlern der Torsion frei ist und endlich die Gröfsen in absolutem Maafse giebt, noch eine viel ausgebreitetere Anwendung verdient.

Wie wenig zuverlässig Metalldrähte seyn können, davon möge hier noch ein Beispiel Platz finden, wenn es auch vielleicht nicht mit dem Hauptgegenstande der Abhandlung zusammenhängt. — Es ist nämlich bekannt, dafs durch Glühen weich gewordene Metalldrähte ihre Elasticität oft dadurch wieder gewinnen, dafs man sie starken mechanischen Einflüssen, der Compression, der Torsion oder dem Zuge unterwirft. Um zu sehen, ob dadurch nur die Elasticitätsgränze oder auch der Elasticitätsmodulus geändert werde, beobachtete ich die Schwingungsdauer eines Waagebalkens an einem ausgeglühten Eisendraht und dieselbe mehrmals, nachdem das Gewicht sehr stark in drehende Schwingung versetzt war. Es fand sich, dafs sie bei diesen Versuchen zunahm und zwar allmählich von 6",256 auf 6",411 gebracht wurde. Hieraus ist ersichtlich, dafs man sich, wenn ein solcher Draht zu Schwingungsversuchen angewandt wird, hüten mufs, denselben in starke Bewegung kommen zu lassen oder ihn weit von der Ruhelage zu entfernen, weil die Elasticität sich dadurch ändern kann. Bei dem Glase wird man nach seinen sonst bekannten Eigenschaften eine derartige Veränderung nicht voraussetzen.

Ob diese Erscheinung auch mit der Nachwirkung zusammenhänge, kann ich nicht entscheiden; es leuchtet aber ein, dafs gröfsere oder geringere Nachwirkung auch auf die Schwingungsdauer Einflufs haben kann, und dafs die erstere durch grofse Bewegungen vielleicht modificirt wird.

Schliefslich möge es noch erlaubt seyn, auf die Bemerkung Webers hinzuweisen, dafs dem Elasticitätsmodulus, welcher eine so hohe Rolle in der Elasticitätslehre spielt, eine bestimmte Bedeutung nicht untergelegt werden kann, wenn man nicht blofs die Zustände des wirklichen Gleichgewichts ins Auge fafst. Wie wenig indefs die Thatsache der elastischen Nachwirkung gewürdigt wird, zeigt unter anderem eine Bemerkung Wertheims in seinen umfassenden Untersuchungen über die Elasticität [1]), wo er den Umstand, dafs die aus den Tonhöhen erhaltenen Elasticitäts-Coëfficienten stets höher sind als die aus den Verlängerungen gefundenen, als Beweis ansieht, dafs bei den Schwingungen Wärme erzeugt wird, dafs bei denselben also Verdichtung stattfinde. Aus dem Verhältnifs der beiden Elasticitäts-Moduln könne nach einer Formel von Duhamel das Verhältnifs $\frac{c_1}{c_2}$ der specifischen Wärme unter constantem Druck zu der bei constantem Volumen gefunden werden.

Wenn auch kaum geleugnet werden wird, dafs eine solche Verdichtung statt hat, so mufs doch dieser Beweis als nicht streng betrachtet werden, denn es ist klar, dafs auch ohne die Wärme-Erregung durch Verdichtung die Nachwirkung allein ein entsprechendes Resultat geben würde. Daraus folgt auch, dafs die gegebene Art der Berechnung von $\frac{c_1}{c_2}$ nicht zulässig ist. — Beweisend für die Verdichtung

1) Wertheim, Pogg. Ann. 1848. Erg.-Bd. 2, S. 69.

bei Schwingungen ist übrigens die von Wertheim gefundene Ausnahme, welche das Eisen von der oben gegebenen Regel macht. Bei ihm nämlich, dessen Elasticitätsmodulus mit wachsender Temperatur Anfangs abnimmt, ist derselbe aus Tonhöhen berechnet kleiner, als aus den Verlängerungen. Daraus scheint also nicht nur eine Wärmeentwickelung bei den Schwingungen zu folgen, sondern auch ein Ueberwiegen des verzögernden Einflusses der letzteren über den beschleunigenden der elastischen Nachwirkung.

Man sieht auch, wie aus den von Wertheim gemachten Beobachtungen Schlüsse auf die Nachwirkung gemacht werden könnten, wenn es gelänge, den Einfluss der Wärmeentwickelung auf die Bewegung schwingender Körper zu bestimmen.

II. *Ueber die optischen Eigenschaften der Metalle; von G. Quincke.*

(Aus d. Monatsber. d. Berl. Akad., März 1863.)

Während man sich schon seit langer Zeit mit den Eigenschaften des von Metallen reflectirten Lichtes beschäftigt hat, ist das durch Metalle hindurchgegangene Licht nur wenig untersucht worden, zum Theil wohl wegen der technischen Schwierigkeiten, die die Herstellung und Handhabung durchsichtiger Metallblättchen bietet. Das Wenige, was man über das von Metallen durchgelassene Licht weiss, z. B. durch die neueren Arbeiten von Hrn. Faraday [1]), bezieht sich fast ausschliesslich auf die Intensität und Farbe desselben. Die letztere zeigte sich dabei für dasselbe Metall so veränderlich, dass man den Grund dieser Veränderlichkeit in Lö-

1) *Philosoph. Transact.* 1857, *p.* 145. *Experimental researches in chemistry and physics. IV*, *p.* 391.