Dieses Resultat, das man nicht erwartet, mahnt zu grofser Vorsicht in der Deutung unserer Zahlen. Ich beabsichtige zunächst solche Salze zu studiren, die in Alkohol absolutus auch bei niederer Temperatur leichtlöslich sind, und hoffe in der nächsten Mittheilung die Ergebnisse für die Salze des Zinks, Cadmiums, Eisens, Mangans u. s. w. vorlegen zu können. Bei mehreren derselben scheidet sich Wasserstoff an der Kathode während der Elektrolyse aus. Da die Lösung sich jedoch daselbst verdünnt, so läfst sich mein Apparat leicht durch eine kleine Modification auch für diese Untersuchung geeignet erhalten. Ich gedenke alsdann auch auf die Methode von Daniell und Miller und ihre abweichenden Resultate zurückzukommen.

II. *Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche; von H. Helmholtz.*

Die Grundsätze für die Lösung solcher Aufgaben, in denen die Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern in Betracht kommt, sind durch Smaasen und Kirchhof hingestellt worden. Indessen reichen unsere mathematischen Hülfsmittel nur in wenigen der einfachsten Fälle aus, um mittels jener Grundsätze die Lösung der genannten Aufgaben wirklich vollständig durchführen zu können. Es stellen sich hier dieselben Schwierigkeiten in den Weg wie bei den Problemen der Vertheilung statischer Elektricität auf der Oberfläche leitender Körper, Problemen, welche in mathematischer Beziehung die nächste Verwandtschaft mit denen der Stromvertheilung haben. Dazu kommt, dafs wir bisher noch nicht im Stande sind, die Stromintensitäten in anderen als linearen Leitern practisch zu messen, daher würden wir Ergebnisse der Theorie für das Innere der durchströmten körperlichen Leiter nicht einmal mit der Wirklichkeit vergleichen können. Desto gröfsere practische Wichtigkeit haben in neuerer Zeit solche Aufgaben, bei denen die Stromintensität in Verbindungen von körperlichen und linearen Leitern zu bestimmen ist, namentlich durch die thierisch-elektrischen Versuche erhalten. Für sie lassen sich, auch wo die Vertheilung der Ströme im Innern des körperlichen Leiters unbekannt ist, mehrere sehr einfache Gesetze nachweisen, die eine grofse Zahl der bei Versuchen in Betracht kommenden Fragen zu lösen geeignet sind. Ich werde im Folgenden zuerst die hierher gehörigen Theoreme, welche ich gefunden habe, erweisen, dann die Versuche berichten, durch welche ich sie, so weit es anging, zu bestätigen suchte, und endlich die Art ihrer Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche kurz auseinander setzen.

I. Ich beginne mit einem Satze, den wir mit du Bois-Reymond das *der Superposition der elektrischen Ströme* nennen können. Er ist nicht ganz neu; denn für lineare Leitersysteme kann man ihn unmittelbar aus Kirchhof's allgemeinen Formeln herauslesen; für körperliche Leiter, in welche die Elektricität aus linearen einströmt, hat ihn Smaasen [1]) ausgesprochen, und du Bois-Reymond [2]) baut einige seiner Schlüsse auf die Einsicht, dafs es ein solches Princip geben müsse. Aber da ich es nirgends in ganz allgemeiner Form bewiesen fand, und es in dem Folgenden vielfach gebrauchen werde, so hielt ich für nöthig, es hier zuvörderst in voller Allgemeinheit hinzustellen.

Man kann es folgendermafsen aussprechen:

Wenn in einem beliebigen Systeme von Leitern elektromotorische Kräfte an verschiedenen Stellen vorkommen, so ist die elektrische Spannung in jedem Punkte des durchströmten Systems gleich der algebraischen Summe derjeni-

1) Poggendorff's Ann. Bd. 69, S. 161.
2) Unters. über thier. Elektr. Bd. I, S. 647.

gen Spannungen, welche jede einzelne der elektromotorischen Kräfte unabhängig von den anderen hervorbringen würde. Und ebenso sind die mit drei rechtwinklichen Axen parallelen Componenten der Stromintensität gleich der Summe der entsprechenden Componenten, welche den einzelnen Kräften zugehören.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht aus den drei Bedingungen, welche Kirchhof[1]) für die Stromvertheilung in Systemen körperlicher Leiter als nothwendig und ausreichend erwiesen hat. Wir nehmen an, dafs das System aus Stücken von verschiedenem Material zusammengesetzt sey, und bezeichnen innerhalb eines solchen Stückes die elektrische Spannung in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind mit u, die nach innen gerichtete Normale eines Punktes der Oberfläche oder der Berührungsfläche mit einem andern Stücke des Systems mit n, die Leitungsfähigkeit mit k, und dieselben Gröfsen für ein anstofsendes Stück von anderem Material mit u_1, n_1, k_1, so sind die drei Bedingungen für das dynamische Gleichgewicht der Elektricität:

1) für jeden Punkt im Innern:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0.$$

2) für jeden Punkt der Berührungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Material:

$$k\frac{du}{dn}+k_1\frac{du_1}{dn_1}=0.$$

Darin liegt gleichzeitig, dafs an der freien Oberfläche, jenseits welcher wir $k_1=o$ setzen müssen,

$$\frac{du}{dn}=0.$$

3) für jeden Punkt einer Fläche in welcher eine elektromotorische Kraft ihren Sitz hat:

$$u-u'=U$$

wo U die constante Spannungsdifferenz bezeichnet.

1) Pogg. Ann. Bd. 75, S. 189.

Denken wir uns nun die elektromotorischen Kräfte in zwei Gruppen A und B gesondert, und nennen die Spannungen, welche unter dem Einflusse der gleichzeitigen Wirkung der Kräfte aus der Gruppe A und derer aus B eintreten, wie bisher u, die von den Kräften A allein hervorgerufenen v, die von den Kräften B allein hervorgerufenen w, so behauptet unser Princip, dafs

$$u = v + w.$$

Ich will zunächst nachweisen, dafs die Function $(v+w)$ statt u in die obigen drei Bedingungsgleichungen gesetzt, dieselben identisch macht.

Da v und w die elektrischen Spannungen seyn sollen, welche bei der Durchströmung des Systems unter dem Einflusse der betreffenden elektrischen Kräfte aus der Gruppe A oder B eintreten, so mufs ein jedes von ihnen einzeln genommen die drei obigen Bedingungen erfüllen. Wir haben also für jeden Punkt im Innern

$$1_a) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

$$1_b) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} = 0$$

für jeden Punkt der Trennungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Widerstande

$$2_a) \quad k \frac{dv}{dn} + k_1 \frac{dv_1}{dn_1} = 0$$

$$2_b) \quad k \frac{dw}{dn} + k_1 \frac{dw_1}{dn_1} = 0$$

für jeden Punkt einer elektromotorischen Fläche, dessen Kräfte der Gruppe A angehören

$$3_a) \quad v - v_1 = U$$

$$3_b) \quad w - w_1 = o$$

oder für jeden, dessen Kräfte der Gruppe B angehören

$$4_a) \quad v - v_1 = o$$

$$4_b) \quad w - w_1 = U.$$

Berücksichtigt man nun, dafs wenn $u = v + w$ ist,

$$\frac{du}{dn}=\frac{d(v+w)}{dn}=\frac{dv}{dn}+\frac{dw}{dn}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2(v+w)}{dx^2}=\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2w}{dx^2}$$

u. s. w.

so erhält man sogleich durch Addition der Gleichungen 1_a und 1_b die Gleichung 1, durch Addition von 2_a und 2_b die Gleichung 2, durch Addition von 3_a und 3_b oder 4_a und 4_b die Gleichung 3. Somit sind alle Bedingungen der Stromvertheilung erfüllt, wenn wir $u=v+w$ setzen, und da Kirchhof nachgewiesen hat, dafs nur eine Function existiren kann, welche alle diese Bedingungen erfüllt, so folgt, dafs $u=v+w$ diese Function sey.

Wie wir nun die Gesammtzahl der vorhandenen elektromotorischen Kräfte in zwei beliebige Gruppen A und B zerlegt haben, so können wir auch wieder A in zwei kleinere Gruppen C und D theilen, B in E und F. Durch die Kräfte der Gruppe C allein möge die Spannung q hervorgebracht werden, durch D oder E oder F beziehlich die Spannungen r oder s oder t. Wir haben dann entsprechend dem vorigen Falle

$$v=q+r$$
$$w=s+t$$
$$u=v+w=q+r+s+t.$$

So können wir die Theilung der Kräfte offenbar beliebig weit fortsetzen.

Auch braucht man die elektromotorische Kraft U irgend eines Punktes in einer elektromotorischen Fläche, nicht ganz in die eine oder andere Gruppe hineinzunehmen, sondern kann sie selbst in zwei Theile V und W theilen, so dafs

$$U=V+W$$

und V in die Gruppe A, W in die Gruppe B kommt. Die dritte Bedingungsgleichung wird dann an dieser Stelle folgende:

$$v-v_1=V$$
$$w-w_1=W$$

daraus folgt

$$u - u_1 = (v + w) - (v_1 + w_1) = V + W = U$$

wie es die Gleichung 3 verlangt.

Somit ist das Princip der Superposition für die elektrischen Spannungen vollständig erwiesen. Es darf natürlich nur bei constanten elektromotorischen Kräften angewendet werden. Hängen diese Kräfte dagegen von der Stromesdichtigkeit ab, so bekommt die dritte Bedingungsgleichung eine andere Form, welche die einfache Addition nicht mehr zuläfst.

Ich bemerke noch, dafs es zuweilen vortheilhaft ist, zu den vorhandenen elektromotorischen Kräften eines leitenden Systems noch andere hinzuzudenken, und die vorhandenen Spannungen als die Differenz der den gesammten und der den hinzugesetzten Kräften zugehörigen Spannungen zu betrachten, ein Verfahren, welches nach dem bewiesenen Principe offenbar erlaubt ist.

Aus dem für die Spannungen bewiesenen Satze folgt sogleich der entsprechende für die Componenten der Stromintensität. Sind erstere u oder v oder w, so sind letztere nach der Axe der x beziehlich

$$-k\frac{du}{dx}, \text{ oder } -k\frac{dv}{dx}, \text{ oder } -k\frac{dw}{dx}$$

und aus

$$u = v + w$$

folgt

$$k\frac{du}{dx} = k\frac{dv}{dx} + k\frac{dw}{dx}$$

und ebenso nach den beiden anderen Axen.

$$k\frac{du}{dy} = k\frac{dv}{dy} + k\frac{dw}{dy}$$

$$k\frac{du}{dz} = k\frac{dv}{dz} + k\frac{dw}{dz}.$$

II. Die folgenden Sätze beziehen sich auf den Fall, wo constante elektromotorische Kräfte von beliebiger Zahl und Vertheilung im Innern eines beliebig zusammengesetzten Leitersystems A wirksam sind, und an die Oberfläche von

A ein anderer Leiter *B* angelegt wird, in welchen ein Theil der *A* durchkreisenden Ströme abgeleitet wird. Wir können daher *A* den *abgeleiteten* und *B* den *ableitenden* Leiter nennen. Wir setzen zunächst voraus, dafs in *B* und an seinen Berührungsstellen mit *A* keine elektromotorischen Kräfte vorkommen. Es wird dadurch die allgemeine Brauchbarkeit der folgenden Sätze für beliebige Fälle der Anwendung nicht beschränkt, da man nach dem Principe der Superposition die Ströme, welche von den inneren Kräften des Leiters *A* in dem Systeme erregt werden, erst mit Anwendung der folgenden Theoreme gesondert bestimmen, und nachher die hinzufügen kann, welche Kräften im Innern von *B* oder an den Berührungsstellen von *A* und *B*, wenn dort solche vorkommen, angehören.

1) Ich lasse zunächst einen Satz folgen, welchen wir wohl passend das *Princip von der elektromotorischen Oberfläche* nennen können:

> *Für jeden Leiter A, in dessen Inneren elektromotorische Kräfte beliebig vertheilt sind, läfst sich eine bestimmte Vertheilung elektromotorischer Kräfte in seiner Oberfläche angeben, welche in jedem angelegten Leiter B dieselben abgeleiteten Ströme wie die inneren Kräfte von A, hervorbringen würde.*

Diese Vertheilung wird folgendermafsen gefunden. Man nehme den Leiter *A* isolirt, ohne Verbindung mit anderen Leitern, bestimme die elektrische Spannung, welche ein jeder Punkt seiner Oberfläche bei den durch seine inneren Kräfte erregten Strömen annimmt, und setze die gesuchte elektromotorische Kraft der Oberfläche in der Richtung von innen nach aufsen genommen gleich dieser elektrischen Spannung, indem man nach Ohms Weise die elektromotorischen Kräfte durch die zugehörigen Spannungsunterschiede gemessen denkt. Ich werde im Folgenden die Oberfläche des Leiters *A*, wenn sie in der angegebenen Weise elektromotorisch wirksam gedacht wird, die *positiv wirksame Oberfläche* nennen, *negativ wirksam* dagegen, wenn ihren Kräften die entgegengesetzte Richtung bei derselben absoluten Gröfse beigelegt werden soll.

Der Beweis des vorstehenden Satzes ergiebt sich am leichtesten in folgender Weise. Man denke die Oberfläche des Leiters *A* *negativ* wirksam gemacht, und dann einen unwirksamen zweiten Leiter *B* angebracht. Aus den von Kirchhof gegebenen drei Bedingungen der Stromvertheilung in dem Systeme $A+B$ ergiebt sich leicht, dafs bei dieser Anordnung gar keine Ströme in *B* entstehen, die elektrische Spannung in seinem Innern überall gleich Null bleibt, und die Ströme und Spannungen, welche vorher in *A* bestanden, unverändert fortbestehen. Im Innern von *A* und im Innern von *B* sind natürlich jene drei Bedingungen, nach wie vor erfüllt, da daselbst alles unverändert bleiben soll. An der Berührungsfläche von *A* und *B* müssen die beiden Gränzbedingungen 2 und 3 des vorigen Paragraphen erfüllt seyn, nämlich

$$k_a \frac{du_a}{dn_a} + k_b \frac{du_b}{dn_b} = 0.$$

$$u_a - u_b = U$$

wo u_a, n_a, k_a die Werthe der betreffenden Gröfsen in A, und u_b, n_b, k_b dieselben in *B* bezeichnet. Berücksichtigen wir nun, dafs u_b, also auch $\frac{du_b}{dn_b}$, überall gleich Null seyn soll, dafs $\frac{du_a}{dn_a}$ ebenfalls gleich Null seyn mufs, weil der betreffende Theil der Oberfläche von *A* vorher zu der freien äufseren Oberfläche gehörte, und dafs *U* nach der Definition der negativ wirksamen Oberfläche gleich u_a seyn mufs, so werden beide Gleichungen identisch, und es sind also in der That unter den angegebenen Umständen alle Bedingungen der Stromvertheilung erfüllt. Die negativ wirksame Oberfläche verhindert vollständig, dafs die Ströme, welche im Innern des Leiters *A* erregt sind, und die zugehörige elektrische Spannung auf andere Leiter übergehen.

Nach dem Principe der Superposition können wir aber die Spannungen und Stromcomponenten im Innern von *B* (deren Gröfse, wie eben bewiesen, überall gleich Null ist) ansehen, als die algebraische Summe derjenigen Spannungen und Stromcomponenten, welche einmal die inneren Kräfte von A für sich allein, und dann die negativ wirksame Oberfläche für sich allein hervorbringen würde. Da nun jene Summe im Innern von B überall gleich Null seyn soll, so müssen ihre beiden Summanden dort überall gleiche absolute Gröfse und entgegengesetztes Zeichen haben. Es bringt also die negativ wirksame Oberfläche für sich allein genau die entgegengesetzten Spannungen und Strömungen hervor, wie die inneren Kräfte von A. Kehren wir nun das Zeichen der elektromotorischen Kräfte in der Oberfläche um, so geschieht dasselbe mit den von ihnen abhängigen Spannungen und Strömungen in A und B. Daraus folgt, dafs die positiv wirksame Oberfläche für sich allein genau dieselben Spannungen und Strömungen in B hervorbringt, wie die inneren Kräfte von A, was zu beweisen war.

2) *Die Spannungen und Stromcomponenten im Innern des abgeleiteten Leiters A während der Ableitung sind gleich der Summe der ohne Ableitung in ihn stattfindenden Spannungen und Stromcomponenten, und derer, welche die positiv wirksame Oberfläche hervorbringt.*

Es trete in dem durch die Coordinaten x, y, z im Innern von A gegebenen Punkte die Spannung W_0 ein, wenn die inneren Kräfte von A in diesem Leiter allein ohne Ableitung Ströme erregen, W_1, wenn sie es in dem verbundenen Leitersystem $A+B$ thun, ferner $+P$, wenn die positiv wirksame Oberfläche, $-P$, wenn die negative Ströme in dem verbundenen Leitersystem erregt. In der vorangegangenen Beweisführung ist gezeigt worden, dafs die negativ wirksame Oberfläche und die inneren Kräfte von A gleichzeitig wirkend, den inneren Zustand von A bestehen lassen, welcher vor der Ableitung bestand, also seine Spannungen gleich W_0 machen. Betrachten wir diese nun nach dem Princip der Superposition als die Summe derer, welche die inneren Kräfte von A für sich, und die negativ wirksame Oberfläche für sich in dem System $A+B$ hervorbringt, so haben wir

$$W_0 = W_1 - P$$

was sich sogleich umschreiben läſst in

$$W_1 = W_0 + P.$$

Diese Gleichung ist aber gerade das, was der obige Satz für die Spannungen aussagt. Differenziren wir sie nach einander nach den drei Coordinataxen, so erhalten wir die entsprechenden Gleichungen für die Stromcomponenten.

3) *Verschiedene Vertheilungsweisen elektromotorischer Kräfte in der Oberfläche des Leiters A, welche dieselben abgeleiteten Ströme, wie seine inneren Kräfte geben sollen, können sich nur um eine, in allen Punkten der Oberfläche denselben constanten Werth habende Differenz unterscheiden.*

Die Strömungen im Innern eines Leitersystems bleiben bekanntlich unverändert, wenn man die Spannungen in allen Punkten um eine constante Gröſse C gröſser oder kleiner macht. Führt man dieſs in dem Leiter A aus vor der Anlegung des Leiters B, und bestimmt dann nach der oben gegebenen Regel die Intensität der elektromotorischen Oberfläche, so findet man auch für diese, welche den oberflächlichen Spannungen gleich seyn soll, überall einen um C gröſseren oder kleineren Werth. Die Gröſse der elektromotorischen Kraft in den einzelnen Punkten der Oberfläche, welche die Wirkung der inneren Ströme nach auſsen ersetzen soll, ist also auszudrücken durch eine gewisse Function der Coordinaten, welcher eine willkührliche Constante hinzuaddirt ist. Es läſst sich aber auch leicht einsehen, daſs es weiter keine Vertheilung elektromotorischer Kräfte an der Oberfläche giebt, welche dasselbe leisten könnte. Gäbe es nämlich zwei verschiedene Vertheilungsarten, welche in dem angelegten Leiter B dieselben Ströme hervorbrächten, so könnte man nach Entfernung der inneren Kräfte von A die eine positiv, die andere negativ anbringen; dann würde jeder Punkt von B

von gleichen und entgegengesetzten Strömen durchflossen werden, d. h. in B würde gar keine Strömung stattfinden. Daraus folgt weiter, dafs auch in A keine stattfinden kann. Denn jede Stromcurve mufs durch eine elektromotorische Fläche hindurchgehen, hier wäre aber die einzige solche die Berührungsfläche von A und B. Wenn aber weder in A noch in B eine Strömung stattfindet, mufs die Spannung innerhalb jedes dieser Leiter constant seyn, und da die elektromotorische Kraft der Gränzflächen gleich dem Spannungsunterschiede ihrer beiden Seiten ist, so mufs diese Kraft, welche in diesem Falle die Differenz der beiden verglichenen Vertheilungsarten ist, in allen Punkten der Oberfläche dieselbe seyn. Es unterscheiden sich also die beiden Vertheilungsarten wieder nur durch eine willkührliche Constante.

Dagegen kann ein und dieselbe elektromotorische Oberfläche unendlich viele Vertheilungsarten elektromotorischer Kräfte im Innern des Leiters entsprechen, welche nur das Gemeinsame haben, dafs sie in den Punkten der Oberfläche dieselben Spannungen hervorbringen.

Ich bemerke noch, dafs man den Leiter A auch in verschiedene Theile A_1, A_2 u. s. w. zerlegt, jeden dieser Theile isolirt und für seine inneren Kräfte nach der oben gegebenen Regel eine elektromotorische Oberfläche gesetzt denken kann. Es werden dann die elektromotorischen Oberflächen der Theile zusammen genommen dieselben Ströme in B hervorbringen, wie die inneren Kräfte. Denn wir können nach der gegebenen Beweisführung die inneren Kräfte jedes einzelnen Theils durch die ihn umschliefsende elektromotorische Fläche ersetzen, wenn wir uns die Kräfte aller anderen Theile wegdenken, und können nachher nach dem Principe der Superposition die Wirkung des ganzen Leiters A als die Summe der Wirkungen seiner einzelnen Theile ansehen.

4. Schliefslich mache ich noch darauf aufmerksam, dafs mit Hülfe unseres Theorems folgender Satz ohne Einschränkung bewiesen werden kann:

Wenn ein körperlicher Leiter mit constanten elektromotorischen Kräften in zwei bestimmten Punkten seiner Oberfläche mit beliebigen linearen Leitern verbunden wird, so kann man an seiner Stelle immer einen linearen Leiter von bestimmter elektromotorischer Kraft, und bestimmtem Widerstande substituiren, welcher in allen angelegten linearen Leitern genau dieselben Ströme erregen würde, wie jener körperliche.

Kirchhof hat diesen Satz nur für den Fall erwiesen, dafs wie in den hydroelektrischen Batterien jede elektromotorisch wirksame Trennungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Material auch den ganzen körperlichen Leiter in zwei vollkommen gesonderte Stücke trennt, so dafs in seinem Innern nirgends vollständig geschlossene Stromescurven vorkommen, sondern diese Curven alle auch den linearen Leiter durchlaufen. Ersetzen wir aber die inneren Kräfte des körperlichen Leiters durch solche seiner Oberfläche, wobei hier nur die beiden Punkte derselben zu berücksichtigen sind, welche mit dem linearen in Verbindung stehen, so führen wir den allgemeinen Fall auf den von Kirchhof behandelten zurück, und der Beweis des speciellen Falls wird dadurch auch für den allgemeinen gültig. Der Widerstand des zu substituirenden linearen Leiters ist gleich dem des Körpers, wenn ein Strom von den beiden Eintrittspunkten der linearen Leitung aus durch ihn hindurchgeleitet wird.

Was für jeden körperlichen Leiter gilt, gilt auch für den speciellen Fall eines verzweigten linearen Stromsystems. Auch ein solches, wenn zwei bestimmte Punkte desselben mit beliebigen anderen linearen Leitern verbunden werden, verhält sich diesen gegenüber wie ein linearer Leiter von bestimmtem Widerstande, dessen Gröfse man nach den bekannten Regeln für verzweigte Leitungen findet, und von bestimmter elektromotorischer Kraft, welche durch den Spannungsunterschied der abgeleiteten Punkte, wie er vor der Ableitung bestand, gegeben wird. An Beispielen be-

$$i_0 = -\frac{A}{w_0+w_1} - \frac{s w_1}{w_0 w_2 + w_0 w_1 + w_1 w_2}$$
$$= -\frac{A(w_1+w_2)}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}$$

und

$$i_1 = \frac{A}{w_0+w_1} - \frac{s w_0}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}$$
$$= \frac{A w_2}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}$$

Genau so wie es aus der Elimination der gewöhnlich gebrauchten Gleichungen

$$i_0 + i_1 + i_2 = 0$$
$$i_1 w_1 = i_2 w_2 = i_0 w_0 + A$$

gefunden wird.

III. Ich mufs hier zunächst die Beziehungen erörtern, in welchen die aufgestellten Sätze zu gewissen anderen aus der Theorie der statischen Elektricität und des Magnetismus stehen.

In einer früheren Abhandlung [1]) habe ich schon die Thatsache, dafs elektromotorisch differente Körper, welche sich berühren, eine constante Spannungsdifferenz zeigen, mathematisch so ausgesprochen, dafs die Potentialfunction aller freien Elektricität in ihnen um eine constante Differenz verschieden seyn müsse, unabhängig von der Gestalt und Gröfse der beiden Leiter. Zwar ist in der angeführten Stelle nicht das Wort »*Potentialfunction*« sondern »*freie Spannung*« gebraucht, aber auf Seite 41 und 42 derselben Schrift findet sich die Definition des Begriffs der freien Spannung, welche identisch ist mit dem, was Gaufs Potential, Green Potentialfunction genannt hat [2]).

Spä-

1) Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847, S. 47.

2) Ich benutzte diese Gelegenheit auf einige von Clausius besprochene Punkte der erwähnten Schrift folgendes zu erwiedern. Die Abweichung, welche er in diesen Annalen Bd. LXXXVI, S. 343, Anm. 2 berührt, beruht nur auf einem Unterschiede des Namens, nicht der Sache. Definirt man das Potential zweier Massen auf einander als die Summe der Potentiale aller Massenelemente der einen auf alle der andern, so kann

stätigt es sich sehr leicht, dafs man nach dieser Regel die von verzweigten Leitungen abgeleiteten Ströme ebenso grofs findet, wie nach den früher bekannten Regeln. Wählen wir das einfachste dieser Beispiele. Ein einfacher Stromeskreis werde durch zwei beliebig angenommene Punkte a und b, in denen später noch andere lineare Leitungen mit ihm verbunden werden sollen, in zwei Theile getheilt gedacht, deren einer den Widerstand w_0, der andere den Widerstand w_1 habe, jener enthalte auch die elektromotorische Kraft A, deren Gröfse dem Spannungsunterschiede an der erregenden Stelle gleich ist. Nach Ohm's Spannungsprincipien nimmt die Spannung von der positiven Seite der erregenden Stelle längs dem Leitungsdrahte auf Stücken von gleichem Widerstand um ein Gleiches ab bis zur negativen Seite der erregenden Stelle. Der Spannungsunterschied s der Punkte a und b, welche um ein Stück von den Widerstande w_1 von einander entfernt sind, ergiebt sich danach

$$s = \frac{A w_1}{w_1 + w_0}.$$

Diese Gröfse s ist die elektromotorische Kraft des zu substituirenden linearen Leiters. Dessen Widerstand mufs dem Widerstande der beiden Stücke w_0 und w_1 gleich seyn, wenn sie nebeneinander von a nach b durchströmt werden; also

$$W = \frac{w_0 w_1}{w_0 + w_1}.$$

Verbinden wir also die bestehende Leitung in den Punkten a und b mit einem dritten linearen Leiter vom Widerstande w_2, und nennen die Intensitäten von a nach b gerechnet in den drei Leiterstücken w_0, w_1 und w_2 beziehlich i_0, i_1, i_2, so ist nach unserm Theorem

$$i_2 = \frac{s}{W + w_2} = \frac{A w_1}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}.$$

Die Intensitäten i_0 und i_1 finden sich nach dem zweiten Satze dieses Abschnitts

Später hat Kirchhof dasselbe auf die elektromotorisch differenten Körper in geschlossenen galvanischen Kreisen ausgedehnt, und nachgewiesen, dafs dasjenige, was man bisher als verschiedene Spannung oder Dichtigkeit der Elektricität in durchströmten Körpern bezeichnet hatte, der verschiedene Werth der Potentialfunction sey, und dafs in constant durchströmten homogenen Leitern diese Function nur solcher freier Elektricität angehören könne, welche auf der Oberfläche und aufserhalb der Leiter vertheilt sey.

Gaufs hat gezeigt [1]), dafs wenn Elektricität (oder Magnetismus) in einer Fläche verbreitet sey, und zwar die Menge k auf der Flächeneinheit, die Potentialfunction auf beiden Seiten einer solchen Fläche keine verschiedenen Werthe habe, wohl aber ihr Differentialquotient, in

man bei der Bildung des Potentials einer Masse auf sich selbst, entweder die Potentiale aller Combinationen oder aller Variationen je zweier Elemente summiren. Im letzteren Falle wird die Summe doppelt so grofs als im ersten. Da ich bei der Abfassung jener Schrift in der mir zu Gebote stehenden Literatur nichts über einen etwa schon feststehenden Gebrauch dieses Begriffs ermitteln konnte, zog ich es vor, in der Consequenz der von mir vorausgeschickten Definitionen zu bleiben, welche den Variationen den Vorzug gab. Uebrigens gebe ich es gern zu, dafs die andere Definition von dem Begriffe des Potentials einer Masse auf sich selbst, welche bei der Summirung nur die Combinationen wählt, für die übrigen Beziehungen des Potentialbegriffes angemessener ist, so wie sie denn auch allein der Definition dieses Begriffs von Neumann entspricht. Meine Formeln sind also streng richtig, wenn man meine Definition zu Grunde legt, und lassen sich in die von Clausius unmittelbar übertragen, wenn man jedem Potential einer Masse auf sich selbst den Factor 2 hinzusetzt. — Zu S. 362 Anm. bemerke ich, dafs der Begriff »Ableitungsgröfse« für Leidener Flaschen schon von anderen Physikern gebraucht ist, und da es an einer mathematischen Definition fehlte, ich als solche die Gleichung $CS = Q$ auf Seite 43 meiner Schrift hingesetzt habe. — Wenn Hrn. Clausius auf S. 343 Anm. 1 einige Stellen jener Schrift »ungenau« erscheinen, so werden sie hoffentlich von diesem Vorwurfe nur in dem Sinne getroffen werden, in welchem jede Anwendung eines mathematischen Gesetzes auf die Wirklichkeit ungenau ist, weil stets eine Reihe von Nebeneinflüssen unberücksichtigt bleibt.

1) Result. d. magnet. Vereins, 1839, S. 27.

der Richtung senkrecht gegen die Fläche genommen. Nennen wir diesen $\frac{du}{dn_1}$ auf der einen, und $\frac{du}{dn_2}$ auf der andern Seite der Fläche, wobei vorausgesetzt wird, dafs die Normalen der Fläche von ihrem Fufspunkt in dieser nach entgegengesetzten Richtungen hin gemessen werden, so ist nach Gaufs

$$1)\quad \frac{du}{dn_1}+\frac{du}{dn_2}=-4\pi\varkappa.$$

Ein solcher Fall kommt gemäfs Kirchhof's zweiter Bedingung für das dynamische Gleichgewicht der Elektricität in durchströmten Leitersystemen an den Berührungsflächen zweier Leiter von verschiedenem Widerstande und gleicher elektromotorischer Kraft vor. Hier ist die Potentialfunction auf beiden Seiten der Fläche von gleichem Werthe, aber ihr Differentialquotient verschieden.

Denken wir uns dagegen eine Fläche auf einer Seite mit positiver Elektricität, auf der andern mit einer gleichen Quantität negativer belegt, beide Schichten in verschwindend kleiner Entfernung von einander, so werden, der Gleichung 1) entsprechend, die Differentialquotienten der Potentialfunction auf beiden Seiten der belegten Fläche gleich, die Werthe dieser Function selbst aber verschieden seyn. Nehmen wir an, um die Gröfse ihres Unterschiedes zu bestimmen, dafs zunächst nur eine solche Schicht da sey, welche in der Fläche Ω selbst liege. Ihre Potentialfunction in einem Punkte der Oberfläche von der Dichtigkeit $\varkappa$ sey u, deren Differentialquotienten nach der einen Seite $\frac{du}{dn_1}$, nach der andern $\frac{du}{dn_2}$. Verlegen wir nun die elektrische Schicht in die verschwindend kleine Entfernung ε von der Fläche Ω nach der Seite der Normale n_1 hin, so entsteht dadurch eine verschwindend kleine Variation der Potentialfunction. Der Werth dieser Function in der elektrischen Schicht selbst wird also nun $u+\varepsilon\delta u$, und in einer unendlich kleinen Entfernung Δn_1 von der Fläche Ω (oder $\Delta n_1-\varepsilon$ von der elektrischen Schicht):

$$U_1 = u + \varepsilon\delta u + \frac{du}{dn_1}(\Delta n_1 - \varepsilon) + \frac{d\delta u}{dn_1}\varepsilon(\Delta n_1 - \varepsilon)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dn_1^2}(\Delta n_1 - \varepsilon)^2 + \text{etc.}$$

in der unendlich kleinen Entfernung Δn_2 nach der andern Seite von Ω dagegen:

$$U_2 = u + \varepsilon\delta u + \frac{du}{dn_2}(\Delta n_2 + \varepsilon) + \frac{d\delta u}{dn_2}\varepsilon(\Delta n_2 + \varepsilon)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d_2 u}{dn_2^2}(\Delta n^2 + \varepsilon)^2 + \text{etc.}$$

Nehmen wir nun die gleichzeitige Existenz von zwei Schichten an, eine von der Dichtigkeit $+\varkappa$ in der Entfernung $+\varepsilon$, die andere von der Dichtigkeit $-\varkappa$ in der Entfernung $-\varepsilon$ von der Fläche Ω, so wird mit Weglassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung

$$U_1 = 2\varepsilon\delta u - 2\varepsilon\frac{du}{dn_1}$$
$$U_2 = 2\varepsilon\delta u + 2\varepsilon\frac{du}{dn_2}$$

also

$$U_1 - U_2 = -2\varepsilon\left(\frac{du}{dn_1} + \frac{du}{dn_2}\right) = 8\pi\varkappa\varepsilon$$

und wenn wir nach Analogie der Magneten die Gröfse $2\varepsilon\varkappa = m$ das elektrische Moment der Flächeneinheit nennen, wird

$$2)\quad U_1 - U_2 = 4\pi m.$$

Ist also der Unterschied der Potentialfunctionen gegeben, so ist dadurch auch das elektrische Moment des betreffenden Theils der Fläche gegeben.

Ein entsprechender Fall tritt in durchströmten Leitersystemen an solchen Flächen ein, wo sich Leiter von gleichem Widerstande und verschiedener elektromotorischer Kraft berühren. Hier hat die Potentialfunction nach Kirchhof's dritter Bedingungsgleichung auf beiden Seiten verschiedene Werthe, und die Gröfse ihres Unterschiedes ist gleich der elektromotorischen Kraft der betreffenden Stelle. Diese letztere mufs also gleich $4\pi m$ seyn. Dagegen ist der Differentialquotient der Spannung, nach beliebiger Richtung genommen, auf beiden Seiten gleich.

Wo sich Leiter von ungleicher elektromotorischer Kraft und ungleichem Leitungsvermögen berühren, müssen dagegen sowohl die ganze Function als ihr Differentialquotient auf beiden Seiten der Fläche verschiedene Werthe haben, was sich erreichen läfst, wenn an die entgegengesetzten Seiten der Fläche Schichten von entgegengesetzten Elektricitäten und ungleicher Dichtigkeit angelagert werden.

Ich werde im Folgenden unter einer *elektrischen Doppelschicht* stets nur solche zwei Schichten verstehen, welche an den entgegengesetzten Seiten einer Fläche in unendlich kleiner Entfernung vor ihr liegen, und deren eine ebenso viel positive Elektricität enthält, als die andere negative.

In durchströmten zusammengesezten Leitersystemen sind also alle Gränzflächen zwischen Theilen von verschiedenem Widerstande und alle zwischen ihnen und dem äufseren nicht leitenden Raume mit einer einfachen Schicht Elektricität, aufserdem alle elektromotorischen Flächen mit einer Doppelschicht belegt. Hat man die Aufgabe zu lösen, die Stromvertheilung zu finden, wenn die elektromotorischen Kräfte P gegeben sind, so giebt die Gleichung

$$P = 4\pi m$$

sogleich das Moment m der Doppelschichten, welche den elektromotorischen Flächen entsprechen, und die Aufgabe reducirt sich darauf, zu diesen Doppelschichten die einfachen zu finden, so dafs die Potentialfunctionen von ihnen allen zusammengenommen den Bedingungsgleichungen Kirchhof's genügen.

Betrifft die Aufgabe Verbindungen von linearen körperlichen Leitern, so kann man für die Aufsuchung der Potentialfunctionen die Einströmungspunkte der Elektricität in den körperlichen Leiter als einfache elektrische Massenpunkte betrachten; man erhält bei dieser Substitution rings um sie her dieselbe Gestalt der Potentialfunction, wie sie Smaasen in seiner Untersuchung über die Stromvertheilung im Raume gefunden hat. Es sey A die elektrische

Masse eines solchen Punktes, r seine Entfernung von dem Punkte, dessen Potentialfunction zu bestimmen ist, V der Theil der Potentialfunction, welcher von anderen entfernten Massen eben daselbst hervorgebracht wird, so ist die ganze Potentialfunction

$$\frac{A}{r} + V$$

Ist nun $d\omega$ ein Element einer beliebigen Oberfläche, welche den Punkt A, aufser ihm aber keinen andern elektrischen Massenpunkt einschliefst, und n die nach innen gekehrte Normale von $d\omega$, so ist nach einem Satze von Gaufs [1])

$$\int \frac{d\left[V + \frac{A}{r}\right]}{dn} d\omega = 4\pi A$$

wo das Integral über die ganze Fläche auszudehnen ist. Bezeichnen wir die Leitungsfähigkeit des körperlichen Leiters mit k, so ist die gegen $d\omega$ normale Stromcomponente gleich

$$-k \frac{d\left[V + \frac{A}{r}\right]}{dn}$$

folglich die ganze durch die geschlossene Oberfläche von innen nach aufsen strömende Elektricität

$$+ 4\pi A k.$$

Da diese Elektricitätsmenge der aus dem linearen Leiter einströmenden gleich seyn mufs, bezeichnet sie zugleich die Stromintensität in dem letzteren. Dadurch bestimmt sich die Gröfse der hypothetischen elektrischen Masse A.

Durch diese Umformung der Aufgaben über Stromvertheilung erlangt man den grofsen Vortheil, ihre Lösungen auf die Betrachtung von Functionen zu reduciren, welche schon mannigfach bearbeitet und in Reihen entwickelt sind, nämlich auf die Potentialfunctionen elektrischer Körper und Flächen. Ebenso kann man auch wiederum rückwärts aus jedem Theorem über Stromvertheilung entspre-

1) l. c. §. 6.

chende und zum Theil neue Theoreme über die Potentialfunctionen der Elektricität und des Magnetismus herleiten, doch würde uns das hier zu weit von unserem Wege abführen.

In Verbindung mit diesen Betrachtungen eröffnet der Satz von der elektromotorischen Oberfläche uns einen neuen Weg zur Lösung der Aufgabe, die Stromvertheilung in einem begränzten Leiter A von constantem Widerstande zu finden. Statt der elektromotorischen Kräfte in A substituiren wir, nach den angegebenen Regeln, elektrische Massen, und nehmen dann an, dafs A mit einem ableitenden Leiter verbunden werde, und zwar sey B der unendliche äufsere Raum mit derselben leitenden Masse wie A gefüllt. Da nun das zusammengesetzte System $A+B$ nirgend freie Oberflächen, oder Begränzungsflächen von Theilen verschiedenen Widerstandes darbietet, können die elektrischen Massen, von denen die Potentialfunction der es durchströmenden Elektricität abhängt, nur die inneren von A seyn. Daher ist die Spannung in dem zusammengesetzten Systeme $A+B$ gleich der Potentialfunction der inneren Massen von A, und somit gegeben. Nun soll auch die elektromotorische Oberfläche von A allein in B dieselben Spannungen hervorbringen, wie die inneren Kräfte von A; es mufs also ihre elektrische Potentialfunction (wenn sie als Doppelschicht betrachtet wird) im äufsern Raume B der der inneren Massen von A gleich seyn. Kennen wir die elektromotorische Oberfläche von A, so kennen wir in diesem Falle also auch die Spannungen und Ströme, welche sie in dem System $A+B$ hervorbringt. Nun sind aber nach dem Satze II. 2) die Ströme, welche in dem Leiter A ohne Ableitung kreisen, gleich der Differenz derjenigen, welche einmal die inneren Kräfte von A, dann die elektromotorische Oberfläche in dem abgeleiteten System $A+B$ hervorbringen würden. Daher reducirt sich die Aufgabe, in dem Leiter von constantem Widerstande A die Vertheilung der Ströme zu finden auf die andere: *diejenige elektrische Doppelschicht an seiner Oberfläche zu* *finden, welche nach aufsen dieselbe Potentialfunction giebt, welche seine inneren elektrischen Massen geben.* Diese Umformung der Aufgabe ist wesentlich verschieden von der, welche aus Kirchhof's Theoremen herfliefst. Nach der letzteren würden wir eine einfache elektrische Schicht zu suchen haben, welche an der Gränze des Körpers denselben Differentialquotienten der Potentialfunction, senkrecht gegen die Oberfläche genommen, gäbe wie die inneren elektrischen Massen. Jene Umformung leitete mich in der That in einigen Fällen zur vollständigen Lösung, wo ich diese aus Kirchhof's Theoremen nicht herzuleiten wufste. Als Beispiel will ich hier die Stromvertheilung in einer gleichmäfsig leitenden Kugel behandeln.

Wir wenden Polarcoordinaten an, die sich auf den Mittelpunkt der Kugel beziehen, und setzen

$$x = \varrho \cos \omega$$
$$y = \varrho \sin \omega \cos \varphi$$
$$z = \varrho \sin \omega \sin \varphi,$$

bezeichnen den Radius der Kugel mit R, und setzen $\frac{R}{\varrho} = u$ und $\frac{\varrho}{R} = v$. Alsdann findet bekanntlich folgende Beziehung zwischen der Potentialfunction V_a einer auf der Kugeloberfläche verbreiteten elektrischen Schicht für die Punkte des äufsern Raums genommen, und der andern V_i für den innern Raum der Kugel statt:

$$3) \quad \begin{cases} \text{wenn } V_a = \frac{1}{\varrho} F_{(\omega,\, \varphi,\, u)} \\ \text{so ist } V_i = \frac{1}{R} F_{(\omega,\, \varphi,\, v)} \end{cases}$$

Um nun den allgemeinen Ausdruck für die inneren und äufseren Potentialfunctionen einer elektrischen Doppelschicht zu finden, nehmen wir an, auf einer Kugelfläche vom Radius $R + \Delta R$ befinde sich die eine als positiv betrachtete Schicht, und auf einer mit der ersten concentrischen vom Radius $R - \Delta R$ die negative. ΔR wird natürlich als eine verschwindend kleine Gröfse angesehen. Die äufsere Potentialfunction der ersten Schicht ist dann

$V_a + \frac{dV_a}{dR}\Delta R$, die der zweiten $V_a - \frac{dV_a}{dR}\Delta R$; folglich ist die äufsere Potentialfunction der elektrischen Doppelschicht:

$$4)\quad P_a = 2\frac{dV_a}{dR}\Delta R = \frac{2}{\varrho^2}F'_{(u)}\Delta R,$$

und ähnlich die innere Potentialfunction:

$$5)\quad P_i = 2\frac{dV_i}{dR}\Delta R = -2\left[F_{(\varrho)} + \frac{\varrho}{R}F'_{(\varrho)}\right]\frac{\Delta R}{R^2}.$$

Das Zeichen $F'_{(u)}$ ist hier für $\frac{dF_{(u)}}{du}$ gesetzt.

Ist uns nun die Aufgabe gestellt, eine bestimmte Doppelschicht zu suchen, welche die gewissen in der Kugel verbreiteten elektromotorischen Kräften entsprechende elektromotorische Fläche darstellt, so setzen wir zunächst die diesen Kräften entsprechenden elektrischen Massen hin, und bestimmen deren Potentialfunction W. Aufserhalb der Kugel mufs seyn

$$W = P_a = \frac{2\Delta R}{\varrho^2}F'_{(u)} \text{ also}$$

$$F'_{(u)} = \frac{\varrho^2}{2\Delta R}W$$

$$6)\quad F_{(u)} = \frac{1}{2\Delta R}\int \varrho^2 W du + C.$$

Bei der Integration ist zu bemerken, dafs ϱ eine Function von u ist, nämlich gleich $\frac{R}{u}$. Die Constante C ist ganz beliebig. Nachdem man $F_{(u)}$ gefunden hat, ergiebt sich sogleich aus Gleichung 5 die Function P_i, und endlich die elektrische Spannung S in der durchströmten Kugel

$$S = W - P_i \text{ oder}$$

$$7)\quad S = 2\left[\frac{1}{R^2}F_{(\varrho)} + \frac{1}{\varrho^2}F'_{(u)} + \frac{\varrho}{R^3}F'_{(\varrho)}\right]\Delta R.$$

Somit ist das Problem ganz allgemein auf Quadraturen zurückgeführt.

Als besondern Fall will ich den behandeln, wo die Elektricität durch Punkte der Oberfläche in die Kugel einströmt. Der eine von der elektrischen Masse $+A$ habe die Winkelcoordinaten $\omega = \alpha_1$ und $\varphi = o$, der andere von der Masse $-A$ dagegen $\omega = \alpha_2$ und $\varphi = o$. Die Entfernungen r_1 und r_2 dieser beiden Punkte von demjenigen, dessen Coordinaten ϱ, ω und φ sind, finden sich aus den Gleichungen

$$r_1^2 = (\varrho \cos\omega - R\cos\alpha_1)^2 + (\varrho \sin\omega \cos\varphi - R\sin\alpha_1)^2 + \varrho^2 \sin^2\omega \sin^2\varphi$$
$$= \varrho^2 + R^2 - 2R\varrho(\cos\omega\cos\alpha_1 + \sin\omega\sin\alpha_1\cos\varphi)$$
$$r_2^2 = \varrho^2 + R^2 - 2R\varrho(\cos\omega\cos\alpha_1 + \sin\omega\sin\alpha_2\cos\varphi).$$

Setzen wir

$$\gamma_1 = \cos\omega\cos\alpha_1 + \sin\omega\sin\alpha_1\cos\varphi$$
$$\gamma_2 = \cos\omega\cos\alpha_2 + \sin\omega\sin\alpha_2\cos\varphi$$

so ist

$$W = \frac{A}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2\gamma_1 R\varrho}} - \frac{A}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2\gamma_2 R\varrho}}$$

daher nach Gleichung 6

$$F_{(u)} = \frac{1}{2\Delta R}\int \varrho^2\, W du + C$$

oder wenn man ϱ durch u ausdrückt

$$F_{(u)} = \frac{AR}{2\Delta R}\int \left[\frac{1}{u\sqrt{1 + u^2 - 2\gamma_1 u}} - \frac{1}{u\sqrt{1 + u^2 - 2\gamma_2 u}}\right] du + C$$

$$F_{(u)} = \frac{AR}{2\Delta R}\log.\text{nat.}\left\{\frac{1 - \gamma_2 u + \sqrt{1 + u^2 - 2\gamma_2 u}}{1 - \gamma_1 u + \sqrt{1 + u^2 - 2\gamma_1 u}}\right\} + C.$$

Substituirt man die hier gefundene Function $F_{(u)}$ in die Gleichung 7, so giebt sie

$$S = \frac{A}{R}\log.\text{nat.}\left\{\frac{R - \gamma_2\varrho + \sqrt{R^2 + \varrho^2 - 2\gamma_2 R\varrho}}{R - \gamma_1\varrho + \sqrt{R^2 + \varrho^2 - 2\gamma_1 R\varrho}}\right\}$$
$$+ \frac{2A}{\sqrt{R^2 + \varrho^2 - 2\gamma_1 R\varrho}} - \frac{2A}{\sqrt{R^2 + \varrho^2 - 2\gamma_2 R\varrho}} + C.$$

Diese Gleichung ist zugleich auch die der Spannungsflächen, deren Gesetz hiernach ein ziemlich verwickeltes ist. Dasselbe ist für die Strömungscurven der Fall, so dafs es zu weitläuftig seyn würde, es hier weiter auszuführen.

(Schlufs im nächsten Heft.)