III. *Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren;*

von G. Hagen,
Geheimen Ober - Baurathe in Berlin.

Nachdem de Prony und Eytelwein ihre Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Röhren und offenen Kanälen oder Flufsbetten [1]) bekannt gemacht haben, ist dieser Gegenstand in der neuesten Zeit nicht wieder in der Art bearbeitet worden, dafs die aufgestellte Theorie selbst, oder auch nur die aus den Beobachtungen hergeleiteten Constanten eine Aenderung erlitten hätten. Man betrachtete wahrscheinlich diese Gesetze, welche sich ziemlich genau an eine grofse Anzahl verschiedener Beobachtungen anschliefsen, als genugsam begründet. Nichtsdestoweniger lassen sich sowohl gegen die der Untersuchung zum Grunde liegenden Hypothesen, als auch gegen die gewählte Methode der Auffindung der Constanten, manche Zweifel erregen; wozu noch kommt, dafs einzelne Beobachtungen sich mit dieser Theorie nicht in Uebereinstimmung bringen lassen, und endlich ist durch die Versuche, die der Professor Gerstner schon im Jahre 1796 angestellt hatte (unter andern in diesem Journale Bd. V S. 160 mitgetheilt), der grofse Einflufs der Temperatur auf die Beweglichkeit des Wassers nachgewiesen, welcher in den vorerwähnten hydraulischen Formeln ganz unberücksichtigt bleibt.

Diese Umstände dürften eine nochmalige Untersuchung des Gegenstandes rechtfertigen, und indem der

1) *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes, par* R. Prony. *Paris* 1804. — Untersuchungen über die Bewegung des Wassers, von Eytelwein. In den Memoiren der Berliner Academie 1814 und 1815.

Einflufs der Reibung, oder aller sonstigen Hindernisse, welche die Bewegung des Wassers verzögern, sich am deutlichsten bei engen Röhren zu erkennen giebt, so begann ich die Arbeit mit Versuchen, die mit solchen angestellt wurden. Der Apparat, der anfangs dem von Gerstner angewendeten sehr ähnlich war, wurde nach und nach, wie sich der Einflufs mancher damit verbundenen Uebelstände deutlicher herausstellte, in der Art abgeändert, wie er nachfolgend beschrieben ist.

Ich theile die damit erhaltenen Resultate so weit vollständig mit, als sie sich auf den einfachsten Fall beziehen, das heifst, so lange die Geschwindigkeit des gröfsten Theiles der Wasserfäden bedeutend kleiner ist, als die Geschwindigkeit, die der Druckhöhe entspricht. Es wird sich aus dem Folgenden ergeben, dafs eine wesentliche Aenderung der Gesetze eintreten mufs, sobald diese Gränze überschritten wird. — Damit es aber nicht etwa scheinen möchte, als ob ich willkürlich jede Beobachtungsreihe da abgebrochen habe, wo eine Abweichung von dem aufgefundenen Gesetze sich zu erkennen giebt, so mache ich noch auf eine wesentliche Aenderung der Erscheinung selbst beim Ueberschreiten dieser Gränze aufmerksam, die sich in allen diesen Beobachtungsreihen sehr deutlich markirte. Liefs ich nämlich das Wasser frei in die Luft ausströmen, so bildete der Strahl bei kleineren Druckhöhen eine unveränderte Form, und er hatte in der Nähe der Röhre das Ansehen eines festen Glasstabes; sobald aber bei stärkerem Drucke die Geschwindigkeit die bezeichnete Gränze überstieg, so fing er an zu schwanken und der Ausflufs geschah nicht mehr gleichförmig, sondern stofsweise.

Den Apparat, dessen ich mich zuletzt zu den Versuchen bediente, stellt Fig. 1 Taf. IV dar. Den Haupttheil desselben bildet die messingene Durchflufsröhre *A*, die mit anderen ähnlichen von verschiedenem Durchmesser verwechselt werden konnte. Diese Röhren waren in der Werkstatt eines hiesigen namhaften Künstlers über cylindrischen Stahldrähten gezogen. Mit dem einen Ende waren sie in einen aufrecht stehenden blechernen Cylinder *B* gekittet, der das Druckwasser enthielt. Dieser Cylinder hatte 4 Zoll Weite und 18 Zoll Höhe; er war auf einer starken messingenen Platte befestigt, die mit drei Fufsschrauben versehen war, wodurch dem Cylinder eine lothrechte Stellung bequem gegeben werden konnte. Zur Beobachtung des Wasserstandes im Cylinder dient ein leichter Maafsstab *C*, der auf einer messingenen Schale *D* befestigt ist, so dafs er auf dem Wasser im Cylinder schwimmt. Durch drei vortretende Bügel wird die Schale in der Mitte des Cylinders gehalten, und dadurch die unmittelbare Berührung derselben mit der Wand des Cylinders in der Höhe des Wasserspiegels vermieden. Der schwimmende Maafsstab ist in Pariser Linien eingetheilt, und die Ablesung, wobei die Zehntheile der Linien geschätzt werden, geschieht nach einem daneben befindlichen Zeiger; da letzterer jedoch den Maafsstab nicht unmittelbar berühren darf, so ist durch eine besondere Vorrichtung noch für die Vermeidung der Parallaxe beim Ablesen gesorgt.

Die Zuführung des Wassers in den Cylinder *B* erfolgt durch einen daran gelötheten halben Cylinder *E* von gleicher Höhe, der über dem Boden mit dem ersten durch eine weite Oeffnung in Verbindung steht. Zur Regulirung des Wasserzuflusses bediente ich mich eines schwimmenden Hebers. In dem Wasser-Reservoir *F* schwimmt nämlich ein blecherner Kasten *G*, der durch zwei senkrechte Drähte *H* geführt wird, damit er weder seine Stellung verändern, noch auch in der Wasseroberfläche irgendwo anstofsen kann. In einer Röhre, die vom Boden dieses Kastens ausgeht, ist mittelst eines durchbohrten Korkes ein gläserner Heber befestigt, der zur Regulirung des Wasserzuflusses an seiner Mündung einen Krahn trägt.

Die Durchflufsröhre A mündet an ihrem unteren Ende in einen blechernen Kasten K, bei dem eine niedrige Zwischenwand das Wasser nie unter die Mündung der Durchflufsröhre sinken läfst, und in diesen Kasten taucht die Kugel eines Reaumur'schen Thermometers ein, welche sonach die Temperatür des ausströmenden Wassers bezeichnet. Trotz der Zwischenwand in diesem Kasten, zeigen sich daselbst noch merkliche Verschiedenheiten in der Höhe des Wasserstandes, und diese wurden gemessen durch einen besonderen Apparat, Fig. 2 Taf. IV, von 8 Zoll Höhe, der im Wesentlichen in einem senkrechten Cylinder besteht, der mittelst einer Schraube gehoben und gesenkt werden kann, und der, aufser einem kleinen Maafsstabe, der in Fünftheile von Pariser Linien eingetheilt ist, eine abwärts gekehrte scharfe Stahlspitze trägt. Dieser Cylinder wird jedesmal so weit herabgeschroben, bis diese Spitze die Wasserfläche im Kasten berührt, worauf dann durch ein Mikroskop die Höhe des Cylinders am Maafsstabe abgelesen wird. Diese Vorrichtung hatte ich früher nicht angewendet, indem ich die Röhren in freier Luft münden liefs, doch zeigte sich dabei eine grofse Unregelmäfsigkeit, und der Mittelpunkt des Wasserausflusses sank bei kleinen Druckhöhen bedeutend unter den Mittelpunkt der Ausflufsmündung herab.

Das Verfahren beim Experimentiren war nun folgendes. Zuerst liefs ich das Wasser aus dem Cylinder B, indem derselbe keinen Zuflufs bekam, ausströmen, und beobachtete dann nach Intervallen von halben und ganzen Stunden den Maafsstab C, um mich zu überzeugen, dafs selbiger sich wirklich nicht mehr senkte. Es war aber durch Erhöhung des Kastens K dafür gesorgt, dafs die Schale D noch immer frei schwimmen konnte. Sodann wurde der Apparat Fig. 2, nachdem derselbe lothrecht aufgestellt worden war, eingerichtet, so dafs die Stahlspitze den Wasserspiegel berührte, und dadurch ergab sich eine Vergleichung zwischen den Maafsstäben an beiden Enden der Durchflufsröhre. Bei den ferneren Beobachtungen wurde die Mehrhöhe des letzten Maafsstabes in Abzug, und die des Maafsstabes C in Zugang gestellt, um die jedesmalige Druckhöhe zu bestimmen. Durch Wiederholung dieser Vergleichung am Schlusse der Beobachtungsreihe ergab es sich, dafs diese Messung keine Unsicherheit von $\frac{1}{10}$ Linie zuliefs.

Hierauf wurde der Krahn am schwimmenden Heber geöffnet (von dem die einzelnen Wassertropfen bisher besonders abgeleitet waren), und nun mufste der Apparat mindestens eine halbe Stunde lang sich selbst überlassen bleiben, bevor der Abflufs dem Zuflusse genau gleich geworden war, oder bevor der Maafsstab C eine constante Stellung eingenommen hatte. War dieses der Fall, so wurde die Stahlspitze wieder mit der jetzigen Wasserfläche im Kasten K in Berührung gebracht, und der damit verbundene Maafsstab, so wie auch das Thermometer abgelesen. Die Bestimmung der in einer Secunde ausfliefsenden Wassermenge geschah endlich, indem nach dem Schlage eines scharf klingenden Secundenzählers ein zuvor gewogenes leichtes Gefäfs unter die Ausflufsrinne des Kastens K untergeschoben, und nach 20 bis 200 Secunden wieder fortgezogen und dann mit dem Inhalte gewogen wurde. Bei dreimaliger Anstellung dieser letzten Messung fanden sich gemeinhin nur so kleine Differenzen, dafs dieselben nicht leicht einem gröfseren Fehler in der Dauer des Zuflusses als von $\frac{1}{4}$ Secunde entsprachen. Vorkommende Aenderungen in der Temperatur des Wassers erzeugten jedoch, wenn sie auch nur 0,2 Grad betrugen, merkliche Anomalien, und sonach konnte nur diejenige Beobachtungsreihe als sicher angesehen werden, wo solche nicht eingetreten, oder wo die Temperatur des Zimmers constant geblieben war, und die des Wassers mit der des Zimmers übereinstimmte.

Die drei Durchflufsröhren, deren ich mich bediente, haben folgende Dimensionen in Pariser Zollen:

	Länge.	Halbmesser.
die enge Röhre	17,483	0,0471
die mittlere Röhre	40,262	0,0741
die weite Röhre	38,667	0,10905.

Die Halbmesser wurden zuerst mittelst einer mikroskopischen Vorrichtung an beiden Enden der Röhre gemessen, indem jedesmal in kreuzweiser Richtung zwei Durchmesser untersucht wurden. Es fanden sich jedoch dabei sehr merkliche Abweichungen vor. Ich versuchte daher, die in den Röhren enthaltenen Wassermengen durch das Gewicht zu bestimmen, indem ich zunächst die sorgfältig ausgewischten leeren Röhren wog, und dann die Wägung wiederholte, nachdem sie durch Ansaugen gefüllt waren. Für die beiden weiteren Röhren war dieses Verfahren weit sicherer.

Fünf Beobachtungsreihen, welche unter günstigen Umständen angestellt waren, gaben die folgenden Resultate: darin bedeutet h die beobachtete Druckhöhe des Wassers, oder die Niveau-Differenz zwischen dem Wasserstande im Cylinder B und im Kasten K, in Pariser Zollen ausgedrückt, und M die in einer Secunde ausfliefsende Wassermenge in Preufsischen Lothen.

I. Beobachtungsreihe, angestellt mit der engen Röhre bei der Temperatur von $+8^\circ,2$ R.

Für $h = 0,895$ ergab sich $M = 0,0262$
$= 3,621$ $= 0,0995$
$= 7,613$ $= 0,1906$
$= 11,044$ $= 0,2594$
$= 14,887$ $= 0,3288$.

II. Beobachtungsreihe mit der mittleren Röhre bei $+8^\circ,4$ R.

Für $h = 0,491$ ergab sich $M = 0,0384$
$= 3,565$ $= 0,2523$
$= 7,750$ $= 0,4897$.

III. Beobachtungsreihe mit der weiten Röhre bei $+8^\circ,8$ R.

Für $h=0,265$ ergab sich $M=0,1022$
$=0,907$ $=0,3109$
$=1,085$ $=0,3605$
$=2,649$ $=0,7250$
$=3,120$ $=0,8221$.

IV. Beobachtungsreihe mit der mittleren Röhre bei der Temperatur von $+6^\circ,1$ R.

Für $h=0,657$ ergab sich $M=0,0472$
$=1,654$ $=0,1157$
$=3,508$ $=0,2330$
$=5,566$ $=0,3500$.

V. Beobachtungsreihe mit der mittleren Röhre bei $+1^\circ,0$ R.

Für $h=0,868$ ergab sich $M=0,0505$
$=2,201$ $=0,1256$
$=4,220$ $=0,2307$
$=6,570$ $=0,3453$.

Ich habe die Beobachtungsreihen II bis V, die an der mittleren und weiten Röhre angestellt sind, auch für gröſsere Druckhöhen fortgesetzt, doch übergehe ich hier nach der obigen Bemerkung die Mittheilung derselben.

Jede einzelne dieser Beobachtungsreihen läſst sich nun durch den Ausdruck

$$h=r.M+s.M^2$$

darstellen, nach der Methode der kleinsten Quadrate folgt nämlich für die Reihe

I. $h=32,557.M+38,673.M^2$,

und wenn ich in diesem Ausdrucke die beobachteten Werthe von M einführe, finde ich resp.:

$h=0,880$ $=3,622$ $=7,610$ $=11,047$ und $=14,886$,

die bleibenden Fehler sind:

$-0,015$ $+0,001$ $-0,003$ $+0,003$ $-0,001$,

sie fallen also sämmtlich innerhalb der Gränze der möglichen Beobachtungsfehler, und es ergiebt sich daraus

der wahrscheinliche Fehler für $h=0,0061$,

der wahrscheinliche Fehler für r $=0{,}0561$,
derselbe für s $=0{,}1993$.

II. Für die zweite Reihe ergiebt sich eben so:

$$h=12{,}356 . M+7{,}082 . M^2,$$

durch Substitution der beobachteten Werthe von M folgt:

$$h=0{,}485 \quad =3{,}568 \quad =7{,}748,$$

die Fehler sind also:

$$-0{,}006 \quad +0{,}003 \text{ und } -0{,}002,$$

man findet daraus
den wahrscheinlichen Fehler für h $=0{,}0047$,
den wahrscheinlichen Fehler für r $=0{,}0383$,
und denselben für s $=0{,}0852$.

III. Für die dritte Reihe folgt:

$$h=2{,}3992 . M+1{,}7101 . M^2,$$

und es ergiebt sich für die beobachteten Werthe von M:

$$h=0{,}263 \quad =0{,}911 \quad =1{,}087 \quad =2{,}637 \text{ und } =3{,}128,$$

die übrig bleibenden Fehler sind:

$$-0{,}002 \quad +0{,}004 \quad +0{,}002 \quad -0{,}012 \text{ und } +0{,}008,$$

und der wahrscheinliche Fehler für h $=0{,}0059$,
derselbe für r $=0{,}0205$,
derselbe für s $=0{,}0282$.

IV. Die vierte Beobachtungsreihe führt zu dem Ausdrucke:

$$h=13{,}475 . M+6{,}911 . M^2,$$

durch Einführung der Werthe von M findet man:

$$h=0{,}652 \quad =1{,}651 \quad =3{,}515 \text{ und } =5{,}563,$$

es sind also die übrig bleibenden Fehler:

$$-0{,}005 \quad -0{,}003 \quad +0{,}007 \text{ und } -0{,}003,$$

der wahrscheinliche Fehler für h $=0{,}0046$,
derselbe für r $=0{,}0415$,
derselbe für s $=0{,}1351$.

V. Die letzte Beobachtungsreihe giebt:

$$h=16{,}755 . M+6{,}582 . M^2,$$

und für die obigen Werthe von M folgt:

$$h=0{,}864 \quad =2{,}208 \quad =4{,}216 \text{ und } =6{,}571.$$

die übrig bleibenden Fehler sind:

$-0{,}004 \quad +0{,}007 \quad -0{,}004$ und $+0{,}001$,

daraus der wahrscheinliche Fehler für $h = 0{,}0043$,
derselbe für $r = 0{,}0388$,
derselbe für $s = 0{,}1288$.

Es kommt nun darauf an, die aus den einzelnen Reihen gefundenen Werthe der Constanten mit einander zu vergleichen und ihre Beziehung nachzuweisen.

Verbindet man zunächst die Reihen II, IV und V, welche mit derselben Röhre bei verschiedenen Temperaturen angestellt sind, so zeigt es sich, dafs die Constante r sehr verschieden ausfällt, und dafs sie mit der Abnahme der Temperatur bedeutend anwächst, und zwar auf solche Art, dafs diese Differenz durch die Beobachtungsfehler nicht mehr erklärt werden kann, indem sie die wahrscheinlichen Fehler von r um das Hundertfache übersteigt. Die Constante s dagegen stimmt in ihrem Werthe zwar auch nicht genau, die Abweichungen sind aber nicht regelmäfsig, und sie betragen gegen das Mittel nicht voll das Dreifache des wahrscheinlichen Fehlers, wie sich derselbe aus den einzelnen Beobachtungen ergiebt. Ich schliefse daraus, dafs nur die Constante r, aber nicht s von der Temperatur abhängt.

Die ganze Druckhöhe des Wassers h übt aber augenscheinlich zwei verschiedene Functionen aus, nämlich einmal theilt sie dem Wasser die Geschwindigkeit mit, womit es sich in der Röhre bewegt und aus derselben ausströmt, und dann überwindet sie den Widerstand, den das Wasser in der Röhre erfährt. Es ist zu erwarten, dafs der Theil des Druckes, der zur Darstellung der Geschwindigkeit verwendet wird, durch das Glied sM^2 ausgedrückt ist, während rM die Gröfse aller Widerstände bezeichnet, die gleichfalls durch den Wasserdruck überwunden werden müssen. Die folgende Untersuchung bestätigt diese Annahme.

Ich mache mit der Constante s den Anfang. Wenn sich das Wasser ganz gleichmäfsig in der Röhre bewegt, so dafs es in der Axe noch dieselbe Geschwindigkeit hat, als neben der Röhrenwand, wie man dieses wohl gewöhnlich annimmt, und bezeichnet v diese Geschwindigkeit, so ist der Theil der Druckhöhe, der diese Geschwindigkeit erzeugt:

$$h=\frac{v^2}{4g},$$

oder in Pariser Zollen:

$$h=0{,}00138.v^2.$$

Da aber ein Loth Wasser 0,73795 Pariser Cubikzolle enthält, so ist, wenn ϱ den Halbmesser der Röhre bedeutet:

$$v=0{,}73795.\frac{M}{\varrho^2\pi},$$

oder:

$$h=0{,}000076\ 145.\frac{M^2}{\varrho^4}.$$

Der aus den Beobachtungen hergeleitete Ausdruck

$$h=s.M^2$$

müfste diesem entsprechen, so dafs

$$s=0{,}000076\ 145.\varrho^{-4}.$$

Substituire ich aber für ϱ die obigen Halbmesser, so ergeben sich für die drei Röhren die Werthe

$$s=15{,}47 \qquad =2{,}53 \text{ und } =0{,}539,$$

während sie beobachtet wurden gleich

38,67 6,83 und 1,710.

Der Werth von s für die mittlere Röhre, nämlich 6,83, ist aber das Mittel aus den drei Werthen, die durch die Reihen II, IV und V gefunden wurden.

Diese gewöhnliche Annahme, dafs das Wasser sich in allen Theilen des Querschnittes der Röhre mit gleicher Geschwindigkeit bewegt, führt also zu keinem passenden Resultate, sie ist aber auch augenscheinlich sehr unstatthaft, denn der Wasser-Cylinder in der Röhre wird, wenn er an den Wänden einen Widerstand erfährt,

fährt, sich nimmermehr noch als ein fester Cylinder bewegen können, vielmehr müssen alsdann die mittleren Wasserfäden den äufseren voraneilen. Indem es sich nun hier überall um mäfsige Geschwindigkeiten und so grofse Widerstände handelt, dafs selbst die mittleren Fäden nicht die volle Geschwindigkeit annehmen können, welche der jedesmaligen Druckhöhe entspricht, so scheint die Voraussetzung zulässig, dafs die ganze Wassermenge sich in concentrische hohle Röhren von sehr geringer Dicke zerlegt, und von diesen sich eine in der anderen fortschiebt, und zwar eilen sie gleichmäfsig einander vor, nachdem jede schon beim Eintritt in die Durchflufsröhre die ihr zukommende Geschwindigkeit angenommen hat. Indem aber die äufserste Wasserröhre an der Wand der Durchflufsröhre haftet, so ist die Geschwindigkeit derselben gleich Null, und es tritt sonach in jeder Secunde nicht ein Wassercylinder aus der Röhre, sondern ein Wasserkegel, der den Querschnitt der Röhre zur Grundfläche und die Geschwindigkeit des mittleren Fadens zur Höhe hat. Nach dieser Annahme mufs ein Theil der Druckhöhe die lebendige Kraft liefern, welche der ausfliefsende Wasserkegel in jeder Secunde dem Systeme entführt.

Ist c die Geschwindigkeit des mittleren Wasserfadens, und k die mittlere Geschwindigkeit von allen in einer Secunde austretenden Wassertheilchen, so ist $k=\frac{1}{3}c$, und die lebendige Kraft aller dieser Wassertheilchen, von denen das einzelne die Geschwindigkeit v hat, ist

$$=\int v^2\, dM$$
$$=2,7.\varrho^2\pi.k^3,$$

wo ϱ wieder den Radius der Durchflufsröhre bedeutet. Die lebendige Kraft, die das Wasser zu diesem Zwecke abgiebt, ist aber

$$=M.4gh=4gh.\varrho^2\pi.k,$$

folglich:

$$4gh\varrho^2\pi k=2,7.\varrho^2\pi k^3,$$

und hieraus ergiebt sich, dafs

$$k^2 = \frac{4.g}{2,7}.h;$$

sind k und h in Pariser Zollen gemessen, so wird dieser Ausdruck:

$$h = 0,0037260.k^2,$$

aber wenn M in Lothen ausgedrückt ist, so folgt:

$$k = \frac{0,73795}{\varrho^2 \pi} M,$$

und daraus:

$$h = 0,00020559.\frac{M^2}{\varrho^4},$$

was wieder dem aus den Beobachtungen hergeleiteten Ausdrucke $h = s M^2$ entsprechen soll, so dafs:

$$s = 0,00020559.\varrho^{-4}.$$

Durch Einführung der gemessenen Werthe von ϱ finde ich auch wirklich für die drei Röhren:

$$s = 41,77 \qquad = 6,821 \quad \text{und} \quad = 1,458,$$

was von den obigen Werthen von s nicht bedeutend abweicht, und diese Abweichungen scheinen nur von der unsicheren Bestimmung der ϱ herzurühren, denn wenn man aus dem letzten Ausdrucke mit Zugrundelegung der wahren Werthe der s umgekehrt die Halbmesser berechnet, so ergeben sich diese in Pariser Zollen:

$$\varrho = 0,04802 \qquad = 0,07407 \quad \text{und} \quad = 0,10471,$$

während sie gemessen waren gleich

$$0,0471 \qquad 0,0741 \quad \text{und} \quad 0,10905.$$

Hierdurch wäre also die Bedeutung des Coefficienten von dem Quadrate der Wassermenge nachgewiesen, und zugleich in hohem Grade wahrscheinlich gemacht, dafs das Wasser sich nicht wie ein fester Cylinder in der Röhre bewegt, sondern die Wasserfäden, die dem Rande näher liegen, sich langsamer bewegen, als die mittleren, und zwar scheint unter den hier vorkommenden Umständen die Annahme, dafs ein gleichmäfsiges Fortschieben der dünnen Wasserröhren stattfindet, sich zu rechtfertigen, oder wenigstens der Wahrheit nahe zu liegen. Ich mufs aber noch die Bemerkung hinzufügen, dafs frühere Beobachtungen, die zwar mit einem minder genauen Apparate angestellt wurden, dennoch sehr deutlich zeigten, dafs der Werth von s sich vorzugsweise nach der Gröfse der Ausflufsmündung richtet: bei etwas konisch gestalteter Röhre war s immer bedeutend gröfser, wenn die engere Oeffnung in den Kasten K, als wenn dieselbe in den Cylinder B gekittet war.

Endlich darf ich es nicht unerwähnt lassen, dafs der Einflufs der Wärme auf die Ausdehnung des Wassers und der Röhre ganz unmerklich bleibt: wäre nämlich s bei 8 Graden gleich 7, so würde es nach den bekannten Gesetzen der Ausdehnung sich bei 1 Grad auf 7,0014 reduciren, was gegen die hier vorkommenden Abweichungen gar nicht in Betracht kommt.

Ich gehe nun über zur Untersuchung des Coefficienten der ersten Potenz der Wassermenge, oder von r. Derselbe hängt augenscheinlich in hohem Grade von der Temperatur des Wassers ab, und die Beziehung zwischen beiden mufs zunächst nachgewiesen werden.

Für die mittlere Röhre fand ich nach den Beobachtungsreihen II, IV und V:

bei der Temperatur von	$+1^{\circ},0$ R.	$r = 16,755$
	$+6\ ,1$ R.	$= 13,475$
	$+8\ ,4$ R.	$= 12,356.$

Lege ich diese drei Werthe zum Grunde, und nenne ich den Thermometergrad t, so finde ich:

$$r = 17,527 - 0,793 \, . \, t + 0,0211 \, . \, t^2 .$$

Um eine Controle für die Richtigkeit dieses Ausdrucks und dessen Gültigkeit bei höheren Temperaturen zu haben, stellte ich noch mit derselben Röhre einzelne Beobachtungen mit erwärmtem Wasser an, die folgende Resultate gaben:

Für $t = +12^\circ,1$ $\quad h = 4,1750$ $\quad M = 0,31458$
$t = +13\,,2$ $\quad h = 3,7867$ $\quad M = 0,29458$
$t = +15\,,2$ $\quad h = 3,9442$ $\quad M = 0,31375.$

Lege ich bei der Berechnung dieser Beobachtungen den für die mittlere Röhre oben gefundenen Werth $s = 6,83$ zum Grunde, und suche danach r, so ergiebt sich dieses

für $t = +12^\circ,1$ $\quad r = 11,123$
$t = +13\,,2$ $\quad r = 10,842$
$t = +15\,,2$ $\quad r = 10,429$;

dagegen würde der vorstehende Ausdruck für r für diese drei Temperaturen geben resp.

$r = 11,021$ $\quad r = 10,736$ $\quad r = 10,347.$

Die Abweichung beider Werthe ist so gleichmäfsig, dafs sie nicht unbeachtet bleiben darf, doch würde es nicht statthaft seyn, die letzten Beobachtungen den früheren Beobachtungsreihen ganz gleich zu stellen. Indem ich ihnen nur den halben Werth gebe, so finde ich nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$r = 17,527 - 0,7976 . t + 0,0219 . t^2,$$

und daraus folgt

für $t =$	$+1^\circ,0$	$+6^\circ,0$	$+8^\circ,0$	$+12^\circ,1$	$+13^\circ,2$	$+15^\circ,2$
$r =$	16,751	13,476	12,372	11,082	10,815	10,463,

während die Beobachtungen ergaben:

$r =$	16,755	13,475	12,356	11,123	10,842	10,429.

Die Uebereinstimmung läfst nichts zu wünschen, jedoch ist es wahrscheinlich, dafs das Gesetz für höhere Temperaturen nicht gültig bleibt.

Die Ausdehnung des Wassers und der Röhre durch die Wärme bedingt Unterschiede, die in ähnlicher Art, wie dieses bereits gezeigt, gegen die noch übrig bleibenden Abweichungen nicht in Betracht kommen, es ist daher weder an sich wahrscheinlich, noch läfst es auch die eben nachgewiesene Uebereinstimmung der Resultate, erwarten, dafs der Durchgang durch diejenige Temperatur, wobei die gröfste Verdichtung des Wassers eintritt, irgend eine Anomalie zeigen wird. Ich habe indessen hierüber früherhin besondere Beobachtungen angestellt, welche ein ganz regelmäfsiges und ungestörtes Anwachsen des Factors r nachwiesen, wenn das Wasser nach und nach die Temperatur von $+4$, $+3$, $+2$ und $+1$ Grad annahm. Die nähere Mittheilung derselben übergehe ich indessen, indem sie mit einem viel weniger genauen Apparate angestellt wurden.

Um nun die verschiedenen Werthe von r, die sich bei Benutzung der drei Röhren herausstellten, mit einander zu vergleichen, müssen dieselben zuvörderst auf eine gleiche Temperatur reducirt werden, und ich wähle dazu 8° Reaumur. Für die mittlere Röhre ergiebt sich der betreffende Werth unmittelbar aus dem angeführten Ausdrucke für r, und für die enge und weite Röhre lassen sich aus demselben Ausdrucke auch die zugehörigen Reductions-Coefficienten herleiten. Ich finde auf diese Art

für die enge Röhre $r=32{,}788$
für die mittlere Röhre $r=12{,}548$
für die weite Röhre $r=\ 2{,}4668$,

und wenn, nach einer sehr zulässigen Hypothese, die auch in früheren Versuchen ihre volle Bestätigung findet, der Widerstand proportional gesetzt wird der Länge der Röhre, so ergiebt sich für die drei Röhren auf die Einheit von 1 Zoll Länge reducirt

$$r=1{,}8755 \quad 0{,}31166 \quad \text{und} \quad 0{,}063797.$$

Ein Versuch, diese Werthe durch eine Potenz des Halbmessers der Röhren darzustellen, ergab nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichste Gröfse dieser Potenz gleich $-4{,}12$, oder, da der wahrscheinliche Fehler in dieser Bestimmung nicht unbedeutend ist, so rechtfertigt es sich, dafür die Zahl Vier mit dem negativen Zeichen zu wählen. Folglich:

$$r=\frac{R}{\varrho^4},$$

wo R die Gröfse des Reibungs-Coefficienten für eine Röhre bezeichnet, deren Länge und Halbmesser gleich 1 Pariser Zoll sind. Es ergiebt sich aus den obigen Werthen von r und ϱ

für die enge Röhre	R=0,000009 2298
für die mittlere Röhre	=0,000009 3964
für die weite Röhre	=0,000009 0224
im Mittel	=0,000009 2162.

Die Abweichungen vom Mittel betragen ungefähr $\frac{1}{50}$ des Werthes, was bei der Unsicherheit der Halbmesser nicht auffallen kann. Ein Fehler in der Bestimmung von ϱ wird aber in dieser Beziehung einen um so gröfseren Einflufs haben, je kleiner ϱ ist: ich gebe daher den für R gefundenen Zahlen in der Art einen verschiedenen Werth, dafs ich annehme, sie seyen jede das arithmetische Mittel aus einer Anzahl von Beobachtungen, die dem Biquadrate des Radius entspricht, oder, was damit genau genug übereinkommt, ich stelle den ersten Werth einmal, den zweiten fünfmal und den dritten sechszehnmal in Rechnung, dann finde ich

$$R=0{,}000009\ 1168.$$

Dafs der Widerstand umgekehrt der vierten Potenz des Halbmessers der Röhre proportional ist, kann in sofern nicht auffallen, als eines Theils nach dem Obigen die unter gleichem Drucke aus verschiedenen Röhren austretenden Wasserkegel einander ähnlich seyn müssen, wodurch sich schon die dritte Potenz des Radius darstellt. Aufserdem bleiben aber auch bei weiteren Röhren die einzelnen Wasserfäden verhältnifsmäfsig zu ihrer gröfseren Geschwindigkeit nur eine kürzere Zeit in der Röhre, wodurch sich gleichfalls der Widerstand vermindert. Diese Beziehung läfst sich indessen in folgender Art auch genauer nachweisen.

In der Durchflufsröhre vom Halbmesser ϱ schiebt sich eine sehr grofse Anzahl von feinen concentrischen

Wasserröhren in einander gleichmäfsig fort, so dafs jede derselben mit gleicher relativen Geschwindigkeit der nächsten äufseren voreilt. Die Dicke dieser Wasserröhren sey $=\frac{1}{n}$, dann wird ihre Anzahl $=n\varrho$ seyn. Der Widerstand, den gleiche Oberflächen an allen diesen Röhren gegen die nächsten ausüben, mufs in Uebereinstimmung mit dem aus den Beobachtungen hergeleiteten Gesetze, dafs $h=rM$ ist, proportional seyn dem Quadrate der Geschwindigkeit, womit die Berührungsflächen sich über einander hinschieben. Diese Annahme ist durchaus verschieden von der, die man gewöhnlich macht, indem man allgemein anzunehmen pflegt, dafs schon die zur Ueberwindung des Widerstandes nöthige Druckhöhe dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional seyn soll, woraus folgt, dafs der Widerstand selbst, oder die lebendige Kraft, die zu dessen Ueberwindung nöthig ist, der dritten Potenz entspricht. Die letzte Annahme läfst sich indessen nach meinem Dafürhalten durchaus nicht plausibel machen, und das dafür gewöhnlich aufgestellte Raisonnement, dafs bei doppelter Geschwindigkeit die doppelte Anzahl von Wassertheilchen in der halben Zeit oder mit doppelter Kraft abgerissen werden müssen, würde nur für die von mir gewählte Annahme, doch keineswegges für die gewöhnliche sprechen.

Bezeichne ich nun durch m den Widerstand, den die Einheit der Wasserfläche erfährt, indem sie sich mit der Geschwindigkeit $=1$ gegen eine andere Wasserfläche fortschiebt; und ferner durch c die absolute Geschwindigkeit des mittleren Wasserfadens, während die des äufseren gleich Null ist, so wird die Geschwindigkeit, womit jede Röhre sich gegen die nächste bewegt, gleich $\frac{c}{n\varrho}$ seyn, und der Widerstand, welcher für diesen Fall jeder Flächen-Einheit zukommt, ist $=\frac{m}{n^2}\cdot\frac{c^2}{\varrho^2}$.

Die Anzahl Secunden, während welcher jedes Wassertheilchen in der Durchflufsröhre bleibt, ist gleich $\frac{l}{v}$, wenn v die absolute Geschwindigkeit der zugehörigen Wasserröhre und l die Länge der Durchflufsröhre bedeutet. Betrachte ich aber eine bestimmte Wasserröhre, die im Abstande $=r$ von der inneren Wand der Durchflufsröhre, oder im Abstande $=\varrho-r$ von der Axe liegt, so ist $v=\frac{r}{\varrho}c$, daher für jedes Wassertheilchen dieser Röhre die Dauer des Aufenthalts in der Durchflufsröhre $=\frac{l\varrho}{r.c}$.

Jede Flächeneinheit von dieser Wasserröhre erleidet sonach im Ganzen den Widerstand

$$=\frac{l}{r}.\frac{m}{n^2}.\frac{c}{\varrho},$$

und da in jeder Secunde von dieser Röhre

$$2(\varrho-r)\pi.v=2(\varrho-r)\pi\frac{r}{\varrho}c$$

Flächeneinheiten austreten, so ist der Widerstand, den dieselben in der ganzen Länge der Durchflufsröhre erlitten haben

$$=\frac{2m\pi lc^2}{n^2\varrho^2}(\varrho-r).$$

In ähnlicher Art müssen alle einzelnen Wasserröhrchen betrachtet werden, und der Widerstand, welchen der in einer Secunde austretende Wasserkegel im Ganzen erfahren hat, ist gleich der Summe aller dieser Ausdrücke, daher:

$$W=\frac{2m\pi lc^2}{n^2\varrho^2}\Sigma(\varrho-r);$$

aber:

$$\Sigma(\varrho-r)=\frac{1}{n}(1+2+3+\ldots.+n\varrho)$$
$$=\tfrac{1}{2}n\varrho^2,$$

daher:

$$W = \frac{m}{n} \pi l c^2.$$

Dieser Widerstand ist also ganz unabhängig von ϱ.

Der aus den Beobachtungen früher hergeleitete Ausdruck bezieht sich aber nicht auf die Geschwindigkeit des mittleren Wasserfadens, sondern auf die in jeder Secunde ausströmende Wassermenge, woher die Gröfse M auch hier eingeführt werden mufs.

$$M = \tfrac{1}{3} \pi \varrho^2 c,$$

oder:

$$c = \frac{3}{\pi} \frac{M}{\varrho^2};$$

daher:

$$W = \frac{9}{\pi} . \frac{m}{n} . l . \frac{M^2}{\varrho^4}.$$

Dieser Widerstand wird überwunden durch Zerstörung der lebendigen Kraft $h'M$, wo h' der entsprechende Theil der Druckhöhe ist, also:

$$h'M = W,$$

oder:

$$h' = \frac{9}{\pi} \frac{m}{n} \frac{lM}{\varrho^4},$$

was sich genau an die Resultate der mitgetheilten Beobachtungen anschliefst. Die Trennung der beiden Gröfsen m und n von einander, welche einen Versuch zur Bestimmung der Gröfse der Elementartheilchen des Wassers gestatten würde, läfst sich nicht bewirken, wenigstens nicht nach dieser Beobachtungsart.

Stelle ich nun den ganzen Ausdruck zusammen, der die Druckhöhe bezeichnet, welche eine gewisse Wassermenge M durch eine bestimmte Durchflufsröhre führt, so folgt für die Temperatur von 8° Reaumur:

$$h = \frac{1}{\varrho^4} (0{,}000009117 . lM + 0{,}0002056 . M^2),$$

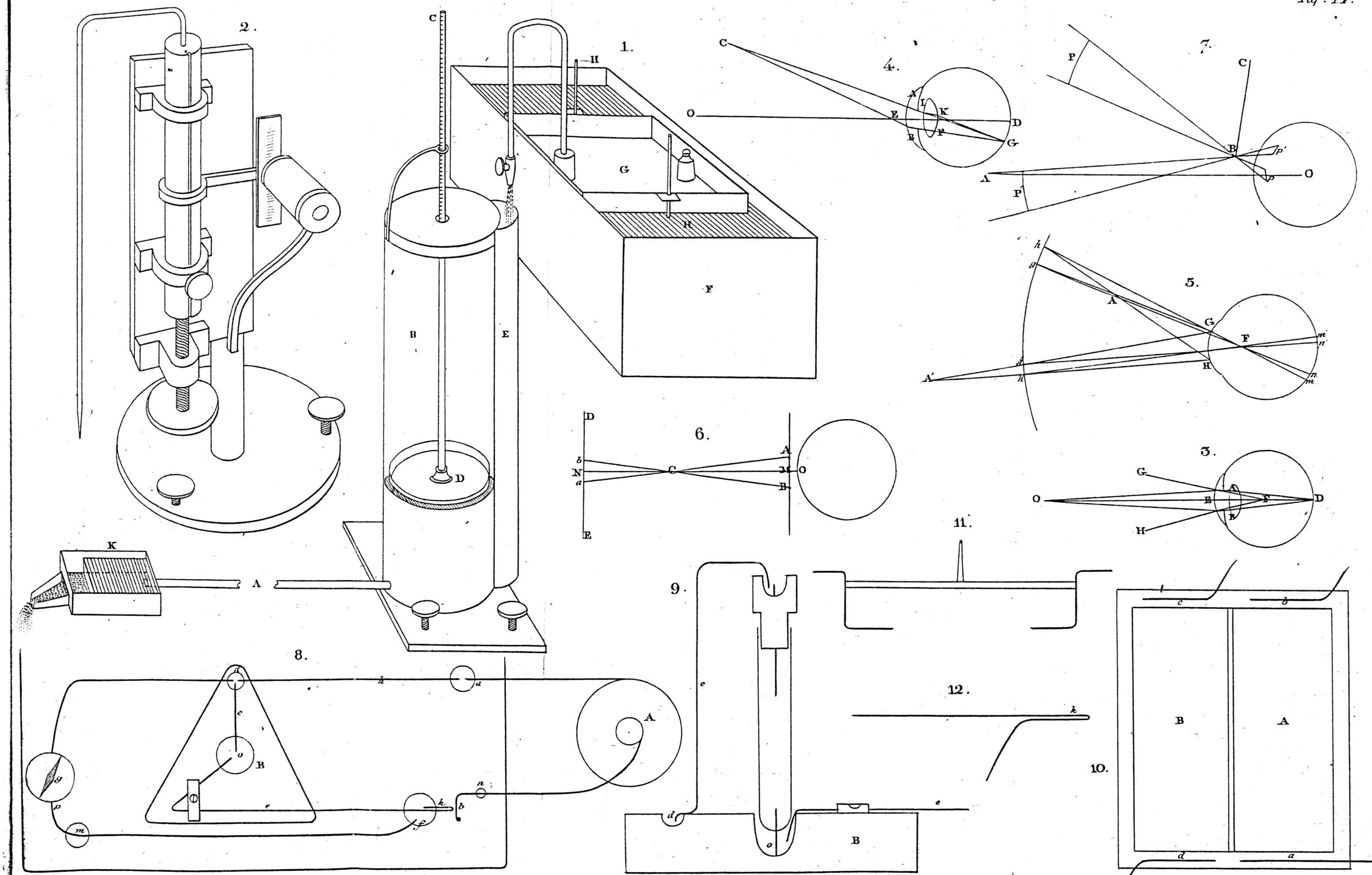
und wenn M auch in Pariser Cubikzollen ausgedrückt wird, so wie h, l und ϱ sich schon auf das Pariser Zollmaafs beziehen,

$$h = \frac{1}{\varrho^4}(0{,}000012354 \,.\, l\,M + 0{,}00037752 \,.\, M^2).$$

Für eine andere Temperatur von t Grad Reaumur verwandelt sich der Zahlen-Coefficient von $l\,M$ des letzten Ausdrucks in

$$0{,}00001726 - 0{,}000000785 \,.\, t + 0{,}0000000216 \,.\, t^2.$$

Diese Gesetze gelten indessen nur so lange, als der Widerstand grofs genug ist, um die ganze in der Röhre befindliche Wassermenge noch in Spannung zu erhalten, so dafs der Wasserdruck unmittelbar übertragen werden kann. Sobald aber diese Gränze überschritten wird, was bei allen gröfseren Wasserleitungen geschieht, so kann der zur Ueberwindung des Widerstandes in der Röhre nöthige Druck sich nicht mehr unmittelbar fortpflanzen, und dieses geschieht vielmehr durch heftige Bewegungen, welche das Wasser annimmt, bei deren Aufhören die zu jenem Zwecke erforderliche lebendige Kraft sich entwickelt. Es zeigt sich daher unter solchen Verhältnissen noch ein neues Glied in dem Ausdrucke für h, welches die zweite Potenz der Wassermenge und zugleich die Länge der Röhre zu Coefficienten hat, und welches bald einen viel gröfseren Werth als die beiden anderen annimmt. Die genaue Untersuchung der in diesem Falle sich herausstellenden Resultate scheint indessen grofse Schwierigkeiten darzubieten, wenigstens ist es mir bis jetzt nicht geglückt, die dabei sich zeigenden Eigenthümlichkeiten genügend zu erklären.



Ann. d. Phys. u. Chem. Bd. 46. St. 2.

C. Guinand sc.