La geometría vectorial de $\mathbb{R}^3$ [1]

Rubén Alejandro Águeda-Altúzar
altuzartutor@gmail.com
http://raltuzar.net

1. El espacio euclidiano mediante vectores

Cuando pensamos en un *espacio*, pensamos en familias de puntos. En el caso de todos los puntos que forman un plano, asignando *dos* coordenadas a cada uno de ellos logramos distinguirlos unos de los otros. Éste es el sistema de coordenadas rectangulares para el plano: fijamos dos direcciones perpendiculares entre sí (los ejes x e y) y un origen de coordenadas (la intersección de esos ejes). Así, como ya sabemos, decir que un objeto está situado en el punto $(5, -3)$ significa que está a 5 unidades a la derecha del origen (en la dirección de x, la medición "horizontal") y a 3 unidades hacia abajo del origen (en la dirección de y, la medición "vertical").

Como sucede en Física, representamos el cambio de posición del origen hacia el punto $(5, -3)$ por un *vector*, que representará no sólo este cambio de posición en específico (ir del origen hacia $(5, -3)$), sino también a cualquier desplazamiento de esta magnitud en esa dirección: moverse de $(-2, 1)$ hacia $(3, -2)$, por ejemplo (¡dibújelo!). También simbliza una fuerza, de la que nos interesa conocer su magnitud y su dirección (y el sentido).

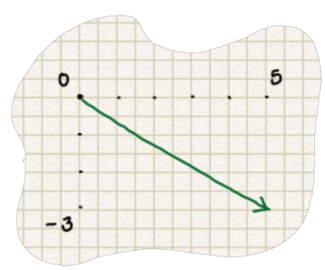

Figura 1: El vector $(5, -3)$

Por ello, de cada vector nos interesan dos cosas:

- *su norma*: el "tamaño" del vector, su longitud;
- *su dirección*: se refiere a la "inclinación" del vector, o dicho de otro modo, la pendiente de la recta que resultaría de prolongar sus extremos.

[1] Notas de Cálculo Vectorial para programas de Ingeniería en México. Versión 1.0: 09/2014.

¿Cómo saber cuál es la norma y/o la dirección de un vector? Calculemos la norma de un vector v, que escribiremos como $||v||$. Considere, como ejemplos, el vector $(5, -3)$ anterior y el vector $(5, 4, 3)$, como se ven en la figura 13.

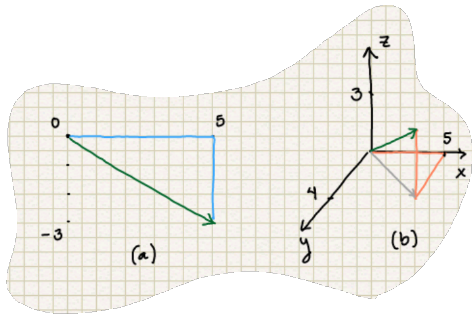

Figura 2: La norma de un vector.

Norma o magnitud de un vector. La norma del vector en el plano se calcula:

$$||(5, -3)|| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34},$$

pues de acuerdo con el teorema de Pitágoras, es así como medimos la longitud de la hipotenusa (en verde) del triángulo cuyos catetos están de color azul. En el segundo caso, se tiene

$$||(5, 4, 3)|| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^3} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

(revise el ejercicio 1 de la próxima lista de ejercicios).

Dirección de un vector. Para establecer la dirección/inclinación de un vector $v = (x, y)$ en el plano, consideramos la división

$$m = \frac{y}{x}$$

(es decir, la coordenada y del vector entre su coordenada x). De este modo podemos identificar en qué dirección está inclinado el vector ("inclinado hacia la derecha o hacia la izquierda"), por decirlo de modo coloquial, como se indica en la siguiente figura.

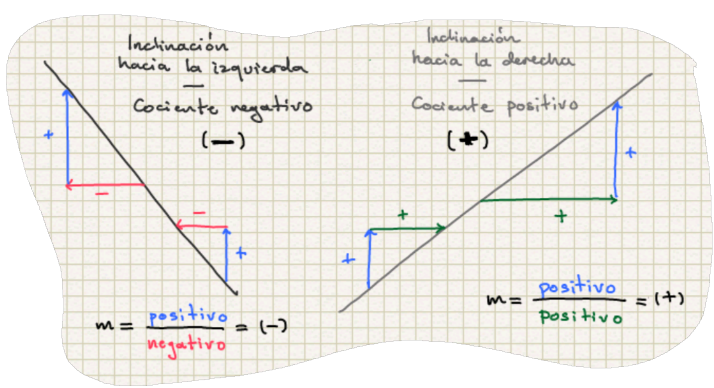

Figura 3: Dos clases de inclinación para las rectas en el plano.

Observe que como ambas coordenadas de cada vector pueden ser positivas o negativas, el cociente de la inclinación puede tener signo positivo o negativo; cuando esta división es negativa, la inclinación del vector es "hacia la izquierda", mientras que está inclinado "hacia la derecha" cuando este cociente es positivo.

El lector ya está familiarizado con esta idea: para ver si dos triángulos rectángulos son semejantes, es decir, que tienen la misma forma y sólo difieren en el tamaño (un triángulo es *el dibujo a escala* del otro), basta dividir la altura entre la base en cada triángulo (esta división se llama *razón*) y luego comparar esos cocientes (esta comparación se llama *proporción*). Si estos cocientes son iguales, los triángulos son semejantes. Con ello tenemos un modo de saber, a través de un sólo número, si dos triángulos tienen la misma forma. Este número es *la pendiente de la recta*.

Por tanto, no importa qué tan pequeño o grande se dibuje el triángulo que define la pendiente de la recta, mientras la hipotenusa de este triángulo esté sobre la recta, el cociente será siempre el mismo.

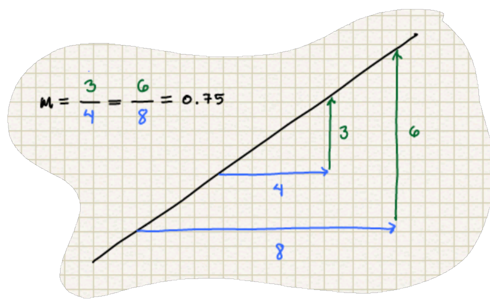

Figura 4: Dos triángulos, dos cocientes, el mismo número: la pendiente, la inclinación.

Como el triángulo que dibujemos sobre la recta puede ser cualquiera, entonces *cualquier vector que dibujemos sobre la recta tiene la misma inclinación*. Si cambiamos de recta, el vector que dibujemos sobre la recta tendrá otra inclinación. Así, para representar la inclinación de la recta de la figura 4, podemos usar tanto el vector $(4, 3)$ como el vector $(8, 6)$. Pero podemos decir dos cosas más:

- cada coordenada del vector $(8, 6)$ es el doble que la del vector $(4, 3)$;
- como el vector $(4, 3)$ también el vector $(-4, -3)$, formado por las coordenadas negativas del inicial, también está en la recta.

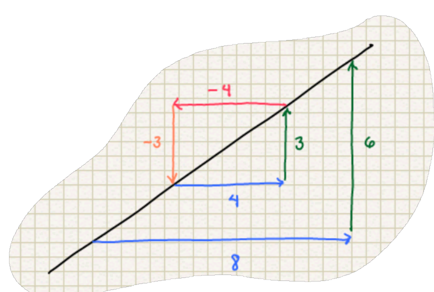

Figura 5: Los vectores $(4, 3)$, $(-4, -3)$ y $(8, 6)$.

Definición 1.1 *Un vector en el plano hace referencia a una dirección. Lo representamos por una flecha que inicia en el origen.*

Finalmente, la razón por la que de momento estamos privilegiando la idea de dirección sobre la de sentido, es porque la idea de sentido está subordinada a (depende de) la idea de dirección.

Ejercicios 1.1

1. Observe la figura 2b. Calcule la longitud del segmento de color gris (la "sombra" en el plano xy del vector de color verde). Use el triángulo cuyos catetos son el vector en gris y el naranja vertical y calcule la longitud del vector en verde, usando el teorema de Pitágoras.
2. De un vector en el plano cuya inclinación sea la misma que la de la recta

$$\text{(a) } y = 3x + 1 \qquad\qquad \text{(b) } y = \frac{1}{2}x - 3$$

3. Encuentre la ecuación de la recta en el plano que pasa por el punto $(1, -3)$ y por pendiente la indicada por el vector $(3, -1)$.

---

2. Operaciones con vectores

Multiplicación por un escalar. En otras palabras, podemos *construir* tanto el vector $(-4, -3)$ como el $(8, 6)$ a partir del $(4, 3)$, multiplicando cada coordenada de $(4, 3)$ por -1 en el primer caso, y por 2 en el segundo, escribimos:

$$(-4, -3) = -1 \cdot (4, 3) \qquad \text{y} \qquad (8, 6) = 2 \cdot (4, 3).$$

Esta es una operación entre un *escalar* (un número real) k y un vector v que da como resultado un nuevo vector: kv que tiene la misma dirección que v, pero "estirado", "comprimido", "volteado", según sea el valor de k que elijamos, como se ve en la figura.

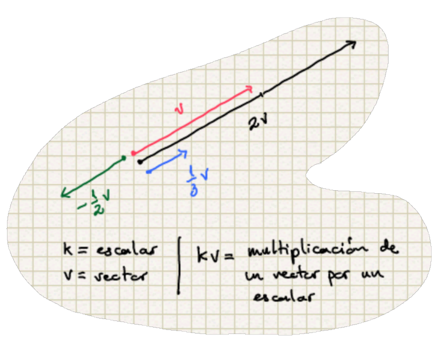

Figura 6: Producto por un escalar.

Ahora bien, dado que el vector v y todos los posibles vectores kv, para cualquier elección que se haga del escalar (el número) k, entonces, a veces conviene elegir un representante para esa recta: un vector de *de norma 1* (de tamaño, magnitud, 1). ¿Cómo lo construimos? Es decir, si el vector en cuestión es $(5,-3)$, ¿cómo construir un vector de norma 1 que esté en la misma dirección de éste? Para hallar la solución podemos divir cada coordenada del vector entre la norma de ese vector. Un representante de norma 1 para $(5,-3)$ sería entonces

$$\left(\frac{5}{\sqrt{34}}, -\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = \frac{1}{\sqrt{34}}(5,-3),$$

pues así

$$\left|\left|\left(\frac{5}{\sqrt{34}}, -\frac{3}{\sqrt{34}}\right)\right|\right| = \sqrt{\frac{25}{34}+\frac{9}{34}} = \sqrt{\frac{34}{34}} = 1.$$

Decimos que el vector $\left(\frac{5}{\sqrt{34}}, -\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$ es el vector $(5,-3)$ *normalizado.*

Observación 2.1 *Dado el vector v, el vector $\frac{1}{||v||}v$ tiene norma 1.*

Suma de vectores. Volviendo a la interpretación del vector como una fuerza, para $(5,-3)$ la primera coordenada representa la componente de la fuerza en la dirección de x, mientras que la segunda, la componente en la dirección del eje y. Así, sumar dos vectores $(5,-3)$ y $(1,2)$ significa hallar el efecto de esas dos fuerzas sobre el mismo objeto, aplicadas al mismo tiempo. La "resultante" se obtiene entonces sumando por un lado los efectos de las componentes en x y, por otro, sumando las componentes en y:

$$(5,-3)+(1,2) = (5+1,-3+2) = (6,-1).$$

Leemos este resultado, diciendo que la fuerza $(6,-1)$ aplicada sobre el mismo objeto, tiene el mismo efecto que aplicar las fuerzas $(5,-3)$ y $(1,2)$ a la vez.

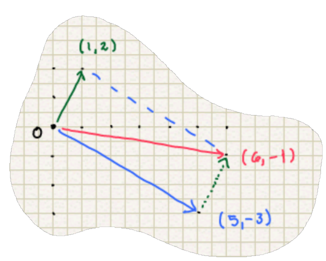

Figura 7: Suma de vectores.

Observe que un vector indica el desplazamiento de un objeto desde el origen hasta el punto en que termina. Por ejemplo, el vector $(6,-1)$ indica el desplazamiento desde el origen hasta el punto $(6,-1)$. Del mismo modo, tanto el vector en verde sólido como el vector en verde punteado indican el mismo desplazamiento en la figura 7, pero estrictamente hablando son vectores distintos. Lo que tienen en común es que son *paralelos.*

Veamos que el vector punteado se puede obtener restando su punto final del inicial:

$$(6,-1)-(5,-3)=(6-5,-1+3)=(1,2)$$

el mismo vector verde sólido. Ésto podría sugerir que para que dos vectores sean paralelos, deben ser iguales, lo cual no es del todo cierto. Sí, dos vectores con las mismas coordenadas son paralelos, pero si prolongamos el vector punteado al doble, habremos construido el vector punteado verde que va del punto $(5,-3)$ al punto $(7,1)$... este vector es:

$$(7,1)-(5,-3)=(7-5,1+3)=(2,4)=2(1,2)$$

¡dos veces el vector verde sólido!

Por esta razón, si dos vectores son tales que $v=kw$ se dice que v y w son paralelos, pues representan la misma dirección, pero dichas direcciones pueden no estar en situaciones en las que los vectores están anclados al origen de coordenadas.

Definición 2.1 *Decimos que dos vectores u y v son paralelos siempre que exista un número λ tal que $v=\lambda w$. Escribimos, en este caso, $v||w$.*

Ejercicios 2.1

1. Los vectores $u=(2,3)$ y $v=(6,9)$ son paralelos (¿por qué?). ¿Es su suma $u+v$ un vector paralelo a alguno de ellos?, ¿por qué? ¿Qué sucede si en vez de tomar v como lo hemos definido, tomamos $v=-u=(-2,-3)$?
2. Encuentre un vector de norma 1 que indique la pendiente de la recta $y=-x+1$ en el plano. Sólo hay dos posibles respuestas a este ejercicio, ¿por qué?
3. Considere el paralelogramo formado por los vectores $u=(1,-2)$ y $v=(2,3)$. Úselos para hallar los vectores de las diagonales de dicho paralelogramo.
4. ¿Cómo "sacar" el valor λ de la expresión $||\lambda u||$?, ¿qué relación guarda con $||u||$? Para responder estas preguntas, considere un ejemplo: compare $||3(1,2)||$ con $||(1,2)||$, ¿qué observa? ¿Y al comparar $||-4(2,3)||$ y $||(2,3)||$?
5. Convénzase de que $||u+v||\neq||u||+||v||$. Construya 2 ejemplos de ésto.

Perpendicularidad y el producto punto. Hemos visto que si dos vectores tienen coordenadas tales que las de uno son múltiplo de las del otro, entonces son paralelos. Ésto nos da un criterio para saber si dos vectores cualesquiera son paralelos o no. Uno se pregunta, naturalmnte: ¿podemos hallar un criterio para saber si dos vectores son perpendiculares? La respuesta es: sí, sí podemos. El método: indagar el *producto punto* de esos dos vectores. Veamos a qué nos referimos.

El triángulo de la figura 8 está formado por 3 vectores: establecemos 2, u y v, y el tercero puede construirse a partir de ellos: $v - u$. Dado que los 3 están en un plano, damos a los primeros dos sus coordenadas y el tercero será la resta de éstas:

$$u = (u_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2), \quad v - u = (v_1 - u_1, v_2 - u_2).$$

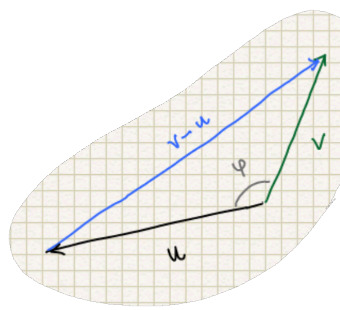

Figura 8: Triángulo formado por u, v y $v - u$.

Así, buscamos conocer el ángulo φ formado entre u y v. Dado que los 3 vectores están en un plano y forman un triángulo, de nuestros cursos de geometría del bachillerato recordamos que podemos usar la ley de cosenos:

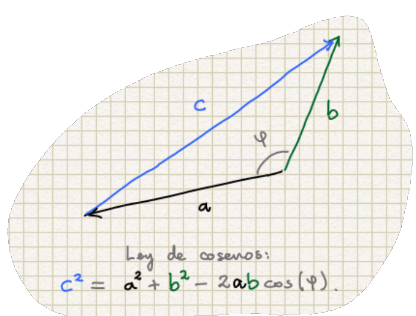

Figura 9: Ley de cosenos.

Note que el ángulo φ en gris en el triángulo no es necesariamente un ángulo recto. La ley de cosenos es una *especie* de *teorema de Pitágoras* para un triángulo que no es rectángulo, como en el caso de la figura 9. La diferencia entre la ley de cosenos y el teorema de pitágoras es ese término "oscuro":

$$-2ab \cos(\varphi).$$

Más adelante veremos que es importante.

Volviendo a la figura 8, al compararla con la figura 9, veamos que quienes cumple con el papel de a es la distancia $||u||$, es decir, podemos hacer $a = ||u||$.[2] Análogamente, $b = ||v||$ y, así, $c = ||v - u||$. Luego, la ley de cosenos se ve como sigue.

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi) \\
||v-u||^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 - 2\,||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(\varphi) \\
||(v_1-u_1, v_2-u_2)||^2 &= ||(u_1,u_2)||^2 + ||(v_1,v_2)||^2 - 2\,||u|| \cdot ||v|| \cos(\varphi) \\
\left[\sqrt{(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2}\right]^2 &= \left[\sqrt{u_1^2+u_2^2}\right]^2 + \left[\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right]^2 - 2\,||u|| \cdot ||v|| \cos(\varphi) \\
(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 &= \left(u_1^2+u_2^2\right) + \left(v_1^2+v_2^2\right) - 2\,||u|| \cdot ||v|| \cos(\varphi)
\end{aligned}$$

Simplificando el miembro de la izquierda obtenemos:

$$\begin{aligned}
(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 &= (v_1^2 - 2u_1v_1 + u_1^2) + (v_2^2 - 2u_2v_2 + u_2^2) \\
&= \left(u_1^2+u_2^2\right) + \left(v_1^2+v_2^2\right) - 2u_1v_1 - 2u_2v_2;
\end{aligned}$$

y como esta expresión es igual a $\left(u_1^2+u_2^2\right) + \left(v_1^2+v_2^2\right) - 2\,||u|| \cdot ||v|| \cos(\varphi)$, podemos cancelar los términos $(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2$, que aparecen en cada miembro. Obtenemos así:

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = -2\,||u|| \cdot ||v|| \cos(\varphi).$$

De este modo, factorizando el -2 en el miembro izquierdo y dividiendo toda la igualdad entre -2 resulta:

$$u_1v_1 + u_2v_2 = ||u|| \cdot ||v|| \cos(\varphi).$$

Analicemos esta última relación: usa solamente las coordenadas de los vectores u y v, además del valor "$\cos(\varphi)$". Por lo tanto, si despejamos este coseno en la expresión, obtenemos:

$$\cos(\varphi) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{||u|| \cdot ||v||}.$$

En otras palabras, podemos conocer el coseno del ángulo ϕ y, por tanto, también el valor del ángulo φ entre los vectores u y v, usando las coordenadas de u y v. Sin embargo, la notación parece "engorrosa" y sería más sencillo hacer evidente en la última expresión que el coseno de φ sólo depende de los vectores u y v, por lo que establecemos una notación para reemplazar al producto que aparece en el numerador:

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$$

y lo llamamos *el producto punto de dos vectores* o, bien, *el producto escalar*, puesto que el resultado es un número. Es decir:

$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}.$$

[2] Observe que no tiene sentido hacer $a = u$, pues a es un número, mientras que u es un vector; pero $||u||$ sí es un número: la longitud del vector u. Por ello hacemos $a = ||u||$.

Resumimos lo anterior en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.2 *El producto punto (producto escalar) de dos vectores* $u = (u_1, v_1)$ *y* $v = (u_2, v_2)$ *es un número: el resultado de la operación*

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

De esta forma, el coseno del ángulo φ *entre estos vectores puede hallarse como*

$$cos\,(\varphi) = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}.$$

EJEMPLO.

Así, por ejemplo, el producto punto (escalar) de $u = (1, -\sqrt{3})$ y $v = (2, 0)$ es

$$(1, -\sqrt{3}) \cdot (2, 0) = 1(2) - \sqrt{3}(0) = 2.$$

El coseno del ángulo φ entre estos vectores es

$$\cos\,(\varphi) = \frac{(1, -\sqrt{3}) \cdot (2, 0)}{||(1, -\sqrt{3})|| \cdot ||(2, 0)||} = \frac{2}{\sqrt{1+3}\sqrt{4+0}} = \frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

De este modo, el despeje adecuado de φ (para conocer el valor de φ) es

$$\varphi = \text{arc cos}\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi/3$$

(este despeje responde a la pregunta: ¿cuánto debe valer φ para que $\cos\,(\varphi) = 1/2$?). Así, el ángulo entre los vectores es $\pi/3$, o bien, 60^o.

Ahora bien, no perdamos de vista el objetivo: ¿cómo ayuda la expresión que define el coseno del ángulo para saber si dos vectores son perpendiculares o no? Si u y v son perpendiculares, $\varphi = \pi/2$ radianes; de modo que

$$\cos\,(\varphi) = \cos\,(\pi/2) = 0$$

y con ello, el cociente $\dfrac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||} = \cos\,(\pi/2) = 0$; y para que este cociente sea cero, es necesario que el numerador $u \cdot v$ sea cero. Y éste es el criterio que buscamos:

PROPOSICIÓN 2.1 *Dos vectores* v *y* w *son perpendiculares entre sí, siempre que* $v \cdot w = 0$.

Por ejemplo, los vectores $(1, -2)$ y $(2, 1)$ son perpendiculares entre sí, pues

$$(1, -2) \cdot (2, 1) = 1(2) - 2(1) = 0.$$

Ejercicios 2.2

1. Considere el vector $u = (1, -2)$. Calcule $u \cdot u$ y, por otro lado, $||u||^2$. ¿Cómo son estos valores, comparados entre sí? ¿La conclusión es sólo para este vector o sucede siempre con cualquier vector?
2. Si v es cualquier vector en el plano, ¿qué vector es $0 \cdot v$?
3. *Propiedades del producto escalar.* Considere los vectores $u = (0, -2)$, $v = (-1, 4)$ y $w = (2, 3)$; considere a λ algún número real no cero.
   - Calcule el valor de $u \cdot v$ y el de $v \cdot u$, ¿cómo són entre sí?
   - Compare los valores de $u \cdot (v + w)$ (primero se hace la suma y luego el producto punto) y de $u \cdot v + u \cdot w$ (primero se calculan los productos y luego la suma).
   - Convénzase de que $\lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v)$.

   ¿Suceden estas situaciones en general?, ¿por qué?
4. De dos pares de vectores que sean perpendiculares entre sí y dibújelos en el plano cartesiano.
5. Calcule el ángulo entre los vectores $(2, -3)$ y $(3, 4)$.
6. Es un hecho conocido que un triángulo cuyas medidas de los lados son 3, 4 y 5 unidades, forma un triángulo rectángulo (verifique para este triángulo el teorema de Pitágoras). De 3 puntos en el plano (que ninguno de ellos sea el origen) que formen un triángulo de estas medidas.
7. Encuentre la medida del ángulo CAB en el triángulo formado por los puntos $A = (2, 3)$, $B = (3, -4)$ y $C = (-1, 0)$.

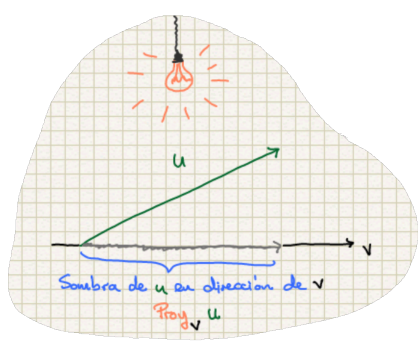

Figura 10: Proyección del vector u sobre el vector v.

Proyecciones y componentes. En algunas ocasiones será útil considerar “la sombra de un vector sobre otro”, del modo en que se ilustra la figura 10.

Por ejemplo, si el vector v fuese $(1, 0)$, entonces v indicaría la dirección del eje de coordenadas x. En este caso, la proyección de $u = (u_1, u_2)$ en la dirección de v sería $(u_1, 0)$. Si u representara una fuerza, la proyección hacia v sería un vector que de algún modo indica la “componente” del vector u pero en la dirección de v. Sin embargo, usaremos el nombre *componente* en un modo más preciso, como tratamos en los ejercicios al final de este apartado.

Suponga, pues, que las coordenadas de los vectores involucrados son $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$. Buscamos encontrar

$$\operatorname{Proy}_v u,$$

el "vector sombra" que dibujamos en gris en la figura 10. Este vector proyección está en la dirección de v, por lo que es paralelo a v y, como vimos más arriba, cumple entonces

$$\operatorname{Proy}_v u = k \cdot v,$$

para algún número k que aún no conocemos. Entonces el vector u será resultado de sumar dos vectores, como se ve en la siguiente figura.

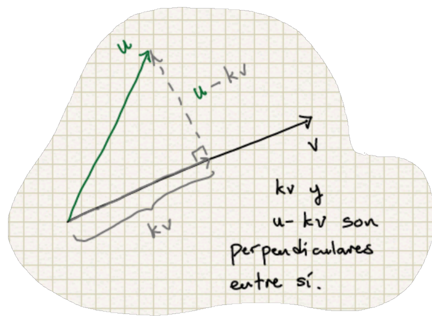

Figura 11: Los vectores kv y $u - kv$.

Ahora bien, para conocer el valor de k observe que como v y $u - kv$ son perpendiculares, su producto punto debe ser cero:

$$0 = (u - kv) \cdot v = u \cdot v - kv \cdot v,$$

por lo que $u \cdot v = kv \cdot v$; mas como $v \cdot v = ||v||^2$ entonces $u \cdot v = k||v||^2$ y por lo tanto

$$k = \frac{u \cdot v}{||v||^2}.$$

Llamamos a este número la *componente* de u en la dirección de v y lo denotamos por

$$\operatorname{Comp}_v u = k.$$

De este modo, el vector sombra es $\operatorname{Proy}_v u = (\operatorname{Comp}_v u) \cdot v = k \cdot v = \dfrac{u \cdot v}{||v||^2}\, v.$

Observe, por tanto, que la proyección de u en la dirección de v es un vector (un vector paralelo a v), mientras que la componente de u en la dirección de v es un escalar, un número que nos dice "qué tanto hay qué estirar o comprimir el vector v para convertirlo en el vector proyección (la sombra)".

Ejemplo. Si deseamos calcular el vector proyección del vector $u = (5, -1)$ sobre el vector $v = (2, 3)$, procedemos a calcular

$$\operatorname{Proy}_v u = \frac{(5,-1)\cdot(2,3)}{||(2,3)||^2}\,(2,3) = \frac{5(2) - 1(3)}{2^2 + 3^2}\,(2,3) = \frac{7}{13}\,(2,3) = \left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}\right).$$

Ejercicios 2.3

Sabemos que los vectores que dan origen al sistema coordenado en el plano son $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$. Observe que cualquier punto en el plano puede escribirse como suma de estos vectores; por ejemplo, el vector $(5, -7)$ puede escribirse como $5\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, pues

$$5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} = 5(1, 0) - 7(0, 1) = (5, -7).$$

Esto no es raro, pues los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ generan a los ejes de coordenadas x e y, respectivamente. En otras palabras, la cuadrícula estándar (es decir, la *canónica*) construida a partir de estos vectores, uno vertical y otro horizontal, está formada por líneas verticales y horizontales.

Otra manera de decir que las coordenadas del vector $(5, -7)$ según $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son 5 y -7, en ese orden, es observando que $\mathrm{Proy}_{\mathbf{i}}(5, -7) = (5, 0)$ y que $\mathrm{Proy}_{\mathbf{j}}(5, -7) = (0, -7)$ (calcúlelas usando la fórmula de la proyección).

Ahora bien, si se quisiera cuadricular de nuevo el plano, ya no tomando los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ como base, sino otros inclinados a placer, digamos $\mathbf{a} = (1, 2)$ y $\mathbf{b} = (-2, 3)$, generaríamos una cuadrícula con líneas paralelas al vector a y al vector b. ¿Cómo saber qué coordenadas tendría el mismo vector $(5, -7)$ en esta nueva cuadrícula? Es decir, ¿quiénes son los valores λ y μ de modo que

$$(5, -7) = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \lambda(1, 2) + \mu(-2, 3) = (\lambda - 2\mu, 2\lambda + 3\mu)$$

se satisfaga? Una manera de hacerlo es resolviendo el sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar las entradas de los vectores de la igualdad anterior:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5 & = & \lambda - 2\mu \\ -7 & = & 2\lambda + 3\mu. \end{array} \right.$$

Otra alternativa es convenciéndonos de que

$$\lambda(1, 2) = \mathrm{Proy}_{(1,2)}(5, -7) \quad \text{y} \quad \mu(-2, 3) = \mathrm{Proy}_{(-2,3)}(5, -7);$$

es decir, que

$$\lambda = \mathrm{Comp}_{(1,2)}(5, -7) \quad \text{y} \quad \mu = \mathrm{Comp}_{(-2,3)}(5, -7).$$

Calcule, pues, los valores de λ y μ de las dos formas. ¿Cuál le parece más sencilla?

3. Espacios con dimensión mayor que 2

En el espacio tridimensional (largo-ancho-alto) los resultados que hemos visto son válidos. La única diferencia es que ahora en lugar de trabajar con vectores en dos coordenadas, tenemos vectores de tres. Repasemos los resultados a través de ejemplos y ejercicios.

- Norma. Recuerde el ejercicio 1 de la lista 1.1 y calcule la norma del vector $v = (1, -2, 4)$. ¿Cuál es la fórmula para obtener la norma del vector $u = (a, b, c)$? Además, construya un vector de norma 1 en la misma dirección de u.

- Suma y producto por escalar. Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, λ un número,

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \quad \text{y} \quad \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3).$$

  ¿Cuáles son los vectores $u + v$ y $-2u$ si $u = (1, 0, -3)$ y $v = (-1{,}3, \sqrt{2}, 1)$?

- Producto punto (escalar). Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, el producto punto (producto escalar) es el número

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v2 + u_3 v_3.$$

  Calcule $u \cdot v$ si $u = (-2, 1, 0)$ y $v = (1, 3, 4)$.

- Relación producto punto/norma. También para 3 dimensiones se cumple

$$v \cdot v = ||v||^2.$$

  ¿Por qué? Convénzase analizando esta igualdad con un ejemplo, digamos, con $v = (-1, 0, 2)$.

- Ángulo entre vectores. Para calcular el ángulo entre vectores de 3 coordenadas también funciona la fórmula que dedujimos para el caso de 2 dimensiones. Calcule el ángulo θ entre los vectores $a = (0, -1, 2)$ y $b = (2, 1, -3)$.

- Ley de cosenos. En el ejercicio anterior calculó $\cos(\theta)$. Sabiendo este dato, ¿cómo se plantea la ley de cosenos con los vectores a y b del ejercicio anterior?

- Paralelismo y perpendicularidad. Los vectores $(1, -2, 3)$ y $(5, -10, 15)$ son paralelos entre sí, mientras que la pareja $(1, 2, 3)$ y $(2, -1, 0)$ son perpendiculares entre sí. ¿Por qué? (utilice los mismos criterios que en el caso de dos dimensiones).

- La proyección de un vector sobre otro. Utilice la misma fórmula que en el caso de dos dimensiones, para calcular $\text{Proy}_v u$ si $u = (-1, -1, -2)$ y $v = (2, 3, -1)$.

Nótese que hemos procedido de esta manera (velozmente) porque todas las operaciones con vectores en dos dimensiones pueden definirse de manera análoga en 3 dimensiones (suma, multiplicación por escalar, producto punto) y, por tanto, también los resultados que dependen de estas definiciones (ley de cosenos, paralelismo, perpendicularidad, proyección).

Sin embargo, hay una operación que no se tiene en vectores en 2 dimensiones, pero sí en 3: el producto cruz o producto vectorial. A diferencia del producto punto, en el que obtenemos un número al "multiplicar " los vectores, en el producto cruz (otra especie de multiplicación) obtendremos un tercer vector.

Ejercicios 3.1

1. La dirección de una recta en el espacio ya no puede indicarse a través de una simple división, porque una vez que nos paramos sobre un punto de la recta, tenemos 3 grados de libertad: podemos movernos hacia la derecha-izquierda, hacia atrás-adelante o hacia arriba-abajo (3 posibles direcciones). Por ello, sólo indicamos la dirección de la recta con un vector.
2. Si v es cualquier vector en el espacio, ¿qué vector es $0 \cdot v$?
3. Encuentre un vector en la dirección de $(4, -2, 1)$ pero de norma 1.
4. Si ¿Qué puede decir del vector (a, b, c), si se sabe que su norma es cero? ¿Qué relación hay entre sus coordenadas?
5. Observe que todo vector (p, q, r) puede expresarse de la forma $(p, q, r) = p(1, 0, 0) + q(0, 1, 0) + r(0, 0, 1)$; es decir, puede "construirse" a cualquier vector a partir de estos 3 vectores unitarios (observe que la norma de cada uno es 1). Ests vectores tienen nombre especial, pues generan los ejes x, y y z del espacio:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{k} = (1, 0, 0).$$

Convénzase de que estos vectores son perpendiculares entre sí.

El producto cruz (producto vectorial). El vector resultado de este producto será *perpendicular a los dos vectores multiplicados*, al modo en que se muestra en la siguiente figura.

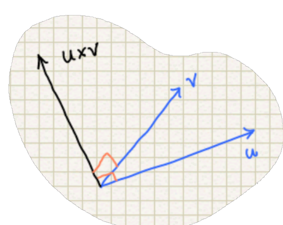

Figura 12: Producto cruz de u y v.

¿Qué necesidad tenemos de este producto? La inclinación de un plano. Nos explicamos: en dos dimensiones, para hablar de la inclinación de la recta bastaba indicar un número (su pendiente), o bien un vector de dirección. En el espacio tridimensional, para indicar la inclinación de una recta ya no podremos hablar de la pendiente, pero sí del vector de dirección. Sin embargo, cuando se tiene un plano en el espacio, ¿cómo hablar de su "inclinación"?

Una recta es un objeto ideal e infinito sobre el que podemos medir solamente longitud. En un plano ya se tiene más espacio: podemos medir largo y ancho. A ello atiende la idea de la dimensión: la recta es un objeto de dimensión uno, mientras que el plano es de dimensión 2. Es por ello que para hablar de la inclinación de la recta basta dar *un* dato: un vector; mientras que en el plano habremos de necesitar más información, a saber, 2 vectores para definirlo. ¿Ésto qué quiere decir?, que dos vectores no colineales (es decir, que no pertenecen a la misma línea) en el espacio definen un único plano. Para explicarnos pedimos se haga el siguiente ejercicio mental: coloque 2 vectores en el espacio e imagine la situación de colocar sobre de ellos una hoja de papel. Diremos que la hoja de papel está determinada por esos dos vectores: el plano definido por ellos. Dado que estos "vectores soporte" del plano no tienen por qué ser únicos, sí es cierto que podremos considerar un sólo vector que sea perpendicular a cualquiera que se encuentre en el plano, como lo muestra la figura siguiente.

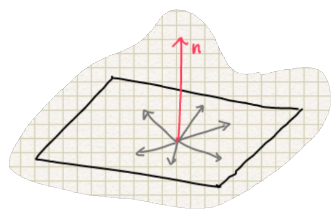

Figura 13: Vector normal a un plano.

Ésta es la forma en que definimos la inclinación de un plano: a través de este vector $\mathbf{n}$ (en rojo en la imagen) al que llamamos *vector normal*. Más adelante veremos cómo es útil este concepto para identificar, por ejemplo, si dos planos son paralelos (resp. perpendiculares) al serlo también sus vectores normales.

¿Cómo definimos (y, por tanto, calculamos) el producto cruz? Considere los vectores $u = (1, -2, 3)$ y $v = (2, -2, 1)$. El producto vectorial está dado por la fórmula siguiente en la que el segundo renglón son las coordenadas de u, mientras que en el tercero se colocan las de v; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores unitarios:

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (4, 5, 2)$$

¿Por qué no está definido en 2 dimensiones? Porque al ser un vector perpendicular a los dos multiplicados, sería necesario "salirnos" del espacio en el que estamos (el plano) y el resultado no es, pues, un vector en el plano nuevamente. Sin embargo, en 3 dimensiones, el producto cruz de dos vectores sigue estando en el espacio de 3 dimensiones.

Observación 3.1 *El producto vectorial es un vector. Es perpendicular, a la vez, a cada uno de los vectores que se multiplicaron.*

Como ejercicio, observe que, en efecto, $u \cdot (4, 5, 2) = 0 = v \cdot (4, 5, 2)$, por lo que tanto u como v son perpendiculares a $u \times v = (4, 5, 2)$.

Regla de la mano derecha (sistema dextrógiro). Ahora bien, al contrario de lo que sucede con el producto punto, no es lo mismo $u \times v$ que $v \times u$ y la diferencia es un signo. Si el lector hace el ejercicio de calcular $v \times u$ en el ejemplo anterior, notará que el resultado es $(-4, -5, -2) = -(4, 5, 2) = -u \times v$. Es decir, mientras multiplicar en un sentido nos genera cierto vector, multiplicar en el otro genera el mismo vector pero apuntando en el sentido contrario. A este resultado se le puede recordar a través de una mnemotécnia que llamamos la regla de la mano derecha. Explicamos de qué se trata.

Cuando consideramos cualquier producto cruz de dos vectores $u \times v$ siempre podremos acomodar a los vectores u y v como en la figura 12 (en azul), la diferencia la hará el orden en que multipliquemos. Usando la mano derecha para saber a dónde apunta el resultado. El primer vector que tomemos al multiplicar siempre será representado por el dedo índice de la mano derecha, mientras que el segundo vector se representará por el dedo medio. El resultado lo indicará el dedo pulgar, tal y como se muestra en la siguientes figuras.

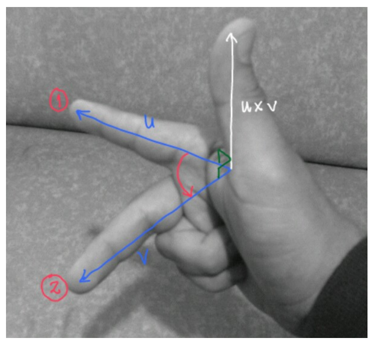

Figura 14: El producto $u \times v$.

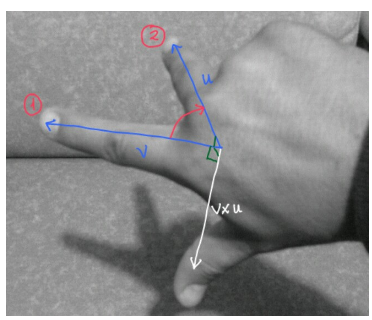

Figura 15: El producto $v \times u$.

El área del paralelogramo generado por u y v. Ante el problema de calcular el área del paralelogramo formado por los vectores u y v (como se ve en la siguiente figura), dado que el área es base por altura, podría ocurrírsenos calcular la altura h del paralelogramo, usando trigonometría.

De este modo, observando en la figura que el triángulo PQR es rectángulo, en que el vector v es la hipotenusa y la altura h es el cateto opuesto al ángulo θ formado por los vectores u y v, advertimos que

$$h = ||v|| \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

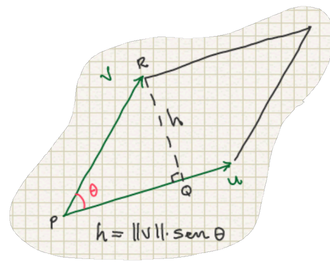

Figura 16: El área de un paralolegramo.

por lo que al ser $||u||$ la longitud de la base del paralogramo, el área está dada por la fórmula

$$\text{Área} = (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = ||u|| \cdot h = ||u|| \cdot ||v|| \operatorname{sen}\theta.$$

Pero hasta ahora hemos desarrollado herramienta para conocer $\cos\theta$, mas no conocemos $\operatorname{sen}\theta$. De acuerdo con la identidad $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ tendremos

$$\text{Área} = ||u||||v|| \operatorname{sen}\theta = ||u||||v||\sqrt{1-\cos^2\theta},$$

que, elevando al cuadrado resulta $\text{Área}^2 = ||u||^2||v||^2(1-\cos^2\theta)$. Y como ya dijimos, sabemos que $\cos\theta = \dfrac{u\cdot v}{||u||||v||}$, por lo que lo sustituimos en la igualdad anterior y tenemos

$$\text{Área}^2 = ||u||^2||v||^2(1-\cos^2\theta) = ||u||^2||v||^2\left(1-\frac{(u\cdot v)^2}{||u||^2||v||^2}\right) = ||u||^2||v||^2 - (u\cdot v)^2.$$

¿Y a qué es igual esta última expresión? Al observarla, da la impresión de el término $-(u\cdot v)^2$ elimina la multiplicación de coordenadas que pueda haber en $||u||^2||v||^2$. Veamos qué sucede.

Damos coordenadas a los vectores: $u = (u_x, u_y, u_z)$ y $v = (v_x, v_y, v_z)$ de modo que

$$\text{Área}^2 = ||u||^2||v||^2 - (u\cdot v)^2 = [u_x^2+u_y^2+u_z^2][v_x^2+v_y^2+v_z^2] - (u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)^2.$$

Al hacer los cálculos, la expresión de la derecha se convierte en

$$\text{Área}^2 = u_x^2v_y^2 + u_x^2v_z^2 + u_y^2v_x^2 + u_y^2v_z^2 + u_z^2v_x^2 + y_z^2v_y^2 - 2u_xv_xu_zv_z - 2u_xv_xu_yv_y - 2u_yv_yu_zv_z.$$

Esta expresión es, aparentemente, arbitraria y complicada. Sin embargo, alguien advirtió que era muy parecida a la expresión que se obtiene de calcular la norma al cuadrado del vector

$$\begin{aligned} u\times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \\ &= (u_yv_z - u_zv_y, -u_xv_z + u_zv_x, u_xv_y - u_yv_x), \end{aligned}$$

pues la norma al cuadrado del producto cruz $u\times v$ es

$$\begin{aligned} ||u\times v||^2 &= (u_yv_z - u_zv_y)^2 + (-u_xv_z + u_zv_x)^2 + (u_xv_y - u_yv_x)^2 \\ &= u_y^2v_z^2 - 2u_uv_zu_zv_y + u_z^2v_y^2 + u_x^2v_z^2 - 2u_xv_zu_zv_x + u_z^2v_x^2 + u_x^2v_y^2 - 2u_xv_yu_yv_x + u_y^2v_x^2 \\ &= \text{Área}^2. \end{aligned}$$

Es decir, $||u \times v||^2 = \text{Área}^2$, por lo que $||u \times v|| = \text{Área}$. En resumen, lo que hay que recordar es lo siguiente.

Proposición 3.1 *El área del paralelogramo (y su equivalencia usando la función seno) formado por los vectores u y v en el espacio está dada por la norma del producto cruz:*

$$||u||\,||v||\,sen\,\theta = \textit{Área del paralelogramo} = ||u \times v||.$$

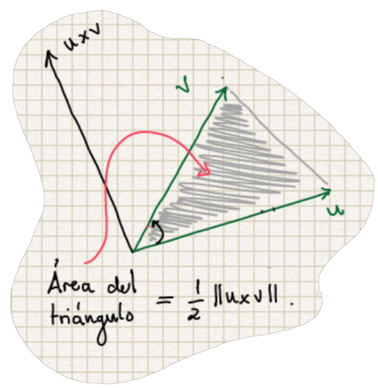

Figura 17: El área del triángulo formado por u y v.

Como consecuencia, si sólo nos interesamos por el área del triángulo generado por los vectores u y v, dado que el área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo, bastará calcular

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}||u \times v||.$$

Pero aún más, de la igualdad $||u \times v|| = ||u||\,||v||\,\text{sen}\,\theta$ hemos hallado una equivalencia para $\text{sen}\,\theta$:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{||u \times v||}{||u|| \cdot ||v||},$$

expresión muy parecida a la de $\cos\theta$, salvo que con la norma del producto cruz en vez del producto punto.

Proponemos ejemplos de todo lo anterior en los ejercicios.

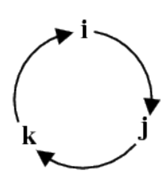

Figura 18: El producto vectorial de los vectores canónicos.

Ejercicios 3.2

1. Calcule $u \times v$, donde $u = (1, -2, 5)$ y $v = (2, 1, 4)$. Use esta expresión para calcular el área del paralelogramo que forman y para calcular sen θ, donde θ es el ángulo comprendido entre los vectores u y v.
2. Calcule los productos $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ y $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$. Inteprete geométricamente el resultado.
3. Tome cualesquiera dos vectores en el espacio tridimensional que pertenezcan al plano xy y considere su producto cruz. ¿Qué resulta?, ¿por qué?
4. Observe la figura 18 (en relación con el ejercicio 2). El sentido de las flechas indican la multiplicación de vectores (producto cruz) y su resultado. Por ejemplo, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ y en la figura se hallan $\mathbf{i}$, luego $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Si los vectores se toman en el sentido contrario al que indican las flechas, el resultado es el vector siguiente pero con signo negativo: por ejemplo, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$.
5. Recuerde el ejercicio 6 de la lista 2.2. El área de dicho triángulo es $A = (3)(4)/2 = 6$ unidades cuadradas. Verifíquelo usando el producto cruz de vectores.
6. Resuelva el ejercicio 7 de la misma lista 2.2 de ejercicios, usando la equivalencia $||u \times v|| = ||u||||v||\operatorname{sen}\theta$.

Ahora que hemos planeado los fundamentos del lenguaje geométrico del espacio euclidiano, nos ocupamos en definir las ecuaciones de los objetos fundamentales: la recta y el plano.

4. La recta en el espacio

Forma paramétrica. Para definir una recta en el espacio requerimos de dos datos: por dónde pasa y con qué inclinación. El primer dato hace referencia a un punto (posición de la recta), mientras que el segundo a un vector. La ecuación paramétrica (se llama así porque usará *un parámetro*, un número variable) recuperará estos dos datos. Por ejemplo, todos los puntos de la recta L que pasa por el punto $P = (1, 4, -2)$ y tiene por dirección el vector $v = (1, -6, 3)$ se pueden hallar variando la t en la expresión:

$$L : \quad (1, 4, -2) + t(1, -6, 3)$$

(la L y los dos puntos a la izquierda indican que la expresión define a la recta L). En efecto, sabemos que el punto $(-1, 16, -8)$ pertenece a la recta L porque podemos obtenerlo con la expresión anterior, haciendo $t = -2$:

$$(1, 4, -2) - 2(1, -6, 3) = (1, 4, -2) - (2, -12, 6) = (1 - 2, 4 + 12, -2 - 6) = (-1, 16, -8).$$

En otras palabras, la ecuación paramétrica de la recta se lee: estando en el punto P, ¿qué tanto se debe "estirar" o "comprimir" el vector v para llegar al punto deseado? En nuestro ejemplo, tuvimos que considerar el doble del vector v pero en sentido opuesto al sentido de v, por ello usamos $t = -2$.

Veremos en los ejercicios que esta definición también es válida en el plano. Ésta es una ventaja de la ecuación paramétrica por encima de la ecuación cartesiana de la recta, pues una recta en el espacio ya no puede espresarse con una sola ecuación como sucede en el plano, pero ello se verá cuando tratemos la ecuación del plano en el espacio.

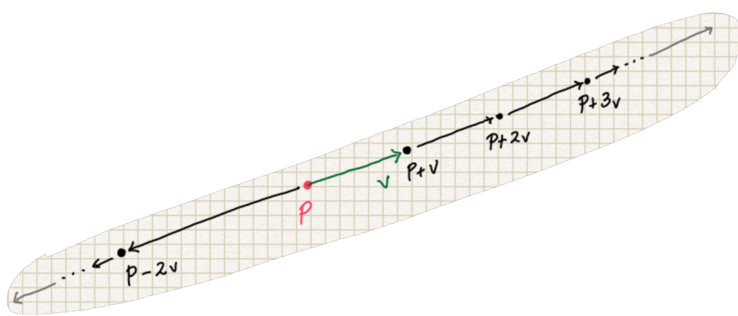

Figura 19: Ecuación paramétrica de la recta.

Definición 4.1 *Dado el punto P y el vector v (ambos en el plano o ambos en el espacio), la ecuación paramérica de la recta R que pasa por P en la dirección de v es*

$$R : \quad P + tv,$$

donde el parámetro t es cualquier número real.

Ejercicios 4.1

1. Dé la ecuación paramétrica de la recta L en el plano que pasa por el punto $P = (2, 1)$ en la dirección de $v = (-1, 2)$.

2. Dado que la recta L del ejercicio anterior está en el plano, podemos hallar también su ecuación cartesiana: si la dirección es $v = (-1, 2)$, entonces la pendiente de la recta será $m = 2/(-1) = -2$ y al pasar por $P = (x_1, y_1) = (2, 1)$ usamos la forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$, es decir,

$$y-1 = -2(x-2) = -2x+4 \quad \Rightarrow \quad y = -2x+4+1 \quad \Rightarrow \quad y = -2x+5.$$

   Encuentra, pues, por tu cuenta, las ecuaciones cartesiana y paramétrica de la recta que pasa por el punto $P = (-1, -4)$ en la dirección de $v = (3, 2)$.

3. Si decimos que la pendiente de una recta en el plano es $m = 1/3$, un vector que represente su inclinación es $v = (1, 3)$, pero también $v = (2, 6)$, así como $v = (-1, -3)$, etc., pues en general, cualquier vector $v = (a, b)$ cuyas coordenadas que cumplan con

$$\frac{b}{a} = m = \frac{1}{3}$$

   será útil. Por lo tanto, al pedir la ecuación paramétrica de una recta que tiene pendiente $1/3$ y pasa por el punto $(2, 3)$ (¡encuéntrela!, en eso consiste este ejercicio), por ejemplo, no existe una única respuesta, sino muchas... tantas como vectores de dirección v se nos ocurran para representar a m. Por tanto, no existe una única ecuación paramétrica de la recta.

4. Dé una ecuación paramétrica de la recta que pasa por $P = (1, 5, -2)$ en la dirección de $v = (0, -2, -1)$.

5. Dé una ecuación paramétrica de la recta que pasa por $P = (2, 1, 3)$ y es vertical, es decir, tiene la dirección del eje z.

6. Encuentre la intersección de las rectas

$$L_1 : \quad (2, 3) + t(1, 1) \quad \text{y} \quad L_2 : \quad (4, 2) + s(-1, 2),$$

   sin llevar estas ecuaciones a la forma cartesiana.

7. Construya dos ejemplos de rectas, una que sea perpendicular y otra que sea paralela a la recta

$$R : \quad (2, 3, -1) + t(2, 1, -2).$$

   Exprese las ecuaciones de estos dos ejemplos de rectas en forma paramétrica.

Forma simétrica. Considere de nuevo la ecuación paramétrica de la recta L de la discusión anterior

$$L: \qquad (1,4,-2)+t(1,-6,3).$$

Hemos dicho que todo punto en la recta L puede hallarse dando algún valor a t, lo cual significa que para que un punto $Q=(x,y,z)$ esté en la recta L, debe existir un valor de t que satisfaga $(1,4,-2)+t(1,-6,3)=(1+t,4-6t,-2+3t)$, es decir, las condiciones

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 4-6t \\ z &= -2+3t. \end{cases}$$

Despejando la t en cada ecuación, obtenemos

$$\begin{cases} t &= x-1 \\ t &= \dfrac{y-4}{-6} \\ t &= \dfrac{z+2}{3}. \end{cases}$$

Dado que en todas las ecuaciones, el valor de t es el mismo, todas las expresiones son iguales:

$$x-1=\frac{y-4}{6}=\frac{z+2}{3}.$$

Ésta es la forma simétrica de la recta.

Como observación final a este apartado, note que si se tiene una ecuación paramétrica de la recta en el plano, en la forma simétrica correspondiente sólo se tendrá la igualdad entre 2 expresiones, una que involucra a x y otra a y.

Ejercicios 4.2

Exprese en la forma simétrica las siguientes rectas.

$L: \quad y=3x-1$

$A: \quad (5,-2,1)+t(2,-1,-1)$

$R: \quad (2,3)+t(-1,5)$

---

5. El plano en el espacio

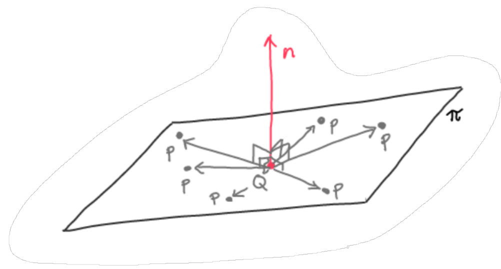

Figura 20: El plano como lugar geométrico.

Uno de los objetivos de esta sección es deducir qué forma tienen las ecuaciones que definen planos en el espacio. El primer acercamiento que tuvimos al problema sucedió cuando hablamos del producto vectorial. Decíamos que la propiedad que definió al vector producto cruz $u \times v$ fue el ser perpendicular, a la vez, a los dos vectores u y v multiplicados, que esos dos vectores determinaban un plano y que no importaba cuál pareja de vectores en el plano multiplicábamos, obtendríamos un vector paralelo a $u \times v$... y más, que el vector $u \times v$, que llevaba el nombre de *vector normal* al plano, definía la "inclinación" del plano.

Ecuación cartesiana del plano. Pues bien, el problema ahora es precisamente el contrario: dado un vector que define la inclinación del plano, hallar el plano, pues el plano son *todos los vectores que son perpendiculares al vector normal.*

Nos explicamos mejor, pero para ello consideramos la figura 20.

Dado un vector $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, podemos definir con él el plano π (como en la figura), considerando que todos los vectores que forman el plano son perpendiculares a $\mathbf{n}$. Así, siendo $Q = (a, b, c)$ el punto de intersección entre $\mathbf{n}$ y π, pensamos a $P = (x, y, z)$ como un "punto móvil", los puntos P formarán al plano y los vectores que forman Q y P todos tienen en común que son perpendiculares a $\mathbf{n}$; es decir,

$$0 = \mathbf{n} \cdot (P - Q).$$

Esta igualdad, reescrita tomando en cuenta las coordenadas de los vectores involucrados, se ve como

$$\begin{aligned} 0 = (n_x, n_y, n_z) \cdot (x - a, y - b, z - c) &= n_x(x - a) + n_y(y - b) + n_z(z - c) \\ &= n_x x + n_y y + n_z z - (n_x a + n_y b + n_z c), \end{aligned}$$

de modo que la ecuación del plano será

$$n_x x + n_y y + n_z z = k,$$

donde $k = n_x a + n_y b + n_z c$ es una constante. Ésta es la forma que tendrán las *ecuaciones cartesianas* de los planos. Consideramos un ejemplo para mayor claridad.

La ecuación del plano cuyo vector normal es $\mathbf{n} = (2, -4, 3)$ (dar este vector es definir una suerte de "inclinación" para el plano), que pasa por el punto $Q = (2, -1, -3)$, se hallará considerando todos los putos $P = (x, y, z)$ del espacio cuyos vectores $P - Q$ sean perpendiculares a $\mathbf{n}$, es decir, que satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{n} \cdot (P - Q) &= (2, -4, 3) \cdot (x - 2, y + 1, z + 3) = 2(x - 2) - 4(y + 1) + 3(z + 3) \\ &= 2x - 4y + z + 2(-2) - 4(1) + 3(3) = 2x - 4y + 3z + 1. \end{aligned}$$

Así, la ecuación del plano es $2x - 4y + 3z = -1$.

Observe que las coordenadas del vector normal terminan como los coeficientes de las variables. Por ejemplo, si la ecuación del plano es

$$5x + 2y - z = 5$$

el vector normal tiene coordenadas $(5, 2, -1)$.

Ejercicios 5.1

1. Dé la ecuación cartesiana del plano que
   - pasa por $Q = (2, -1, 5)$ y tiene por vector normal a $\mathbf{n} = (1, -2, 4)$,
   - pasa por el punto $Q = (0, 0, 0)$ y tiene por vector normal al mismo del ejercicio anterior $\mathbf{n} = (1, -2, 4)$.

   ¿Qué diferencia hay entre las ecuaciones de estos planos? Es decir, ¿dónde se observa que un plano pasa por el origen y el otro no?
2. Encuentre 3 puntos A, B y C que pertenezcan al plano
   $$\pi : \quad 3x - 4y + z = 1.$$
   - Obtenga los vectores $u = B - A$ y $v = C - A$.
   - Calcule $u \times v$. ¿Qué relación hay entre este vector y el vector normal de π? (recuerde que puede saber el vector normal de π al observar los coeficientes de las variables en la ecuación que lo define). Interprete geométricamente la situación.
3. Dé las ecuaciones de 2 planos paralelos entre sí. ¿Cómo son sus correspondientes vectores normales?

Ecuación paramétrica del plano. La ecuación paramétrica de la recta consistió en dar un vector de posición y un vector de inclinación, multiplicado este último ("estirado o comprimido") por un parámetro t, porque es así como del origen se llega a cualquier punto de la recta (véase la figura 21).

Para el caso de un plano, la situación es similar, pero dado que estamos ante un objeto de 2 dimensiones, requeriremos movernos a un punto Q y a partir de allí decir qué tanto nos movemos a lo largo y a lo ancho del plano, dependiendo de 2 vectores u y v que lo definan, como se muestra en la figura 22.

Así, estando en Q hay qué moverse en la dirección de $su + tv$, es decir, la ecuación *paramétrica del plano* depende de 2 parámetros s y t (¿qué tanto se "estira" u y qué tanto v, respectivamente) y tiene la forma

$$\pi : \quad Q + su + tv.$$

(En el ejemplo de la figura, $s = 1{,}5$ y $t = 1$.) Por ejemplo, el plano Π que pasa por el punto $Q = (2, -1, -3)$ y está generado por los vectores $u = (0, -2, 1)$ y $v = (-1, 4, 1)$ tiene como ecuación paramétrica:

$$\Pi : \quad (2, -1, -3) + s(0, -2, 1) + t(-1, 4, 1).$$

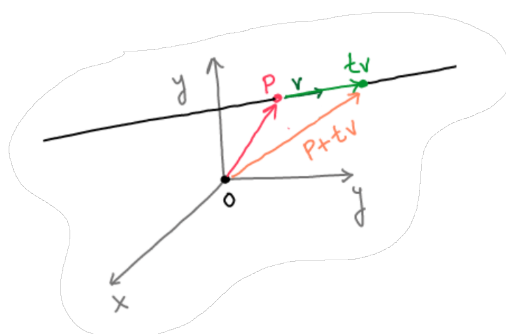

Figura 21: Cómo llegar (en naranja) del origen $\mathbf{0}$ al punto $P + tv$.

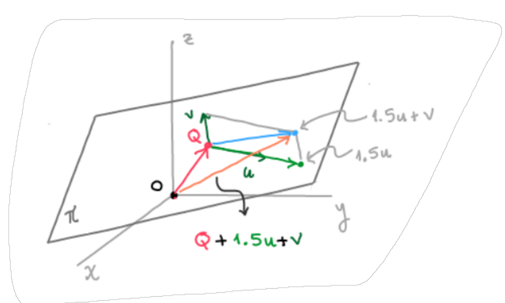

Figura 22: Cómo llegar (en naranja) del origen $\mathbf{0}$ al punto $P + tv$.

Ejercicios 5.2

1. Encuentre la ecuación paramétrica del plano π que pasa por el punto $Q = (1, 2, 3)$ y es generado por los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{k}$.

2. Un plano generado por los vectores u y v tiene por vector normal a un vector $\mathbf{n}$ perpendicular tanto a u como a v. Además, a sabiendas de que $u \times v$ también es un vector perpendicular tanto a u como a v, podemos considerar $\mathbf{n} = u \times v$. Encuentre, pues, el vector normal $\mathbf{n}$ al plano

$$\Pi : \quad (2, -1, -3) + s(0, -2, 1) + t(-1, 4, 1).$$

del ejemplo en el texto anterior a estos ejercicios.

3. Considere de nuevo el ejercicio 1 y atendiendo al ejercicio anterior, observe que el vector normal al plano π es

$$\mathbf{n} = i \times k = -j = (0, -1, 0).$$

Dado que las coordenadas de $\mathbf{n}$ son, como ya vimos, los coeficientes de las variables x,, y y z en la ecuación del plano, para hallar la ecuación cartesiana de π sólo hace falta hallar el valor de la constante C en

$$0x - y + 0z = C.$$

Para ello, usamos el hecho de que π pasa por el punto $Q = (1, 2, 3)$, de modo que al reemplazar sus coordenadas en la ecuación, hallamos el valor de C: $C = 0(1) - 1(2) + 0(3) = -2$, por lo que la ecuación cartesiana del plano π es $0x - y + 0z = -2$, o bien, simplificando:

$$y = 2.$$

Encuentre, pues, las ecuaciones paramétrica y cartesiana del plano que pasa por $Q = (2, -1, -2)$ y es generado por los vectores $u = (1, 2, -1)$ y $v = (0, 1, 2)$.

---

6. La forma cartesiana de la recta

Terminamos esta guía con la definición de la ecuacíon cartesiana de la recta. Como hemos dicho, definirla con una sola ecuación presupone un problema, pues las ecuaciones más simples que podemos tener en el espacio son las que poseen de una a tres variables elegidas entre x, y y z, cada una elevada a potencia uno a lo más... y usando constantes. Es decir, de la forma

$$ax + by + cz = d,$$

donde al menos una de las constantes a, b, c o d no es cero. Podemos tener ecuaciones de la forma $x = 3$, $y = -1$, etc., pero pertenecen todas a la forma general anterior. El problema estriba en que, como también ya vimos, estas ecuaciones definen planos, no rectas. Sin embargo, dado que la intersección de 2 planos es una recta, podemos definir a una recta como la intersección de dos planos. Daremos un ejemplo de ésto.

Considere la recta $L: \quad (7, 2, -1) + t(2, -1, 3)$. Para hallar dos planos que se intersecten en esta recta necesitamos que todos los puntos de la recta satisfagan ambas ecuaciones de los planos. El primer plano π_1 podemos elegirlo de modo que contenga a L y basta con dar otro vector que no esté en la recta para que podamos generarlo; es decir, otro vector que no sea paralelo a $(2, -1, 3)$, digamos, $(1, 1, 1)$. Así, un primer plano podría ser:

$$\pi_1: \quad (7, 2, -1) + t(2, -1, 3) + s(1, 1, 1).$$

Para hallar otro plano π_2, procedemos de la misma manera, eligiendo otro vector que no pertenezca al plano generado por $(2, -1, 3)$ y $(1, 1, 1)$, digamos, $(1, 1, 3)$ (o bien, considerar $(2, -1, 3) \times (1, 1, 1)$ el cual definitivamente cumple con lo que pedimos). Ésto se pide así para evitar haber tomado un vector que junto con $(2, -1, 3)$ defina el mismo plano que π_1. Reemplazamos, pues, $(1, 1, 1)$ por $(1, 1, 3)$ y tenemos

$$\pi_2: \quad (7, 2, -1) + p(2, -1, 3) + q(1, 1, 3).$$

(Usamos otros parámetros, p y q, porque estos valores no tienen por qué ser iguales a t y a s en el otro plano.) Por lo tanto, la recta L puede definirse como la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\begin{cases} (7, 2, -1) + t(2, -1, 3) + s(1, 1, 1) \\ (7, 2, -1) + p(2, -1, 3) + q(1, 1, 3), \end{cases}$$

que si las transformamos a ecuaciones cartesianas (¡hágalo!), resulta:

$$\begin{cases} 4x - y - 3z &= 29 \\ 2x + y - z &= 17, \end{cases}$$

respectivamente. A este último par de ecuaciones llamamos la *forma cartesiana de la recta*.

Por supuesto, dado que nosotros elegimos los vectores que habríamos de agregar a la ecuación de la recta, los pares que demos para expresar la misma recta pueden variar y hay tantos como formas distintas se nos ocurran de elegir tales vectores. Es decir, no hay un único par de ecuaciones que defina a una recta, porque, además, los pares de planos a intersectar para que generemos la recta que nos interesa pueden ser varios.

Ejercicios 6.1

1. Construya las ecuaciones de 2 planos cuya intersección en el espacio sea la recta
$$L: \quad (1,2,3)+t(-1,5,-2).$$

2. Y al contrario, encuentre la ecuación paramétrica de la recta R que resulta de la intersección de los planos
$$\pi_1: \quad 2x-5y+z=1 \qquad \text{y} \qquad \pi_2: \quad -x+2y+z=3.$$
Para ello, encuentre los vectores normales $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_1}$ de π_1 y π_2, respectivamente, y haga un dibujo para convencerse de que el vector de dirección de la recta R buscada es precisamente $v=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}$.
Luego, sólo hará falta hallar un punto $P=(a,b,c)$ en la intersección de los planos, es decir, que satisfaga ambas ecuaciones de los planos al mismo tiempo. Para ello puede dar valores a una coordenada, digamos, a b y resolver el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que resulta.

Resumen de conceptos, técnicas y fórmulas

Elabore un resumen de los siguientes tópicos. Algunos de ellos, marcados con asterisco, no han sido tratados en esta guía, por lo que debes investigarlos.

- Las ecuaciones paramétrica (en el plano y el espacio) y cartesiana (en el plano) de la recta. ¿Cómo pasar de una a la otra?
- Ecuaciones paramétrica y cartesiana del plano en el espacio. ¿Cómo pasar de una a la otra?
- Las fórmulas $\mathrm{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y $\mathrm{Comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ (en el plano y el espacio). ¿Cuál es la diferencia entre las fórmulas?
- Definición de $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.
- Ángulo θ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, usando tanto $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ como $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.
- Distancia de un punto a una recta y de un punto a un plano.
- Ángulo entre rectas, ángulo entre planos.
- Ecuación de una recta (en el plano y el espacio) que
  (a) pasa por P y tiene dirección $\mathbf{v}$;
  (b) pasa por P y es perpendicular a $\mathbf{v}$;
  (c) pasa por dos puntos P y Q.
- Ecuación de un plano que
  (a) pasa por 3 puntos;
  (b) pasa por un punto y es generado por dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$;
  (c) pasa por un punto P y tiene a $\mathbf{n}$ como vector normal.
- Fórmulas de las posiciones relativas entre planos y rectas, usando los vectores de dirección $\mathbf{v}$ de las rectas y vectores $\mathbf{n}$ normales de los planos.
- Equivalencia y significado geométrico de los valores $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||$ y $||\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})||$.