

SECUENCIA 5

LA ESTRUCTURA DEL ESPACIO VECTORIAL

RUBÉN A. ÁGUEDA-ALTÚZAR

Hemos llegado sanos y salvos a la quinta secuencia: ¡bienvenidos! Hemos aquí, habiendo recorrido un camino pedregoso y adquirido experiencia con variados objetos algebraicos, a saber, con vectores, diversas clases de matrices, polinomios, sistemas de ecuaciones, colecciones de funciones, entre otros. Hemos llegado a una “etapa reflexiva” en la que el estudiante curioso ya habrá advertido las similitudes existentes entre cada grupo de objetos con los que hemos tratado. Similitudes de las que hablamos en esta memoria.

§5.1 UN “COLLAGE” DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Haremos un recuento rápido de nuestra experiencia, al tiempo que proponemos un enfoque adicional.

1. SISTEMAS DE ECUACIONES Y EL ÁLGEBRA DE MATRICES.

En vez de escribir un sistema de ecuaciones en la forma tradicional:

$$\begin{aligned}y + 2z &= 5 \\x + 3z &= 2 \\4x - 3y + 8z &= 1\end{aligned}$$

hemos preferido escribirlo en la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La ventaja de escribir un sistema de ecuaciones de este modo, es el hecho de pensarlo como una especie de “ecuación matricial” de la forma

$$A\mathbf{X} = B, \tag{5.1}$$

si pensamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, podemos pensar en resolver la ecuación (5.1) del mismo modo en que resolvemos una ecuación lineal de la forma

$$3x = 5, \quad (5.2)$$

a saber, “pasando a la derecha y dividiendo” el 3 que acompaña a la x para “despejar” nuestra variable:

$$x = 3^{-1} \cdot 5, \quad (5.3)$$

teniéndose, finalmente: $x = 5/3$.

Sin embargo, aplicar este mismo procedimiento a la ecuación (5.1) presupone algunas complicaciones:

- (a) ¿Qué significa “dividir” entre una matriz de coeficientes A ?, es decir, ¿qué significado dar a “la inversa de A ”: A^{-1} ?
- (b) ¿Siempre funcionará dicha división?, es decir, ¿no existirá, acaso, alguna complicación del tipo “división entre cero”?
- (c) Si el método funciona, ¿cómo calcular A^{-1} ?
- (d) ¿Cómo debe ser el resultado que esta operación arroje?, ¿obtendremos exactamente cada uno de los valores de las entradas x, y y z de \mathbf{X} ?

Con lo visto hasta ahora en clase, hemos advertido que las matrices pueden ser tratadas, hablando con ciertas reservas, como si fueran números. A lo que nos referimos son las analogías que se establecen en la siguiente tabla y de las que ya hemos hablado en la Secuencia 4.

NÚMEROS REALES	MATRICES
Existe el producto (conmutativo)	Existe el producto (no conmutativo)
Existe un número 1	Existe la matriz identidad 1
Existe un número 0	Existe la matriz nula 0
Si $a \neq 0$, existe su recíproco a^{-1}	A cuadrada y $\det A \neq 0$: existe A^{-1}

La respuesta a la segunda pregunta está ya en la tabla: siempre que $\det A \neq 0$. Responder a nuestra primera pregunta es decir que si $\det A \neq 0$,

dividir por A es lo mismo que multiplicar por A^{-1} .

Por lo tanto, la solución al sistema (5.1), y la respuesta a la cuarta pregunta, se tienen al escribir el análogo a (5.3):

$$\mathbf{X} = A^{-1} \cdot B. \quad (5.4)$$

Pero no hemos dado respuesta a la tercera: ¿cómo calculamos A^{-1} ? ¿por qué A^{-1} existe cuando $\det A \neq 0$? Lo revisamos a continuación.

LA INVERSA DE UNA MATRIZ. Disponemos de 2 métodos para calcular la inversa de una matriz.

(i) Usando el método de Gauss-Jordan.

Cuando “despejamos” la variable de la ecuación $3x = 1$, en realidad estamos multiplicando por la izquierda por 3^{-1} ambos miembros de la ecuación, obteniendo

$$3x = 1 \quad \rightarrow \quad 3^{-1} \cdot (3x) = 3^{-1} \cdot 1 \quad \rightarrow \quad 1 \cdot x = 3^{-1};$$

es decir, si obviamos la presencia de x , estamos efectuando una especie de juego entre el coeficiente 3 de dicha variable, el 1 de la derecha y el inverso de 3, 3^{-1} . Permítasenos escribir dicho juego de la siguiente manera:

$$(3 | 1) \quad \rightarrow \quad 3^{-1}(3 | 1) \quad \rightarrow \quad (1 | 3^{-1}).$$

En otras palabras, hemos convertido el arreglo $(3 | 1)$ en el arreglo $(1 | 3^{-1})$. ¿Qué papel juega, aquí, el número 1, la identidad? La relación entre estos 3 números es la siguiente: 3^{-1} (el “un tercio”) es un número tal que

$$3^{-1} \cdot 3 = 3 \cdot 3^{-1} = 1.$$

Esta última igualdad nos permite advertir que la matriz A^{-1} que buscamos para la matriz A del sistema (5.1), debe ser tal que

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbf{1},$$

donde $\mathbf{1}$ representa a la matriz identidad de tamaño 3×3

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pues la matriz A es también de este mismo tamaño. Esto obliga a que la matriz A^{-1} buscada también deba ser de tamaño 3×3 .

Por lo tanto, un procedimiento para la ecuación (5.1), análogo de arriba usado para despejar la variable x , debería verse como sigue:

$$(A | \mathbf{1}) \quad \rightarrow \quad (\mathbf{1} | A^{-1}).$$

El símbolo $(A | \mathbf{1})$ representará ahora la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

en la que el arreglo a la izquierda de la barra está formado precisamente por las entradas de la matriz A , mientras que las entradas a la derecha

de la barra son las de la matriz identidad $\mathbf{1}$. Y el método usado para pasar de dicho arreglo, al arreglo

$$(\mathbf{1}|A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right),$$

será Gauss-Jordan, siendo las entradas marcadas por el símbolo “ \bullet ” las que habremos de hallar.

Calculamos, pues, A^{-1} para la A del sistema (5.1), teniendo en cuenta que cualquier operación por renglones que hagamos con las entradas de A también habremos de hacerla con las entradas de $\mathbf{1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-4R_1 + R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -3R_3 + R_1 \\ -2R_3 + R_2 \end{smallmatrix}]{-3R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

$$\text{Por lo tanto, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 9 & -14 & 3 \\ 4 & -8 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) A través de la adjunta.

Para aplicar este método usaremos una fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Cof}(A)^T. \quad (5.5)$$

Veamos de qué se trata cada símbolo y numerito en ella.

- La transpuesta de una matriz.

La transpuesta de B se denota por B^T y para construir la i -ésima columna de esta última usamos el i -ésimo renglón de la primera:

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix}, \text{ entonces } B^T = (\downarrow \downarrow \downarrow).$$

Por ejemplo,

$$\text{si } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \text{ entonces } B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

En la fórmula (5.5), requerimos de la transpuesta de la matriz que hemos llamado $\text{Cof}(A)$ y que definimos a continuación.

- La matriz de cofactores.

Calcularemos la matriz de cofactores de A , la denotamos por

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Cada entrada a_{ij} de esta matriz se calcula mediante la fórmula

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (5.6)$$

El término M_{ij} se entiende como el determinante del menor que resulta de eliminar el renglón i y la columna j de la matriz A . Por ejemplo, si deseamos calcular a_{23} habremos de conocer M_{23} , el determinante del menor obtenido al borrar el renglón 2 y la columna 3 de la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{columna 3}]{\text{renglón 2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \times \\ \times & \times & \times \\ 4 & -3 & \times \end{pmatrix},$$

así

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -4.$$

Ahora bien, el término $(-1)^{i+j}$ en (5.6) se refiere a si se debe cambiar o no signo a M_{ij} . Ello depende de la paridad de $i + j$. En el caso de a_{23} , $i + j$ es impar y entonces se cambia el signo:

$$(-1)^{2+3} = (-1)^5 = -1,$$

por lo que $a_{23} = (-1)M_{23} = (-1)(-4) = 4$.

Pero en general no hacemos este cálculo, sino que es más fácil considerar una especie de “ajedrez” de signos en la matriz A :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Así, sabremos que

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}.$$

Estamos ya en posibilidad de calcular la matriz de cofactores de la matriz A del sistema (5.1):

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -3 \\ -14 & -8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

En virtud de lo anterior, dado que $\det A = -2$ y como

$$\text{Cof}(A)^T = \begin{pmatrix} 9 & -14 & 3 \\ 4 & -8 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

tenemos ya todos los elementos para aplicar la fórmula (5.5) a la matriz A del sistema (5.1). Luego,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 9 & -14 & 3 \\ 4 & -8 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

el mismo resultado que obtuvimos en el inciso (i).

2. SOLUCIONES A TALES SISTEMAS: UNA ÚNICA, NINGUNA... ¡MUCHAS!

Sea cual sea el método que hayamos empleado para calcular A^{-1} , después de obtenerla la ecuación (5.4) se convierte en

$$\mathbf{X} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 9 & -14 & 3 \\ 4 & -8 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

En este punto hemos ya resuelto el sistema, hemos cumplido nuestro cometido.

La solución $\mathbf{X} = (-10, -3, 4)$ establece un único valor para cada una de las variables x , y y z de \mathbf{X} . Decimos entonces que el sistema (5.1) tiene *solución única* y “despejar” la matriz \mathbf{X} nos ha provisto de un método para hallarla, con una única condición: $\det A \neq 0$. ¿Qué puede decirse, entonces, del sistema si $\det A = 0$?

En la expresión (5.7) que define A^{-1} , observe que el denominador del cociente que precede a la matriz es precisamente $\det A$, es decir, -2 . Si A es tal que $\det A = 0$, aplicar el mismo método anterior presupone tener un denominador igual a cero, lo cual es absurdo. Ello significa que habremos de emplear otras técnicas para hablar de la solución del sistema de ecuaciones (5.1): reducir la matriz aumentada $(A|B)$ a una matriz en la que las entradas correspondientes a A estén escalonadas, según el método Gauss-Jordan. Se tendrán, entonces, dos posibilidades para $(A|B)$:

(a) $(A|B)$ es equivalente a una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array} \right), \quad (5.8)$$

donde los símbolos \bullet significan un lugar ocupado por algún número (no todos cero) y k es un número distinto de cero; o bien,

(b) $(A|B)$ es equivalente a una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (5.9)$$

o de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (5.10)$$

¿Qué hacer en cada caso?

En el primero, dado que los ceros de la matriz corresponden a los respectivos coeficientes de x , y y z , que el resultado sea igual a $k \neq 0$ significa que existen valores de tales variables de modo que

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = k,$$

lo cual es absurdo, pues el resultado siempre será cero y no un número k distinto de cero. En el primer caso, el sistema no tiene solución... y no habrá más qué hacer.

Como ejemplo de lo anterior, considere el sistema¹

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 4x - 6y &= 7. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Al emplear Gauss-Jordan en la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 7 \end{array} \right)$$

ésta es reducible a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

Fijándonos en el último renglón y advirtiéndolo que $0x + 0y$ nunca ha de ser igual a -3 , concluimos que el sistema no tiene solución.

El segundo caso es de mayor interés para nosotros. Nos explicamos: al tenerse tanto coeficientes como soluciones iguales a cero en uno o dos renglones (cosa que es perfectamente cierta), el método de Gauss-Jordan revela que en realidad no tenemos 3 ecuaciones distintas (en un sistema 3×3), sino que se tienen menos: una ecuación o dos ecuaciones, lo cual nos llevará a concluir que existe más de una configuración para los valores de \mathbf{X} que resuelve el sistema. Vaya, no solamente existe más de una configuración, sino una cantidad infinita, como veremos a continuación.

¹Observe que el método del que hablamos es válido en sistemas $n \times n$: n ecuaciones con n incógnitas. En particular, también es válido en este sistema 2×2 .

3. INFINITAS DE SOLUCIONES: MENOS ECUACIONES QUE INCÓGNITAS.

Tratemos el caso del que habla el inciso (b) anterior con dos ejemplos concretos de sistemas a resolver.

(i) Uno de tamaño 2×2 .

Suponga que el sistema a resolver es el dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} -3x + 5y &= 1 \\ 6x - 10y &= -2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

que reescrito en forma matricial se convierte en

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & 1 \\ 6 & -10 & -2 \end{array} \right).$$

(Note que el determinante de la matriz original de coeficientes es cero). Multiplicando por 2 el primer renglón y sumándole el resultado al segundo renglón, de modo que sea este último el renglón modificado, obtenemos la matriz equivalente

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Es decir, el sistema no se trata de “2 ecuaciones distintas” sino de una sola:

$$-3x + 5y = 1. \quad (5.13)$$

La pregunta obligada: ¿cómo hago, entonces, para expresar las soluciones \mathbf{X} del sistema? Si bien no podemos decir cuánto valen exactamente x e y (porque no existe una única solución), sí podemos decir cómo depende una variable de otra:

$$y = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x.$$

Entonces la solución buscada \mathbf{X} se escribe como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1/5 + 3x/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

La manera en que interpretamos esta solución es la siguiente: dado que la variable x está libre, cada valor que demos a x generará una solución del sistema. Por ejemplo, si $x = -2$, el vector

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 1/5 - 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

resuelve simultáneamente las dos ecuaciones.

Dado que las posibles elecciones de x son infinitas, el sistema tiene una infinidad de soluciones, pero todas son de la forma en que indica (5.14).

(ii) Uno de tamaño 3×3 .

Si el sistema a resolver es ahora $A\mathbf{X} = B$, siendo $(A|B)$ la matriz aumentada²

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & -2 \\ 6 & -3 & 9 & 3 \end{array} \right), \quad (5.15)$$

aplicando Gauss-Jordan obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Lo más que podemos decir, entonces, es como depende una variable de las otras dos, porque el renglón que no se elimina al final del proceso es en realidad la ecuación $2x - y + 3z = 1$, que al reescribirla se ve como

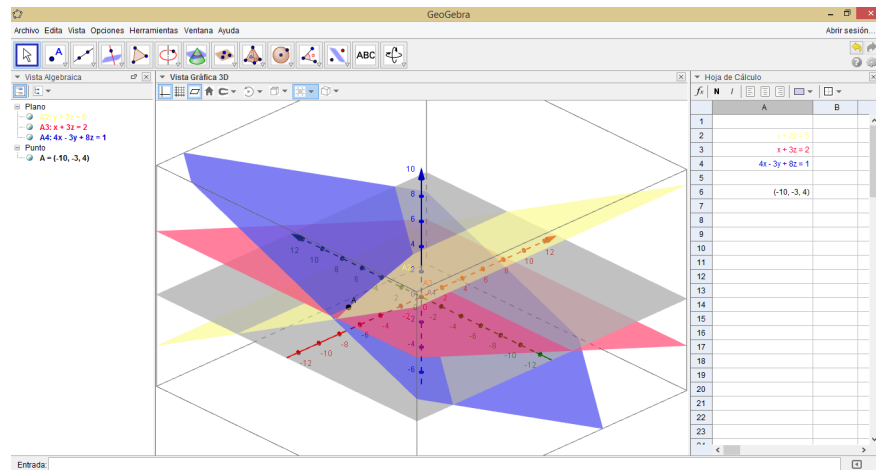
$$y = 2x + 3z + 1.$$

Entonces, las soluciones al sistema (5.15) deberán darse en términos de las 2 variables libres x e y :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z + 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

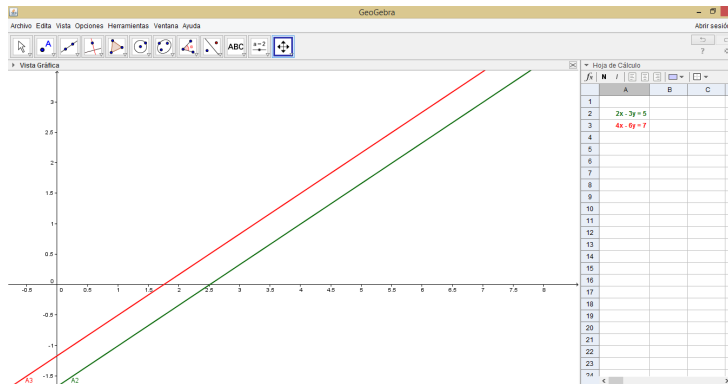
4. LA GEOMETRÍA DE LAS SOLUCIONES

Analicemos un poco cómo son los lugares, los “espacios” en los que se hallan las soluciones a los sistemas que hemos resuelto. En primer lugar, en el caso tratado en que $\det A \neq 0$, introducimos en Geogebra cada una de las ecuaciones y observamos que cada ecuación lineal de 3 incógnitas genera un plano. La intersección de 2 planos es una línea. Y la intersección de dicha línea con el tercer plano, a pesar que podría seguir siendo la misma línea, en el caso en que $\det A \neq 0$ se trata de un sólo punto, como se ve en la figura siguiente.

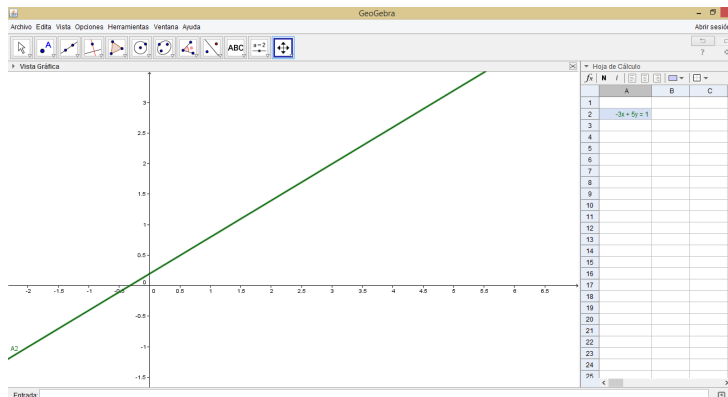


²Convénzase de que $\det A = 0$ para este caso.

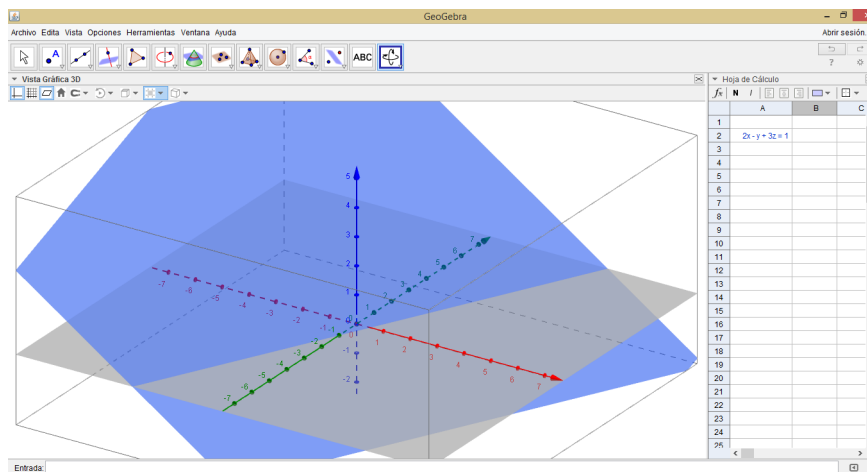
En el caso del sistema 2×2 que no tiene solución, cada una de las ecuaciones dibuja una línea y éstas no se intersecan, como se ve a continuación.



Las ecuaciones del sistema (5.12) dibujan la misma recta.



Y las ecuaciones del sistema (5.15) dibujan el mismo plano.



5. POLINOMIOS Y VECTORES

Lo que nos interesa destacar de los polinomios es su similitud con los vectores en la manera que tenemos de operarlos. Por ejemplo, algo que ya sabemos: sumar los polinomios

$$p(x) = 3x^2 - x + 2 \quad \text{y} \quad q(x) = -x^3 - 2x$$

consiste en sumar los coeficientes correspondientes a potencias iguales de x , pero no son comparables los coeficientes de potencias distintas, como los coeficientes de x^2 con los de x^3 . Ésto nos recuerda la manera en sumamos vectores: entradas correspondientes son las que se suman. Así, podemos representar $p(x)$ y $q(x)$ como los vectores

$$(0, 3, -1, 2) \quad \text{y} \quad (-1, 0, -2, 0),$$

respectivamente, teniendo en mente que la primera entrada de cada vector es el coeficiente de x^3 , la siguiente será el coeficiente de x^2 , la tercera el coeficiente de x y la cuarta, los términos independientes. Sumar polinomios

$$\begin{array}{rcccc} p(x) & = & & 3x^2 & -x & +2 \\ + \quad q(x) & = & -x^3 & & -2x & \\ \hline & & -x^3 & +3x^2 & -3x & +2 \end{array}$$

y sumar vectores

$$(0, 3, -1, 2) + (-1, 0, -2, 0) = (-1, 3, -3, 2)$$

son procesos similares.

Además, en polinomios tiene sentido la multiplicación por escalar

$$\lambda p(x) = 3\lambda x^2 - \lambda x + 2\lambda$$

y funciona del mismo modo que con vectores:

$$\lambda(0, 3, -1, 2) = (0, 3\lambda, -\lambda, 2\lambda).$$

¿Hasta qué punto podemos tratar los polinomios como vectores?

6. MATRICES.

Cambiamos el polinomio $p(x)$ de la discusión anterior por una matriz A , al polinomio $q(x)$ por una matriz B y todo tiene también sentido en este ámbito: sumas preservando el orden de los elementos y multiplicación por un escalar (obtenida al mutiplicar cada entrada de la matriz por el escalar).

7. FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO.

Éste es un ejemplo que se trata regularmente en el curso de Cálculo. En la familia

$$\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [a, b]\},$$

también tiene validez hablar de la suma y la multiplicación por escalar, del mismo modo que con los objetos de arriba:

- (i) si f y g son funciones en $\mathcal{C}[a, b]$, tiene sentido la suma de funciones $f + g$, la cual resulta ser también una función continua en $[a, b]$;
- (ii) y desde luego, si $f \in \mathcal{C}[a, b]$, λf sigue siendo una función continua en el mismo intervalo.

¿Qué tienen en común todos estos ejemplos?, ¿cuál es la similitud que permite trabajar con unos como si fueran otros?

§5.2 ¿QUÉ TIENE ÉL QUE NO TENGA YO?

Como ya dijimos, en polinomios, matrices, vectores, funciones continuas en un intervalo, tienen sentido la suma y la multiplicación por escalar. Como podrá corroborar el lector, estas operaciones cumplen con las siguientes propiedades.

1. La suma y la multiplicación por escalar son *operaciones* en el espacio (o, como se dice coloquialmente, “la suma es cerrada” o “la multiplicación por escalar es cerrada”).³
2. La suma es conmutativa: da lo mismo sumar dos elementos en un orden $u + v$ que en otro $v + u$.
3. Hay una relación entre la multiplicación por escalar y la suma:

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,$$

la llamamos *distributividad*: la multiplicación “se distribuye”.

4. En cada familia hay un *elemento cero*, que denotamos por $\mathbf{0}$.
5. En cada familia hay un *elemento identidad*, que denotamos por $\mathbf{1}$.

EL ESPACIO DE SOLUCIONES. Pero no estamos hablando de los ejemplos fundamentales: las soluciones de los sistemas de ecuaciones. Son vectores, sí, pero hay que tener cuidado con ellas. Pongamos un ejemplo: considere todos los puntos del plano

$$\Pi = \{(x, y, z) \mid 2x + 5y + 3z = 0\}.$$

¿Cómo saber si un vector (a, b, c) pertenece a este plano? Si satisface la ecuación que lo define. Por ejemplo, $w = (1, 2, -1)$ no pertenece al plano Π porque

$$2(1) + 5(2) + 3(-1) = 9 \neq 0,$$

mientras que el punto $r = (1, -1, 1)$ sí, dado que $2(1) + 5(-1) + 3(1) = 0$. Así, todos los puntos (vectores) en el plano, definido éste como arriba, forman una familia digna de analizarse.

La característica a destacar es la siguiente:

si se suman dos soluciones a la ecuación que define Π (es decir, dos puntos en Π) la suma también es solución de la ecuación (es decir, la suma también está en Π).

³Mencionamos la propiedad un poco más adelante en esta sección. La trataremos con más precisión en secciones posteriores.

Para tomar conciencia de ello, tomemos $u = (-1, 0, 2/3)$ y $v = (3, -2, 4/3)$ en Π . Pues, en efecto, pertenecen a Π , como verificamos a continuación:

$$2(-1) + 5(0) + 3(2/3) = 0 \quad \text{y} \quad 2(3) + 5(-2) + 3(4/3) = 0.$$

Ahora bien, observe que la suma $u + v = (-1, 0, 2/3) + (3, -2, 4/3) = (2, -2, 2)$ es tal que

$$2(2) + 5(-2) + 3(-2) = 0.$$

Y sucede lo mismo con el producto por escalar: para v como arriba y λ cualquier número, $\lambda v = (3\lambda, -2\lambda, 4\lambda/3)$ pertenece a Π :

$$2(3\lambda) + 5(-2\lambda) + 3(4\lambda/3) = \lambda[2(3) + 5(-2) + 3(4/3)] = 0.$$

Sin embargo, hacer ésto no basta para *convencer al mundo* de que *esto sucede para cualesquiera vectores y cualesquiera escalares*, porque hemos usado número concretos, vectores concretos, no son *todos* los vectores que pertenecen a Π . Lo correcto sería hacer lo siguiente.

- Tomamos dos vectores cualesquiera en Π , digamos, $u = (a, b, c)$ y $v = (p, q, r)$. Como están en Π satisfacen cada uno la ecuación:

$$2a + 5b + 3c = 0 \quad \text{y} \quad 2p + 5q + 3r = 0.$$

No se nos tiene permitido dar valores a las entradas de u ni a las de v , porque pueden ser cualesquiera, siempre y cuando satisfagan la ecuación que define a Π ; es por ello que en vez de dar valores, empleamos *las condiciones que satisfacen dichos vectores*.

Ahora bien, la suma es un nuevo vector: $u + v = (a + p, b + q, c + r)$. Para comprobar que en realidad este nuevo vector pertenece a Π , debemos mostrar que satisface la ecuación:

$$2(a + p) + 5(b + q) + 3(c + r) = ?$$

Si $u + v$ pertenece a Π , esta expresión debiera ser cero. Pero, ¿cómo hacemos para mostrar que esta expresión es cero, si no sabemos cuál es el valor de las entradas de u ni de v ? De nuevo, usamos las relaciones que dichas entradas satisfacen. Desarrollamos, pues, la expresión anterior y obtenemos

$$2(a + p) + 5(b + q) + 3(c + r) = 2a + 2p + 5b + 5q + 3c + 3r$$

y al reagrupar de acuerdo a las que son las entradas de u y las entradas de v , esta expresión se ve como:

$$(2a + 5b + 3c) + (2p + 5q + 3r)$$

y dado que cada una de estas expresiones son precisamente la ecuación evaluada en u y en v , respectivamente, ambas son cero y, por tanto, la suma es cero, como queríamos mostrar.

Así, ya podemos decir que *la suma de dos vectores en Π sigue estando en Π* , o bien, que la suma *no se sale* del espacio... o, mejor aún, que *la suma es cerrada*.

- Consideramos que λ es un escalar cualquiera y $v = (r, s, t)$ un vector cualquiera en Π . De nuevo habremos de mostrar que el nuevo vector

$$\lambda v = (\lambda r, \lambda s, \lambda t)$$

pertenece a Π . Esto es un poco más sencillo, dado que por lo regular basta factorizar λ . Como $v \in \Pi$, sus entradas satisfacen la ecuación

$$2r + 5s + 3t = 0,$$

y, de este modo, también las entradas de λv verifican la ecuación, pues

$$2(\lambda r) + 5(\lambda s) + 3(\lambda t) = \lambda[2r + 5s + 3t] = \lambda \cdot 0 = 0.$$

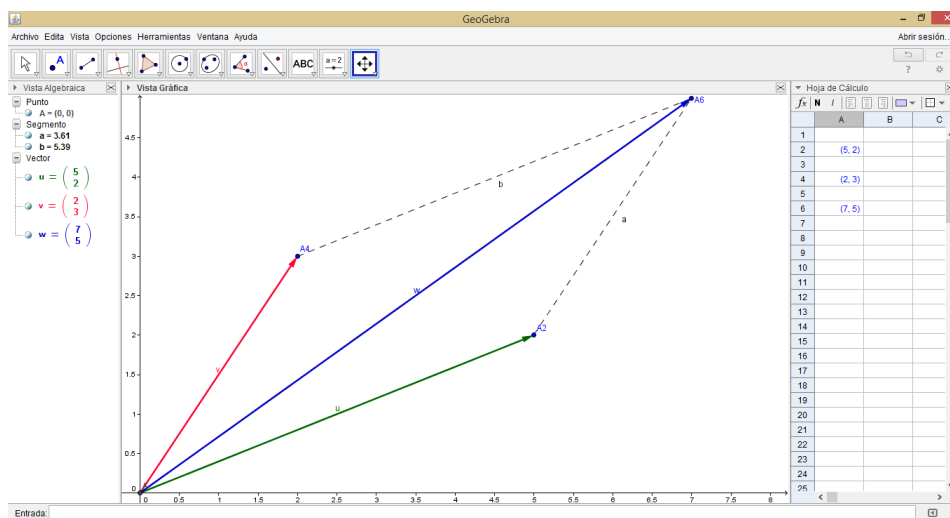
Hemos probado que *la multiplicación de un vector en Π por un escalar también pertenece a Π* .

§5.3 VECTORES: REMEMBRANZA DE UN EMPUJÓN

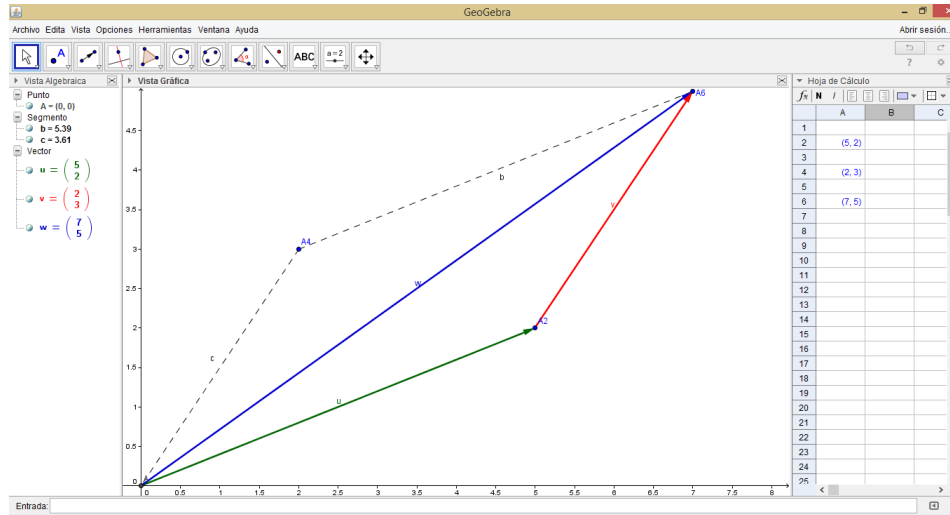
Mucha de la herramienta matemática que se utiliza en los cursos de dicha área, ahora organizada de manera didáctica, en sus inicios fue pensada para analizar y comprender conceptos y problemas físicos. En este sentido, los vectores se usan comúnmente para representar fuerzas, flujos y desplazamientos. Es por ello que, como tratamos en clase, es posible mover un vector y anclar su inicio en cualquier parte del espacio bidimensional o tridimensional en donde lo necesitemos, mientras que nos referimos a él usando un representante anclado en el origen. Por ejemplo, teniendo los vectores del plano

$$u = (5, 2) \quad \text{y} \quad v = (2, 3),$$

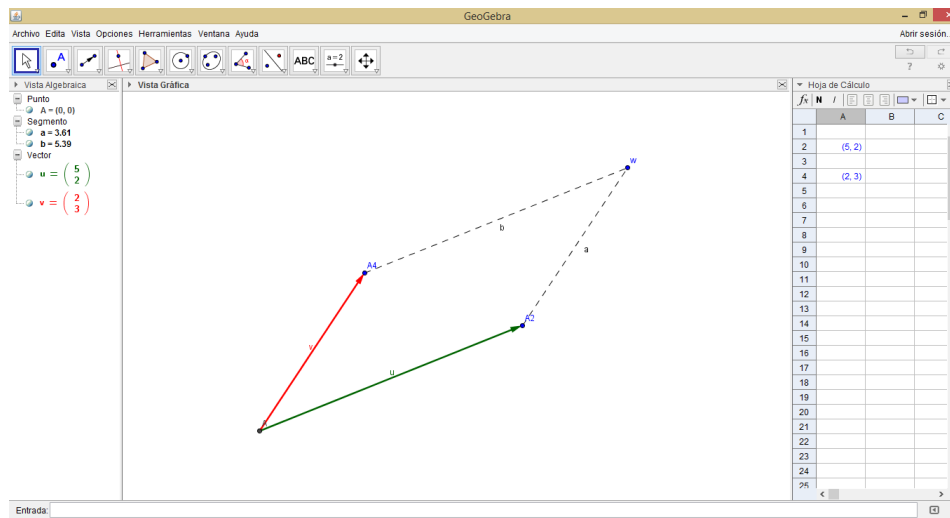
hemos dibujado habitualmente su suma $u + v = (7, 5)$ como el vector que nombramos w en el dibujo siguiente (en azul).



Lo he hemos hecho, trabajando geoméricamente, es mover el vector v (en rojo) a continuación del vector u (en verde), de modo que coincide con el segmento a , como se muestra enseguida.



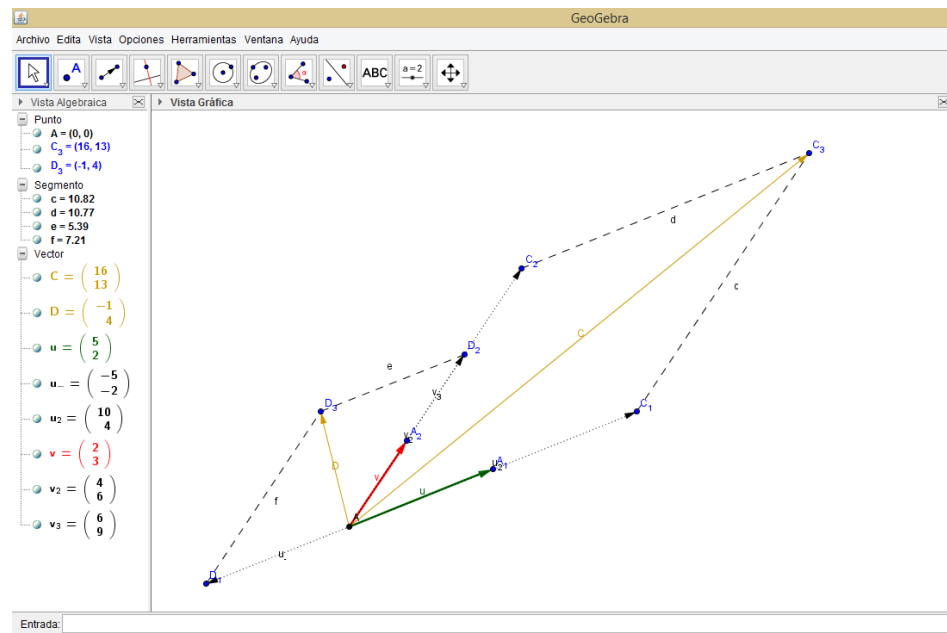
El objetivo ha sido representar gráficamente, con un sólo vector w , el resultado de aplicar sobre una masa puntual simultáneamente 2 fuerzas en direcciones y magnitudes distintas u y v . Sin embargo, puede que hayamos utilizado los vectores u y v sólo como *unidad de medida*, es decir, para marcar las dos únicas direcciones en las que se tiene permitido aplicar una fuerza. En otras palabras, si sólo se nos tiene permitido movernos en esas 2 direcciones, la de u y la de v , y nos olvidamos por un momento de los ejes coordenados x e y (es decir, ya no hay fuerzas verticales ni horizontales), estaremos moviéndonos sólo en las dos direcciones que u y v indiquen. Usando solamente la suma para u y v , podríamos llegar, con estas reglas de juego, hasta la posición $w = u + v$, como se muestra en la figura.



Pero dado que también se tiene el producto por escalar, cuyo significado geométrico es el de “estirar”, “comprimir” o “voltar” un vector, podemos llegar a posiciones como C y D :

$$C = 2u + 3v \quad \text{y} \quad D = -u + 2v$$

que se representan enseguida.



De este modo, intuimos que multiplicando por un escalar λ y μ a cada uno de los vectores u y v , respectivamente, y luego sumándolos

$$P = \lambda u + \mu v \quad (5.17)$$

podremos llegar a cualquier punto del plano. Por ejemplo, si lo que se desea es llegar a $P = (-11/6, 0)$ basta buscar valores para los escalares λ y μ (esto es, “estirar adecuadamente a u y a v ”) para “llegar a P ”. Tomando $\lambda = -1/2$ y $\mu = 1/3$ tenemos

$$-\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}v = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{2}{3} \\ -1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cuando un punto P puede expresarse usando u y v del modo en que lo indica (5.17), decimos que P es *combinación lineal* de u y v .

En general, dado un punto $P = (a, b)$ en el plano, para hallar λ y μ de modo que P sea combinación lineal de u y v habrá que resolver la ecuación

$$P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda u + \mu v,$$

ecuación que (¡sí, adivinaste!) puede reescribirse como y constituye un sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

un sistema de la forma $A\mathbf{X} = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = P,$$

como los que hemos estado resolviendo. Observe que los vectores columna de la matriz de coeficientes A son precisamente u y v , situación que podemos escribir como

$$A = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, *cada que resolvemos un sistema como el de (5.18), las incógnitas son los escalares por los que habrá que multiplicar los vectores columna de A para llegar a B . Pero podemos decir más aún.*

- Dado que $B = P$ puede ser cualquier vector (punto, posición) en el plano, los vectores u y v (las columnas de la matriz A) fungen como nuevos ejes coordenadas para todo el plano.
- Y lo que es más interesante, puesto que $\det A = 11 \neq 0$, el sistema (5.18) *siempre* tendrá solución, lo que justifica nuestra apreciación de que podemos expresar a *cualquier* punto P del plano como combinación lineal de u y v .
- Más aún: los vectores u y v *no bastarían* para “describir” mediante combinaciones lineales a *todo* el plano si no “hubiera separación entre ellos”, es decir, si estuvieran sobre la misma línea, o mejor dicho, si fueran *colineales*... y dado que podemos moverlos, no bastarían para la descripción del plano si fuesen *paralelos*. En este caso, tampoco podría hallarse una solución del sistema (5.18), por lo que se tendría $\det A = 0$.

Sí, podemos concluir lo siguiente:

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$, u y v vectores columna, son equivalentes:

$$\det A = 0 \quad \text{y} \quad u \parallel v.$$

Cuando A es una matriz 3×3 , digamos,

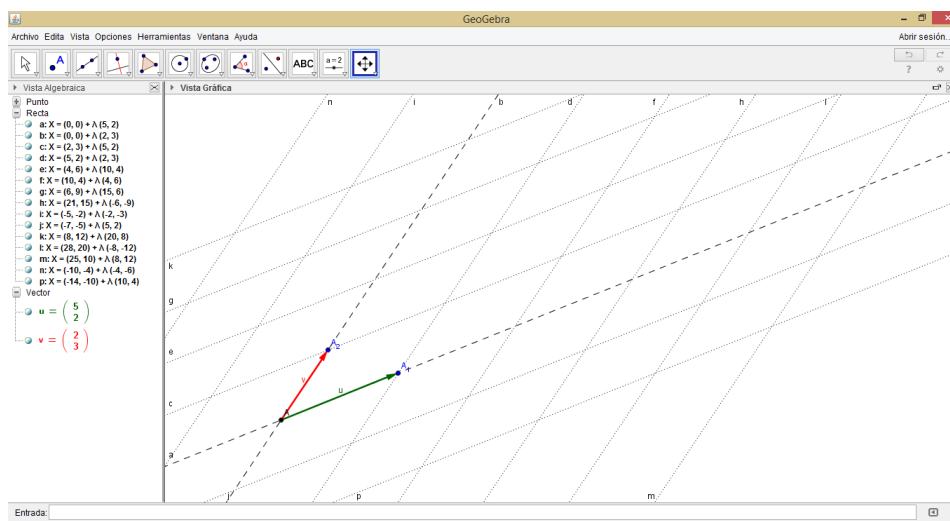
$$A = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$$

estamos buscando los escalares por los que habrá que multiplicar a los 3 vectores columna u , v y w para obtener el punto deseado (el vector B formado por los resultados del sistema de ecuaciones), es decir, para expresar el vector de resultados como combinación lineal de u , v y w . En este caso, es demasiado decir que si $\det A$, los 3 vectores columna son paralelos entre sí. Nos explicamos: la situación en la que 3 vectores en el espacio no sean suficientes para describir el espacio \mathbb{R}^3 puede no ser tan rígida, basta con que un vector de los 3 esté en el mismo plano que los otros dos, es decir, que sea combinación lineal de los otros dos. Resumimos.

Para la matriz de tamaño 3×3 $A = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$, donde u , v y w son vectores columna, son equivalentes:

$$\det A = 0 \quad \text{y} \quad u = \lambda v + \mu w.$$

Lo que nos dice la primera de estas observaciones es que u y v pueden dar la pauta a una “nueva cuadrícula” del plano (entre comillado, pues no son cuadrados como tal los que se forman, pero sí paralelogramos), como se ve en la siguiente imagen.



ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA Y EL PLANO. La manera en que hemos descrito las soluciones de un sistema de ecuaciones cuando se trata de una recta o de un plano se conoce como *ecuación paramétrica* de la recta o del plano, respectivamente.

La ecuación (5.14) es la ecuación paramétrica (con parámetro x) de la recta (5.13), cuya interpretación es la siguiente:

para llegar a cualquier punto (x, y) de la recta (5.13), basta posarse en el punto $Q = (0, 1/5)$ y estirar adecuadamente (hallar un valor de x) el vector de dirección $v = (1, 3/5)$.

La forma paramétrica de la recta es, entonces

$$\mathcal{L}: Q + \lambda v.$$

(Observe que en la imagen anterior, cada recta de la cuadrícula está expresada en forma paramétrica.) Por su parte, la ecuación (5.16) es la ecuación paramétrica del plano $2x - y + 3z = 1$. Se lee como:

para llegar a cualquier punto (x, y, z) del plano (5.16), basta posarse en el punto $Q = (0, 1, 0)$ y estirar adecuadamente (hallar un valor de x y uno de z) los vectores de dirección $u = (2, 0, 0)$ y $w = (0, 0, 3)$.

La ecuación paramétrica de todo plano es, entonces,

$$\Pi: Q + \lambda u + \mu w.$$

§5.4 DISTINGUIDO CABALLERO: EL ESPACIO PROPIO

Éste es el ejemplo de espacio que ha motivado todo el trabajo anterior: la familia de vectores propios de una matriz A dada de antemano. No obstante su importancia, no nos queda mucho qué decir respecto de su estructura, en virtud de todo el trabajo desarrollado hasta aquí. La justificación radica en el hecho de que para hallar los vectores propios de una matriz siempre resolvemos un sistema de ecuaciones. Entonces, las soluciones a dicho sistema, los vectores propios, “viven” en una recta, o en un plano, o en un hiperplano, como soluciones que son.

Con ello en mente, repasemos un ejemplo sólo con el afán de puntualizar algunas ideas.

EJEMPLO. Hallar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN. El polinomio característico de la matriz será

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbf{1}) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \\ &= (\lambda - 2)^2(1 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

De este modo, los vectores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_{2,3} = 2$. Para el primero,

$$A - \lambda_1 \mathbf{1} = A - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 3 - 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 - 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores propios asociados a λ_1 se encuentran, entonces, resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que estamos presuponiendo que el determinante de la matriz de coeficientes $A - \mathbf{1}$ es cero, habremos de usar en ella Gauss-Jordan para reducirla a la forma escalonada. El sistema de ecuaciones anterior se reduce a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} 2x - z &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Se tiene, entonces, una variable libre: elegimos a x y así $z = 2x$. La solución al sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como se observa (y debimos observar desde el principio), no existe una única solución al sistema, sino una cantidad infinita: la recta generada por el vector $(1, 2, 0)$. En la práctica, hemos elegido un valor de x , comúnmente $x = 1$, para exhibir un vector propio v_1 asociado a $\lambda_1 = 1$. Sin embargo, no es sólo uno, sino *todo un espacio de tamaño 1*, puesto que tenemos un grado de libertad: el valor del parámetro x . Así, lo correcto es escribir: el espacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$ es

$$E_1 = \langle v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Los paréntesis angulares denotan “espacio generado por”. Por ejemplo: $\langle \{f_1, f_2, f_3\} \rangle$ y $\langle S \rangle$ denotan el espacio generado por los conjuntos (las familias) $\{f_1, f_2, f_3\}$ y S , respectivamente. Un poco más adelante precisaremos lo que entendemos con “espacio generado”.

En cuanto a los valores propios restantes $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, la matriz a considerar es

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & -1 \\ 2 & 2-2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Al reducir esta matriz usando Gauss-Jordan, obtenemos⁴

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que el sistema reducido se ve como

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ x - y = 0. \end{array}$$

La variable libre es, entonces, x : $z = 2x$ e $y = x$. Las soluciones se escriben como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

la línea generada por el vector $v_2 = (1, 1, 2)$. El espacio propio correspondiente (también de tamaño 1) es

$$E_{2,3} = \langle v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Desde luego, el caso en que los espacios propios E sean de mayor tamaño (mayor dimensión), es decir, tengan más generadores, también puede ocurrir.

⁴Observe que no usamos la matriz aumentada, porque los resultados de las ecuaciones son todos cero.

EJERCICIOS

Resuelva los sistemas siguientes e interprete gráficamente las soluciones usando Geogebra. Justifique todas sus respuestas.

1. Usando el método de la adjunta para hallar A^{-1} .

$$(a) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + 4z = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

- (c) Resuelva el mismo sistema anterior, pero ahora solamente con ceros como resultados.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

¿Cuál es la diferencia entre el aspecto de las soluciones de éste y de aquél sistema?

- (d) ¿Cuáles son los valores de k que no permiten aplicar este método a los sistemas siguientes?

$$\begin{cases} 5x + ky = 7 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + 6y + 8z = 3 \\ kx - 6y + 4z = -1 \\ 4x + y + kz = 5 \end{cases}$$

Otorgue a k un valor permitido. Considere dos valores distintos entre sí, uno para cada sistema, y resuelva los sistemas.

2. Usando Gauss-Jordan.

$$(a) \begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ -10x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 2y + 7z = 4 \\ 2x - y + 3z = 11 \\ -3y + 11z = -3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ -4x + 2y - 6z = -14 \\ 6x - 3y + 9z = 21 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} -x + 2y + z = 7 \\ x - 6y + 3z = -8 \\ -4y + 4z = 1 \end{cases}$$

- (e) Construya un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, cuya solución sean los puntos de la recta

$$\mathcal{L} : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considere las ecuaciones paramétricas de la recta y del plano para resolver los siguientes problemas.

3. Encuentre las coordenadas de intersección de los siguientes pares de rectas. Dibuje la situación de cada inciso en Geogebra.

- (a) En \mathbb{R}^2 .

$$\mathcal{L} : \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} : \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) En \mathbb{R}^3 .

$$\mathcal{L}_1 : (1, -1, 0) + t(1, 1, 2)$$

$$\mathcal{L}_2 : (-1, 1, 2) + s(1, 0, 1)$$

4. Escriba la ecuación paramétrica de la recta, intersección de los planos

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } \Pi_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Dé la ecuación cartesiana de cada una de las rectas \mathcal{L} y \mathcal{M} del problema 1 anterior.
6. Se sabe que todos los puntos del plano

$$\Pi : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

constituyen las soluciones a la ecuación $2x + 10y - 3z = -11$. Recuerde que esta ecuación cartesiana describe la misma familia de puntos Π :

$$\Pi = \{(x, y, z) \mid 2x + 10y - 3z = -11\}.$$

- (a) Note que los vectores que dan dirección al plano son $v = (-2, 1, 2)$ y $w = (5, -1, 0)$. Obtenga el vector $v \times w$ y compare sus entradas con los coeficientes de x , y y z de la ecuación cartesiana de Π . ¿Qué observa?
- (b) Por clases pasadas se sabe que el vector $v \times w$ es perpendicular tanto a v como a w . Al generar estos dos últimos al plano Π , naturalmente podemos preguntarnos si ésto sigue siendo cierto para cualquier punto de Π , es decir, ¿es cualquier vector en Π perpendicular a $v \times w$?

Analicemos la situación con un caso concreto, con Geogebra.

- Dibuje el plano $2x + 10y - 3z = -11$.
- Dibuje el punto $P = (-1, 0, 3)$ por el que pasa el plano Π (según la ecuación paramétrica Π).
- Obtenga otro punto del plano Π distinto a P , para lo cual habrá que dar valores a λ y a μ no cero. Podemos elegir, por ejemplo, el punto Q que se obtiene al hacer $\lambda = 3$ y $\mu = -1$.
- Dibuje entonces el vector que comienza en el punto P y termina en Q . Llamémoslo $u = Q - P$. Éste es un vector en el plano Π .
- Calcule $(v \times w) \cdot u$. ¿Cuál es el ángulo entre estos dos vectores?

Uno sospecha que ésto ha de suceder para cualquier punto Q que elijamos en Π . Para convencernos de ello, repita todo el procedimiento anterior, pero ahora suponiendo que el punto $Q = (x, y, z)$ es un punto cualquiera en Π :

- ¿Cuál es el aspecto que toma ahora $u = Q - P$? (dé sus coordenadas)
- Obtenga la expresión correspondiente para $(v \times w) \cdot u$ y suponga que $(v \times w) \cdot u = 0$ (iguale su expresión a cero). Simplifíquela. ¿Qué obtiene?

- (c) ¿Puede ahora, sin hacer tantos cálculos, hallar la ecuación cartesiana del plano siguiente?

$$\Pi : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- (d) CONCLUSIÓN DEL EJERCICIO. El vector $v \times w$ se conoce como *el vector normal al plano* Π y nos indica “la inclinación” del plano en el espacio. Usualmente se denota por \hat{n} .

¿Puede ahora decir por simple inspección cuál es el vector normal al plano cuya ecuación cartesiana es $x - 3y + 5z = 1$? ¿Cuál será la diferencia entre la ecuación paramétrica que define a este plano y la que define al plano $x - 3y + 5z = 8$?

Espacios propios.

7. Encuentre los espacios propios correspondientes a las siguientes matrices.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8. Muestre que la suma de elementos y el producto por escalar en los espacios propios correspondientes a las matrices de los incisos (a) y (d) anteriores son operaciones en dichos espacios (i.e. que son “cerradas”).

En cada uno de los problemas siguientes, exprese al elemento K como combinación lineal de los elementos de la familia \mathcal{F} dada (los escalares siempre se han de tomar en \mathbb{R}). Si tal cosa no es posible, explique por qué.

9. $K = \begin{pmatrix} \pi & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, mediante elementos de

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

10. $K(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 1$, mediante elementos de

$$\mathcal{F} = \{p_1(x) = 1, p_2(x) = x^3, p_3(x) = 2^3 + x, p_4(x) = 3x^2 + 2\}.$$

11. El vector $K = (2, 1, -3)$, mediante elementos de

$$\mathcal{F} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, -1), u_3 = (-2, 0, 1)\}.$$

12. Cuando no es posible expresar un elemento K como combinación lineal de una familia de elementos \mathcal{F} se dice que K no pertenece al *espacio generado* por \mathcal{F} , el cual denotamos por $\langle \mathcal{F} \rangle$ (tal elemento K debiera estar, entonces, en un *espacio ambiente*, más grande que $\langle \mathcal{F} \rangle$). En efecto, todos los elementos que pertenecen a dicho espacio son combinación lineal de los elementos de

la familia \mathcal{F} . Para cada una de las siguientes familias, dé una descripción (mediante un conjunto, propiedades, mediante palabras) del espacio $\langle \mathcal{F} \rangle$ y un ejemplo de elemento K en el espacio ambiente en el que está incluido $\langle \mathcal{F} \rangle$ que no pertenece a $\langle \mathcal{F} \rangle$.

(a) $\mathcal{F} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

(b) $\mathcal{F} = \{p_1(x) = x^2 + x, p_2(x) = x - 1, p_3(x) = x^4\}$.

(c) $\mathcal{F} = \{v = (2, 1, -4), w = (1, -1, 0)\}$.

(d) $\mathcal{F} = \{u_1 = (2, 3, 0), u_2 = (-1, 4, 0)\}$.

(e) $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Compare los espacios (a) y (d). ¿Cómo son éstos entre sí?

Versión: 16 de marzo de 2015.