Un abordaje intuitivo del Teorema de la Función Inversa[1]

Rubén Alejandro Águeda-Altúzar
altuzartutor@gmail.com
http://raltuzar.net

Necesidad del teorema. Derivar una función para la que conocemos bien a bien su regla de correspondencia se torna una tarea rutinaria: aplicar solamente la fórmula de derivación. Por ejemplo, derivar $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ es derivar cada uno de los sumandos de acuerdo con la regla que hemos establecido para ello:

$$f'(x) = 4x - 3.$$

Lo mismo sucede si se tiene, por ejemplo, una función trigonométrica o una exponencial: si $f(x) = 3\cos(4x)$ y $g(x) = e^{2x}$, entonces

$$f'(x) = -12\,\mathrm{sen}(4x) \quad \text{y} \quad g'(x) = 2e^{2x}$$

(observe aquí la aplicación de la regla de la cadena). En todos estos casos, la regla de correspondencia de la función original nos proporciona explícitamente la “receta” para calcular $f(x)$ (o $g(x)$) a partir de x.

Sin embargo, en funciones para las que la regla de correspondencia puede resultar “no tan clara”, como en las funciones trigonométricas inversas

$$f(u) = \text{arc tan}(u),$$

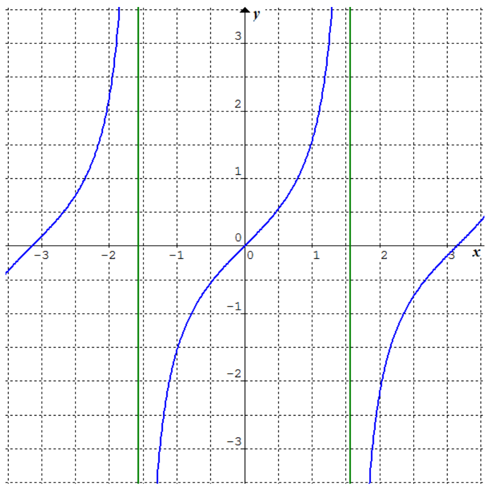
¿qué es $f'(u)$? Ante un problema de este estilo, es natural pensar en la derivada de $tan\,(x)$ y también lo es preguntarse si ésta guarda alguna relación con f definida como arriba. Entonces uno toma el lápiz y el papel y procura razonar de la siguiente manera.

Funciones trigonométricas inversas. Al tener a función $y = \tan(x)$, ¿de dónde obtenemos arc $\tan(u)$? Por ejemplo, para $x = \pi/6$ sabemos que

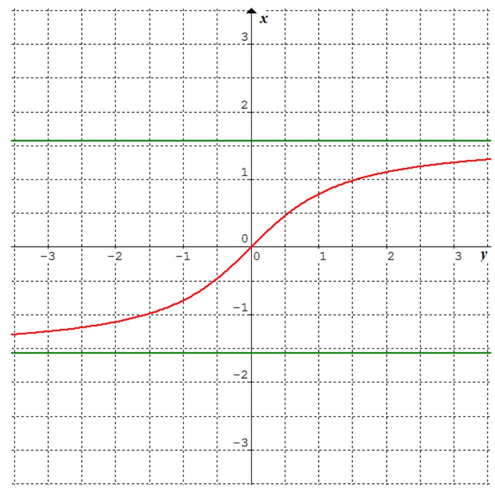
$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{de modo que} \qquad \frac{\pi}{6} = \text{arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Es decir, en general se intercambian los papeles de x y de y: si $y = \tan(x)$, entonces $x = \text{arc tan}(y)$. Las gráficas de estas funciones son las siguientes.

[1] Notas de Cálculo de Una Variable para programas de Ingeniería en México. Versión 1.0: 17/03/2015.

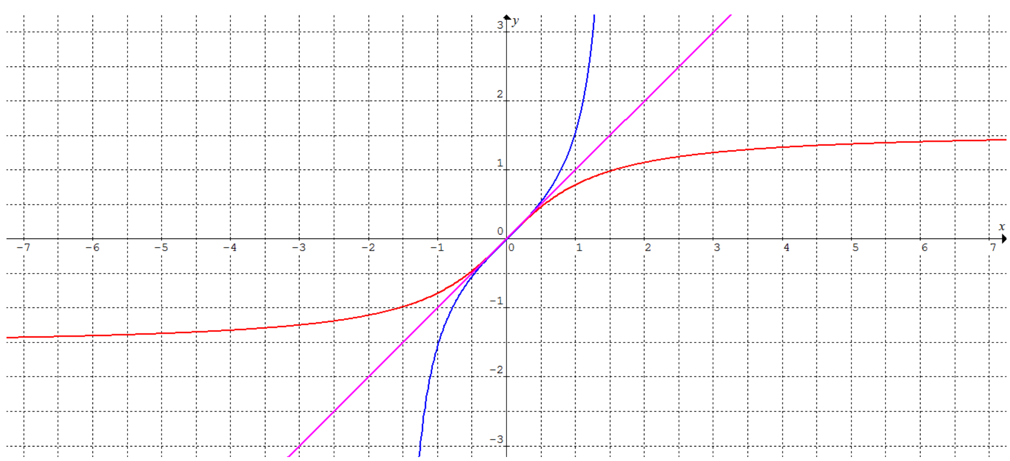


(a) Gráfica de $\tan(x)$.



(b) Gráfica de $\arctan(y)$.

Observe que los ejes x e y en la gráfica (a) están como de costumbre, mientras que en la gráfica (b) están invertidos. Las líneas verdes representan las asíntotas $x = \pm\pi/2$ en la gráfica (a) e $y = \pm\pi/2$ en la gráfica (b). El procedimiento algebraico de intercambiar x por y se representa geométricamente como este intercambio de los ejes, que es solamente un "giro" (reflejo) respecto de la recta $y = x$, como se muestra en la figura siguiente.

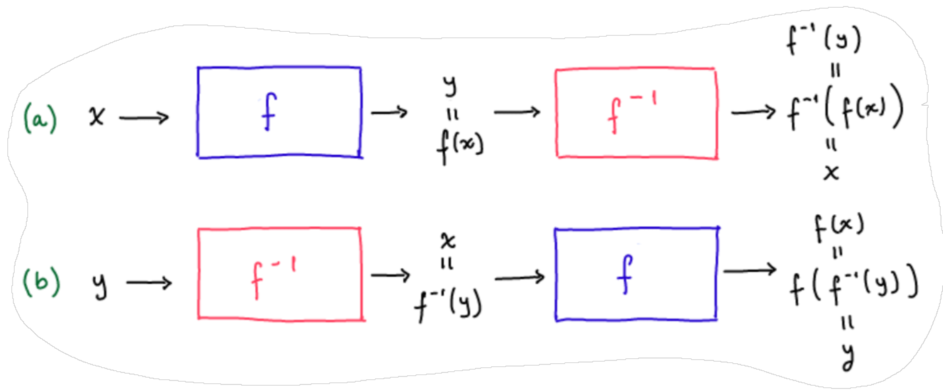


(c) La gráfica roja, como el reflejo de la azul respecto de la línea rosa ($y = x$).

El resultado (la gráfica en rojo) es solamente una curva, la correspondiente a la "rama" azul de la tangente que pasa por el origen, puesto que el reflejo de todas las ramas generaría un gráfico en el que una recta vertical tocaría muchas veces a las curvas rojas resultantes, lo que no sería una función. Normalmente esta consideración se tiene con todas las inversas de las funciones trigonométricas, cuya función original tiene muchas ramas.

Cabe señalar, además, que mientras el dominio de la gráfica azul es $(-\pi/2, \pi/2)$ y su rango es $(-\infty, \infty)$, el dominio de la gráfica roja es $(-\infty, \infty)$ y su rango, $(-\pi/2, \pi/2)$. Es decir, el dominio de una será el rango de la otra, como consecuencia (también) de haber invertido los papeles de las variables x e y.

Ahora bien, ¿a qué nos referimos cuando decimos que $x = \arctan(y)$ es la función inversa de $y = \tan(x)$? Revisémoslo vía la composición de funciones.



(d) Composición de f y f^{-1} en los dos sentidos posibles.

Al tener una función $f(x)$ presuponemos que tomamos valores x, les "aplicamos la receta" f y obtenemos entonces un valor de y. Si se tiene "el procedimiento inverso", es decir, f^{-1}, uno esperaría que al aplicárselo al valor y obtenido, rescatemos el valor de x (inciso (a) de la figura (d)). Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$ y comenzamos con $x = 7$, entonces el valor de y que obtenemos al aplicarle a 7 el procedimiento f, en este caso, "obtener la raíz cuadrada", será entonces $y = \sqrt{7}$. ¿Cuál es el procedimiento inverso f^{-1}?: obtener 7 a partir de $\sqrt{7}$, es decir, $f^{-1}(y) = y^2$. Así, tenemos:

$$7 \quad \xrightarrow{f} \quad \sqrt{7} \quad \xrightarrow{f^{-1}} \quad (\sqrt{7})^2 = 7.$$

Y al contrario, si comenzamos con $y = 10$, por ejemplo, aplicando primero f^{-1} (elevar al cuadrado) obtenemos $10^2 = 100$ y aplicando después f (obtener la raíz cuadrada[2]) resulta $\sqrt{100} = 10$; en diagrama:

$$10 \quad \xrightarrow{f^{-1}} \quad 10^2 = 100 \quad \xrightarrow{f} \quad 10.$$

En ambos casos, al final de todo el procedimiento hemos obtenido el mismo número (valor de x o de y) con el que comenzamos, es decir, se tiene respectivamente

$$f^{-1}[f(x)] = x \qquad \text{y} \qquad f(f^{-1}[y]) = y.$$

En otras palabras, ambas composiciones *son la función identidad*[3]: $f^{-1} \circ f = \text{Id} = f \circ f^{-1}$.

De este modo y regresando a la función $f(x) = \tan(x)$, su inversa es la función $f^{-1}(y) = \text{arc}\tan(y)$, pues se tienen las igualdades

$$f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[\tan(x)] = \text{arc}\tan[\tan(x)] = x,$$
$$f(f^{-1}[y]) = f(\text{arc}\tan[y]) = \tan(\text{arc}\tan[y]) = y.$$

La derivada de la inversa de una función. El problema con el que comenzamos la sección consistió en hallar la derivada de arc $\tan(y)$, misma que (ahora sabemos) es la inversa de la función $f(x) = \tan(x)$. De este modo, dicha y que aparece en la función inversa es precisamente $f(x)$, de modo que nuestro problema se ve así:

$$¿\frac{d}{dx}\,\text{arc}\tan(f(x)) = ?$$

[2]La raíz cuadrada positiva.
[3]Recuerde que la función identidad está dada por $\text{Id}(x) = x$.

Es decir, nuestro problema consiste en hallar *la derivada de esta composición*:

$$\frac{d}{dx}\, f^{-1}(f(x)),$$

para cuyo caso tenemos la regla de la cadena. La regla de la cadena nos permitía derivar una composición de funciones y el resultado era el siguiente, para la composición $g(f(x))$ (por ejemplo):

$$\frac{d}{dx}\, g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Esta era la regla general para derivar composiciones. En nuestro caso, tenemos la particularidad de que quien funge como la función g es precisamente la inversa de f, de modo que la regla de la cadena nos dice que

$$\frac{d}{dx}\, f^{-1}(f(x)) = [f^{-1}]'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Pero más aún, la composición de la función f con su inversa f^{-1} es la identidad $\mathrm{Id}(x) = x$, por lo que la derivada que calculamos arriba es precisamente la derivada de la función identidad: la función constante 1. Así:

$$1 = \frac{d}{dx}\, \mathrm{Id}(x) = \frac{d}{dx}\, f^{-1}(f(x)) = [f^{-1}]'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Quitando las expresiones del medio, tenemos

$$1 = [f^{-1}]'(f(x)) \cdot f'(x);$$

y dado que $f(x) = y$, la expresión anterior deviene en

$$1 = [f^{-1}]'(y) \cdot f'(x),$$

o, equivalentemente, al dividir por $f'(x)$ ambos miembros de la ecuación (aquí presuponemos que $f'(x) = 0$ para evitar "divisiones por cero"), se tiene:

$$[f^{-1}](y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

¿Qué nos dice esta igualdad?, ¿a dónde hemos llegado? Hemos deducido una fórmula para derivar f^{-1}, el siguiente resultado.

Teorema 1 (de la función inversa) *Considere una función $y = f(x)$ invertible (es decir, existe f^{-1}) y para la cual existe $f'(a)$ (es decir, la derivada de f en $x = a$ tiene sentido) y este valor no es cero. Hagamos $b = f(a)$. Entonces*

$$\frac{d}{dx}\, f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Antes de aplicarlo a la función $\tan(x)$ y con el objeto de comprender qué nos dice el teorema, permítasenos probarlo en el ejemplo de la función cuadrática $f(x) = x^2$, para la que $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. En este ejemplo podemos derivar directamente la función inversa, desde luego, y el teorema nos permite otra forma de derivar la misma. Aquí se preguntará, entonces, ¿para qué tener 2 maneras de hallar la derivada de una función? La respuesta es sencilla (la mencionamos al inicio de esta sección): el teorema nos permitirá hallar la derivada de funciones que no pueden derivarse directamente.

Buscamos hallar, pues, la derivada de $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ cuando $y = 7$, por ejemplo. Directamente, usamos una de las fórmulas de derivación[4]:

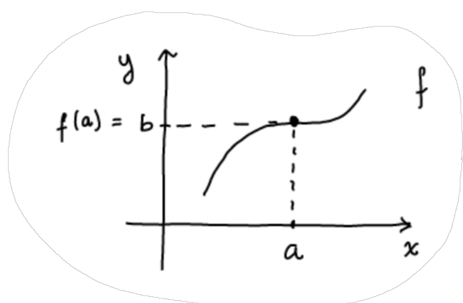
$$\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{d}{dy}\,y^{1/2} = \frac{1}{2}\,y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Así, si $y = 7$, entonces

$$\frac{d}{dy}\,f^{-1}(7) = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Ahora bien, para usar el teorema habremos de hacer algunas consideraciones. Primero, dado que buscamos la derivada de f^{-1} en $y = 7$, el teorema menciona 2 parámetros: a y b; estos valores corresponden a x e y, respectivamente, y están ligados: cuando $x = a$, $y = b$ a través de f, o bien, para llegar a $y = b$ a través de f hay que evaluar en $x = a$. Éso es lo que significa

$$b = f(a).$$



(e) El valor $b = f(a)$.

Por lo tanto, el ejercicio nos pide llegar a $b = 7$, ¿cuál es el valor de a? El valor $x = a$ es tal que al aplicarle la función $f(x) = x^2$ nos resulte 7... ¡Exactamente!, $a = \sqrt{7}$, pues $f(a) = a^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$, como se quería.

¿Y para qué queríamos el valor de a? Porque el teorema nos dice que

$$\frac{d}{dx}\,f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)},$$

esto es, a la izquierda aparece la derivada de f^{-1} *evaluada en* b, mientras que a la derecha la derivada de f está *evaluada en* a y la relación entre a y b es la que dijimos: $b = f(a)$. Entonces, como $b = 7$ y $a = \sqrt{7}$, el teorema nos dice que

$$\frac{d}{dx}\,f^{-1}(7) = \frac{1}{f'(\sqrt{7})}.$$

Nos falta, solamente, decir quién es $f'(\sqrt{7})$, pero como $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$ y, así, $f'(\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$, por lo que

$$\frac{d}{dx}\,f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(\sqrt{7})} = \frac{1}{2\sqrt{7}},$$

exactamente lo mismo que habíamos obtenido con la derivación directa.

[4]Observe que la derivada es *respecto de* y, puesto que las funciones inversas están evaluadas en valores de y, al contrario que las funciones originales, que están evaluadas en valores de x.

Suponga, ahora, que deseamos hallar la derivada de arc $\tan(1/\sqrt{3})$. Es claro que no podemos usar el primer método que usamos en el ejemplo anterior, pero sí (y ésta es la razón de ser) el teorema de la función inversa. Según su enunciado, tendremos:

$$\frac{d}{dy}\text{arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{f'(a)},$$

donde $a=\pi/6$ (pues $\tan(\pi/6)=\frac{1}{\sqrt{3}}$) y $f'(x)=\sec^2(x)$ (pues $f(x)=\tan(x)$); esto es,

$$f'(a)=\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3},$$

de modo que

$$\frac{d}{dy}\text{arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4/3}=\frac{3}{4}.$$

Pero no hemos de conformarnos, ya que si pudimos hallar la derivada de f^{-1} en $\pi/6$, ¿por qué no hallar la derivada de la función en cualquier valor de y? Procedemos exactamente de la misma forma, pero sin hacer evaluaciones: en vez de $b=f(a)$, tomamos en cuenta el caso general $y=f(x)$. Así,

$$\frac{d}{dy}\text{arc tan}(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\sec^2(x)}.$$

El único problema que ahora tiene este resultado es que estamos expresando en términos de x (vea la fracción de la derecha) la derivada de una función que depende de y. Desearíamos que la derivada también esté en función de y. Buscamos, entonces, un puente entre y y la función $\sec^2(x)$, lo que nos lleva a recordar que como $y=\tan(x)$ (la relación inicial entre x e y), la solución la puede dar la identidad trigonométrica

$$\sec^2(x)=\tan^2(x)+1,$$

expresión en la que al sustituir la tangente por y se convierte en: $\sec^2(x)=y^2+1$. Tenemos, así, lo que finalmente buscábamos, la derivada de la función arco tangente:

$$\frac{d}{dy}\text{arc tan}(y)=\frac{1}{y^2+1}.$$

Consecuencias del teorema. Enumeramos algunas a continuación, en las que el teorema es muy útil.

1. La consecuencia más inmediata es una fórmula de derivación para la función arco tangente, pero ahora usando la regla de la cadena.

   Proposición 0.1 *La derivada respecto de x de la función arc tan(u), donde u es función de x, es*[5]

   $$\frac{d}{dx}\text{arc tan}(u)=\frac{u'}{u^2+1}.$$

[5] Aquí, consideramos a u como función de x y no de y como lo veníamos haciendo. Lo anterior era para identificar a arc tan con una función inversa, pero una vez que hemos obtenido la fórmula de derivación, eso ahora es innecesario; la función u puede depender ahora de cualquier variable y esta proposición seguirá siendo cierta siempre y cuando derivemos arco tangente respecto de dicha variable, llámese x, y o cualquier otra.

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tan}(7x^2+x) = \frac{14x+1}{(7x^2+x)^2+1},$$

pues al ser $u = 7x^2 + x$, entonces el numerador del resultado es $u' = 14x + 1$.

2. En virtud del teorema fundamental del cálculo (la relación de la derivada con la integral), si se identifica en el integrando (algún cociente de funciones que dependen de x) de la integral indefinida

$$\int \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\,dx$$

el esquema

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\,dx = \frac{du}{u^2+1},$$

para alguna función u de x, entonces sabremos que la integral es igual a

$$\operatorname{arc\,tan}(u) + C$$

(con C la constante de integración), pues esta función será la antiderivada de dicho integrando. Por ejemplo, si se tuviese la integral:

$$\int \frac{dx}{25x^2+1},$$

dado que abajo hay una suma de cuadrados, podríamos identificarla con la expresión u^2+1, para lo que tendríamos que hacer la sustitución $u = 5x$, pues así $u^2 = 25x^2$. Sin embargo, tendríamos $du = 5\,dx$, una expresión que no tenemos en el numerador, pero a la que sí podemos ajustarnos. Es decir:

$$\int \frac{dx}{25x^2+1} = \frac{1}{5}\int \frac{5\,dx}{(5x)^2+1} = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tan}(5x) + C.$$

3. Cuando el cociente en el integrando de la integral del punto anterior no tiene el formato que deseamos, algunas veces puede llevarse a él completando el cuadrado perfecto en el denominador. Por ejemplo, si el objetivo es calcular

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10},$$

al completar el cuadrado perfecto para $x^2 + 6x$ obtenemos

$$x^2 + 6x = (x^2 + 6x + 9) - 9 = (x+3)^2 - 9$$

de modo que la expresión completa del denominador se puede expresar como

$$x^2 + 6x + 10 = [x^2 + 6x] + 10 = [(x+3)^2 - 9] + 10 = (x+3)^2 + 1,$$

por lo que la integral se ve como

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \frac{dx}{(x+3)^2+1}.$$

En el integrando idenficamos, pues, la expresión $du/(u^2+1)$ si hacemos $u = x+3$ (y, con ello, $du = dx$). Luego,

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \operatorname{arc\,tan}(x+3) + C.$$

Ejercicios

1. Dibuje las gráficas de $\operatorname{arc\,sen}(y)$, $\operatorname{arc\,cos}(y)$ y $\operatorname{arc\,tan}(y)$, identificándolas como el reflejo respecto de la recta $y = x$ de las gráficas de las funciones $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$, respectivamente. Emplee para ello una hoja transparente (puede ser plástico o acetato). Sea cuidadosa(o) en la manera en que debe restringir el dominio de cada una de las funciones trigonométricas, para que las curvas asociadas a las inversas en realidad sean gráficas de funciones.

   Escriba en una tabla el dominio y el rango tanto de las funciones directas como de las inversas.

2. Obtenga las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas inversas anteriores (tanto en función de x como en función de y), usando una deducción similar a la que se hizo en el texto (necesitará, para ello, las identidades trigonométricas pitagóricas).

3. Obtenga las gráficas de $\operatorname{arc\,ctg}(y)$, $\operatorname{arc\,sec}(y)$ y $\operatorname{arc\,csc}(y)$. Deduzca sus fórmulas de derivación respecto de y. Convénzase de que estas funciones no son las mismas que

   $$\text{(a) } \operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{\tan(x)} \qquad \text{(a) } \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \text{(a) } \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)},$$

   respectivamente.

4. Considere la función $f(x) = \dfrac{3x}{2x-5}$.

   (a) Dibuje la gráfica de f, indicando su dominio y rango.

   (b) Hallar la regla de correspondencia de $f^{-1}(y)$.

   (c) Grafique f^{-1} usando la regla de correspondencia que halló en el inciso anterior. Compare la gráfica con el reflejo (respecto de la recta $y = x$) de la gráfica de f.

   (d) Encuentre la derivada de f^{-1} tanto con la regla de correspondencia como con el teorema de la función inversa. Compare las expresiones y explique por qué son iguales.

5. Obtenga una fórmula de integración para cada una de las integrales siguientes (la literal u denota una función de x y a una constante).

   $$\text{(a) } \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}, \qquad \text{(b) } \int \frac{du}{a^2+u^2} \text{ y} \qquad \text{(c) } \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}},$$

   empleando para ello la sustitución $y = u/a$ en las fórmulas de integración

   $$\text{(a')} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arc\,sen}(\mathrm{y}) + C, \qquad \text{(c')} \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \operatorname{arc\,sec}(y) + C,$$

   $$\text{(b')} \int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arc\,tan}(y) + C \text{ y}$$

   que constituyen las antiderivadas asociadas a las fórmulas de derivación que halló en el ejercicio 2 anterior.

6. Retomemos las integrales de los incisos (a), (b) y (c) del ejercicio anterior. Escriba la integral a resolver y su solución (¿cuál es el aspecto de la integral?) si

   - en el inciso (a), $u = (2x+7)$ y $a = 5$;
   - en el inciso (b), $u = e^{2x}$ y $a = 3$;
   - en el inciso (c), $u = \cos(x)$ y $a = 2$.