Министерство науки и высшего образования РФ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет

КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ, посвящённая 95-летию со дня рождения академика Ю. Г. Решетняка

22–28 сентября 2024 г.

Тезисы докладов

Новосибирск
2024

УДК 514+515.1+517
ББК 22.16
М43

Конференция по геометрическому анализу, посвящённая 95-летию со дня рождения академика Ю. Г. Решетняка, 22–28 сентября 2024 г. : Тез. докл. — URL: https://sites.google.com/view/conf-ga-2024. Дата публикации: 23.09.2024.

DOI: 10.5281/zenodo.13830148

Этот выпуск содержит тезисы некоторых докладов, представленных на Конференции по геометрическому анализу, посвящённой 95-летию со дня рождения академика Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, 22–28 сентября 2024 года). Темы докладов относятся к современным направлениям в геометрии, теории управления и анализа, а также к приложениям методов метрической геометрии и анализа в смежных областях математики и прикладных задачах.

Конференция организована Математическим центром в Академгородке, номер соглашения № 075-15-2022-281 от 05.04.2022.

Авторы

О динамике нормализованного потока Риччи по отношению к специальному множеству

Абиев, Нурлан

Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызстан

e-mail: abievn@mail.ru

В работе [3] была доказана следующая

Теорема 1. *На пространствах Уоллаха*

$$\mathrm{SU}(3)/T_{\max}, \quad \mathrm{Sp}(3)\,/\,\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1), \quad F_4/\,\mathrm{Spin}(8) \tag{1}$$

нормализованный поток Риччи (НПР) переводит все метрики общего положения с положительной секционной кривизной в метрики со смешанной секционной кривизной.

Доказательство опиралось на наблюдение, что каждое пространство в (1) можно рассматривать как *обобщенное пространство Уоллаха* (ОПУ) с параметрами $a_1 = a_2 = a_3 := a \in (0, 1/2)$, причем $a = 1/6$, $a = 1/8$ и $a = 1/9$ соответственно (см. [4] для деталей). Далее уравнение НПР сводилось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_1x_2^{-1} + x_1x_3^{-1} - 2a\,(2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)(x_2x_3)^{-1} - 2,\\
\frac{dx_2}{dt} &= x_2x_1^{-1} + x_2x_3^{-1} - 2a\,(2x_2^2 - x_1^2 - x_3^2)(x_1x_3)^{-1} - 2,\\
\frac{dx_3}{dt} &= x_3x_1^{-1} + x_3x_2^{-1} - 2a\,(2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)(x_1x_2)^{-1} - 2,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$ и $x_3(t) > 0$ — параметры однопараметрического семейства $g(t)$ инвариантных римановых метрик на ОПУ с $a_1 = a_2 = a_3 := a \in (0, 1/2)$ (см. [2, 3] и ссылки в них). Еще одним важным моментом при доказательстве теоремы 1 являлось использование результатов работы [5], в которой было дано подробное описание множества $\mathbf{S}$ римановых метрик положительной секционной кривизны на пространствах (1):

$$\mathbf{S} := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in (0, +\infty)^3 \,|\, \gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0,\ \gamma_3 > 0\right\} \setminus \left\{(r, r, r) \in \mathbb{R}^3 \,|\, r > 0\right\},$$

где $\gamma_i := (x_j - x_k)^2 + 2x_i(x_j + x_k) - 3x_i^2$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Хотя $\mathbf{S}$ имеет геометрический смысл только для $a = 1/6$, $a = 1/8$ и $a = 1/9$, динамика системы (2) по отношению к множеству $\mathbf{S}$ в дальнейшем изучена для всех $a \in (0, 1/2)$. Введем множества $I = \bigcup_{i=1}^3 I_i$, $I' = \bigcup_{i=1}^3 I_i'$, где I_i — инвариантная кривая

$x_i = p^{-2}$, $x_j = x_k = p > 0$ системы (2), а I_i' — часть I_i, соответствующая $p > 1$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $\overline{X}$ и $\mathrm{ext}(X)$ означают соответственно замыкание и внешность множества X. Приводим результаты [1]:

Теорема 2. *При $a \in (0, 1/2)$ следующие утверждения имеют место для траекторий дифференциальной системы (2):*

1. *При $a \in (0, 3/14)$ траектории, берущие начало в $\overline{\mathbf{S}} \setminus I'$, достигают $\mathrm{ext}(\mathbf{S})$ и остаются там навсегда; траектории, начинающиеся в $\mathrm{ext}(\mathbf{S})$, не достигают $\overline{\mathbf{S}}$;*
2. *При $a = 3/14$ траектории, берущие начало в $\overline{\mathbf{S}} \setminus I$, достигают $\mathrm{ext}(\mathbf{S})$ и остаются там навсегда; траектории, начинающиеся в $\mathrm{ext}(\mathbf{S})$, не достигают $\overline{\mathbf{S}}$;*
3. *При $a \in (3/14, 1/4)$ некоторые траектории из $\overline{\mathrm{ext}(\mathbf{S})}$ могут достичь $\mathbf{S}$ и вернуться назад; все траектории из $\mathbf{S} \setminus I$ достигают $\mathrm{ext}(\mathbf{S})$ и остаются там навсегда.*
4. *При $a \in (1/4, 1/2)$ каждая траектория из $\mathbf{S}$ остается там же; все траектории из $\overline{\mathrm{ext}(\mathbf{S})}$ достигают $\mathbf{S}$;*
5. *При $a = 1/4$ каждая траектория из $\mathbf{S}$ остается там же; некоторые траектории из $\overline{\mathrm{ext}(\mathbf{S})}$ достигают $\mathbf{S}$.*

Отметим, что теорема 2 обобщает теорему 1.

Список литературы

[1] Abiev N. A., “On the dynamics of a three-dimensional differential system related to the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces”, *Results Math*, **79** (2024), 198 crossref.

[2] Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P., “The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces”, *Differ. Geom. Appl.*, **35 (Suppl.)** (2014), 26–43 crossref.

[3] Abiev N. A., Nikonorov Yu. G., “The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow”, *Ann. Glob. Anal. Geom*, **50**:1 (2016), 65–84.

[4] Nikonorov Yu. G., “Classification of generalized Wallach spaces”, *Geom. Dedicata.*, **181**:1 (2016), 193–212; “correction”, *Geom. Dedicata.*, **214**:1 (2021), 849-–851.

[5] Валиев Ф. М., “Точные оценки секционных кривизн однородных римановых метрик на пространствах Уоллача”, *Сиб. матем. журн.*, **20**:2 (1979), 248–262 Math-Net.Ru; Valiev F. M., “Sharp estimates of sectional curvatures of homogeneous Riemannian metrics on Wallach spaces”, *Siberian Math. J.*, **20**:2 (1979), 176–187 crossref.

«Хорошие скобки Ли» для аффинных по управлению систем

Аграчёв А. А.

SISSA, Триест, Италия

Рассматриваются вопросы управляемости для систем вида

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(x),\ x \in M,$$

на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}\, M$. Для линейных по управлению систем вида $\dot{x} = \sum\limits_{i=0}^{k} u_i f_i(x)$ известен достаточно полный ответ. Такой системой можно сколь угодно хорошо аппроксимировать движение в направлении любого лиевского многочлена от полей $f_0, \ldots, f_k$. Более того, функции управления, осуществляющие требуемую аппроксимацию, зависят только от структуры многочлена, а не от полей f_i. В этом смысле любой лиевский многочлен «хороший». Управляя аффинной по управлению системой мы, вообще говоря, не можем аппроксимировать движение в направлении любого лиевского многочлена, но некоторые лиевские многочлены и ряды по прежнему хороши в указанном смысле. В докладе будут описана универсальная конструкция «хороших» лиевских рядов и приведены некоторые приложения.

О связных компонентах в условии открытого множества

Аллабергенова Клара Бекиммат кизи

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

e-mail: k.allabergenova@g.nsu.ru

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ — система сжимающих подобий на плоскости. Непустой компакт K называется *аттрактором* системы $\mathcal{S}$, если $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(K)$. Говорят, что система $\mathcal{S}$ удовлетворяет *условию открытого множества* (OSC), если существует такое открытое множество O, что для любых $S_i, S_j \in \mathcal{S}$, $S_i(O) \subset O$ и $S_i(O) \cap S_j(O) = \varnothing$ при $i \neq j$.

Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых [1].

Определение 1. Говорят, что точка x *достижима* из открытого множества O, если для некоторого $y \in O$ существует дуга γ с концевыми точками x и y такая, что $\gamma \subset O \cup \{x\}$.

Лемма 1 ([2]). *Пусть U и V – непересекающиеся открытые множества в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что существует топологическое дерево γ, состоящее из жордановых дуг с n концевыми точками $z_1, ..., z_n$, которое лежит в $CU \cap CV$. Если все концевые точки z_i достижимы как из U, так и из V, то множество $U \cup V$ содержит по крайней мере $\frac{n}{2}$ связных компонент.*

Теорема 1 ([2]). *Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ – система подобий, удовлетворяющая OSC, аттрактором которой K является дендрит. Если для некоторого $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ пересечение $(S_i(K) \cap S_j(K))$ является самоподобным дендритом, то при любом выборе открытого множества O в условии открытого множества, множество связных компонентов O бесконечно.*

Список литературы

[1] Charatonik J. J., Charatonik W. J., “Dendrites”, *Aportaciones Mat. Comun.*, **22** (1998), 227–253.

[2] Allabergenova K., Samuel M., Tetenov A., “Intersections of the pieces of self-similar dendrites in the plane”, *Chaos, Solitons & Fractals*, **182** (2024), 114805 crossref.

Проблема интегральной геометрии в классе разрывных функций

Аниконов Д.С.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: anik@math.nsc.ru

В широком смысле задача интегральной геометрии состоит в поиске информации о подынтегральной функции по заданным интегралам вдоль различных многообразий. Результаты исследований применяются в некоторых областях теоретической математики. К числу наиболее ранних авторов этого направления можно отнести И. Радона, Р. Куранта, Ф. Йона, и Ю. Г. Решетняка [1–3]. Более широкое применение связано с рядом прикладных дисциплин. К последним можно отнести теорию зондирования сред физическими сигналами с целью определения структуры среды. Вероятно, самым известным таким направлением является рентгеновская томография для нужд медицины и техники. При этом важно придерживаться ограничений адекватных заявленным целям. Так, в частности, целесообразным следует считать подынтегральные функции разрывными, что соответствует описанию неоднородных зондируемых сред. Такой подход позволяет поставить задачу нахождения множества точек разрывов, что является существенной информацией о строении неизвестной среды. Возможны различные варианты постановки конкретных задач интегральной геометрии за счет использования различных видов подынтегральных функций и многообразий, по которым эти функции интегрируются. Для случая одномерных многообразий получены значительные результаты, позволяющие строить алгоритмы для ряда прикладных задач. Другие случаи исследованы в меньшей степени. Остановимся здесь на варианте интегрирования по гиперплоскостям в конечно-мерном евклидовом пространстве, что соответствует классическому или обобщенному интегральному преобразованию Радона. В последнее время автору совместно с его коллегами удалось продвинуться в этом направлении и вывести несколько формул для решения задач о неизвестной границе применительно к обобщенному преобразованию Радона. При этом рассматривался случай, когда подынтегральная функция зависит не только от переменных интегрирования, но и от части переменных, описывающих гиперплоскости. Интересно отметить, что некоторые из полученных результатов оказались новыми и для классического преобразования Радона. Например, таковым оказался метод подъема, позволяющий выражать преобразование Радона через таковое же в пространстве большей размерности.

*Работа выполнена по программе госзадания ИМ СО РАН FWNF-2022-0009.

Список литературы

[1] Курант Р., *Уравнения с частными производными. Пер. с англ.*, М.: Мир, 1964.

[2] Йон Ф., *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.

[3] Костелянец П. О., Решетняк Ю. Г., “Определение вполне аддитивной функции её значениями на полупространствах”, *УМН*, **9**:3(61) (1954), 135–140 Math-Net.Ru.

Асимптотики решений q-разностных уравнений и гиперболические объемы: гипотезы и их численные проверки

Аптекарев А. И.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Доклад будет посвящен аналитическим аспектам знаменитой гипотезы Кашаева, связывающей гиперболический объём дополнения узла в трехмерной сфере с комбинаторными характеристиками узла, которые, могут быть представлены в виде ВКБ асимптотик решений q-разностных уравнений. В свою очередь, связь (замеченная, но еще не доказанная) этих асимптотик с параметризациями представлений фундаментальных групп узлов (с так называемыми A-многочленами) позволяет сводить задачу проверки различных гипотез к анализу поведения ветвей алгебраических функций.

Список литературы

[1] Аптекарев А. И., "Гиперболический объём 3-d многообразий, A-многочлены, численные проверки гипотез", *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2023, 052 Math-Net.Ru crossref.

Об аксиомах acm-гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий

Банару М. Б.

Смоленский государственный университет, Смоленск
e-mail: mihail.banaru@yahoo.com

1. С середины прошлого века известно о том, что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая (almost contact metric, acm-) структура. До последней четверти XX века наиболее содержательные работы об acm-гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий выполнили хорошо известные японские и американские геометры: М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, Х. Янамото, К. Яно, Д. Блэр, С. Голдберг. С 80-х годов этой тематикой занимался замечательный отечественный геометр В. Ф. Кириченко, а затем и некоторые его ученики. Среди последних выделим Л. В. Степанову, чей основательный труд [1], по нашему мнению, не только содержит множество глубоких результатов, но и задал целое направление в изучении acm-гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий.

В своем исследовании Л. В. Степанова неоднократно рассматривала ситуацию, когда через каждую точку некоторого почти эрмитова многообразия проходит почти контактная метрическая гиперповерхность с определенными свойствами. Так сложилось, что эту ситуацию чаще всего как в отечественных, так и в зарубежных работах описывают следующим образом: рассматриваемое почти эрмитово многообразие удовлетворяет аксиоме соответствующих (то есть обладающих заданными свойствами) acm-гиперповерхностей. Скорее всего, В. Ф. Кириченко был первым, кто стал использовать такую терминологию в отечественных журналах [2]. Отметим однако, что многие зарубежные геометры использовали выражение «аксиома почти контактных метрических гиперповерхностей» еще до выхода в свет упомянутой выше статьи В. Ф. Кириченко. В качестве примера приведем работу известнейшего бельгийского специалиста в области эрмитовой геометрии Л. Ванхекке [3].

2. Так называемые аксиомы acm-гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий можно отнести к нескольким видам. Часть таких аксиом связана с внутренней геометрией гиперповерхности. Например, со свойством эйнштейновости (вместе с многочисленными частными случаями и обобщениями). Один из первых примеров такого типа содержит работа [4]; несколько результатов можно найти в исследовании Л. В. Степановой [1], в обзоре В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару [5] и статьях [6–8].

Но гораздо чаще такого рода аксиомы связаны со свойствами вложения гиперповерхности в объемлющее многообразие. Самый очевидный пример, когда аксиома требует, чтобы через каждую точку многообразия проходила вполне геодезическая acm-гиперповерхность. Или вполне омбилическая. Или гиперповерхность с заданным типовым числом. Или acm-гиперповерхность, которая является минимальным подмногообразием. По этому поводу можно привести множество разнообразных примеров. Здесь мы опять сошлемся на исследование [1] и обзор [5], которые содержат десятки таких примеров; кроме того, укажем на статьи [9–15].

И, наконец, самая важная, на наш взгляд, группа аксиом требует, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности почти эрмитова многообразия имела определенный вид. Например, принадлежала одному из наиболее важных в контактной геометрии классов acm-структур: классу косимплектических, слабо косимплектических, сасакиевых, квазисасакиевых, кенмоцевых и т. п. структур. Очень важно подчеркнуть, что наличие почти контактной метрической структуры определенного вида на гиперповерхности не может быть истолковано как внутреннее свойство гиперповерхности — такая acm-структура, как следует из дифференциально-геометрических построений В. Ф. Кириченко и Л. В. Степановой, порождается почти эрмитовой структурой на объемлющем многообразии [1]. Различные примеры, в которых аксиома требует, чтобы структура на гиперповерхности почти эрмитова многообразия принадлежала определенному классу почти контактных метрических структур, также можно найти в обзоре [5], а, кроме этого, в статьях [16–21].

Естественным направлением развития исследований в данной области явилось изучение более сложных так называемых комбинированных аксиом (см. [22–36]).

3. В сообщении предполагается представить обзор полученных автором результатов, связанных с аксиомами acm-гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий. Среди этих результатов есть и совсем новые [36], и еще не опубликованные, и те, которые были получены ранее. Значительная часть результатов относится только к 6-мерным почти эрмитовым многообразиям (чаще всего к 6-мерным подмногообразиям алгебры октав); другая их часть связана с произвольными почти эрмитовыми многообразиями, принадлежащим различным классам Грея — Хервеллы.

Список литературы

[1] Степанова Л. В., *Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий*, Дисс. ... к.ф.-м.н., М.: МПГУ им. В. И. Ленина, 1995.

[2] Кириченко В. Ф., “Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии”, *Докл. АН СССР*, **260**:4 (1981), 795–799 Math-Net.Ru.

[3] Vanhecke L., “The axiom of coholomorphic $(2p+1)$-spheres for some almost Hermitian manifolds”, *Tensor (N.S.)*, **30** (1976), 275–281.

[4] van Lindt D., Verstraelen L., “Some axioms of Einsteinian and conformally flat hypersurfaces”, *J. Differ. Geom.*, **16** (1981), 205–212.

[5] Кириченко В. Ф., Банару М. Б., “Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий”, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз., **127**, 2014, 5–40.

[6] Banaru M. B., “Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra”, *J. Harbin Institute of Technology*, **8**:1 (2001), 38–40.

[7] Банару М. Б., “Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав”, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз., **126**, 2014, 10–61.

[8] Banaru M. B., “A note on acm-structures on some hypersurfaces of Hermitian manifolds”, *ROMAI Journal*, **16**:1 (2020), 13–17.

[9] Banaru M. B., “On six-dimensional Hermitian submanifolds of a Cayley algebra satisfying the g-cosymplectic hypersurfaces axiom”, *Annuaire de l’Université de Sofia “St. Kliment Ohridski”. Faculté de Mathématiques et Informatique*, **94** (2000), 91–96.

[10] Banaru M. B., “On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3-manifold”, *Saitama Math. J.*, **20** (2002), 1–7.

[11] Abu-Saleem A., Banaru M. B., “On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere”, *Malaysian J. Math. Sci.*, **8**:1 (2014), 35–46.

[12] Банару М. Б., “Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2014, № 3, 60–62.

[13] Банару М. Б., “О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли”, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 10, 13–18.

[14] Банару М. Б., “О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 или 0 в 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли”, *Сиб. матем. журн.*, **58**:4 (2017), 721–727.

[15] Банару М. Б., “О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2018, № 1, 67–70.

[16] Banaru M., “Some theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebras”, *Matem. Vesnik*, **53**:3–4 (2001), 103–110.

[17] Banaru M. B., “On nearly-cosymplectic hypersurfaces in nearly-Kählerian manifolds”, *Studia Universitatis Babeş-Bolyai. Mathematica*, **47**:3 (2002), 3–11.

[18] Банару М. Б., “О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 13–24.

[19] Банару М. Б., “Аксиома гиперповерхностей Кенмоцу для 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:2 (2014), 261–266.

[20] Банару М. Б., “W_4-многообразия и аксиома косимплектических гиперповерхностей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2015, № 5, 34–37 Math-Net.Ru.
[21] Банару М. Б., “Аксиома сасакиевых гиперповерхностей и 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав”, *Матем. заметки*, **99**:1 (2016), 140–144 Math-Net.Ru crossref.
[22] Banaru M. B., “Six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra and u-Sasakian hypersurfaces axiom”, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, **39**:2 (2002), 71–76.
[23] Банару М. Б., “Об эрмитовых многообразиях, удовлетворяющих аксиоме U-косимплектических гиперповерхностей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **8**:3 (2002), 943–947 Math-Net.Ru.
[24] Banaru M. B., “Hermitian manifolds and U-cosymplectic hypersurfaces axiom”, *J. Sichuan Normal University (Natural Science)*, **26**:3 (2003), 261–263.
[25] Банару М. Б., “О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:5 (2003), 981–991 Math-Net.Ru.
[26] Банару М. Б., “О гиперповерхностях Кенмоцу специальных эрмитовых многообразий”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:1 (2004), 11–15 Math-Net.Ru.
[27] Banaru M. B., “The U-Kenmotsu hypersurfaces axiom and six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra”, *J. Sichuan Univ. Sci. Eng.*, **26**:3 (2013), 1–5.
[28] Banaru M. B., Banaru G. A., “A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra”, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, **74**:1 (2014), 23–32 Math-Net.Ru.
[29] Banaru M. B., “Special Hermitian manifolds and the 1-cosymplectic hypersurfaces axiom”, *Bull. of the Australian Math. Soc.*, **90**:3 (2014), 504–509.
[30] Banaru M. B., Banaru G. A., “1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian”, *SUT J. Math.*, **51**:1 (2015), 1–9.
[31] Banaru M. B., Banaru G. A., “A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere”, *Bull. Transilvania University of Braşov. Series III. Mathematics, Informatics, Physics*, **8(57)**:2 (2015), 21–28.
[32] Степанова Л. В., Банару Г. А., Банару М. Б., “О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий”, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, № 1, 86–89 Math-Net.Ru.
[33] Abu-Saleem A., Banaru M. B., Banaru G. A., “A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere”, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, **85**:3 (2017), 107–114 Math-Net.Ru.
[34] Банару М. Б., “О шестимерной сфере с приближенно кэлеровой структурой”, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **146**, 2018, 3–16 Math-Net.Ru.
[35] Abu-Saleem A., Banaru M. B., Banaru G. A., Stepanova L. V., “Quasi-Kählerian manifolds and quasi-Sasakian hypersurfaces axiom”, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, **93**:2 (2020), 68–75 Math-Net.Ru.
[36] Банару Г. А., Банару М. Б., “Об одном свойстве квазикелеровых многообразий”, *Матем. заметки*, **115**:5 (2024), 658–664 Math-Net.Ru crossref.

Отображения с конечным искажением на группах Карно и связанные результаты

Басалаев, Сергей Геннадьевич*

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

e-mail: s.basalaev@g.nsu.ru

В докладе будет представлен обзор результатов в области квазиконформного анализа, берущих своё начало от работ Ю. Г. Решетняка.

Пусть Ω — связное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, и $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Отображение f имеет конечное искажение, если существует измеримая функция $1 \le K = K(x) < \infty$ п. в. в Ω такая, что выполнено поточечное неравенство

$$|Df(x)|^n \le K(x) \det Df(x) \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Ю. Г. Решетняк в [1, 2] доказал замечательный результат, что f непрерывно, открыто и дискретно, если K ограничено (отображения с таким условием называют отображениями с ограниченным искажением или квазирегулярными). Открытость непрерывного отображения f означает, что оно переводит открытые множества в открытые, а дискретность — что прообраз всякой точки в $\mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек в Ω.

Будет дан обзор некоторых обобщений этого утверждения и связанных результатов для отображений групп Карно по статьям [3–7]. Некоторые результаты автора получены совместно с С. К. Водопьяновым.

Список литературы

[1] Решетняк Ю. Г., “Оценки модуля непрерывности для некоторых отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **7**:5 (1966), 1106–1114 Math-Net.Ru crossref.

[2] Решетняк Ю. Г., “Пространственные отображения с ограниченным искажением”, *Сиб. матем. журн.*, **8**:3 (1967), 629–658 Math-Net.Ru crossref.

[3] Basalaev S. G., “Mollifications of contact mappings of Engel group”, *Vladikavkaz Math. J.*, **25**:1 (2023), 5–19 Math-Net.Ru crossref.

[4] С. Г. Басалаев, С. К. Водопьянов, “Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и $\mathcal{P}$-дифференцируемость соболевских отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **64**:4 (2023), 700–719 Math-Net.Ru crossref.

[5] Водопьянов С. К., “Непрерывность отображений класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ с конечным искажением на группах Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **64**:5 (2023), 912–934 Math-Net.Ru crossref.

*Исследования автора поддержаны Математическим центром в Академгородке, номер соглашения № 075-15-2022-281 от 05.04.2022.

[6] Басалаев С. Г., Водопьянов С. К., “Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **64**:6 (2023), 1151–1159 Math-Net.Ru crossref.

[7] Basalaev S. G., *The coarea formula for projections of Lipschitz mappings on Carnot groups*, 2024, arXiv: 2405.15276.

Об асимптотике александровского n-поперечника компакта аналитических периодических функций

Белых, Владимир*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: belykh@math.nsc.ru

Понятие поперечника заданного класса функций, означающего его уклонение от аппроксимирующих конечномерных множеств, широко используется в вычислительной математике (поперечники Колмогорова, Александрова и др.).

Александровский n-поперечник $\alpha_n(X, C)$ компакта X в банаховом пространстве C непрерывных функций определяется как нижняя грань ε-сдвигов X в компакт топологической размерности не большей n.

Известно, что критерием аналитичности C^∞-гладкой функции $\varphi(s)$ на окружности $S = [0, 2\pi]$ служит следующая, принадлежащая Прингсгейму

Теорема 1. *Для того, чтобы периодическая C^∞-гладкая функция $\varphi(s)$ была аналитической на S, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие положительные константы c и A, что*

$$|\varphi^{(k)}(s)| \le c A^k k^k \quad (s \in S), \quad k = 0, 1, \dots$$

В докладе указана асимптотика убывания к нулю (при $n \to \infty$) n-поперечника $\alpha_n(X, C)$ компакта $X \subset C$, определяемая характером роста мажоранты k-ых производных его элементов при $k \to \infty$.

Автором доказана

Теорема 2. *Компакт X аналитических периодических на S функций, ограниченно вложенный в пространство C непрерывных на S функций, имеет такую при $n \to \infty$ асимптотику александровского n-поперечника:*

$$a\, e^{-\rho n} \le \alpha_{2n}(X, C) \le \alpha_{2n-1}(X, C) \le b\, e^{-\rho n}, \quad n > 0,$$

здесь

$$a = c\, \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \frac{e^\rho - 1}{e^\rho}, \quad b = c\, \frac{\pi}{2}\, e^{\rho + 0.5/\rho}, \quad \rho = \frac{1}{e\, A}.$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

Интегральные неравенства в пространстве измеримых функций

Бенараб, Сарра

Университет Константины 3, Алжир
e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Мерчела В.

университет Маскара Мустафы Стамбула, Алжир
e-mail: merchela.wassim@gmail.com

В этом работе рассматривается система нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных измеримых функций. Доказан аналог теоремы Чаплыгина о двустороннем интегральном неравенстве. Используется результаты об уравнениях с упорядоченно накрывающими отображениями.

Пусть Φ — отображение, действующее из частично упорядоченного пространства $(X, \preceq)$ в частично упорядоченное пространство $(Y, \preceq)$, $y \in Y$. В исследовании различных вопросов теории уравнения

$$\Phi(x) = y \tag{1}$$

широко используются оценки решений, для получения которых оказываются эффективными теоремы о неравенствах. В теоремах об односторонних неравенствах указывются условия, при которых из существования элемента $u \in X$ такого, что

$$\Phi(u) \succeq y,$$

следует, что для решения уравнения (1) выполнено $x \preceq u$. В теоремах о двусторонних неравенствах предполагается существование двух элементов $u, v \in X$ таких, что

$$v \preceq u, \quad \Phi(u) \succeq y, \quad \Phi(v) \preceq y,$$

и для решения уравнения (1) утверждается справедливость соотношения $v \preceq x \preceq u$.

Первые результаты о неравенствах для дифференциальных и интегральных уравнений получены С. А. Чаплыгиным (см. [1]). Получению оценок решений различных уравнений и включений посвящены многочисленные исследования, важные результаты получены Н. В. Азбелевым (см. [2, 3]). В последнее время развитие теории накрывающих отображений в частично упорядоченных пространствах (см. [4, 5]) стимулировало исследования интегральных и дифференциальных неравенств неявного вида (см. [6, 7]). В данной заметке предлагается утверждение о двустороннем интегральном неравенстве типа теоремы Чаплыгина. Используются методы [4,5] и результаты об операторных неравенствах, полученные в [8,9].

Обозначим через M^n пространство измеримых (по Лебегу) на $[0,1]$ n-мерных функций. Полагаем, что в M^n задан «стандартный порядок»: для $u=(u_1,\dots,u_n)\in M^n$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in M^n$ выполнено $u\le x$ тогда и только тогда, когда $u_i(t)\le x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, при п. в. $t\in[0,1]$.

Пусть заданы функции $K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^{n\times n}$; $f_i:[0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$. Положим $f(t,x,v,y)=\big(f_i(t,x,v,y_i)\big)_{i=\overline{1,n}}$ (здесь $x,v,y\in\mathbb{R}^n$, y_i — i-ая компонента вектора y). Рассмотрим систему неявных интегральных уравнений

$$f\Big(t,\int_0^1 K(t,s)x(s)ds,x(t),x(t)\Big)=0,\quad t\in[0,1]. \tag{2}$$

Решением системы (2) будем называть функцию $x\in M^n$, удовлетворяющую всем уравнениям этой системы при п. в. $t\in[0,1]$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть имеют место следующие условия:*

- *при всех $i=\overline{1,n}$, п. в. $t\in[0,1]$, любых $x,v\in\mathbb{R}^n$ и $y_i\in\mathbb{R}$ выполнено: функция $f_i(\cdot,x,v,y_i):[0,1]\to\mathbb{R}$ измерима, функция $f_i(t,\cdot,\cdot,y_i):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ не возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу $x_1,\dots,x_n$ и $v_1,\dots,v_n$, функция $f_i(t,x,v,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна;*

- *матрица-функция $K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^{n\times n}$ имеет измеримые неотрицательные компонены;*

- *для некоторых функций $z,\eta\in M^n$ таких, что $z\ge\eta$ при п. в. $t\in[0,1]$, векторы $\int_0^1 K(t,s)z(s)ds$, $\int_0^t K(t,s)\eta(s)ds$ имеют конечные компоненты и выполнены неравенства*

$$f\Big(t,\int_0^1 K(t,s)z(s)ds,z(t),z(t)\Big)\ge 0,$$

$$f\Big(t,\int_0^1 k(t,s)\eta(s)ds,\eta(t),\eta_i(t)\Big)\le 0.$$

Тогда существует решение $x\in M^n$ уравнения (2) удовлетворяющее неравенствам $\eta\le x\le z$.

Доказательство основано на результатах об операторных неравенствах, полученных в работах [8,9].

В заключение отметим, что в приведенном утверждении функция f предполагается непрерывной только по последнему аргументу, то есть f не удовлетворяет условиям Каратеодори. Измеримость композиции этой функции с любыми измеримыми функциями x, v, y следует из результатов [10].

Список литературы

[1] Лузин Н. Н., "О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина", *УМН*, **6**:6(46) (1951), 3–27.

[2] Азбелев Н. В., "О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах", *Матем. сб.*, **39(81)**:2 (1956), 161–178 Math-Net.Ru.

[3] Азбелев Н. В., Цалюк З. Б., "Об интегральных неравенствах. I", *Матем. сб.*, **56(98)**:3 (1962), 325–342.

[4] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E., "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology Appl.*, **179** (2015), 13–33 crossref.

[5] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E., "Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces", *Topology Appl.*, **201** (2016), 330–343 crossref.

[6] Жуковский Е. С., "Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина", *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127 Math-Net.Ru crossref.

[7] Жуковский Е. С., "Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах", *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627 crossref.

[8] Бенараб С., Жуковский Е. С., Мерчела В., "Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением", Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 52–63 Math-Net.Ru crossref.

[9] Бенараб С., Жуковский Е. С., "О накрывающих отображениях со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:122 (2018), 210–215 Math-Net.Ru crossref.

[10] Шрагин И. В., "Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори", *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478.

Вселенная Гёделя как группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и разложение Ивасавы

Берестовский Валерий Николаевич

Институт математики им. С. Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: vberestov@inbox.ru

Курт Гёдель в статье [1] 1949 г. ввёл лоренцеву метрику ds^2 сигнатуры $(+,-,-,-)$ на пространстве $\mathbb{R}^4$. Вселенная (пространство-время) Гёделя (S, ds^2) — решение уравнений гравитации Эйнштейна в ОТО.

В статье [2] автор нашёл времениподобные и изотропные геодезические Вселенной Гёделя, рассматриваемой как группа Ли $G = (\mathbb{R},+) \times A^+(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R},+)$ с левоинвариантной лоренцевой метрикой и показал, что эти геодезические не замкнуты. Эта лоренцева метрика и поведение её геодезических существенно определяются индуцированной левоинвариантной лоренцевой метрикой ds_0^2 на подгруппе $G_3 = (\mathbb{R},+) \times A^+(\mathbb{R})$, где $A^+(\mathbb{R})$ — группа сохраняющих ориентацию аффинных преобразований $\mathbb{R}$.

Профессор Карл-Герман Ниб написал автору, что возможно реализовать Вселенную Гёделя иначе и послал электронную версию его совместной с Иоахимом Хилгертом книги [3], где в разделе 2.7 “Космологическая модель Гёделя и универсальное накрытие группы $SL(2,\mathbb{R})$” задана левоинвариантная лоренцева метрика на $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, универсальном накрытии группы Ли $SL(2,\mathbb{R})$, и утверждается, что она изометрична (G_3, ds_0^2).

В ответном письме я написал, что в статье [4] А. Аграчева и Д. Барилари авторы получили полную классификацию левоинвариантных субримановых метрик на трехмерных группах Ли и ”явно нашли изометрию между неизоморфными субримановыми группами Ли $SL(2,\mathbb{R})$ и $SO(2)\times A^+(\mathbb{R})$” [4]. Существование такой изометрии было указано ранее в статье [5] Фалбела и Городского.

Во втором письме автору профессор Ниб объяснил, что две упомянутые выше изометрии (для лоренцевых и субримановых метрик) индуцированы некоторыми диффеоморфизмами групп Ли $SL(2,\mathbb{R})$ и $SO(2)\times A^+(\mathbb{R})$ посредством разложения Ивасавы для группы Ли $SL(2,\mathbb{R})$. (Сошлемся на теоремы из [6] о разложениях Ивасавы связных полупростых групп Ли и о разложениях Ивасавы полупростых алгебр Ли в книге [7]).

В п. 10.6.4 (i) из [6] указаны изоморфизмы алгебр Ли:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sp}(1,\mathbb{R}).$$

Тогда односвязные группы Ли с этими алгебрами Ли изоморфны.

В докладе обсуждаются модели Вселенной Гёделя как двух неизоморфных 4-мерных односвязных групп Ли $((\mathbb{R},+)\times A^{+}(\mathbb{R}))\times(\mathbb{R},+)$ и $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}\times(\mathbb{R},+)$ с левоинвариантной лоренцевой метрикой, с рассмотрением левоинвариантных лоренцевых метрик на $SL(2,\mathbb{R})$ и $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, указанных в книге [3], и разложения Ивасавы для полупростых групп Ли.

В теореме 3 мы доказываем, используя формулы для связности Леви-Чивиты левоинвариантных псевдоримановых метрик на группах Ли из [8], что аналоги секционных кривизн (вычисленных для трех пар векторов соответствующих ортонормированных базисов (X,Y,Z)) для левоинвариантной метрики Гёделя (G_3, ds_0^2) и левоинвариантных лоренцевых метрик на $SL(2,\mathbb{R})$ и $SO(2)\times A^{+}(\mathbb{R})$ из [3] пропорциональны, что подтверждает утверждения профессора Ниба.

В предложении 3 показано, следуя предположению профессора Ниба, что изометрия между двумя неизоморфными субримановыми группами Ли $SL(2,\mathbb{R})$ и $SO(2)\times A^{+}(\mathbb{R})$, построенная А. Аграчевым и Д. Барилари в [4], индуцирована некоторым разложением Ивасавы для $SL(2,\mathbb{R})$.

Результаты, изложенные в докладе, будут опубликованы в статье на английском языке, публикуемой в Вестнике Омского университета.

Список литературы

[1] Goedel K., “An example of a new type of cosmological solutions of Einstein’s field equations of gravitation”, *Rev. Mod. Phys.*, **21**:3 (1949), 447–450.

[2] Берестовский В. Н., “Времениподобные и изотропные геодезические Всленной Гёделя как группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой”, *Сиб. матем. журн.*, **65**:5 (2024) (в печати).

[3] Hilgert Jo., Neeb K.–H., *Lie semigroups and their Applications*, Lect. Notes Math., **1552**, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1993.

[4] Agrachev A., Barilari D., “Sub-Riemnnian structures on 3d Lie groups”, *J. Dyn. Control Syst.*, **18**:1 (2012), 21–44.

[5] Falbel E., Gorodski C., “Sub-Riemannian homogeneous spaces in dimensions 3 and 4”, *Geom. Dedicata*, **62**:3 (1996), 227–252.

[6] Хелгасон С., *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, М.: Факториал Пресс, 2005.

[7] Гото М., Гроссханс Ф., *Полупростые алгебры Ли*, М.: Мир, 1981.

[8] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., *Риманова геометрия в целом*, М.: Мир, 1971.

Stronger versions of the homogeneity for Euclidean polytopes

V. N. Berestovskii

Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS, Novosibirsk
e-mail: vberestov@inbox.ru

Yu. G. Nikonorov

Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz
e-mail: nikonorov2006@mail.ru

A finite metric space (M, d) is homogeneous if its isometry group $\operatorname{Isom}(M)$ acts transitively on M. We deal with finite subsets of Euclidean space $\mathbb{R}^n$. It is assumed that any such set M is supplied with the metric d induced from $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1 ([1]). *Let $M = \{x_1, \dots, x_q\}$, $q \geq n+1$, be a finite homogeneous metric subspace of Euclidean space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Then M is the vertex set of a convex polytope P, that is situated in some sphere in $\mathbb{R}^n$ with radius $r > 0$ and center $x_0 = \frac{1}{q} \cdot \sum_{k=1}^{q} x_k$. In particular, $\operatorname{Isom}(M) \subset O(n)$.*

Therefore, a finite homogeneous metric subspace of an Euclidean space represents the vertex set of a compact convex polytope with the isometry group that is transitive on the vertex set. In [1–3], the authors obtained the complete description of the metric properties of the vertex sets of regular and semiregular polytopes in Euclidean spaces from the point of view of the normal homogeneity and the Clifford–Wolf homogeneity, see also surveys [4, 7]. Perfect and almost perfect homogeneous polytopes are studied in [6]. Some properties of m-point homogeneous finite subspaces of Euclidean spaces were discussed in [5, 8].

Definition 1. A metric space (M, d) is called *m-point homogeneous*, $m \in \mathbb{N}$, if for every m-tuples $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ and $(B_1, B_2, \dots, B_m)$ of elements of M such that $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$, $i, j = 1, \dots, m$, there is an isometry $f \in \operatorname{Isom}(M)$ with the following property: $f(A_i) = B_i$, $i = 1, \dots, m$.

Let P be a non-degenerate convex polytope in $\mathbb{R}^n$ with the barycenter in the origin $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. The symmetry group $\operatorname{Symm}(P)$ of P is the group of isometries of $\mathbb{R}^n$ that preserve P. It is clear that each $\psi \in \operatorname{Symm}(P)$ is an orthogonal transformation of $\mathbb{R}^n$ (obviously, $\psi(O) = O$ for any symmetry ψ of P).

Recall that a polytope P in $\mathbb{R}^n$ is *homogeneous* (or *vertex-transitive*) if its symmetry (isometry) group acts transitively on the set of its vertices. The following definition is natural.

Definition 2. A convex polytope P in $\mathbb{R}^n$ is called m-point homogeneous if its vertex set (with induced metric d from $\mathbb{R}^n$) is m-point homogeneous.

Some approaches to the classification of homogeneous (1-homogeneous) polytopes are considered in [9–13]. The following problem is natural:

Problem 1 ([5]). *Classify all convex polytopes P in $\mathbb{R}^n$ whose vertex sets are m-point homogeneous, where $m \geq 2$.*

The main goal of this talk is the classification of m-point homogeneous polyhedra in $\mathbb{R}^3$ for all $m \geq 2$. The following result is very important for our goals.

Corollary 1 (Corollary 3.2 in [5]). *Every n-dimensional convex n-point homogeneous polytope in $\mathbb{R}^n$ which has the vertex set M with the cardinality $m \geq n+1$, is m-point homogeneous.*

Hence, for $n = 3$, the 3-point homogeneity of a non-degenerate polyhedron P implies its m-point homogeneity for all $m \in \mathbb{N}$. One of our main results is

Theorem 1 (Theorem 5 in [8]). *Let P be a 2-point homogeneous polyhedron in $\mathbb{R}^3$. Then one of the following properties holds:*

1) P is a regular polyhedron (tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron, or icosahedron);

2) P is a cuboctahedron;

3) P is a homogeneous tetrahedron with four pairwise isometric faces that are acute triangles;

4) P is a right prism over a regular n-gon, $n \geq 3$, such that the set of distances between vertices of P from a fixed base has empty intersection with the set of distances between vertices of P from distinct bases;

5) P is a right antiprism over a regular n-gon, $n \geq 2$, such that the set of distances between vertices of P from a fixed base has empty intersection with the set of distances between vertices of P from distinct bases;

6) P is a rectangular parallelepiped of size $a \times b \times c$, where $a \leq b \leq c$ and $a^2 + b^2 \neq c^2$.

It should be noted that the list of 3-point homogeneous polyhedra (Theorem 6 in [8]) is shorter than the above list of 2-point homogeneous polyhedra exactly in one item: the regular dodecahedron is 2-point homogeneous but is not 3-point homogeneous.

References

[1] Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г., “Конечные однородные метрические пространства”, *Сиб. матем. журн.*, **60**:5 (2019), 973–995 Math-Net.Ru crossref; Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G., “Finite homogeneous metric spaces”, *Siberian Math. J.*, **60**:5 (2019), 757–773 crossref.

[2] Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г., “Конечные однородные подпространства евклидовых пространств”, *Матем. тр.*, **24**:1 (2021), 3–34 Math-Net.Ru crossref; Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G., “Finite homogeneous subspaces of Euclidean spaces”, *Siberian Adv. Math.*, **31**:3 (2021), 155–176 crossref.

[3] Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г., “Полуправильные многогранники Госсета”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **86**:4 (2022), 51–84 Math-Net.Ru crossref; Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G., “Semiregular Gosset polytopes”, *Izv. Math.*, **86**:4 (2022), 667–698 crossref.

[4] Berestovskiĭ V. N., Nikonorov Yu. G., “On finite homogeneous metric spaces”, *Владикавк. матем. журн.*, **24**:2 (2022), 51–61 Math-Net.Ru crossref.

[5] Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G., “On m-point homogeneous polytopes in Euclidean spaces”, *Filomat*, **37**:25 (2023), 8405–8424 crossref.

[6] Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G., “Perfect and almost perfect homogeneous polytopes”, *Journal of Mathematical Sciences*, **271** (2023), 762–777.

[7] Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G., “On the Geometry of Finite Homogeneous Subsets of Euclidean Spaces”, *Surveys in Geometry II*, ed. A. Papadopoulos, Cham: Springer, 2024, 305–335.

[8] Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G., *On m-point homogeneous polyhedra in 3-dimensional Euclidean space*, 2024, arXiv: 2408.09911.

[9] Edmonds A. L., “The geometry of an equifacetal simplex”, *Mathematika*, **52**:1–2 (2005), 31–45 crossref.

[10] Edmonds A. L., “The partition problem for equifacetal simplices”, *Beitr. Algebra Geom.*, **50**:1 (2009), 195–213.

[11] Robertson S. A., *Polytopes and symmetry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **90**, Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1984.

[12] Robertson S. A., Carter S., “On the Platonic and Archimedean solids”, *J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 2*, **1** (1970), 125–132 crossref.

[13] Robertson S. A., Carter S., Morton H. R., “Finite orthogonal symmetry”, *Topology*, **9** (1970), 79–95 crossref.

Наследование выпуклости при интерполяции сплайнами с натяжением

Богданов В. В.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
e-mail: bogdanov@math.nsc.ru

Рассматривается задача интерполяции сплайнами с натяжением, обеспечивающей наследование выпуклости интерполируемой функции. Ранее нами был разработан близкий к оптимальному алгоритм автоматического выбора параметров натяжения при интерполяции выпуклой функции. Теперь предлагается использовать его в задаче кусочно-выпуклой интерполяции, разбивая область данных на подобласти выпуклости одного направления, вверх или вниз. Показано, что параметры натяжения, определяемые из условия выпуклости раздельно построенных на таких подобластях сплайнов с натяжением, можно использовать при построении глобального сплайна с натяжением по всем данным, что обеспечивает требуемую выпуклость на подобластях, причём влияние этих определяемых параметров не распространяется за границы подобластей в искомой, по всем данным, нелокальной конструкции, то есть носит локальный характер.

*Работа выполнена в рамках государственного задания (Проект FWNF-2022-0015).

Операторы композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях

Водопьянов Сергей Константинович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: vodopis@mail.ru

Задача об операторе композиции в пространствах Соболева (см. [1]) состоит в том, чтобы найти эквивалентное описание отображений $\varphi : D \to D'$, которые по правилу замены переменной: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ суть ограниченные операторы $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \leq q \leq p < \infty$.

Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathcal{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — область, а $W \Subset \mathcal{M}$ — компактно вложенная область. Пусть еще $1 \leq q \leq p < \infty$. Определим класс $\mathcal{Q}_{q,p}(\Omega, W)$, гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \to W$ открытых областей Ω и W таких, что

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

2) отображение φ имеет *конечное искажение*: $D\varphi(x) = 0$ п. в. на множестве $Z = \{x \in \Omega \mid \det D\varphi(x) = 0\}$;

3) операторная функция искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K_{q,p}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(\Omega)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $1 \leq q < p < \infty$, и $\sigma = \infty$, если $q = p$.

Теорема [2]. *Пусть задан гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to W$ областей $\Omega \subset \mathbb{M}$ и $W \Subset \mathcal{M}$. Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to W$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(W) \to L^1_q(\Omega)$, $1 \leq q \leq p < \infty$, тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathcal{Q}_{q,p}(\Omega, W)$. Кроме того, верны соотношения*

$$\alpha_{q,p} \| K_{q,p}(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(V)) \| \leq \| \varphi^*_V \| \leq \| K_{q,p}(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(V)) \|$$

для любого открытого множества $V \subset W$, где число $\alpha_{q,p} > 0$.

Список литературы

[1] Водопьянов С. К., “Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях”, *Матем. сб.*, **210**:1 (2019), 63–112 Math-Net.Ru crossref.

[2] Водопьянов С. К., “Операторы композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях”, *Сиб. матем. журн.*, **65**:6 (2024).

Особые траектории дифференциальных систем типа Дарбу

Волокитин Е. П.*

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск
e-mail: volok@math.ncs.ru

Рассмотрим плоскую систему обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\dot{x} = P(x, y),\ \dot{y} = Q(x, y), \tag{1}$$
$P(x, y)$, $Q(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Топологическая структура множества траекторий системы (1) определяется заданием его критических орбит (особых точек (в том числе бесконечно удалённых), сепаратрис (границ гиперболических секторов) и предельных циклов), описанием их типов и взаимного расположения.

Мы исследуем критические орбиты системы типа Дарбу
$$\dot{x} = x + P_n(x, y),\ \dot{y} = y + Q_n(x, y), \tag{2}$$
$P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ — действительные однородные многочлены степени n.

Теорема 1. *1) Пусть в системе (2) многочлены $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ не имеют общего множителя. Тогда все особые точки элементарны и являются узлами, сёдлами и седло-узлами.*

2) Если многочлены $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ имеют общий множитель, конечные особые точеи по-прежнему элементарны; бесконечно удалённые особые точки могут быть неэлементарными типа линейный ноль (матрица линейного приближения в окрестности этих точек равна $\mathbf{0}$*).*

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta P_n(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \sin\vartheta Q_n(\cos\vartheta, \sin\vartheta),$$
$$g(\vartheta) = \cos\vartheta Q_n(\cos\vartheta, \sin\vartheta) - \sin\vartheta P_n(\cos\vartheta, \sin\vartheta).$$

Теорема 2. *1) Система (2) имеет не более одного предельного цикла.*

2) Для того, чтобы существовал единственный предельный цикл Γ системы (2), окружающий начало координат, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$g(\vartheta) \neq 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]; \quad g(0)\int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} d\vartheta < 0.$$

3) Цикл Γ является гиперболическим устойчивым циклом.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0005.

Теоремы 1, 2 дают возможность адекватно воспроизвести глобальные фазовые портреты системы (2).

Мы исследуем также вопрос о наличии у системы (2) алгебраических решений, в частности, вопрос о существовании алгебраических предельных циклов, а также вопрос о существовании алгебраических интегралов.

Hidden Attractors in some gene networks models

V. P. Golubyatnikov*

Novosibirsk state uiversity, Novosibirsk

e-mail: v.golubiatnikov@g.nsu.ru

We consider 3D dynamical systems which simulate functioning of gene networks regulated by multi-step feedbacks:

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_3) - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = L(x_1) - x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = L(x_2) - x_3, \tag{1}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_3) - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \Gamma(x_1) - x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = \Gamma(x_2) - x_3, \tag{2}$$

Here, the variables $x_j(t) \geq 0$ denote concentrations of components of the gene network, and monotonically decreasing function $L(w)$ describes negative feedbacks between these components, see [2, 4, 6] The function $\Gamma(w)$ in (4) below describes positive feedbacks in the gene network, see [2, 4]. Following [3], we study the case, when these feedbacks are realizad in a two-step way here and below $c > \varepsilon > 0$, $j = 1, 2, 3$:

$$L(w) = 2c \text{ for } 0 \leq w < c - \varepsilon; \;\; L(w) = c \text{ for } c - \varepsilon \leq w < c + \varepsilon;$$

$$L(w) = 0 \text{ for } c + \varepsilon \leq w. \tag{3}$$

$$\Gamma(w) = 0 \text{ for } 0 \leq w < c - \varepsilon; \;\; L(w) = c \text{ for } c - \varepsilon \leq w < c + \varepsilon;$$

$$\Gamma(w) = 2c \text{ for } c + \varepsilon \leq w. \tag{4}$$

As in [4], in both cases of the systems (1), (2), and (2), (3), (4), let us decompose the cube $Q = [0, 2c] \times [0, 2c] \times [0, 2c]$ by the planes $x_j = c - \varepsilon$, $x_j = c + \varepsilon$ to 27 blocks, and enumerate them by multi-indices $\{s_1 s_2 s_3\}$ as follows: if for all points of the block $0 \leq x_j < c - \varepsilon$ then $s_j; = 0$;

if for all points of the block $c - \varepsilon \leq x_j < c + \varepsilon$ then $s_j := 1$;

if for all points of the block $c + \varepsilon \leq x_j$ then $s_j := 2$.

Lemma. *Each of the systems (1), (2), and (2), (3), (4) has exactly one equilibrium point S_0; this point is asymptoticlly stable, and is contained in the block $\{111\}$, its coordinates are $x_1 = x_2 = x_3 = c$.*

---

*Supported by Russian Scientific Foundation project 23-21-00019, https://rscf.ru/project/23-21-00019/

Let $W_1 \subset Q$ be the union of the blocks (3), listed in the circular diagram

$$\ldots \to \{220\} \to \{210\} \to \{200\} \to \{201\} \to \{202\} \to \{102\} \to \{002\} \to \{012\} \\ \to \{022\} \to \{021\} \to \{020\} \to \{120\} \to \{220\} \to \ldots \tag{5}$$

Similarly, let $W_2 \subset Q$ be the union of the blocks (3), listed in the circular diagram

$$\ldots \to \{000\} \to \{100\} \to \{200\} \to \{210\} \to \{220\} \to \{221\} \to \{222\} \to \{122\} \\ \to \{022\} \to \{012\} \to \{002\} \to \{001\} \to \{000\} \to \ldots \tag{6}$$

Theorem 1. 1. *If $c > 3\varepsilon$ then the domain W_1 contains a cycle C_1 of the system (1), (3). This cycle is stable, it passes from block to block according to the arrows of the diagram (5), and is symmetric with respect to the cyclic permutation of the variable $\sigma : x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$.*

2. *If $c \geq 4\varepsilon$ then the domain W_2 contains a cycle C_2 of the system (2), (3), (4), it passes from block to block according to the arrows of the diagram (6).*

The equilibrium point S_0 is a hidden attractor of the systems (1), (2), and (2), (3), (4) cf. [5]. Its attraction basin does not intersect the cycles C_1, C_2 of these systems.

References

[1] Pliss V. A., *Nonlocal problems in the theory of oscillations*, NY: Academic Press, 1966.

[2] Glass L., Pasternack J. C., "Stable oscillations in mathematical models of biological control systems", *J. Math. Biology*, **6** (1978), 207–223 crossref.

[3] Tchuraev R. N., Ratner V. A., "A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression", *Molecular Genetic Information Systems. Modelling and Simulation*, ed. K. Bellman, Berlin: Verlag, 1983, 64–80.

[4] Akinshin A. A, Golubyatnikov V. P., "Geometric characteristics of cycles in some symmetric dynamical systems", *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, **12**:2 (2012), 3–12 Math-Net.Ru.

[5] Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T., "Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems", *Phys. Letters A*, **379**:40–41 (2015), 2591–2596 crossref.

[6] Golubyatnikov V. P., Gradov V. S., "Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks", *Siberian Adv. Math.*, **31**:1 (2021), 1–12 crossref.

Неединственность циклов в фазовых портретах трёхмерных динамических систем*

В. П. Голубятников[1], Н. Б. Аюпова[1], Н. Е. Бондаренко[2],
Е. П. Волокитин[1], А. В. Глубоких[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск*
e-mail: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Изучаются фазовые портреты трёхмерных динамических систем, моделирующих генные сети, регулируемые многоступенчатыми сязями.

Рассматриваются трёхмерные динамические системы вида

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_3) - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = L(x_1) - x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = L(x_2) - x_3, \tag{1}$$

моделирующие простейший молекулярный репрессилятор. Переменные $x_j(t) \geq 0$ описывают концентрации компонент генной сети, а монотонно убывающая функция $L(w)$ — отрицательные связи между этими компонентами, см. [2,6]. Как и в [3], рассматривается случай, когда эта связь осуществляется двухступенчатым образом; здесь и далее $c > \varepsilon > 0$, $j = 1, 2, 3$:

$$L(w) = 2c \text{ при } 0 \leq w < c - \varepsilon; \quad L(w) = c \text{ при } c - \varepsilon \leq w < c + \varepsilon;$$
$$L(w) = 0 \text{ при } c + \varepsilon \leq w. \tag{2}$$

Установлены условия неединственности циклов в таких моделях генных сетей. Следуя [4], в случае системы (1), (2) разобьём куб $Q = [0, 2c] \times [0, 2c] \times [0, 2c]$ плоскостями $x_j = c - \varepsilon$, $x_j = c + \varepsilon$ на 27 блоков и занумеруем их мультииндексами $\{s_1 s_2 s_3\}$:

$$\begin{aligned} &\text{если для всех точек блока } 0 \leq x_j < c - \varepsilon, \text{ то полагаем } s_j = 0; \\ &\text{если для всех точек блока } c - \varepsilon \leq x_j < c + \varepsilon, \text{ то } s_j = 1; \\ &\text{если для всех точек блока } c + \varepsilon \leq x_j, \text{ то полагаем } s_j = 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Лемма 1. *Система* (1), (2) *имеет в точности одну стационарную точку* S_0*; эта точка асимптотически устойчива и лежит в блоке* $\{111\}$.

Обозначим через $W_1 \subset Q$ объединение блоков (3), перечисленных в кольцевой диаграмме

$$\ldots \to \{220\} \to \{210\} \to \{200\} \to \{201\} \to \{202\} \to \{102\} \to \{002\} \to \{012\}$$
$$\to \{022\} \to \{021\} \to \{020\} \to \{120\} \to \{220\} \to \ldots \tag{4}$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания FWNF-2022-0009 и FWNF-2022-0005.

Теорема 1. *Если $c > 3\varepsilon$, то область W_1 содержит цикл C_1 системы* (1), (2). *Этот цикл устойчив, переходит из блока в блок, согласно стрелкам диаграммы* (4), *и симметричен относительно циклической перестановки переменных $\sigma : x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$.*

Рассмотрим систему (1) и в случае “трёхступенчатой” функции $L(w)$:

$$L(w) = 2c \text{ при } 0 \leq w < c - \varepsilon;\;\; L(w) = c + \varepsilon \text{ при } c - \varepsilon \leq w < c;$$

$$L(w) = c - \varepsilon \text{ при } c \leq w < c + \varepsilon;\;\; L(w) = 0 \text{ при } c + \varepsilon \leq w. \tag{5}$$

Динамическая система (1) в случае (5) также обладает симметрией относительно перестановки переменных σ. При $4\varepsilon \leq c$ система (1), (5) имеет в инвариантной области Q два цикла, которые являются примерами нелокальных колебаний, см. [1]. Их построение начинается с разбиения Q плоскостями $x_j = c - \varepsilon$, $x_j = c$, $x_j = c + \varepsilon$ на 64 блока и построения диаграмм, аналогичных (4), см. также [4]. Точка S_0 является “спрятанным аттрактором” системы (1), (2), см. [5]. Область её притяжения не пересекается с циклом C_1 этой динамической системы. Для одноступенчатых функций L неединственность циклов у подобных динамических систем наблюдалась только в размерностях, начиная с $\dim = 5$, см. [6].

Список литературы

[1] Плисс В. А., *Нелокальные проблемы теории колебаний*, М.: Наука, 1964.

[2] Glass L., Pasternack J. C., “Stable oscillations in mathematical models of biological control systems”, *J. Math. Biology*, **6** (1978), 207–223.

[3] Tchuraev R. N., Ratner V. A., “A continuous approach with threshold characteristics for simulation of gene expression”, *Molecular Genetic Information Systems. Modelling and Simulation*, ed. K. Bellman, Berlin: Verlag, 1983, 64–80.

[4] Golubyatnikov V. P., Gaidov Yu. A., Kleshchev A. G., Volokitin E. P., “Modeling of asymmetric gene networks functioning with different types of regulation”, *Biophysics*, **51**:Suppl. 1 (2006), 61–65 crossref.

[5] Dudkowski D., Prasad A., Kapitaniak T., “Perpetual points and hidden attractors in dynamical systems”, *Phys. Letters A*, **379**:40–41 (2015), 2591–2596 crossref.

[6] Golubyatnikov V. P., Gradov V. S., “Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks”, *Siberian Adv. Math.*, **31**:1 (2021), 1–12 crossref.

Квазивыпуклые области на группах Карно

Грешнов Александр*

Новосибирский государственый университет, Россия

e-mail: a.greshnov@g.nsu.ru

Пусть (X, d^X) — собственное метрическое пространство однородного типа с внутренней метрикой d^X.

Определение 1. Область $\mathcal{D} \subset X$ называется d^X-квазивыпуклой, если существует константа $C_{\mathcal{D}}$ такая. что для любых двух точек $x, y \in \mathcal{D}$ найдется кривая $\gamma_{x,y} \subset \mathcal{D}$ конечной длины $l(\gamma_{x,y})$, соединяющая точки x, y, такая, что $l(\gamma_{x,y}) \leq C_{\mathcal{D}} d^X(x, y)$.

Условие квазивыпуклости области играет огромную роль в теории функциональных пространств Соболева и BMO [1–3]. Группы Карно $(\mathbb{G}, d_{cc}^{\mathbb{G}})$, где $d_{cc}^{\mathbb{G}}$ — метрика Карно — Каратеодори, являются важными нетривиальными примерами пространств (X, d^X) [4]. Проблема существования ограниченных квазивыпуклых областей на общих группах Карно (cc-квазивыпуклые области) пока не решена. Однако, для 2-ступенчатых групп Карно построены примеры ограниченных cc-квазивыпуклых областей, см., например, [3].

Автором доказана

Теорема 1. *На группе Энгеля $(\mathbb{E}, d_{cc}^{\mathbb{E}})$ существуют ограниченные cc-квазивыпуклые области.*

Группа Энгеля $(\mathbb{E}, d_{cc}^{\mathbb{E}})$ является 3-ступенчатой группой Карно.

Список литературы

[1] Водопьянов С. К., *Формула Тейлора и функциональные пространства*, Новосибирск: Изд-во НГУ, 1988.

[2] Водопьянов С. К., Грешнов А. В., "О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой", *Сиб. матем. журн.*, **36**:5 (1995), 1015–1048 Math-Net.Ru crossref.

[3] Грешнов А. В., "О равномерных и NTA-областях на группах Карно", *Сиб. матем. журн.*, **42**:5 (2001), 1018–1035 Math-Net.Ru crossref.

[4] Vodopyanov S. K., Karmanova M. B., "Geometry of Carnot-Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas", *Analysis and mathematical physics, Trends Math.*, Basel: Birkhauser, 2009, 233–335 crossref.

*Работа выполнена в рамках проекта РНФ № 24-21-00319.

Каузальные геодезические симплектические структуры в терминах билинейных функционалов

Гудков Е. Л.

Государственный университет Дубна, Россия

e-mail: EugeneGoodok@gmail.com

Результаты:

1. Создано описание квазиэквивалентных секторов в рамках правил суперотбора.

2. Доказано что каждый слой на звездообразной поверхности есть проективный предел для трубчатой области в аксиоматической теории поля на фактор-пространстве.

3. Доказано, что оператор временного упорядочения каузальной геодезической структуры в симплектическом случае

$$\sup T^{m}_{:m} \otimes T_{\lambda} J_{U_{\psi^{i-}} \cap U_{\psi^{i}}} \cup Int_{U \ni v} \cup T^{*}_{p} J_{U_{\psi^{i+}} \cup \psi^{i}}$$

является тривиализирующим, то есть соответствующая функция $\phi \neq 0$.

4. Найдено доказательство критерия суперотбора полного пространства-времени при $n > 2$ на основании свойств расщиренной локальности.

5. Обозначены преимущества с точки зрения физической мотивации для выбора критерия расширенной изотонии.

6. Введена надстройка на ультраметрике Боуэна–Уотерса применительно к аксилматической квантовой теории поля.

7. Найдено новое доказательство обобщенного критерия Кука дляω_o состояний системы, исходя из СЭУ (условия положительности энергии на симплектическом слое).

8. Показано, что марковский оператор временного упорядочения $T^{*}_{\dot{\omega}\lambda}$ имеет замкнутый спектр.

Автором доказана следующая теорема

Теорема 1. *Пусть существует псевдориманова метрика E с сигнатурой $(+,-,+-)$ в классе C^p, на которой существует изоморфизм определяющий почти комплексную структуру (E,σ) с калибровочной функцией σ, задающей семейство симплектических форм вида $d\lambda^n$. Эту теорему можно переформулировать так:*

Симплектичекая структура на основе 1-формы $d\sigma$ в классе C^p имеет стягиваемый слой.

Для этого была доказана вспомогательная лемма.

Лемма 1. *$\exists$ хотя бы 1 неортогональный времениподобной поверхности вектор $v_b^a \perp TM$.*

Для того, чтобы найти подходящий для доказательства леммы 1 объект, необходимо доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Паракомпактное дополнение к пространству-времени $\grave{M}$ является нерасширяемым глобально гиперболически полным пространством-временем*

$$\begin{aligned}&\grave{M}_W U^-\langle\psi^{-1}\mid\psi\rangle = \grave{M}_W U = \grave{M}_W U^-\langle\psi s^{\mu v}\mid\psi\rangle\\&=\grave{M}_W U^-\langle\psi^{-1}\mid\psi\rangle = \grave{M}_W U = \grave{M}_W U^-\langle\psi s^{i}\mid\psi\rangle \subset Int[x^*...,x_p]\subset Int_{U\ni v},\end{aligned}$$

где $s^{\mu v}$ — кодирующая последовательность. Данное выражение является следствием исходного через цепочку импликаций

$$\begin{aligned}&\grave{M}_W U^-\langle\psi^{-1}\mid\psi\rangle = \grave{M}_W U = \grave{M}_W U^-\langle\psi s^{\mu v}\mid\psi\rangle\\&\quad=\grave{M}_W T^*_{\omega\grave{\lambda}} dim U^-\langle\psi\mid\psi\rangle s_i > \ni Int_{V\ni N}\ni J^O_+\cap^n{}_k T_p T,\\&\grave{M}_W U^-\langle\psi^{-1}\mid\psi\rangle = \grave{M}_W U = \grave{M}_W U^-\langle\psi s^{\mu v}\mid\psi\rangle\\&\quad=\grave{M}_W T^*_{\omega\grave{\lambda}} J^+_{(U_{\psi^i_j}\cup U_{\psi^i_j})}\partial_\lambda\partial_t\cap T_p Int_{U\ni V} = \grave{M}_W T^*_{\omega\grave{\lambda}} J^+_{U_{\psi^i_j}\cup U_{\psi^i_j}} N\subset\grave{N}T_p.\end{aligned}$$

Здесь $N\subset\grave{N}T_p$ представимо также в аиде $N^*\subset\grave{N}\subset T_p\cup T_{(N,\phi)}$. Это представление можно определить как

$$\grave{M}_W T^*_{\omega\grave{\lambda}} J^+_{U_{\psi^i_j}\cup U_{\psi^i_j}} NTInt[x^*_p,x_{p+1}]\cap^n_{k=0} N\subset\grave{N},$$

$$\grave{M}_W T^*_{\omega\grave{\lambda}} J^+_{U_{\psi^i_j}\cup U_{\psi^i_j}} N\subset\grave{N}\cup T_{(N,\phi)}\ni Int_{U\ni V} = \grave{M}_W T^*_{\omega\grave{\lambda}}.$$

Вектор с координатами (N,ϕ) ортогонален непространственноподобной поверхности. Этот вектор является примером объекта необходимого для доказательства теоремы 2.

$$(F,P)\to(I.T).$$

Рассмотрим на ней множество типа Боуэна

$$\begin{aligned}&sup\overline{B}(x^*(A,\alpha_c),\epsilon_0) = dim(U_i^\psi)C^p(\overline{Int^-}p\grave{q}_n 2^n\langle\langle\pi_L^c : T^*_\lambda\overline{N(p)}\cup^n_{k=0}\rangle\rangle\\&\quad\grave{N}\subset\grave{N}\subset IntI\_i\subset[x^*_p...,x_{p+1}]-q_0)^{p-1}_{i=0}[q^*_{:,s}],\\&Int_{U\ni v}T^*_{[}\omega...,\grave{\omega}]I^{+-}_O = TntC^p\to C^* : T^*_\lambda\overline{N}_{\partial_\epsilon}T\cup Bexpx^{(q)}_p sup(T^*_\lambda\otimes T^m_{:m}\cup B_{nk}),\\&Int_{U\ni v}T^*_{[}\omega...,\grave{\omega}]I^{+-}_O = TntC^p\to C^* : T^*_\lambda\overline{N}_{\partial_\epsilon}T\cup Bexpx^{(q)}_p\end{aligned}$$

$$= sup(T_p^* \otimes T_{:m}^m \cup supT_\lambda : \pi r^2(t.\pi_C^L),$$

$$Int_{U\ni v}T_{[}^*\omega ..., \grave{\omega}]I_O^{+-} = TntC^p \to C^* : T_\lambda^*\overline{N}_{\partial_\epsilon}T \cup Bexpx_p^{(q)}$$
$$= sup(T_p^* \otimes T_{:m}^m \cup supT_\lambda : CB^{2r}\pi^2 r(x^* dim(J_{U_{\psi i+})\cup Int_{U\ni v})\cap U_\psi^{i-}\times S}.$$

На основании предыдущих формул получим

$$Int_{U\ni v}T_{[}^*\omega ..., \grave{\omega}]I_O^{+-} = TntC^p \to C^* : T_\lambda^*\overline{N}_{\partial_\epsilon}T \cup Bexpx_p^{(q)}$$
$$= sup(T_p^* \otimes T_{:m}^m \cup supT_\lambda : CB^{2r}\pi^2 r(x^* dim(J_{U_{\psi i+})\cup Int_{U\ni v})\cap U_\psi^{i-}\times S}$$
$$= sup\overline{B}(x^*(J_O^+(u)\partial\tau\pi_c^L : B^{2r}\alpha_c, \epsilon_0)).$$

В теории алгебраической формулировки КТП и аксиоматической теории КТП важное место занимает вопрос построения сетки множеств. Симплектическая почти комплексная структура выглядит следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial\tau}g(\frac{\partial}{\partial t})_j = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}g(J(u))\partial s\partial t$$
$$= g(J(sup\overline{B}(\alpha.\epsilon_0 T_p^* \otimes T_{:}m^m\langle\langle\pi_c^L\rangle\rangle \cup T_\lambda) = Int_{U\ni v}) = 0.$$

Рассмотрим пространственноподобную кривую (геодезическую) с началом в точке, лежащей внутри светового конуса $h(1,\xi)$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}h(1,\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}T_{:m}^m \cup T_\lambda \cap T_p^* \subset int_{V\ni N^*\subset\grave{N}}J_{U_{\psi i+}\cup U_{\psi i-}}$$
$$= J(u)h^j U^{\psi^{i-}} \cup h^j U^{\psi^{i^+}} = 0.$$

Последнее выражение предствляет собой теорему Брауэра о сдвиге, которая при данном способе доказательства выводится непосредственно из свойств траекторий движения периодической точки.

Список литературы

[1] Красников С. В., *Некоторые вопросы причинности в ОТО: «машины времени» и «сверхсветовые перемещения»: Основные идеи и важнейшие результаты за последние десятилетия*, URSS, 2021.

[2] Элиашберг Я., Трейнор Л., *Лекции по симплектической геометрии и топологии*, МЦНМО, 2008.

[3] Афраймович В., Угальде Э., Уриас Х., *Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре*, Изд-во «ИКИ», 2011.

[4] Сарданашвили Г. А., *Современные методы теории поля. Том 3: Алгебраическая квантовая теория*, Либроком, 2017.

[5] Хоружий С. С., *Введение в алгебраическую квантовую теорию поля*, М.: Наука, 1986.

[6] Кошманенко В. Д., “Теория рассеяния Хаага–Рюэля как теория рассеяния в различных пространствах состояний”, *ТМФ*, **38**:2 (1979), 163–178.

Архимедовы и замкнутые конусы

Гутман А. Е.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: gutman@math.nsc.ru

Всюду ниже X — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Выпуклое подмножество $K \subseteq X$ называется *конусом*, если $\alpha K \subseteq K$ для всех $\alpha \geqslant 0$ и $K \cap -K = \{0\}$. Как известно, в любом упорядоченном векторном пространстве $(X, \leqslant)$ множество $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом и, наоборот, любому конусу $K \subseteq X$ соответствует векторный порядок $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$, для которого $X^+ = K$.

Выпуклое множество $C \subseteq X$ *замкнуто в направлении* $y \in X$, если для всех $x \in X$ из $\inf\{\varepsilon > 0 : x + \varepsilon y \in C\} = 0$ следует $x \in C$. Множество, замкнутое в любом направлении, называется *архимедовым*. Архимедовость конуса $K \subseteq X$ равносильна архимедовости соответствующего упорядоченного векторного пространства $(X, \leqslant_K)$: если $x, y \in X$, $y \geqslant_K 0$ и $x \leqslant_K \frac{1}{n} y$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x \leqslant_K 0$.

Сведения о связи архимедовости и замкнутости конусов в хаусдорфовых локально выпуклых пространствах (ЛВП) до недавнего времени оставались весьма скудными и фактически исчерпывались следующими наблюдениями [1–3].

Теорема 1. (a) *Всякий замкнутый конус архимедов.*

(b) *Архимедов конус с непустой внутренностью замкнут.*

(c) *В конечномерном пространстве архимедовость конуса равносильна его замкнутости.*

(d) *Конус в конечномерном пространстве архимедов тогда и только тогда, когда он имеет компактную базу.* (*Базой конуса* K называется такое выпуклое множество B, что $0 \notin B \subseteq K$ и любой лежащий в K луч, выходящий из нуля, пересекает B ровно в одной точке.)

(e) *Пусть конус $K \subseteq X$, линейный функционал f на X и элемент $y \in K$ таковы, что $f \geqslant 0$ на K и $f(y) > 0$. Конус K архимедов тогда и только тогда, когда K замкнут в направлении y и множество $\{x \in K : f(x) = 1\}$ архимедово.*

(f) *Следующие свойства выпуклого множества C равносильны архимедовости: пересечение C с любой прямой замкнуто; пересечение C с любым подпространством размерности $\leqslant 2$ замкнуто; пересечение C с любым конечномерным подпространством замкнуто; дополнение C алгебраически*

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

открыто; C секвенциально замкнуто в какой-либо векторной топологии; C секвенциально замкнуто в сильнейшей локально выпуклой топологии.

В частности, оставался открытым вопрос о том, в каких ЛВП все архимедовы конусы замкнуты.

ЛВП называется (*секвенциально*) *тотальным*, если в нем (секвенциально) замкнуты все подпространства или, что то же самое, (секвенциально) непрерывны все линейные функционалы. ЛВП называется (*секвенциально*) *предтотальным*, если в нем (секвенциально) замкнуты все линейно независимые множества.

Теорема 2. (a) *Всякое тотальное ЛВП предтотально, а всякое предтотальное ЛВП секвенциально тотально, причем обратные импликации не имеют места.*

(b) *Секвенциальная тотальность ЛВП равносильна его секвенциальной предтотальности.*

Теорема 3. *Следующие свойства ЛВП равносильны:*

(1) *все архимедовы конусы секвенциально замкнуты;*
(2) *все архимедовы выпуклые множества секвенциально замкнуты;*
(3) *все подпространства секвенциально замкнуты;*
(4) *все линейно независимые множества секвенциально замкнуты;*
(5) *все линейные функционалы секвенциально непрерывны;*
(6) *пространство секвенциально тотально.*

Для пространств несчетной размерности удалось получить следующий универсальный ответ на вопрос о замкнутости архимедовых конусов [2].

Теорема 4. *В любом ЛВП бесконечной несчетной размерности существует незамкнутый архимедов конус.*

Примером такого конуса в пространстве $\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}}$ финитных вещественных функций, определенных на несчетном множестве I, служит коническая оболочка множества

$$\left\{x \in (\mathbb{R}^I_{\mathrm{fin}})^+ : x(j) = 0,\ \sum_{i\in I} x(i) \leqslant 1,\ \sum_{i\in I} \sqrt{x(i)} \geqslant 1\right\} + \chi_{\{j\}}, \quad j \in I.$$

Что же касается счетномерных ЛВП, то для них рассматриваемый вопрос сводится к изучению пространств вида $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ с носителем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и слабой топологией, наведенной плотным подпространством $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ посредством естественной двойственности $\langle x \,|\, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$ между $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Пространства Y, для которых в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ существует незамкнутый архимедов конус, для краткости были названы *тонкими*.

Для ЛВП такого вида к 2015 году было известно лишь следующее [2].

Теорема 5. *Пространство $Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не является тонким. Если плотное подпространство $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не является тонким, то $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$ предтотально.*

Промежуточный случай предтотальных, но не тотальных ЛВП, оказался самым сложным и остался без рассмотрения. Не было известно, являются ли тонкими пространства $\operatorname{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, дающие все имеющиеся на тот момент примеры предтотальных, но не тотальных счетномерных ЛВП. Более того, сохраняла силу гипотеза о том, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — единственное плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, не являющееся тонким [4].

Благодаря идеям, предложенным И. А. Емельяненковым, в 2021 году удалось выяснить, что пространства $\operatorname{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ всё же не являются тонкими, а в 2023 году было получено исчерпывающее описание всех тонких пространств [5, 6]. (Но это уже тема для отдельного сообщения.)

Список литературы

[1] Aliprantis C. D., Tourky R., *Cones and Duality*, Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.

[2] Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В., “Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах”, *Владикавк. матем. журн.*, **17**:3 (2015), 36–43 Math-Net.Ru crossref.

[3] Gutman A. E., “Archimedean and directionally closed cones”, *Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске — 2018». Тез. докладов*, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2018, 15.

[4] Сторожук К. В., “Тонкие гиперплоскости”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **15** (2018), 1553–1555 Math-Net.Ru crossref.

[5] Гутман А. Е., Емельяненков И. А., “Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты”, *Сиб. матем. журн.*, **64**:5 (2023), 945–970 Math-Net.Ru crossref; *Siberian Math. J.*, **64** (2023), 1117–1136 crossref.

[6] Гутман А. Е., Емельяненков И. А., “Квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и проективные параллелотопы”, *Сиб. матем. журн.*, **65**:2 (2024), 258–276 Math-Net.Ru crossref; *Siberian Math. J.*, **65** (2024), 265–278 crossref.

Краевые задачи в четверти плоскости для систем псевдогиперболического типа

Демиденко Г. В.*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: demidenk@math.nsc.ru

Рассматриваются краевые задачи для одного класса систем, не разрешенных относительно производной

$$
\begin{aligned}
&A_0(D_x)U_t + A_1(D_x)U = F(t,x), \qquad t>0, \quad x>0,\\
&B(D_x)U|_{x=0} = 0,\\
&U|_{t=0} = 0,
\end{aligned}
$$

где $A_0(D_x)$, $A_1(D_x)$, $B(D_x)$ — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Будем предполагать, что

1) $\det A_0(i\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

2) оператор $A_0(D_x)D_t + A_1(D_x)$ является строго псевдогиперболическим (см. [1]);

3) для краевой задачи выполнено равномерное условие Лопатинского.

В класс рассматриваемых задач входят, в частности, первая краевая задача для системы Власова (см. [2, 3]).

В работе установлены условия разрешимости в весовом соболевском пространстве $W^{1,m}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, получены оценки решений.

Список литературы

[1] Демиденко Г. В., Успенский С. В., *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.*, Новосибирск: Научная книга, 1998.

[2] Власов В. З., *Тонкостенные упругие стержни. 2-е изд., перераб. и доп.*, М.: Физматгиз, 1959.

[3] Герасимов С. И., Ерофеев В. И., *Задачи волновой динамики элементов конструкций*, Саров: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Applications of quasiconformal mappings to the Dirichlet problem for the p-Laplacian

Deneche Charaf Eddine

Tomsk State University, Russia

e-mail: carafdenes@gmail.com

We consider Dirichlet problem for the singular p-Laplacle operator $(1 < p < 2)$:

$$-\Delta_p u := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda |u|^{p-2} u \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{1}$$

in bounded non-Lipschitz domains $\Omega \in \mathbb{R}^2$. The Problem of the first eigenvalue $\lambda_p^1(\Omega)$ is one of the problems of modern geometric analysis and its application to the continuum mechanics. It is very well known that the dirichlet first eigenvalue is simple and isolted , in any bounded domain . The classical lower estimate (Rayleigh-Faber-Krahn) states that the disc minimizes the first eigenvalue of the p-laplace operator among all planar domains Ω^* of the same area [1]:

$$\lambda_p^1(\Omega) \geq \lambda_p^1(\Omega^*)$$

When $p = 2$, we have $\Delta_p = \Delta$, the Laplacian operator, whose first eigenvalue λ_p^1 is well-known for domains with simple geometry (that is, domains which admit some kind of symmetry); for more general domains it can be determined by several methods. However, if $p \neq 2$, the first eigenvalue is not explicitly known even for simple symmetric domains such as a square or a ball, and there are few available methods to deal directly with the eigenproblem (1) in these domains.

The main goal of this work is to obtain a lower estimate for $\lambda_p^1(\Omega)$ under suitable geometric constraints on Ω. The method of study is based on the geometric theory of composition operators generated by quasiconformal mappings and their generalizations [2].

References

[1] Ly I., "The first eigenvalue for the p-Laplacian operator", *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **6**:3 (2005), 91.

[2] Gol'dshtein V., Pchelintsev V., Ukhlov A., "Spectral estimates of the p-Laplace Neumann operator and Brennan's conjecture", *Boll Unione Mat Ital*, **11** (2018), 245–264.

Симметричные локально вогнутые функции и точные оценки распределений векторнозначных функций

Егор Добронравов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
e-mail: yegordobronravov@mail.ru

Минимальные локально вогнутые функции являются решением ряда оптимизационных задачь и точными значениями некоторых функций Беллмана. Мы построим теорию, позволяющую вычислять радиально симметричные минимальные локально вогнутые функции по их аналогам меньшей размерности. Как следствие данной теории мы рассмотрим получение точных оценок распределений векторно значных функций по аналагичным оценкам для скалярно значных функций.

Одним из основных примеров функций Беллмана — функция оптимизирующая интегральных функционал, на функциях с ограниченной BMO нормой.

$$\mathbb{B}_{f,\,\varepsilon}(x_1,\,x_2) = \sup\left\{\frac{1}{|I|}\int\limits_I f(\varphi(t))\,dt \,\middle|\, \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon,\, \varphi_I = (x_1,\,x_2)\right\},$$

где

$$\varphi_I = \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \varphi(t)\,dt,\, \frac{1}{|I|}\int\limits_I |\varphi(t)|^2\,dt\right).$$

Равенство данных функций минимальным локально вогнутым функциям было доказанно Столяровым и Затицким в работах [1] и [2] для скалярно значного и векторнозначного случая соответственно. Следствием теории вращения минимальных локально вогнутых функций будет безразмерность констант в интегральнх неравенствах на классе функций с ограниченной BMO нормой. В частности это верно для неравенства Джона-Ниренберга как в слабой так и в интегральной форме.

Список литературы

[1] Stolyarov D. M., Zatitskiy P. B., “Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals”, *Adv. Math.*, **291** (2016).

[2] Stolyarov D., Vasyunin V., Zatitskiy P., *On locally concave functions on simplest non-convex domains*, arXiv: 2204.12719.

Размерность мер с преобразованием Фурье в L_p

Никита Добронравов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
e-mail: dobronravov1999@mail.ru

Принцип неопределённости в математическом анализе — это семейство фактов о том, что функция и её преобразование Фурье не могут быть одновременно малы. Одной из версий это принципа является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^d$ — компакт, такой что $\mathcal{H}_\alpha(S) < \infty$. Пусть обобщённая функция ζ такая что $supp(\zeta) \subset S$ и $\hat{\zeta} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ для некоторого $p < \frac{2d}{\alpha}$. Тогда $\zeta = 0$.*

Здесь $\mathcal{H}_\alpha$ — это α-мера Хаусдорфа. Мы разобрали, что происходит в предельном случае $p = \frac{2d}{\alpha}$. Оказалось, что в этом случае принцип неопределённости неверен, а именно удалось доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Существуют компакт $S \subset \mathbb{R}^d$ и такая вероятностная мера μ, что $supp(\mu) \subset S$, $\hat{\mu} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{H}_{\frac{2d}{p}}(S) = 0$.*

Факторизация Стоилова на группе Гейзенберга

Дорохин Даниил

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: d.dorokhin@g.nsu.ru

Известно, что $W^{1,2}_{loc}$-гомеоморфизм $f : \Omega \to \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$, является K-квазиконформным тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \mu(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z) \quad \text{для п. в. } z \in \Omega, \tag{1}$$

где μ — *коэффициент Бельтрами*, является ограниченной измеримой функцией такой, что

$$\|\mu\|_\infty \leqslant \frac{K-1}{K+1} < 1.$$

Уравнение (1) называется *уравнением Бельтрами*. Следующая теорема характеризует все решения уравнения Бельтрами.

Теорема 1 (о факторизации Стоилова)**.** *Пусть гомеоморфизм $f(z) \in W^{1,2}_{loc}$ является решением уравнения Бельтрами* (1) *и $|\mu(z)| \leqslant k < 1$. Пусть $g(z) \in W^{1,2}_{loc}$ является решением уравнения Бельтрами* (1)*. Тогда существует голоморфная функция $\Phi : \Omega' \to \mathbb{C}$ такая, что*

$$g(z) = \Phi(f(z)), \quad z \in \Omega. \tag{2}$$

Таким образом, если Φ голоморфна в Ω', то композиция $\Phi \circ f$ является $W^{1,2}_{loc}$-решением уравнения (1) *в Ω.*

Теорема 1 имеет глубокие обобщения в 2-мерном анализе: любое открытое дискретное отображение h топологически эквивалентно некоторой аналитической функции, т. е. $h = \varphi \circ f$, где f — некоторый гомеоморфизм, φ — некоторая голоморфная функция.

Нам удалось доказать аналог теоремы о факторизации Стоилова на первой группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$:

Теорема 2. *Пусть $f : \Omega \to \Omega_1$ и $g : \Omega \to \Omega_2$ квазиконформные отображения на группе Гейзенберга с коэффициентами Бельтрами μ_f и μ_g. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$\mu_f = \mu_g$ почти всюду в Ω;*

2. *Найдётся конформное отображение $h : \Omega_2 \to \Omega_1$ так, что $f = h \circ g$.*

Наше доказательство основано на использовании формулы для коэффициента Бельтрами композиции квазиконформных отображений. С помощью этой теоремы нами была решена задача из теории случайных процессов: пусть даны два квазиконформных отображения с общим коэффициентом Бельтрами, будут ли тогда образы соответствующих броуновских движений эквивалентны, то есть будут ли эти процессы выражаться один через другой с помощью замены времени (сохранять свои траектории)? Нами доказана следующая теорема

Теорема 3. *Пусть X_t и Y_t — квазиброуновские движения на группе Гейзенберга с соответствующими квазиконформными отображениями f и g, коэффициенты Бельтрами которых равны почти всюду. Тогда, если отображение $g \circ f^{-1}$ является композиция растяжений, поворотов или сдвигов на группе Гейзенберга, то существует замена времени $a(t)$ такая, что почти наверное $X_t = Y_{a(t)}$.*

Семь типов односвязных фрактальных квадратов

Дроздов Дмитрий Алексеевич

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: d.drozdov1@g.nsu.ru

Определение 1. Пусть $D = \{d_1, \ldots, d_m\} \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}^2$, где $n \geq 2$, и $1 < m < n^2$. *Фрактальным квадратом* порядка n с *множеством единиц* D называют компактное множество $K \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее уравнению

$$K = \frac{K+D}{n} = \bigcup_{d_i \in D} S_i(K), \text{ где } S_i(x) = \frac{d_i + x}{n}.$$

Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий непрерывный иньективный образ окружности.

Самоподобной границей аттрактора K называется множество ∂K всех таких точек $x \in K$, что для некоторой композиции $S_{\mathbf{j}} = S_{j_1} \ldots S_{j_n}$ отображений системы $\mathcal{S}$ образ $S_{\mathbf{j}}(x)$ содержится в пересечении пары копий аттрактора K.

Определение 2. Пусть K — самоподобный дендрит с конечной самоподобной границей ∂K. Минимальный поддендрит $\hat{\gamma} \subset K$, содержащий ∂K, называется *главным деревом* дендрита K.

Пусть $A = \{-1, 0, 1\}^2$. Каждому вектору $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in A$ соответствует единственная грань единичного квадрата $P = [0,1]^2$, задаваемая равенством $P_\alpha = P \cap (P + \alpha)$. Такое соответствие между множеством A и множеством граней квадрата P является взаимно-однозначным. Мы будем говорить, что $\alpha \sqsubseteq \beta$ если и только если $P_\alpha \supseteq P_\beta$.

Если для некоторого $\alpha \in A \setminus \{0\}$ существуют векторы $d_i, d_i + \alpha \in D$, то

$$\frac{K+d_i}{n} \cap \frac{K+d_i+\alpha}{n} = \frac{K_\alpha + d_i}{n} \cap \frac{K_{-\alpha}+d_i+\alpha}{n} = \frac{K_\alpha \cap (K_{-\alpha}+\alpha) + d_i}{n}.$$

Определение 3. Гранью K_α фрактального квадрата K называется множество $K \cap P_\alpha$. Символом F_α обозначим пересечение $K_\alpha \cap (K_{-\alpha} + \alpha)$ пары противоположных граней фрактального квадрата.

Уравнения, задающие множества F_α, получаются из следующей теоремы.

Теорема 1. *Для $\alpha \in A \setminus \{0\}$ множество F_α удовлетворяет уравнению*

$$F_\alpha = \bigcup_{\beta \sqsupseteq \alpha} \frac{F_\beta + G_{\alpha\beta}}{n} \tag{1}$$

где $G_{\alpha\beta} = D_\alpha \cap (D_{-\alpha} + n\alpha - \beta)$.

Уравнение (1) позволяет оценить мощность множества F_α.

Теорема 2. *Пусть* $K = \dfrac{K+D}{n}$ *— фрактальный квадрат. Рассмотрим* $F_\alpha, \alpha \in A \setminus \{0\}$.

(i) Если $\#G_{\alpha\alpha} > 1$, *то множество* F_α *несчётно.*

(ii) Если $\#G_{\alpha\alpha} = 1$ *и существует* $\beta \sqsupset \alpha$ *такое, что* F_β *непусто и* $\#G_{\alpha\beta} \geq 1$, *то* F_α *бесконечное счётное.*

(iii) Множество F_α *конечно в следующих случаях:*

- ***(a)*** $\#G_{\alpha\alpha} = 1$ *и* $\#F_\beta \cdot \#G_{\alpha\beta} = 0$ *для каждого* $\beta \sqsupset \alpha$;
- ***(b)*** $\#G_{\alpha\alpha} = 0$ *и существует* $\beta \sqsupset \alpha$ *такое, что* $\#F_\beta \cdot \#G_{\alpha\beta} \geq 1$.

(iv) Множество F_α *одноточечно, если*

- ***(a)*** $\#G_{\alpha\alpha} = 1$ *и* $\#F_\beta \cdot \#G_{\alpha\beta} = 0$ *для каждого* $\beta \sqsupset \alpha$; *или*
- ***(b)*** $\#G_{\alpha\alpha} = 0$ *и существует* $\beta \sqsupset \alpha$ *такое, что* $\#F_\beta \cdot \#G_{\alpha\beta} = 1$.

Теорема 3. *Если фрактальный квадрат* K *является дендритом, то любые его две копии* $\frac{K+d_1}{n}$ *и* $\frac{K+d_2}{n}$ *(при* $d_1, d_2 \in D$*) пересекаются не более чем по одной точке.*

Теорема 4. *Пусть* K *— фрактальный квадрат, являющийся дендритом и не являющийся отрезком. Тогда* $\#\partial K \in \{3,\ 4,\ 6\}$.
Если $\#\partial K = 4$, *то* $\partial K = F_\alpha \cup F_{-\alpha} \cup F_\beta \cup F_{-\beta}$, *где пара* α, β *принимает одно из следующих значений:*

A. $\alpha = (1,0)$, $\beta = (0,1)$;

B. $\alpha = (1,1)$, $\beta = (1,-1)$;

C. $\alpha \in \{(1,1),\ (1,-1)\}, \beta \in \{(1,0),\ (0,1)\}$.

Если $\#\partial K = 3$ *или* $\#\partial K = 6$, *то*

D. $\partial K = F_{(1,0)} \cup F_{(-1,0)} \cup F_{(0,1)} \cup F_{(0,-1)} \cup F_\beta \cup F_{-\beta}$, *где* $\beta \in \{(1,1),\ (1,-1)\}$.

Если у самоподобного дендрита конечная самоподобная граница, то главные деревья таких дендритов имеют конечное число концов. Тогда мы можем перечислить все топологические типы главных деревьев. Это позволит разбить все фрактальные квадраты на конечное число классов согласно форме главного дерева.

Теорема 5. *Для фрактальных квадратов, являющихся дендритами, существует только 7 топологических типов главного дерева.*

Об изменении емкости обобщенного конденсатора при деформации его пластин

Дубинин Владимир*

Институт прикладной математики ДВО РАН, Россия
e-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Приводятся аналоги классической вариационной формулы Адамара для интеграла Дирихле в терминах емкостей обобщенных конденсаторов, а также вариационные формулы для квадратичных форм с коэффициентами, зависящими от внутренних радиусов, радиусов Робена, функций Грина и функций Робена заданных областей [1]. Кроме того, показывается, что изменение линии уровня потенциальной функции конденсатора с помощью вариации Адамара с малым параметром влечет за собой изменение интеграла Дирихле от этой функции порядка квадрата этого параметра [2].

Список литературы

[1] Дубинин В. Н., "Вариационные формулы для конформной емкости", *Матем. сб.*, **215**:1 (2024), 99–111 Math-Net.Ru crossref.

[2] Дубинин В. Н., "Модульная теорема Тейхмюллера и вариация интеграла Дирихле", *Сиб. матем. журн.*, **65**:2 (2024), 288–294 Math-Net.Ru crossref.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00056.

О решениях дифференциальных неравенств произвольного порядка с нуль-лагранжианами

Егоров А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: egorov-alexander-a@yandex.ru

Рассматриваются решения $v \in W^{l,k}_{\mathrm{loc}}(V, \mathbb{R}^m)$, определенные на областях $V \subset \mathbb{R}^n$, дифферециального неравенства

$$F(v^{(l)}(x)) \leq K(x)G(v^{(l)}(x)) + H(x) \quad \text{для п. в. } x \in V, \tag{1}$$

где $G : \mathbb{R}^{mn^l}_s \to \mathbb{R}$ — k-однородный нуль-лагранжиан, функция $F : \mathbb{R}^{mn^l}_s \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $F(\zeta) \geq C_F|\zeta|^k$, $C_F > 0$, $K : V \to \mathbb{R}$ и $H : V \to \mathbb{R}$ — некоторые измеримые функции. Здесь $k, m, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq \min\{m, n\}$ $l \geq 1$, $v^{(l)}(x)$ обозначает дифференциал порядка l отображения $v : V \to \mathbb{R}^m$ в точке $x \in V$; $\mathbb{R}^{mn^l}_s$ — пространство симметричных l-линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Напомним, что непрерывная функция $F : \mathbb{R}^{mn^l}_s \to \mathbb{R}$ является *квазивыпуклой*, если $\int\limits_{(0;1)^n} F(\zeta + \varphi^{(l)}(x))\, dx \geq F(\zeta)$ для всех $\varphi \in C^\infty_0((0;1)^n; \mathbb{R}^m)$, $\zeta \in \mathbb{R}^{mn^l}_s$, а функция $G \colon \mathbb{R}^{mn^l}_s \to \mathbb{R}$ — *нуль-лагранжиан*, если G и $-G$ квазивыпуклы. В докладе обсуждаются следующие свойства рассматриваемых решений: $W^{l,p}_{\mathrm{loc}}$-регулярность с показателем $p > k$, гёльдерова регулярность производных порядка $l-1$, замкнутость классов решений относительно слабой сходимости в $W^{l,k}_{\mathrm{loc}}(V, \mathbb{R}^m)$, а также представлены некоторые применения указанных свойств. Представляемые результаты являются обобщением на случай произвольного $l \geq 1$ ряда свойств решений, полученных в [1–3] для случая $l = 1$.

Список литературы

[1] Егоров А. А., “Квазивыпуклые функции и нуль-лагранжианы в проблемах устойчивости классов отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:4 (2008), 796–812 Math-Net.Ru crossref.

[2] Егоров А. А., “О слабом пределе последовательности отображений, удовлетворяющих дифференциальному неравенству с квазивыпуклой функцией и нуль-лагранжианом”, *Мат. заметки ЯГУ*, **21**:2 (2013), 41–47.

[3] Egorov A. A., “Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: higher integrability and removability of singularities. I, II”, *Владикавк. матем. журн.*, **16**:3–4 (2014), 3:22–37, 4:41–48 Math-Net.Ru.

Способ описания локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты

Емельяненков И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: i.emelianenkov@yandex.ru

Выпуклое подмножество K векторного пространства X над $\mathbb{R}$ называется *конусом*, если $\lambda K \subseteq K$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и $K \cap (-K) = \{0\}$. Каждый конус $K \subset X$ взаимно однозначно соответствует упорядочиванию $(X, \leqslant)$, где $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in K$.

Конус называется *архимедовым*, если в соответствующем ему порядке выполнена аксиома Архимеда. В топологическом векторном пространстве каждый замкнутый конус является архимедовым. Известно, что класс замкнутых конусов и класс архимедовых конусов совпадают в каждом конечномерном хаусдорфовом векторном пространстве $\mathbb{R}^n$, а также, в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ вещественных последовательностей с конечным носителем, изоморфном $\mathbb{R}^\infty$, прямой сумме счётного числа копий $\mathbb{R}$. Однако, это не так в общем случае — простейшим примером незамкнутого архимедова конуса служит множество $\ell^p_+ := \{x \in \ell^p : (\forall n \in \mathbb{N})(x_n \geqslant 0)\}$ всех неотрицательных последовательностей в любом из классических пространств ℓ^p, $p \geqslant 1$.

В работе [1] показано, что незамкнутый архимедов конус существует в любом локально выпуклом пространстве несчётной размерности, а также, поставлен

Вопрос. В каких счётномерных топологических пространствах все архимедовы конусы замкнуты?

Как известно, любое счётномерное топологическое векторное пространство локально выпукло и изоморфно пространству с носителем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$. Более того, замкнутые выпуклые множества совпадают во всех локально выпуклых топологиях с одними и теми же непрерывными линейными функционалами. Таким образом, для описания искомого класса пространств достаточно ограничиться рассмотрением пространств вида $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$, с носителем $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}$ и слабой топологией, наведённой пространством $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}})^\#$ посредством стандартной двойственности $\langle x|f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)f(n)$. При этом в $\mathbb{R}^\infty$ все линейные функционалы непрерывны, а значит, в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ все архимедовы конусы замкнуты.

Назовём конус $K \subset X$ *строго замкнутым*, если для любой точки $x \in X \setminus K$ найдётся такой непрерывный линейный функционал $f \in X'$, что $f(x) < 0$ и $f(y) > 0$ для всех $y \in K \setminus \{0\}$. Известно, что в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ класс замкнутых конусов и класс строго замкнутых конусов совпадают.

Таким образом, поставленный ранее вопрос можно переформулировать в следующем эквивалентном виде:

Вопрос. Для каких пространств $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ все строго замкнутые в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ конусы являются замкнутыми в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|Y$?

Для ответа на этот вопрос мы привлекаем понятие квазивнутренности множества, введённое и изученное в [2]. *Квазивнутренностью* множества $C \subset X$ называется множество $\mathrm{qi}\, C := \{x \in C : \mathrm{cl}\, \mathbb{R}^{+}(C - x) = X\}$.

Будем говорить, что топологическое векторное пространство X *квазилокально ограниченно*, если для любого выпуклого множества C и любой точки $x \in \mathrm{qi}\, C$ найдётся ограниченное выпуклое подмножество $B \subset C$ такое, что $x \in \mathrm{qi}\, B$. Будем говорить, что подпространство $Y \subseteq X$ *квази-плотно* относительно подпространства $Z \subseteq X$, если для любого замкнутого ограниченного выпуклого множества $B \subset X$ с условием $\mathrm{qi}(Z \cap B) \neq \varnothing$ пересечение $Y \cap B$ не пусто.

Нами показано, что пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ квазилокально ограниченно, а также, доказана

Теорема 1 ([3]). *Пусть Y и Z — плотные подпространства в X', и при этом Z квазилокально ограниченно, тогда всякий строго замкнутый в $X|Z$ конус замкнут в $X|Y$ если и только если Y квазиплотно относительно Z.*

Более явного описания пространств удовлетворяющих условию теоремы 1 удаётся достичь за счёт описания класса подмножеств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, непустота пересечения с каждым из которых эквивалентна квазиплотности подпространства относительно $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Такие множества оказываются согласованными со структурой $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ как проективного предела $\mathbb{R}^{n}$. В частности верна

Теорема 2 ([4]). *Подпространство $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ квазиплотно относительно $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ тогда и только тогда, когда оно непусто пересекается с $z + \Pi^{r}_{\varkappa}$ при любых $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\varkappa = (\varkappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^{n}$ и $r \in (0, \infty)^{\mathbb{N}}$, где*

$$\Pi^{r}_{\varkappa} := \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n) - \langle \varkappa_{n-1} | y \rangle| < r(n) \ \textit{для всех}\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

С помощью полученного описания построено множество примеров счётномерных локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы являются замкнутыми, в частности, таковыми являются пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|\mathrm{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{fin}}|\mathrm{lin}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Список литературы

[1] Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В., “Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах”, *Владикавк. матем. журн.*, **17**:3 (2015), 36–43 Math-Net.Ru.

[2] Borwein J. M., Lewis A. S., “Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory”, *Mathematical Programming*, **57** (1992), 15–48 crossref.

[3] Гутман А. Е., Емельяненков И. А., “Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты”, *Сиб. матем. журн.*, **64**:5 (2023), 945–970 Math-Net.Ru crossref.

[4] Гутман А. Е., Емельяненков И. А., “Квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и проективные параллелотопы”, *Сиб. матем. журн.*, **65**:2 (2024), 258–276 Math-Net.Ru crossref.

О классе Лосика — Черна слоений коразмерности 2

Ефременко Юрий Даниилович

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

e-mail: i.efremenko@g.nsu.ru

Модифицированные классы Лосика — Черна были определены М. В. Лосиком для слоений коразмерности один [1]. Эти характеристические классы принимают значения в когомологиях пространства струй реперов второго порядка на пространстве листов слоения. В работах [2] и [3] модифицированные классы Лосика — Черна и Годбийона — Вея — Лосика были вычислены для слоения Риба с произвольной функцией, определяющей асимптотику некомпактных слоев в окрестности компактного слоя. В частности, показана возможная нетривиальность модифицированных классов при тривиальности классических классов Годбийона — Вея.

В настоящей работе обобщается класс Лосика — Черна на слоения коразмерности два. Получены явные формулы, определяющие модифицированный класс Лосика — Черна для этого случая. Найдено условие тривиальности класса в зависимости от свойств образующих группы голономии компактного слоя. Рассмотрены явно построенные слоения коразмерности два, представляющие собой одномерные обмотки на полнотории. Показано, что в зависимости от параметров обмотки возможны как тривиальность, так и нетривиальность характеристических классов Лосика — Черна. Результаты получены совместно с Я. В. Базайкным и А. С. Галаевым.

Список литературы

[1] Лосик М. В., "О некотором обобщении многообразия и его характеристических классах", *Функц. анализ и его прил.*, **24**:1 (1990), 29–37 Math-Net.Ru crossref.

[2] Bazaikin Y. V., Galaev A. S., "Losik classes for codimension-one foliations", *J. Inst. Math. Jussieu*, **21**:4 (2021), 1391–1419 crossref.

[3] Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Gumenyuk P., "Non-diffeomorphic Reeb foliations and modified Godbillon-Vey class", *Math. Z.*, **300** (2022), 1335–1349 crossref.

О поведении геодезических некоторой левоинвариантной субримановой метрики на группе $G_{2,1} \times G_{2,1}$

Зубарева И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск
e-mail: igribanova@mail.ru

Никоноров Ю. Г.

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ
e-mail: nikonorov2006@mail.ru

Рассмотрим прямой декартов квадрат связной двумерной некоммутативной группы Ли:

$$G_{2,1} \times G_{2,1} = \left\{ g = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} e^{-x_1} & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-x_3} & x_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ее алгебра Ли $2\mathfrak{g}_{2,1}$ имеет базис

$$E_1 = e_{12}, \quad E_2 = -e_{11}, \quad E_3 = e_{34}, \quad E_4 = -e_{33},$$

где через e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, 4$, обозначена матрица четвертого порядка, у которой в i-ой строке и j-ом столбце стоит 1, а все остальные элементы равны нулю.

Пусть $e_1 = E_1 + E_2 + E_3$, $e_2 = E_2 + E_4$. Обозначим через d субриманову метрику на группе Ли $G_{2,1} \times G_{2,1}$, задаваемую подпространством $\mathfrak{p} = \operatorname{span}(e_1, e_2)$, порождающим $2\mathfrak{g}_{2,1}$, и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$ с ортонормированным базисом e_1, e_2.

В [1] доказано, что каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(G_{2,1} \times G_{2,1}, d)$ с $g(0) = e$ есть решение системы ОДУ

$$x_1' = \psi_1 + \psi_2, \quad x_2' = \psi_1 e^{-x_1}, \quad x_3' = \psi_2, \quad x_4' = \psi_1 e^{-x_3}, \tag{1}$$

где абсолютно непрерывные функции $\psi_i(t)$, $i = 1, \ldots, 4$, удовлетворяют системе ОДУ

$$\psi_1' = -\psi_2\psi_3, \quad \psi_2' = \psi_1\psi_3, \quad \psi_3' = \psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_3, \quad \psi_4' = -\psi_1\psi_4 - \psi_2\psi_4 \tag{2}$$

с (произвольными) начальными данными $\psi_i(0) = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, 4$, причем $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$.

Теорема 1. *Система ОДУ (2) не является вполне интегрируемой с мероморфными первыми интегралами.*

Рассмотрим следующие функции:

$$v_1 = \exp(-x_1), \quad v_2 = x_2, \quad v_3 = \exp(-x_3), \quad v_4 = x_4.$$

Систему (1) можно переписать в виде

$$v_1' = -v_1(\psi_1 + \psi_2), \quad v_2' = v_1\psi_1, \quad v_3' = -v_3\psi_2, \quad v_4' = v_3\psi_1. \tag{3}$$

Теорема 2. *Система ОДУ (3)+(2) не интегрируется по Лиувиллю в классе мероморфных функций.*

В силу (2), $\psi_1(t) = \cos\theta(t)$, $\psi_2(t) = \sin\theta(t)$ для некоторой функции $\theta(t)$. Положим

$$y := x_1 - x_3, \quad z := x_3, \quad \alpha := \varphi_3 + \varphi_4, \quad \beta := \varphi_4.$$

Системы (1)+(2) можно свести к системе ОДУ

$$y' = \cos\theta, \quad z' = \sin\theta(t), \quad \theta' = \alpha\exp(-z) - \beta\exp(-y-z), \tag{4}$$

где $y(0) = z(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0 \in [0, 2\pi)$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\theta_0 = \theta(0) \in (0, \pi)$ таковы, что*

$$\sin\theta_0 > -\gamma := \beta - \alpha + \alpha\ln(\alpha/\beta) \in [0, 1).$$

Тогда для решения системы (4) выполнено неравенство

$$e^{z(t)} \cdot \sin\theta(t) > \kappa := \sin\theta_0 + \gamma > 0 \quad \textit{для всех } t > 0.$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

1) *$\theta(t) \in (0, \pi)$ для всех $t \in (0, \infty)$;*

2) *$z'(t) = \sin\theta(t) > 0$ для всех $t \in (0, \infty)$, следовательно, $z(t)$ строго возрастает на положительной полуоси;*

3) *$z(t) \geq \ln(1 + \kappa t)$ для всех $t \in (0, \infty)$, в частности, $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$;*

4) *$\cos\theta(t) - \cos\theta_0 > -\alpha\big(1 - e^{-z(t)}\big)$ при $t \in (0, \infty)$;*

5) *функция $t \mapsto \ln\Big(\tan\big(\theta(t)/2\big)\Big) - \big(\alpha/\kappa\big)t$ строго убывает на $(0, \infty)$.*

Теорема 4. *Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma := \alpha - \beta - \alpha\ln(\alpha/\beta) \in (-1, 0]$ и решение системы уравнений (4) таково, что*

$$\theta_0 = \theta(0) \in (0, \pi), \quad \cos\theta_0 - \alpha > -1/\sqrt{2} \ \textit{ и } \sin\theta_0 > -\gamma \in [0, 1).$$

Тогда $y(t) + z(t) \to \infty$ и $z(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, причем функция $z(t)$ строго возрастает на положительной полуоси. Как следствие, $\theta'(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Система ОДУ (4) задает натуральное уравнение (уравнение Френе) плоской кривой $\gamma(t) := (y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2$ с длиной дуги t и функцией кривизны $k(t) = \exp(-z(t))\big(\alpha - \beta \exp(-y(t)\big)$. При этом поворот $R(t_1, t_2)$ кривой $\gamma(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ равен

$$R(t_1, t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t)dt = \theta(t_2) - \theta(t_1).$$

Отметим, что на каждом интервале $I \subset \mathbb{R}$, где функция $\theta''(t) = k'(t)$ не меняет знак (где кривизна либо строго возрастает, либо строго убывает), кривая $\gamma(t)$ не имеет самопересечений [2]. Поэтому наличие бесконечного числа таких самопересечений влечет наличие бесконечного числа интервалов с меняющей знак (осциллирующей) производной $\theta''(t)$.

Список литературы

[1] Берестовский В. Н., Зубарева И. А., “(А)нормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на группе Ли $G_{2,1} \times G_{2,1}$”, *Вестник ОмГУ*, **28**:5 (2023), 26–38.

[2] Топоногов В. А., *Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей*, М.: Физматкнига, 2012.

[3] Huang K., Shi S., Li W., “Kovalevskaya exponents, weak Painleve property and integrability for quasi-homogeneous differential systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **25**:3 (2020), 295–312.

[4] Yoshida H., “Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. I. Kowalevski's exponents”, *Celestial Mech.*, **31**:4 (1983), 363–379.

[5] Yoshida H., “Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. II. Condition for algebraic integrability”, *Celestial Mech.*, **31**:4 (1983), 381–399.

Теоремы устойчивости на группах Карно

Исангулова Дарья Васильевна
Новосибирский государственый университет, Новосибирск
e-mail: d.isangulova@g.nsu.ru

Задача устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях состоит в том, чтобы показать, что отображение с K-ограниченным искажением близко к некоторому мёбиусовому преобразования при K, близком к 1. Аналогичным образом формулируется задача устойчивости изометрий: всякая L-квазиизометрия близка к некоторой изометрии при L, близком к 1. Расстояние между отображениями может рассматриваться в равномерной норме, в норме пространств Соболева и др.

Юрий Григорьевич Решетняк доказал количественную теорему устойчивости конформных отображений и изометрий в норме Соболева на областях Джона [2].

На группах Карно с субримановой метрикой введены пространства Соболева и изучаются вопросы квазиконформного анализа (см. [4]). Поэтому естественно возникают задачи устойчивости конформных отображений и изометрий. Используя подход Решетняка, были доказаны теоремы устойчивости конформных отображений и изометрий на группах Гейзенберга [1,3]. В докладе будут рассмотрены вопросы устойчивости на группах Гейзенберга и других группах Карно.

Список литературы

[1] Исангулова Д. В., “Устойчивость отображений с ограниченным искажением в норме Соболева на областях Джона групп Гейзенберга”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:3 (2009), 526–546 Math-Net.Ru crossref.

[2] Решетняк Ю. Г., *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе*, Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

[3] Isangulova D. V., Vodopyanov S. K., “Sharp geometric rigidity of isometries on Heisenberg groups”, *Math. Ann.*, **355** (2013), 1301–1329 crossref.

[4] Vodopyanov S. K., “Foundations of the Theory of Mappings with Bounded Distortion on Carnot Groups”, *Contemporary Math.*, **424** (2007), 303–344.

Оценки решений нелинейных дифференциальных уравнений с бесконечным распределенным запаздыванием

Искаков Тимур Кайратович*

Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: istima92@mail.ru

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds + \int\limits_{-\infty}^{t} F(t, s, y(t), y(s))\,ds,$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными, T-периодическими элементами, $B(t, s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными, T-периодическими по первой переменной элементами, т.е.

$$A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t, s) \equiv B(t+T, s),$$

при этом

$$\int\limits_{0}^{\infty} \|B(t, s)\|\,ds < \infty, \quad t > 0,$$

нелинейное слагаемое $F(t, s, u_1, u_2)$ — непрерывная вектор-функция, липшицева по последним двум переменным, и удовлетворяет оценке

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{t} F(t, s, u, w(s))ds \right\| \leq q\|u\|^{1+\omega}, \quad t > 0,$$

где $q \geq 0$, $\omega > 0$, $w(s)$ — ограниченная и непрерывная функция.

Получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, установлены оценки на нормы решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценки на множество притяжения.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

При получении результатов использовался функционал Ляпунова – Красовского, основанный на функционалах из [1, 2]:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s,\eta)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta.$$

Список литературы

[1] Демиденко Г. В., Матвеева И. И., "Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом", *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, **5**:3 (2005), 20–28 Math-Net.Ru.

[2] Yskak T. K., "Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay", *Functional Differential Equations*, **25**:1-2 (2018), 97–108.

О мере и размерности главных поддуг в иррациональных дендритах

Махлиё Кадирова

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: m.kadirova@g.nsu.ru

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^2$, а $K = S_1(K) \cup \dots \cup S_m(K)$ — её аттрактор. Если K связен и не содержит замкнутых жордановых кривых, то K — *самоподобный дендрит*.

В работе [1] строилось семейство самоподобных дендритов с бесконечной самоподобной границей, заданных системой $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_0\}$ подобий, переводящих треугольник Δ в треугольники Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3, а у каждой из вершин треугольника Δ_0 один из адресов был непереодическим. Никакая система поддуг в таких дендритах K не является аттрактором конечной граф-ориентированной системы. Мы показываем, что поддуги $\gamma_{OA_1}, \gamma_{OA_2}, \gamma_{OA_3}$ в таких дендритах задаются бесконечной системой сжимающих подобий, используя граф ориентированную систему:

Теорема 1. *Пусть Δ — равносторонний треугольник в $\mathbb{R}^2$ с основанием $[0,1]$, $\Sigma = \{\sigma_{ik}, i = 1,2,3, k \in \mathbb{N}\}$ – семейство сжимающих подобий в $\mathbb{R}^2$ и отображение $p : \{1,2,3\} \times \mathbb{N} \to \{1,2,3\}\}$, такие, что для любого $i = 1,2,3$*
(a) $\sigma_{ik}(\Delta) \subset \Delta$;
(b) $\hat{\gamma}_i = \overline{\bigcup \sigma_{ik}([0,1])}$— жордановы дуги в Δ с концами в 0 и 1;
(c) для любых $j \neq k$, $\sigma_{ij}(\Delta) \cap \sigma_{ik}(\Delta) = \emptyset$;
(d) одномерная мера $L_1(\hat{\gamma}_i \setminus \bigcup \sigma_{ik}([0,1])) = 0$;
(e) $p(i, \mathbb{N}) = \{1,2,3\}$.
Тогда: 1) Существуют единственные жордановы дуги $\tilde{\gamma}_i \subset \Delta$, такие что $\tilde{\gamma}_i = \overline{\bigcup \sigma_{i_k}(\tilde{\gamma}_{p(i,k)})}$;
2) Дуги $\tilde{\gamma}_i$ имеют одну и ту же хаусдорфову размерность $s \geq 1$, которая задается системой уравнений $q_i^s = \sum r_{ik}^s q_{p(i,k)}^s$, где $r_{ik} = Lip(\sigma_{ik})$;
3) меры $q_i = H^s(\tilde{\gamma}_i)$, конечны и положительны.

Список литературы

[1] Abrosimov N. V., Chanchieva M. V., Tetenov A. V., “On the set of subarcs in some non-postrcritically finite dendrites”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 975–982 Math-Net.Ru crossref.

[2] Edgar G. A., *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Spring-Verlag, 1990.

[3] Tetenov A. V, *Finiteness properties for self-similar sets*, 2020, arXiv: 2003.04202.

On asymptotically sharp Bernstein- and Markov-type inequalities

Kalmykov Sergei
Shanghai Jiao Tong University, China
e-mail: kalmykovsergei@sjtu.edu.cn

In this talk, we consider asymptotically sharp extensions of the classical Bernstein and Markov inequalities for rational functions on Jordan arcs and curves (see e. g. [1]).

To be more precise, let Γ be a smooth Jordan arc and $z_0 \in \Gamma$ a point that is different from the endpoints of Γ. We are interested in the smallest constant B_{z_0} for which

$$|P_n'(z_0)| \le B_{z_0}(1 + o(1))n\|P_n\|_\Gamma$$

for all polynomials P_n of degree $n = 1, 2, \ldots$, where $o(1)$ tends to 0 (uniformly in P_n) as $n \to \infty$. It turns out that

$$B_{z_0} = \max(g_+'(z_0), g_-'(z_0)),$$

where g is the Green's function of $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ with pole at infinity, and $g_\pm(z_0)$ are the normal derivatives of g at z_0 with respect to the two normals to Γ at z_0. The asymptotically best Markov factor $M = M_\Gamma$, i.e. the smallest M for which

$$\|P_n'\|_\Gamma \le M(1 + o(1))n^2\|P_n\|_\Gamma$$

is true, can be also expressed in terms of the normal derivative of the associated Green's function (see [2, 3]). Similar results are established in [4] for rational functions provided the poles lie in a closed set disjoint from Γ.

The proofs essentially use potential theory, Borwein-Erdélyi inequality for rational functions normalized on the unit circle, Gonchar-Grigorjan type estimate of the norm of holomorphic part of meromorphic functions, fast decreasing polynomials, and conformal mappings.

This presentation is based on joint work with Béla Nagy and Vilmos Totik.

References

[1] Kalmykov S., Nagy B., Totik V., "Bernstein- and Markov-type inequalities", *Surveys in Approximation Theory*, **9**:1 (2021), 1–17 crossref.

[2] Kalmykov S. I., Nagy B., "Polynomial and rational inequalities on analytic Jordan arcs and domains", *J. Math. Anal. Appl.*, **430** (2015), 874–894 crossref.

[3] Totik V., "Asymptotic Markov inequality on Jordan arcs", *Sb. Math.*, **208**:3 (2017), 413–432 crossref.

[4] Kalmykov S., Nagy B., Totik V., "Bernstein- and Markov-type inequalities for rational functions", *Acta Mathematica*, **219**:1 (2017), 21–63 crossref.

Образы измеримых множеств в сублоренцевой геометрии

Карманова М. Б.

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск

e-mail: maryka84@gmail.com, maryka@math.nsc.ru

Сублоренцевы структуры являются неголономным обобщением геометрии Минковского (см., напр., [1] и список цитируемых источников). Исследования как самих структур, так и их приложений в физике [2] начались относительно недавно. Статья [3] является одной из первых работ, в которых исследовались подобные структуры.

Доклад посвящен выводу формулы площади образов измеримых множеств групп Карно при липшицевых во внутреннем смысле отображениях, принимающих значения на группе Карно с сублоренцевой структурой. В отличие от классического случая отображений евклидовых пространств, о продолжениях на открытые множества липшицевых отображений подмножеств субримановых структур, принимающих значения на другой неголономной структуре, известно только в некоторых частных случаях. Кроме того, в силу специфики сублоренцевых шаров, которые не являются ограниченными множествами, определение аналога меры Хаусдорфа требует новый подход. Новые идеи, возникшие для решения данной задачи, будут также изложены в ходе доклада.

Напомним, что *группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е., представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1}, \quad j < M, \quad [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Если $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\Bigr)(v)$, то *субриманово расстояние* между этими точками равно

$$d_2(v,w) = \max\Biggl\{\Bigl(\sum_{j:\,\deg X_j=1} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}, \Bigl(\sum_{j:\,\deg X_j=2} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2\cdot 2}}, \dots, \Bigl(\sum_{j:\,\deg X_j=M} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2\cdot M}}\Biggr\}.$$

С. К. Водопьянов доказал следующий результат [4].

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, и $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда* *оно hc-дифференцируемо почти всюду. Кроме того, матрица гомоморфизма $\widehat{D}\varphi$ (построенная в базисах $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$) состоит из «диагональных» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоков $\widehat{D}_k$, $k = 1, \ldots, M$, а остальные элементы нулевые.*

Предположим, что $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ таковы, что $\widetilde{M} \geq M$, и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$. Выберем целые числа $\dim \widetilde{V}_k^- \in \overline{[0, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k]}$, $k = 1, \ldots, \widetilde{M}$. Пусть $w = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{N}} w_i \widetilde{X}_i\Big)(v)$, $v, w \in \widetilde{\mathbb{G}}$. Положим *сублоренцев аналог квадрата расстояния* $\mathfrak{d}_2^2(v, w)$ равным

$$\max_{k=1,\ldots,\widetilde{M}} \Bigg\{ \Big| \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^- +1}^{\widetilde{n}_k} w_j^2 - \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+1}^{\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^-} w_j^2 \Big|^{1/k} \times$$
$$\times \operatorname{sgn}\Big(\sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^- +1}^{\widetilde{n}_k} w_j^2 - \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+1}^{\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^-} w_j^2 \Big) \Bigg\}.$$

Множество $\{w \in \widetilde{\mathbb{G}} : \mathfrak{d}_2^2(v, w) < r^2\}$ называется *шаром относительно* $\mathfrak{d}_2^2$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(v, r)$.

Пусть $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$, $D \subset \mathbb{G}$, является hc-дифференцируемым всюду. В каждом блоке $\widehat{D}_k$ его субриманова дифференциала часть, состоящую из первых $\dim V_k^-$ строк, обозначим, как $\widehat{D}_k^-$, а оставшуюся — символом $\widehat{D}_k^+$, $k = 1, \ldots, M$. Далее будем предполагать, что в каждом $\widehat{D}_k^+$ найдутся $\dim V_k$ строк, составленная из которых (квадратная) матрица $\widehat{L}_k^+$ такова, что длины столбцов $\widehat{D}_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}$ не превосходят $\frac{1}{\dim V_k} - c$ для некоторого $c > 0$ всюду, где $c > 0$ не зависит от $y \in D$, $k = 1, \ldots, M$.

Сублоренцев аналог меры Хаусдорфа на поверхностях-образах построим в следующем виде.

Определение 1. Пусть $A \subset \widetilde{\mathbb{G}}$ — подмножество образа измеримого множества $D \subset \mathbb{G}$. Определим функцию множества $\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}$ следующим образом:

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, r_i)\big) \supset A,\ x_i \in A,$$
$$r_i < \min\{\varepsilon, r_{x_i,\varepsilon}\}, \delta_i = \varepsilon \text{ при } \varphi^{-1}(x_i) \cap D_0 \neq \varnothing \text{ и } \delta_i = 1 \text{ при } x_i \notin \varphi(D_0) \Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A вида $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, r_i)\big) \supset A$.

Здесь символ $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, r_i)$ обозначает образ содержащей точку x_i компоненты связности множества $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y_i)$ при параметризации вида $\widehat{D}\varphi(y_i)\langle w\rangle \mapsto \varphi(w)$, где $\varphi(y_i) = x_i$. Здесь и далее мы считаем, что φ биективно на свой образ.

Основной результат — следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, а $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение, которое непрерывно hc-дифференцируемо всюду в топологии области определения и биективно на свой образ. Тогда $\mathcal{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}$ является мерой на σ-алгебре борелевских множеств, и справедлива формула площади*

$$\int\limits_{A\cap D} \prod_{k=1}^{M} \sqrt{\det\big(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)^{*}\widehat{D}_k^{+}\varphi(y) - \widehat{D}_k^{-}\varphi(y)^{*}\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)\big)}\, d\mathcal{H}^{\nu}(y) = \mathcal{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}\big(\varphi(A)\big).$$

Утверждение справедливо для случая, когда множество вырождения субриманова дифференциала непусто. Результаты опубликованы в [5].

Список литературы

[1] Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А., *Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского*, Волгоград: ВолГУ, 2011.

[2] Крым В. Р., Петров Н. Н., “Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей”, *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1*, **1** (2007), 62–70.

[3] Берестовский В. Н., Гичев В. М., “Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах”, *Алгебра и анализ*, **11**:4 (1999), 1–34 Math-Net.Ru.

[4] Vodopyanov S. K., “Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings”, *The interaction of analysis and geometry*, Contemporary Mathematics, **424**, Providence: AMS, 2007, 247–301 crossref.

[5] Карманова М. Б., “Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой”, *Сиб. мат. журн.*, 2024 (в печати).

Семейство конформных отображений полуплоскости на двуугольник с разрезом, выходящим из вершины двуугольника под нулевым углом к границе

Махер Кармуши

Томский государственный университет, Томск
e-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com

В работах [1, 2] исследуется поведения управляющей функции λ в уравнении Левнера, генерирующей разрез, выходящий под нулевым углом к границе, в случае, когда смежный угол равен π.

В данной работе строится семейство конформных отображения f_t верхней полуплоскости на семейство областей $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$, представляющих собой двуугольник $\Delta_0 = \Delta(0)$ с разрезом вдоль дуги окружности переменной длины, выходящим из одной из вершин двуугольника Δ_0 с углом раствора $\alpha\pi$. Для семейства отображений f_t получено дифференциальное уравнение Левнера. Исследуется поведение управляющей функции λ в случае, когда разрез образует нулевой угол с границей Δ_0 в зависимости от α, а также в зависимости от кривизны разреза. Здесь $\lambda = \lambda(t)$ — прообраз подвижного конца разреза при отображении f_t.

Список литературы

[1] Lau K.-S., Wu H.-H., “On tangential slit solution of the Loewner equation”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **41**:2 (2016), 681–691 crossref.

[2] Wu H.-H., Jiang Y.-P., Dong X.-H., “Perturbation of the tangential slit by conformal maps”, *J. Math. Anal. Appl.*, **464**:2 (2018), 1107–1118 crossref.

Об отображениях с ограниченным искажением треугольников

Клячин В.А.

Волгоградский государственный университет, Россия
e-mail: klchnv@mail.ru

Пусть в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задан произвольный треугольник T с вершинами в точках p_0, p_1, p_2. Пусть $a \geq c \geq b > 0$ обозначают его длины сторон. Положим

$$\mu(T) = \frac{b+c}{a}. \tag{1}$$

Ясно, что $\mu(T) \geq 1$ причем равенство имеется тогда и только тогда, когда треугольник T вырожден, т. е. все его вершины лежат на одной прямой. А поскольку $b \leq c \leq a$, то всегда $\mu(T) \leq 2$ с равенством только для равносторонних треугольников.

Рассмотрим отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \leq 2$, определенное в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Отображение f называется билипшицевым с постоянными $l \leq L$, если для любых точек $x, y \in D$ выполнено

$$l|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

Через $r_D(x)$ будем обозначать расстояние от точки $x \in D$ до границы области, т. е.

$$r_D(x) = \inf_{y \in \partial D} |x-y|.$$

Обозначим через $f(T)$ треугольник с вершинами $f(p_i)$, $i = 0, 1, 2$. Несложно показать, что для билипшицевого отображения f и произвольного треугольника T имеют место неравенства

$$\frac{l}{L}\mu(T) \leq \mu(f(T)) \leq \frac{L}{l}\mu(T). \tag{2}$$

Отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{loc}$ называется отображением с ограниченным исажением с коэффициентом $K \geq 1$, если для почти всех $x \in D$ выполнено

$$\|d_x f\|^n \leq K J_f(x). \tag{3}$$

Здесь

$$\|d_x f\| = \max_{|h|=1} |d_x f(h)|,$$

$d_x f$ — дифференциал, $J_f(x)$ — якобиан отображения f в точке $x \in D$. Определим также величину

$$K_f(x) = \frac{\max\limits_{|h|=1} |d_x f(h)|}{\min\limits_{|h|=1} |d_x f(h)|}. \tag{4}$$

Наименьшую постоянную в (3) обозначим через $K(f)$. Хорошо известно [1,2] что

$$K(f) \leq \sup_{x \in D} (K_f(x))^{n-1}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таково, что найдется постоянная $1 < \lambda \leq \sqrt{2}$, такая, что для всякого равнобедренного, прямоугольного треугольника T выполнено*

$$\mu(f(T)) \geq \lambda. \tag{5}$$

Тогда в каждой точке дифференцируемости отображения f выполнено

$$K_f(x) \leq \frac{1 + \lambda\sqrt{2 - \lambda^2}}{\lambda^2 - 1}.$$

Следствие 1. Пусть отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{loc}(D)$ для которого найдется постоянная $1 < \lambda \leq \sqrt{2}$, такая, что для всякого равнобедренного, прямоугольного треугольника T выполнено (5). Тогда f есть отображение с ограниченным искажением.

Теорема 2. *Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое отображение, что найдутся два числа $1 < \mu_0 \leq 2$, $\lambda > 1/\mu_0$ для которых выполнено условие: для всякого треугольника T с вершинами в области D с $\mu(T) \geq \mu_0$ выполнено*

$$\mu(f(T)) \geq \lambda\mu(T).$$

Тогда в каждой точке x дифференцируемости отображения f имеет место неравенство

$$K_f(x) \leq \frac{2}{\lambda\mu_0 - 1}. \tag{6}$$

Следствие 2. Пусть отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{loc}(D)$ такое, что найдутся два числа $1 < \mu_0 \leq 2$, $\lambda > 1/\mu_0$ для которых выполнено условие: для всякого треугольника T с вершинами в области D с $\mu(T) \geq \mu_0$ выполнено

$$\mu(f(T)) \geq \lambda\mu(T).$$

Тогда f есть отображение с ограниченным искажением.

Теорема 3. *Пусть* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n > 1$, *— некоторое отображение, для которого найдутся числа* $1 < \mu_0 \leq 2$, $\lambda > 1/\mu_0$, $\Lambda > 0$ *такие, что*

a. *для треугольника* T *с вершинами в* D *и* $\mu(T) \geq \mu_0$ *выполнено*

$$\mu(f(T)) \geq \lambda \mu(T), \tag{7}$$

b. *для всякого треугольника* T *с вершинами в* D *выполнено*

$$S(f(T)) \leq \Lambda S(T). \tag{8}$$

Тогда для всякой пары точек $x, y \in D, x \neq y$, $|x - y| < r_D(x)$ *имеет место неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \tag{9}$$

с постоянной

$$L = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\lambda^2 \mu_0^2 (\lambda \mu_0 + 1)}{\lambda \mu_0 - 1} \right)^{3/4} \sqrt{\Lambda}.$$

Теорема 4. *Пусть* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *липшицево отображение, такое, что для всех* $x, y \in D$ *выполнено*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

с постоянной $L > 0$. *Если найдутся такие постоянные* $\lambda > 0$, $1 < \mu_0 \leq 2$, *что для всякого треугольника* T *с вершинами в* D *и* $\mu(T) \geq \mu_0$ *справедливо неравенство*

$$S(f(T)) \geq \lambda S(T),$$

то для всякой пары точек $x, y \in D, x \neq y, |x - y| < r_D(x)$ *будет выполнено*

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{\lambda \sqrt{\mu_0^2 - 1}}{L \mu_0} |x - y|.$$

Список литературы

[1] Миклюков В. М., *Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения*, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2007.

[2] Решетняк Ю. Г., *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, 1982.

Конформное отображение кольца на ограниченный двусвязный многоугольник

Колесников Иван Александрович

Томский государственный университет, Томск

e-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Пусть $\Delta(t)$, $t \in [0,T]$ — семейство двусвязных многоугольников, не содержащих бесконечно удаленную точку, с вершинами в точках $A_k(t) = A_k^0 + t\widetilde{A}_k$ и углами при этих вершинах $\alpha_k\pi$, $k = 1,\ldots,N$ (углы $\alpha_k\pi$ не зависят от t). При фиксированном t, $t \in [0,T]$, отображение f_t конформно переводит прямоугольник $P(t) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < p(t), 0 < \Im z < 1\}$ с отождествленными вертикальными сторонами на двусвязный многоугольник $\Delta(t)$. Такой прямоугольник $P(t)$ и отображение f_t существуют и единственны, отображение f_t можно записать в виде [1]

$$f(z,t) = c(t)\int_{a_1}^{z} e^{-i\frac{\pi}{p(t)}z}\prod_{k=1}^{N}\vartheta_1^{\alpha_k-1}\left(\frac{z-a_k(t)}{2p(t)}\right)dz + A_1,$$

где $a_k = f_t^{-1}(A_k)$, $k = 1,\ldots,N$. Пусть f_t нормировано условием $f_t(a) = A$, причем a и A фиксированны, $A \in \partial\Delta(t)$.

Теорема 1. *Семейство отображений f удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\dot{f}_t(z) = f_t'(z)\big(H(z,t) + A(t)z^2 + B(t)z - H(a,t)\big)$$

(точка над функцией означает производную по t, штрих — по z), где

$$H(z,t) = \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k - 1)\left(\frac{4}{3\pi^2}\dot{p}^2\big(\zeta^3(u) - \wp'(u) - 3\zeta(u)\wp(u)\big)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi}\dot{p}\left(\dot{a}_k + \frac{2i\eta_2}{\pi}\dot{p}u\right)\big(\zeta^2(u) - \wp(u)\big) + \left(\dot{a}_k + \frac{2i\eta_2}{\pi}\dot{p}u\right)^2\zeta(u)\right),$$

здесь $u = z - a_k$,

$$A = \frac{4\eta_2^2}{\pi^2}\frac{\dot{p}^2}{p}\left(i\pi - \eta_1\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k-1)a_k\right),\ B = i\eta_2\sum_{k=1}^{N}(\alpha_k-1)\left(\dot{a}_k - \frac{2i\eta_2}{\pi}\dot{p}a_k\right)^2.$$

Список литературы

[1] Dyutin A., Nasyrov S., “One parameter families of conformal mappings of bounded doubly connected polygonal domains”, *Lobachevskii J. Math.*, **45**:1 (2024), 390–411 crossref.

Метод Перрона на некомпактных римановых многообразиях и его применения

Кондрашов, Александр Николаевич

Волгоградский государственный университет, Россия
e-mail: alexander.kondrashov@volsu.ru

В [1] был предложен подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях (M, g), основанный на рассмотрении классов асимптотической эквивалентности «на бесконечности» функций из $C(M)$. Будем обозначать их $\mathrm{CM}(M)$. Нами изучены некоторые метрические и алгебраические свойства $\mathrm{CM}(M)$. Выяснено, что $\mathrm{CM}(M)$ образует линейное метрическое пространство, причём это пространство полное. Кроме того, на этом пространстве существует отношение частичного порядка "$\preccurlyeq$", позволяющее получать теоремы типа Перрона (см. [2, стр. 104–106]). Приведем формулировку одной такой теоремы.

Пусть на M задан дифференциальный оператор второго порядка вида:

$$L = \Delta + \langle B(x), \nabla \rangle + c(x). \tag{1}$$

Здесь ∇, Δ — операторы взятия градиента и Лапласа — Бельтрами в метрике g, $B(x)$ — касательное векторное поле к M, $c(x) \leq 0$ — функция; далее полагаем $\dim M = N$.

Для L стандартным образом определяются понятия L-гармонических (L-субгармонических, L-супергармонических) функций в любой области $\Omega \subset M$. Основной целью нашего исследования явилось перенесение классического метода Перрона [2, стр. 104–106]) на случай обобщённой задачи Дирихле, когда под граничным значением функции $f(x) \in C(M)$ понимается класс $\xi = [f] \in CM(M)$, содержащий $f(x)$.

Для $\xi \in \mathrm{CM}(M)$ по аналогии с классическим случаем [2, стр. 104–106]) вводятся верхний и нижний классы $\mathcal{U}_\xi$, $\mathcal{S}_\xi$, определяются функции $\underline{\mathrm{H}}_\xi(x) = \sup\limits_{f \in \mathcal{S}_\xi} f(x)$, $\overline{\mathrm{H}}_\xi(x) = \inf\limits_{f \in \mathcal{U}_\xi} f(x)$.

Теорема 1. *Пусть $L \in C^{(0,\alpha)}$ – линейный оператор вида (1). Предположим имеются классы $\xi, \eta \in \mathrm{CM}(M)$, $\eta \preccurlyeq \xi$, и для них $\mathcal{U}_\xi \neq \emptyset$, $\mathcal{S}_\eta \neq \emptyset$. Тогда существуют и являются L-гармоническими функции $\underline{\mathrm{H}}_\xi(x)$, $\overline{\mathrm{H}}_\eta(x)$, причём $[\underline{\mathrm{H}}_\xi(x)] \preccurlyeq \xi$, $[\overline{\mathrm{H}}_\eta(x)] \succcurlyeq \eta$.*

Локальная версия этого результата использована нами для установления геометрических признаков существования некоторых специальных L-

гармонических функций, позволяющих судить о L-параболичности или L-гиперболичности типа конца многообразия (см., например, [3]).

Зафиксируем конец $\mathcal{X} \subset M$. Пусть $x_0 \in M$ фиксированная точка и $\rho(x) = d(x, x_0)$ — функция расстояния в метрике g. Будем обозначать $\Sigma_\tau = \mathcal{X} \cap \{x | \rho(x) = \tau\}$, $\tau \geq \tau_0$. Рассмотрим функции

$$\lambda_+(\tau) = \sup_{\Sigma_\tau}(\langle B(x), \nabla\rho(x)\rangle - H(x)), \quad \lambda_-(\tau) = \inf_{\Sigma_\tau}(\langle B(x), \nabla\rho(x)\rangle - H(x)),$$

$$\mu_+(\tau) = \sup_{\Sigma_\tau} c(x), \quad \mu_-(\tau) = \inf_{\Sigma_\tau} c(x).$$

Здесь $H(x) = -\Delta\rho(x)$ средняя кривизна поверхности Σ_τ, проходящей через x. Чтобы обеспечить конечность п. в. функций $\lambda_\pm(\tau)$ накладываем дополнительное условие (Y).

(Y) *Множество* $P_\infty = \{x \mid \limsup_{y\to x} |H(x)| = +\infty\}$ *имеет линейную меру* 0.

Теорема 2. *Пусть* $c(x) \equiv 0$, *выполняется условие* (Y), $\rho(x) \in W^{2,p}_{loc}(\mathcal{X})$, $1 \leq p \leq N$. *Предположим, существуют функции* $y_2(t), y_1(t) \in C^{(2)}[\tau_0, +\infty)$, *удовлетворяющие условиям*

$$0 < y_1(t) \leq y_2(t), \quad y_2'(t) > 0, \quad y_1'(t) > 0,$$
$$y_2''(t) + \lambda_+(t)y_2'(t) \leq 0, \quad y_1''(t) + \lambda_-(t)y_1'(t) \geq 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} y_2(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} y_1(t) = +\infty.$$

Тогда на $\mathcal{X}$ *существует решение уравнения* $Lu(x) = 0$ *для которого выполнены условия*

$$u|_{\partial\mathcal{X}} = 1, \quad \lim_{\mathcal{X}} u = +\infty.$$

Имеется аналогичная теорема для случая L-гиперболичности. В случае $L = \Delta$ из этой теоремы вытекает параболичность типа конца $\mathcal{X}$ в обычном понимании.

Предположим, теперь, что $D_1, D_2 \subset \mathcal{M}$ пара областей и $\varphi : D_1 \to D_2$ — C^1-диффеоморфизм между ними. Под действием φ (по правилам замены переменных в дифференциальных выражениях) оператор (1) переходит в оператор

$$L_\varphi = \Delta_\varphi + \langle(\varphi_* B)(y), \nabla_\varphi\rangle_\varphi + (\varphi_* c)(y),$$

заданный в D_2. Будем говорить, что оператор L является φ-инвариантным, если в $D_2 = \varphi(D_1)$ выполнено $L_\varphi = L$.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ пара эквивалентных концов и существует $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ изометрический гомеоморфизм нормированный условием $\varphi(\infty) = \infty$. Всякое отображение φ такого вида будем для простоты называть поворотом. Пусть имеется набор поворотов $\Phi = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_P\}$ конца $\mathcal{X}$. Если оператор L инвариантен относительно всякого $\varphi_i \in \Phi$, то говорим, что он Φ-инвариантен.

Пусть имеется набор областей $\{D_1, D_2, \ldots, D_s\}$. Будем говорить, что данный набор является $\mathcal{X}$-сцепленным, если множество $\mathcal{Y} = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_s$ образует конец эквивалентный $\mathcal{X}$.

Предположим на конце $\mathcal{X}$ имеются L-супергармоническая u и L-субгармоническая v функции, два набора поворотов $\Phi = \{\varphi_0 = id, \cdots, \varphi_P\}$, $\Psi = \{\psi_0 = id, \cdots, \psi_Q\}$, при этом выполняются следующие условия.

1. Оператор L является Φ-инвариантным и Ψ-инвариантным.
2. Найдется неограниченная область $\mathcal{D} \subset \{x \mid x \in \mathcal{X},\ v(x) > 0\} \cap \mathcal{X}$ и неограниченная область $\mathcal{G} \subset \{x \mid x \in \mathcal{X},\ u(x) > 0\} \cap \mathcal{X}$, т.ч. выполнено $\lim\limits_{\mathcal{D}} v(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{\mathcal{G}} u(x) = +\infty$.
3. Каждый из наборов областей $\{\mathcal{D} = \varphi_0(\mathcal{D}), \varphi_1(\mathcal{D}), \ldots, \varphi_P(\mathcal{D})\}$, $\{\mathcal{G} = \psi_0(\mathcal{G}), \psi_1(\mathcal{G}), \ldots, \psi_Q(\mathcal{G})\}$ $\mathcal{X}$-сцеплен.
4. Для любых $\varphi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$, таких что $\varphi(\mathcal{D}) \cap \psi(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ выполнено $(\varphi^* v)(x) \leq (\psi^* u)(x) \quad \forall x \in \varphi(\mathcal{D}) \cap \psi(\mathcal{G})$.
5. Функция $U(x) = \max\{u(x), (\psi_1^* u)(x), \ldots, (\psi_Q^* u)(x)\}$ является L-супергармонической.

Пусть $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ конец с кусочно-гладким краем $\partial\mathcal{X}'$, эквивалентный $\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}_1 = \mathcal{D} \cup \varphi_1(\mathcal{D}) \cup \ldots \cup \varphi_p(\mathcal{D})$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{G} \cup \psi_1(\mathcal{G}) \cup \ldots \cup \psi_Q(\mathcal{G})$.

Теорема 3. *Пусть $c(x) \equiv 0$ на $\mathcal{X}$. При выполнении условий 1–5 конец $\mathcal{X}'$ имеет L-параболический тип, то есть на $\mathcal{X}'$ существует L-гармоническая функция $f(x) > 0$, такая что $f(x)|_{\partial\mathcal{X}'} = 1$, $\lim\limits_{\mathcal{X}'} f(x) = +\infty$.*

Имеется аналогичная теорема о L-гиперболичности.

Список литературы

[1] Мазепа Е. А., “Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях”, *Сиб. матем. журн.*, **43**:3 (2002), 591–599 crossref.

[2] Гилбарг Д., Трудингер Н., *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, М.: Наука, 1989.

[3] Миклюков В. М., “Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:4 (1996), 111–158 crossref.

Способы задания медленных интегральных многообразий

Кононенко Л. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: larak@math.nsc.ru

Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon\dot{z} = Z(z,t,\varepsilon), \qquad z \in \mathbb{R}^{m+n}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $0 \le \varepsilon \ll 1$, вектор-функция Z достаточно гладкая по всем переменным. Предполагается, что предельная система уравнений $Z(z,t,0) = 0$ $(\varepsilon = 0)$ имеет m-параметрическое семейство решений

$$z = \psi(v,t), \qquad v \in \mathbb{R}^m, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где ψ — достаточно гладкая вектор-функция.

Под интегральным многообразием системы (1) понимаем некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}$, состоящее из интегральных кривых этой системы. Изучаются гладкие интегральные поверхности

$$z = P(v,t,\varepsilon), \tag{3}$$

которые располагаются в ε-окрестности поверхности $z = \psi(v,t)$, $v \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$, движение по которым описывается дифференциальными уравнениями с правыми частями, гладким образом зависящими от ε

$$\dot{v} = Q(v,t,\varepsilon). \tag{4}$$

Приводятся способы построения интегрального многообразия в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε, основанные на классических способах задания функций: явного, параметрического, неявного [1]. На вопрос о существовании такого медленного интегрального многообразия отвечают теоремы из [2–4].

Список литературы

[1] Решетняк Ю. Г., *Курс математического анализа*, Ч. 1 Кн. 2, 1999; Ч. 2 Кн. 1, 2000, Новосибирск: ИМ СО РАН.

[2] Гольдштейн В. М., Соболев В. А., *Качественный анализ сингулярно возмущенных систем*, Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988.

[3] Воропаева Н. В., Соболев В. А., *Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем*, М.: Физматлит, 2009.

[4] Кононенко Л. И., “Параметризованные интегральные многообразия сингулярно возмущенных систем в критическом случае для задач химической кинетики”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 1640–1653 Math-Net.Ru crossref.

On the Asymptotic and Continuous Orlicz Cohomology of Locally Compact Groups

Yaroslav Kopylov*

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk

e-mail: yakop@math.nsc.ru; yarkopylov@gmail.com

Asymptotic L^p-cohomology was introduced by Pansu in [1]; it is constructed from a metric measure space with bounded geometry. Pansu proved that asymptotic L^p-cohomology is a quasi-isometry invariant. In 2020, Bourdon and Remy showed in [2] that if G is a locally compact second countable topological group equipped with a left-invariant proper metric then its asymptotic and continuous L_p-cohomologies are isomorphic. We consider the Orlicz space analogs of these cohomologies and establish the Orlicz versions of the above-mentioned results.

This is a joint work with Emiliano Sequeira (Montevideo).

References

[1] Pansu P., *Cohomologie L^p: invariance sous quasiisométries*, 1995 (preprint), https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pierre.pansu/qi04.pdf.

[2] Bourdon M., Rémy B., "Quasi-isometric invariance of continuous group L^p-cohomology, and first applications to vanishings", *Ann. H. Lebesgue*, **3** (2020), 1291–1326 crossref.

*The work of Ya. Kopylov was carried out in the framework of the State Task to the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF–2022–0006).

Integrable vector fields and chain rule property

Korobkov M. V.
Fudan University, Shanghai, China;
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
e-mail: korob@math.nsc.ru

This is a joint work with N. Gusev from the Moscow Institute of Physics and Technology. Let $p \geq 1$ and let $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ be a compactly supported vector field with $\mathbf{v} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ and $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (in the sense of distributions). It was conjectured by Nelson that it $p = 2$ then the operator $\mathsf{A}(\rho) := \mathbf{v} \cdot \nabla\rho$ with the domain $D(\mathsf{A}) = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ is essentially skew-adjoint on $L^2(\mathbb{R}^d)$. A counterexample to this conjecture for $d \geq 3$ was constructed by Aizenmann. Using recent results of Alberti, Bianchini, Crippa and Panov we show that this conjecture is false even for $d = 2$.

Nevertheless, we prove that for $d = 2$ the condition $p \geq 2$ is necessary and sufficient for the following *chain rule property of* $\mathbf{v}$: for any $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ and any $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ the equality $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ implies that $\operatorname{div}(\beta(\rho)\mathbf{v}) = 0$.

Furthermore, for $d = 2$ we prove that $\mathbf{v}$ has the renormalization property if and only if the stream function (Hamiltonian) of $\mathbf{v}$ has the weak Sard property, and that both of the properties are equivalent to uniqueness of bounded weak solutions to the Cauchy problem for the corresponding continuity equation. These results generalize the criterea established for $d = 2$ and $p = \infty$ by Alberti, Bianchini and Crippa.

О линейно выпуклых областях Гартогса в $\mathbb{C}^2$, имеющих фрактальную структуру

В. П. Кривоколеско

Сибирский Федеральный Университет, г. Красноярск
e-mail: krivokolesko@gmail.com

Область $G \subset \mathbb{C}^n$ называется линейно выпуклой ([1, §8])*, если для каждой точки ζ её границы ∂G существует комплексно $(n-1)$-мерная аналитическая плоскость*

$$a_1(z_1 - \zeta_1) + \ldots + a_n(z_n - \zeta_n) = 0,$$

проходящая через ζ и не пересекающая G.

Некоторые авторы используют термин «слабая линейная выпуклость»: например, см. [4].

Множество $G \subset \mathbb{C}^n$ называется множеством Гартогса (Хартогса) относительно переменной z_n с плоскостью симметрии $z_n = 0$, если вместе с точкой $(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) \in G$ этому множеству принадлежат и все точки $(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n e^{i\varphi})$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Замечание 1. *Приведенное определение дано аналогично определению области Гартогса* ([3, §1])*. Отметим, что в книге В. С. Владимирова* ([2, стр. 63]) *наряду с термином «области Гартогса» применяется термин «полукруговые области» как равнозначный термин.*

Следуя [3], рассмотрим проекцию $\mathbb{C}^n$ на диаграмму Гартогса по правилу

$$\pi : (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) \to (z_1, \ldots, z_{n-1}, |z_n|).$$

Проекция π позволяет вместе с множествами Гартогса в $G \subset \mathbb{C}^n$ рассматривать и $\pi(G)$ — изображения G в $\mathbb{R}^{(2n-1)}$.

Предложение 1. *Проекция π переводит плоскость*

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + c = 0 \tag{1}$$

при $a_1 \neq 0$ в круговую коническую поверхность на диаграмме Гартогса

$$|a_2|^2 |z_2|^2 = |a_1|^2 \left(x_1 + Re\frac{c}{a_1} \right)^2 + |a_1|^2 \left(y_1 + Im\frac{c}{a_1} \right)^2 \tag{2}$$

с вершиной в точке $(-Re\frac{c}{a_1}, -Im\frac{c}{a_1}, 0)$ на плоскости $|z_2| = 0$, где $z_1 = x_1 + iy_1$, причем каждая точка этой конической поверхности является проекцией некоторой точки плоскости (1).

При $a_1 = 0$ и $a_2 \neq 0$ проекция π переводит плоскость (1) *в «вырожденную» коническую поверхность*

$$|a_2||z_2| = |c|. \tag{3}$$

В нашем случае на диаграмме Гартогса, то есть в системе координат $(0, x_1, y_1, |z_2|)$, где, обычно, тройка координатных осей $0x_1, 0y_1, 0|z_2|$ правая, уравнение (2) задает круговую коническую поверхность с вершиной в точке $(-Re\frac{c}{a_1}, -Im\frac{c}{a_1}, 0)$ на плоскости $|z_2| = 0$ и «раствором» (тангенсом угла при вершине конической поверхности) равным

$$k = \frac{|a_2|}{|a_1|}. \tag{4}$$

Отметим, что $c \neq 0$ и $a_1 \to 0$ «раствор» конуса $k \to \infty$ и первые координаты его вершины $-Re\frac{c}{a_1} \to \infty, -Im\frac{c}{a_1} \to \infty$.

При $c = 0$ из (2) следует, что проекция (1) на диаграмму Гартогса задается круговой конической поверхностью с вершиной в начале координат и раствором $k = \frac{|a_2|}{|a_1|}$ при $a_1 \neq 0$.

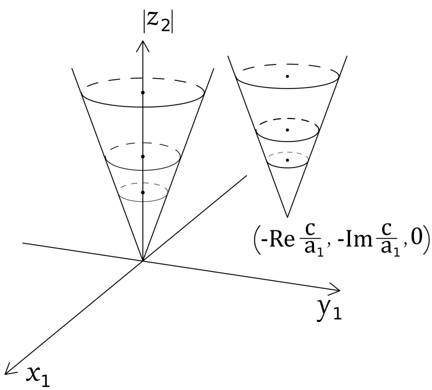

Рис. 1: Проекция плоскости $a_1 z_1 + a_2 z_2 + c = 0$ на диаграмму Гартогса, где $a_1 \cdot a_2 \neq 0$.

При $a_2 = 0$ «раствор» (4) конической поверхности (2) равен нулю и на диаграмме Гартогса коническая поверхность вырождается в луч с вершиной в точке $(-Re\frac{c}{a_1}, -Im\frac{c}{a_1}, 0)$ параллельный оси $0|z_2|$.

Очевидно, что при $a_2 = 0$ каждая точка луча $(-Re\frac{c}{a_1}, -Im\frac{c}{a_1}, |z_2|)$ удовлетворяет уравнению (2).

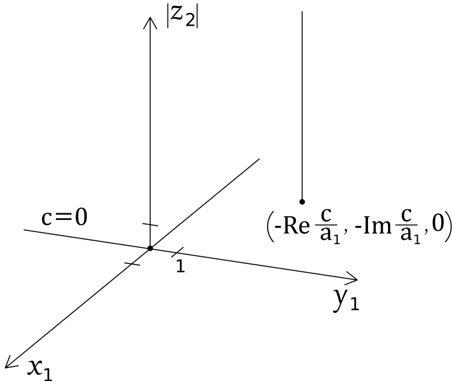

Рис. 2: Проекция плоскости $a_1 z_1 + c = 0\,(a_2 = 0)$ на диаграмму Гартогса, где $a_1 \neq 0$.

При $a_1 = 0$ из (1) следует, что проекция (1) на диаграмму Гартогса удовлетворяет уравнению

$$|z_2| = \frac{|c|}{|a_2|}, \tag{5}$$

которое задает коническую поверхность бесконечного «раствора» с вершиной в бесконечно удаленной точке.

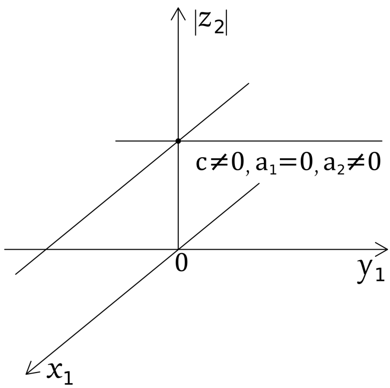

Рис. 3: Проекция плоскости $a_2 z_2 + c = 0\,(a_1 = 0)$ на диаграмму Гартогса, где $a_2 \neq 0$.

Предложение 2. *Пусть для области Гартогса $G \subset \mathbb{C}^2$ относительно переменной z_2 аналитическая плоскость $a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2(z_2 - \zeta_2) = 0$ проходит через точку $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial G$ — границы G и не пересекает G.*

Тогда для $0 \leqslant \phi < 2\pi$ аналитические плоскости

$$a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2 e^{-i\phi}(z_2 - \zeta_2 e^{i\phi}) = 0 \qquad (6)$$

проходят через точки $(\zeta_1, \zeta_2 e^{i\phi}) \in \partial G$ и не пересекают G.

Замечание 2. *Семейство аналитических плоскостей (6) является множеством Гартогса относительно переменной z_2 с плоскостью симметрии $z_2 = 0$, и его проекция на диаграмму Гартогса совпадает с проекцией произвольной аналитической плоскости из этого семейства на эту диаграмму, так как это одна и та же коническая поверхность.*

Следствие 2. *Пусть $G \subset \mathbb{C}^2$ — область Гартогса относительно переменной z_2 с плоскостью симметрии $z_2 = 0$, и аналитическая плоскость $a_1 z_1 + a_2 z_2 + c = 0$ проходит через точку $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial G$ — границы G и не пересекает G.*

Тогда на диаграмме Гартогса $\pi(a_1 z_1 + a_2 z_2 + c = 0) \cap \pi(G) \subset \pi(\partial G)$, то есть круговая коническая поверхность (2) не пересекает $G_{|z_2|}$ — проекцию G на диаграмму Гартогса, если $G \subset \mathbb{C}^2$ — область, и эта круговая коническая поверхность содержит точку $(\zeta_1, |\zeta_2|) \in \pi(\partial G)$ и может содержать только проекции точек ∂G границы области на диаграмму Гартогса. И наборот, если на диаграмме Гартогса круговая коническая (2) касается области $G_{|z_2|}$, то для $0 \leqslant \phi < 2\pi$ семейство аналитических плоскостей $a_1 z_1 + a_2 e^{-i\phi} z_2 + c = 0$ касается области $G \subset \mathbb{C}^2$.

Геометрический критерий линейной выпуклости области Гартогса (множества) $G \subset \mathbb{C}^2$. *Пусть на диаграмме Гартогса $(0, z_1, |z_2|)$ относительно переменной z_2 задана область (множество) D. Если для каждой точки $(\zeta_1, |\zeta_2|) \in \partial D$ – границы D найдется круговая коническая поверхность с вершиной на плоскости $|z_2| = 0$, проходящая через эту точку и не пересекающая область D (внутренних точек множество D), то D является проекцией линейно выпуклой области Гартогса $G = \pi^{-1}(D) \subset \mathbb{C}^2$.*

Сформулированный критерий позволяет строить примеры ограниченных линейно выпуклых областей Гартогса в $\mathbb{C}^2$, проекция которых на диаграмму Гартогса имеет фрактальный характер.

Замечание 3. *Например, любая цилиндрическая поверхность на диаграмме Гартогса с образущей на плоскости $|z_2| = 0$ и направляющая которой параллельна оси $0|z_2|$ является проекцией неограниченной линейно выпуклой области в $\mathbb{C}^2$.*

Также любая цилиндрическая поверхность на диаграмме Гартогса с образущей на плоскости $|z_2| = 0$, и направляющая которой параллельна оси $0|z_2|$ ограниченная двумя плоскостями $|z_2| = d_1$ и $|z_2| = d_2$, является проекцией ограниченной линейно выпуклой области в $\mathbb{C}^2$.

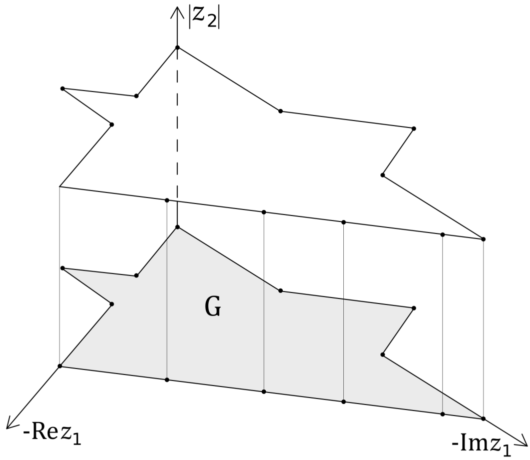

Рис. 4: Цилиндрическая поверхность на диаграмме Гартогса.

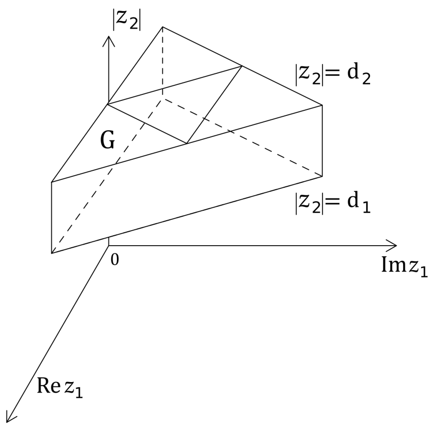

Рис. 5: Ограниченная цилиндрическая поверхность на диаграмме Гартогса.

Замечание 4. *Аналогичные рассмотрения при $n > 2$* ***не аналогичны*** *приведенным выше результатам, так как уже при $n = 3$ проекция аналитической плоскости*

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + c = 0$$

на диаграмму Гартогса $(0, z_1, z_2, |z_3|)$ не является конической поверхностью.

Построение линейно выпуклых областей Гартогса в $\mathbb{C}^2$, имеющих фрактальную структуру.

Замечание 3 подсказывает идеи построения построения линейно выпуклых областей Гартогса в $\mathbb{C}^2$ имеющих фрактальный характер.

Образующую цилиндрической поверхности на рисунке 4 будем строить по принципу построения кривой Коха. После конечного числа шагов, то получим неограниченную линейно выпуклую область Гартогса в $\mathbb{C}^2$ и даже в $\mathbb{C}^n$, имеющую фрактальную структуру.

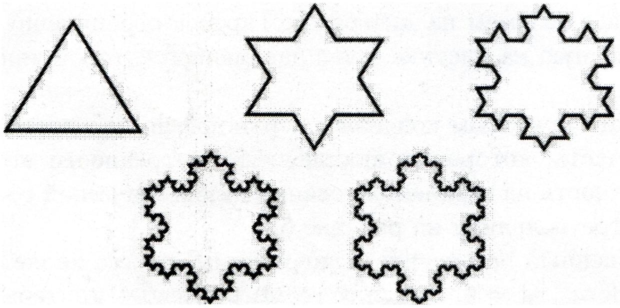

Рис. 6: Снежинки Коха при $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Образующую ограниченной цилиндрической поверхности на рисунке 5 будем строить по принципу построения ковра Серпинского, и после конечного числа шагов получим ограниченную линейно выпуклую область Гартогса в $\mathbb{C}^2$, имеющую фрактальную структуру.

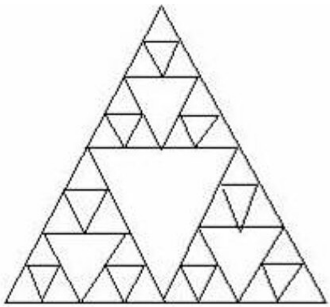

Рис. 7: Ковер Серпинского при $n = 4$.

Изложим идею построения чуть более сложной ограниченной линейно выпуклой области Гартогса в $\mathbb{C}^2$.

На первом шаге возьмем на диаграмме Гартоса ограниченную цилиндрическую область, изображенную на рисунке 5, направляющей которой является равносторонний треугольник.

На втором шаге круговым конусом с вершиной на плоскости $|z_2| = 0$ «вырежем» в этой области часть, которая принадлежит внутренности этого конуса, причем граничная окружность на верхнем основании цилиндрической области принадлежит «центральному» треугольнику на рисунке 5.

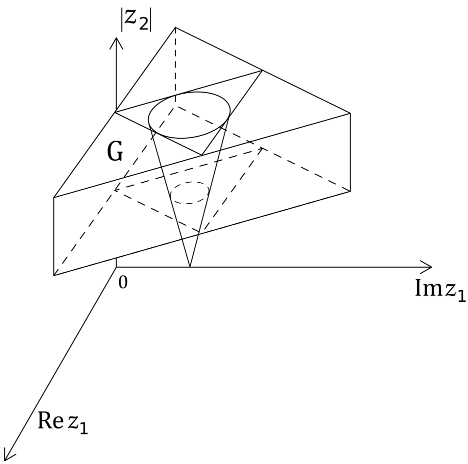

Рис. 8: Второй шаг.

Конус, избраженный на рисунке 8 диграммы Гартогса, является круговым с вершиной на плоскости $|z_2| = 0$, и в силу геометрического критерия линейной выпуклости, область на диаграмме Гартогаса является проекцией ограниченной линейно выпуклой области в $\mathbb{C}^2$.

Третий и последующие шаги полностью аналогичны шагам, которые делаем при построении ковра Серпинского. На рисунке 9 приведен третий шаг.

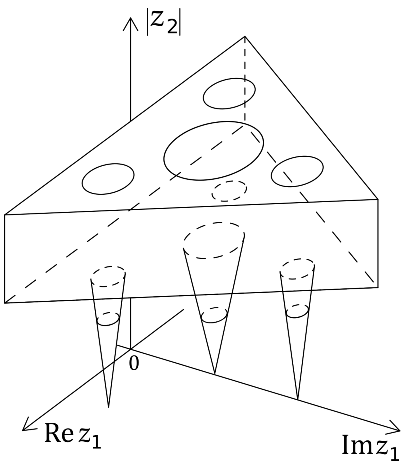

Рис. 9: Третий шаг.

После каждого конечного числа шагов будем получать ограниченную линейно выпуклую область Гартогса, проекция которой на диаграмму Гортогса имеет фрактальный характер.

Список литературы

[1] Айзенберг Л. А., Южаков А. П., *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Новосибирск: Наука, 1979.

[2] Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных*, М.: Наука, 1964.

[3] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ. Функция нескольких переменных: Учебник: В 2-х ч. Ч. 2. 4-е изд., стер.*, СПб.: Издательство «Лань», 2004.

[4] Andersson M., Passare M., Sigurdsson R., *Complex convexity and analytic functionals*, Progr. Math., **225**, Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2004.

Вокруг задачи Дидоны

Кутателадзе С. С.
Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия
e-mail: sskut@math.nsc.ru

Задачу Дидоны принято считать началом теории экстремальных задач. Дидона была мифической финикийской принцессой. Виргилий рассказал об ее побеге от своего вероломного брата в первой главе «Энеиды». Дидоне надо было принять решение о выборе участка земли рядом с будущим Карфагеном —

К месту приплыли они, где высокие ныне увидишь
Стены и юные где уж растут Карфагена твердыни;
Столько купили земли, от сего прозываемой Бирсой,
Сколько воловьею шкурой могли окружить на прибрежьи.

По легенде финикийцы разрезали шкуру на тонкие полоски и окружили им большой надел. Принято считать, что Дидона решала изопериметрическую задачу поиска фигуры наибольшей площади, окруженной кривой заданной длины. Не исключено, что Дидона и ее подданные решали практическую версию задачи, когда крепость надо было разместить на побережье и часть береговой границы была уже задана.

Нет свидетельств того, что Дидона столкнулась со сложностями, проявляла нерешительность и затягивала выбора участке земли. С практической точки зрения ситуация, в которой Дидона принимала решение, была не столь примитивной, как представляется на первый взгляд. Нужная общность была недоступна в математической модели, известной нам как классическая изопериметрическая задача.

Современное состояние задачи Дидоны осмысливается в рамках теории многокритериального принятия решений.

Список литературы

[1] Kutateladze S. S., “Dido’s problem and beyond”, *J. Math. Sci.*, **271**:6 (2023), 778–785 crossref.

Уравнения Вайнгартена поверхности дуальногельмгольцевой группы

Кыров Владимир Александрович

Горно-Алтайский государственный университет, Россия

e-mail: kyrovVA@yandex.ru

Для трехмерной группы Ли

$$G_3 : \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ -ze^z & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где (x, y, z) — точка этой группы, которая связана с одной их геометрий, полученной в классификации Г. Г. Михайличенко [1], найдена левоинвариантная метрика и связность Леви — Чивиты:

$$ds^2 = (1 + z^2)e^{-2z}dx^2 + 2ze^{-2z}dxdy + e^{-2z}dy^2 + e^{-2z}dz^2;$$

$$\nabla_{e_1}e_1 = e_3,\ \nabla_{e_1}e_2 = -\frac{1}{2}e_3,\ \nabla_{e_1}e_3 = -e_1 + \frac{1}{2}e_2,\ \nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3,$$

$$\nabla_{e_2}e_2 = e_3,\ \nabla_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1 - e_2,\ \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2,\ \nabla_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1,\ \nabla_{e_3}e_3 = 0.$$

Это позволило вычислить уравнения Вайнгартена поверхности в группе Ли (1):

$$\begin{aligned}
&\partial\psi_1 = \varphi_z\psi_1 + \psi_2 Ae^{-\varphi} + \frac{1}{2}\psi_1 Z_3 + iZ_2^2e^{-\varphi}\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1 Z_1(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2)e^{-\varphi},\\
&\partial\psi_2 = -U\psi_1,\\
&\bar\partial\psi_1 = V\psi_2,\\
&\bar\partial\psi_2 = \varphi_{\bar z}\psi_2 - \psi_1\bar Ae^{-\varphi} + \frac{1}{2}\psi_2\bar Z_3 + i\bar Z_2^2e^{-\varphi}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2\bar Z_1(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2)e^{-\varphi},
\end{aligned}$$

где $U = \dfrac{2+i}{4}|\psi_1|^2 + \dfrac{i}{4}\dfrac{\bar\psi_1\bar\psi_2^2}{\psi_1} + \dfrac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$, $V = -\dfrac{2+i}{4}|\psi_2|^2 - \dfrac{i}{4}\dfrac{\bar\psi_2\bar\psi_1^2}{\psi_2} + \dfrac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$, $Z_1 = \dfrac{i}{2}(\bar\psi_2^2 + \psi_1^2)$, $Z_2 = \dfrac{1}{2}(\bar\psi_2^2 - \psi_1^2)$, $Z_3 = \psi_1\bar\psi_2$, (ψ_1, ψ_2) — спинор поверхности.

Список литературы

[1] Михайличенко Г. Г., *Математические основы и результаты теории физических структур*, Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алтайского гос. ун-та, 2016.

Поверхности вращения с заданным индикатором площади

Латфуллин Тагир

Пенсионер, Тюмень

e-mail: tlatfullin@yandex.ru

Пусть $f \in C[0, L]$ — неотрицательная функция. Поверхностью вращения, порожденной функцией f называется множество

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 = f^2(x), \ x \in [0, L]\},$$

оно получено путем вращения графика функции f вокруг оси x пространства $\mathbb{R}^3$.

Назовем f функцией, образующей поверхность S, а о поверхности вращения S скажем, что она расположена над отрезком $[0, L]$.

Площадь поверхности S понимается стандартно, как предел сумм площадей вписанных усеченных конусов. Если предел конечен, поверхность называется квадрируемой.

Обозначать площадь поверхности S будем как $\mu(S)$.

Пусть квадрируемая поверхность вращения S расположена над отрезком $[0, L]$. Для $x \in [0, L]$ через $S[0, x]$ обозначим часть поверхности S, расположенную над отрезком $[0, x]$.

Определение 1. Функцию $P : [0, L] \to \mathbb{R}$, $P(x) = \mu(S[0, x])$ назовем индикатором площади поверхности S.

Замечание 1. Функция P является непрерывной и неубывающей, следовательно, дифференцируема почти всюду [1, с. 324].

Цель этого сообщения в том, чтобы показать, что если функция $P \in C^2[0, L]$ отлична от тождественного нуля, то соответствующих поверхностей много.

Определение 2. Обозначим $RS[0, L]$ множество функций $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, которые непрерывны, неотрицательны, кусочно непрерывно дифференцируемы и функции $f(x)\sqrt{1 + (f'(x)^2)}$ интегрируемы на отрезке $[0, L]$.

Функция $f \in RS[0, L]$ порождает квадрируемую поверхность вращения S, площадь которой вычисляется по формуле

$$\mu(S) = 2\pi \int_0^L f(x)\sqrt{1 + (f'(x)^2)}dx, \tag{1}$$

соответственно индикатор площади — по формуле

$$P(x) = 2\pi \int\limits_0^x f(t)\sqrt{1 + (f'(t)^2)}dt. \tag{2}$$

Теперь можно конкретизировать задачу для достижения цели: исследовать решения в классе $RS[0, L]$ дифференциального уравнения

$$f\sqrt{1 + f'^2} = \varphi, \tag{3}$$

где $\varphi(x) = P'(x)$ — неотрицательная функция класса $C^1[0, L]$.

Приведем к уравнению, разрешенному относительно производной.

Возведем в квадрат: $f^2 + f^2 f'^2 = \varphi^2$ и применим замену $y = f^2$, тогда уравнение (3) примет вид

$$y + \frac{1}{4}(y')^2 = \varphi^2. \tag{4}$$

Поэтому $(y')^2 = 4\varphi^2 - 4y$. Это уравнение распадается на два

$$y' = 2\sqrt{\varphi^2 - y}, \quad (5) \qquad \text{и} \qquad y' = -2\sqrt{\varphi^2 - y}, \quad (6)$$

Обозначим через

$$G = \{(x, y) : \ y < \varphi^2(x), \ x \in [0, L]\}$$

множество, на котором функция $g(x, y) = 2\sqrt{\varphi^2 - y}$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по переменной y.

Согласно теореме о существовании и единственности решения [2, с. 36], для любой точки $(x_0, y_0) \in G$, существует интервал u, содержащий точку x_0 такой, что существует единственное решение задачи Коши уравнения (5) с начальными условиями (x_0, y_0), которое определено на интервале u. То же самое верно и для уравнения (6).

Результаты исследования решений уравнений (5) и (6).

В нижеследующих утверждениях 1) – 5) указаны свойства решений дифференциальных уравнений в классическом смысле, то есть эти решения определены на интервалах и непрерывно дифференцируемы.

Когда в предложении не указан номер уравнения, это значит, что высказывание относится как к уравнению (5), так и к уравнению (6).

1) Функция $g(x, y)$ определена на замыкании множества G, но верхняя часть границы – график функции φ^2 не входит в область существования и

единственности, поэтому решения с начальными условиям $(x_0, \varphi^2(x_0))$ могут не существовать или могут быть не единственными.

2) Решения уравнения (5) – возрастающие, а решения уравнения (6) – убывающие функции.

3) Если решение $y(x)$ при $x \to \xi$ стремится к $\varphi^2(\xi)$, то $y'(x) \to 0$.

4) Если функция $y = \varphi^2(x)$ является решением, то $y' = 0$, следовательно, y и φ^2 – постоянные функции.

5) Если функция $\varphi^2(x) = c = const$ на некотором интервале, то $y = c$ является решением уравнения, но при $c > 0$ это решение не единственно.

Построение решений класса $RS[0, L]$.

Пусть $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = L$ набор точек отрезка $[0, L]$, $\Delta_k = [a_{k-1}, a_k]$. На отрезках Δ_k с четными номерами определены решения задачи Коши для уравнения (5), а на отрезках Δ_k с нечетными номерами определены решения задачи Коши для уравнения (6).

Начальные условия согласованы так, что составная функция y непрерывна и $0 \leq y(x) < \varphi^2(x)$.

Наконец, положим $f(x) = \sqrt{y(x)}$. Функция f является образующей для поверхности вращения с индикатором площади P, производная функции f совпадает на интервалах (a_k, a_{k-1}) с функцией $\varphi = P'$.

Взяв другое разбиение отрезка $[0, L]$ получим другую функцию. Можно изменить начальные условия и получить третью функцию.

Цель достигнута.

Список литературы

[1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа: Изд. четвертое, переработанное*, М.: “Наука”, 1976.

[2] Филиппов А. Ф., *Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. второе, испр.*, М.: КомКнига, 2007.

Оценки и компенсатор емкостного дефекта континуума в сферическом конденсаторе

Левицкий Б. Е.

Кубанский государственный университет, Краснодар
e-mail: bel@kubsu.ru

Понятие емкостного дефекта компактного множества, введенное В. В. Асеевым [1], применяется для получения явных оценок емкостных метрических характеристик n-мерного сферического конденсатора при изменении его границы. Предложен метод построения подмножества конденсатора, называемого компенсатором емкостного дефекта для континуума, примыкающего к границе конденсатора. Приведены вычисления весового объема компенсатора при разных комбинациях значений геометрических параметров такого континуума, которые дают однозначно определяемую оценку его емкостного дефекта. Получены оценки изменения приведенного p-модуля шара при вариации его границы.

Пусть $K = K(r, R)$ — сферический конденсатор в $\mathbb{E}^n$ (кольцо с граничными компонентами $F_0 = S^{n-1}(0, r)$ и $F_1 = S^{n-1}(0, R)$), $n \geq 3$, $\Omega \subset \overline{K}$ — континуум, такой что $\min_{x \in \Omega} |x| = l$, $\max_{x \in \Omega} |x| = R$, $r < l$, $k_\Omega = \frac{R}{l}$. Пусть $s_\Omega(\tau)$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега множества $\Omega \cap S^{n-1}(0, \tau)$ и $\varphi_\Omega(\tau)$ — угол образующей конуса, вырезающего на сфере $S^{n-1}(0, \tau)$ сферическую шапочку с площадью, равной $s_\Omega(\tau)$, $\tau \in [l, R]$. Пусть $\overline{\varphi_\Omega} = \max_\tau \varphi_\Omega(\tau)$ и $\underline{\varphi_\Omega} = \min_\tau \varphi_\Omega(\tau)$. Пусть Σ — семейство поверхностей, разделяющих граничные компоненты кольца K, а $\Sigma_\Omega \subset \Sigma$ — подсемейство Σ, состоящее из поверхностей, не пересекающих континуум Ω. Следуя В. В. Асееву [1] и учитывая известную связь (см. [2]) между p-емкостью кольцевого конденсатора $(1 < p < \infty)$ и $\frac{p}{p-1}$-модулем $M_{\frac{p}{p-1}}(\Sigma)$ семейства поверхностей Σ, разделяющих его граничные компоненты, величину

$$CD_p(\Omega) = \omega_{n-1}^{1/(p-1)} [M_{\frac{p}{p-1}}(\Sigma) - M_{\frac{p}{p-1}}(\Sigma_\Omega)]$$

будем называть емкостным (или p-емкостным) дефектом континуума Ω.

Методом оптимальных управлений в работе [3] получено решение вариационной задачи об отыскании в классе поверхностей, образованных вращением вокруг полярной оси плоской кривой, соединяющей две фиксированных точки плоскости, поверхности минимальной площади, вычисленной в метрике $\rho_0(x) = \omega_{n-1}^{-1} |x|^{1-n}$, экстремальной для модуля семейства поверхностей Σ любого порядка. Здесь ω_{n-1} — площадь $(n-1)$-мерной сферы единичного радиуса. Мы доказываем, что в $\overline{K}$ можно построить замкнутую область

$T_{\varphi_\Omega}(l, k_\Omega)$, однозначно определяемую геометрическими параметрами континуума Ω, такую, что метрика

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0(x), & x \in K \backslash T_{\varphi_\Omega}(l, k_\Omega); \\ 0, & x \in T_{\varphi_\Omega}(l, k_\Omega), \end{cases}$$

является допустимой для семейства поверхностей $\varSigma_\Omega$. Поскольку

$$CD_p(\Omega) \geq \int_{T_{\varphi_\Omega}(l, k_\Omega)} \rho_0{}^{\frac{p}{p-1}} d\omega, \tag{1}$$

множество $T_{\varphi_\Omega}(l, k_\Omega)$ будем называть компенсатором емкостного дефекта континуума Ω. Получено описание множества $T_{\varphi_\Omega}(l, k_\Omega)$, однозначно определяемое следующими геометрическими параметрами континуума Ω: $k_\Omega = \frac{R}{l}$, φ_Ω, $\overline{\varphi_\Omega}$, а также значением $\frac{l}{r}$. Построение множества $T_{\varphi_\Omega}(l, k_\Omega)$ использует свойства одного класса гиперэллиптических интегралов и специальных функций, установленные в [4]. Приведем такое описание для случая «тонких» континуумов ($\varphi_\Omega = \overline{\varphi_\Omega} = 0$).

Теорема. *Компенсатор емкостного дефекта континуума Ω имеет вид:*

$$T(l, k_\Omega) = \left\{ (\rho, \theta, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \in \overline{K} : l\Delta_n(\theta) \leq \rho \leq R, \theta \in [0,\ \theta_\Omega] \right\}.$$

Это множество ограничено частью сферы $S^{n-1}(0, R)$ и поверхностью, образованной вращением вокруг полярной оси Ox_1 плоской кривой Γ, заданной уравнением $z(\theta) = l \cdot \Delta_n(\theta) e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \theta_\Omega]$.

1) Если $\frac{l}{r} \geq e^{\frac{\pi}{\sqrt{n-2}}}$, то

$$\Delta_n(\theta) = \begin{cases} e^{h_0\left(\theta, \pi - \psi_n^0(\theta)\right)}, & \theta \in \left(0, \theta_n(\pi - \psi_0(n))\right], \\ e^{\mathcal{H}_0(\theta, \psi_0(n))}, & \theta \in \left(\theta_n(\pi - \psi_0(n)), \pi - \psi_0(n)\right) \end{cases}$$

и $\theta_\Omega = \pi - \psi_0(n)$, если $k_\Omega \geq e^{\mathcal{H}_0(n)}$ и θ_Ω определяется равенством $\Delta_n(\theta_\Omega) = k_\Omega$, если $k_\Omega < e^{\mathcal{H}_0(n)}$. Здесь

$$h_0\left(\theta, \pi - \psi_n^0(\theta)\right) = \int_\theta^{\pi - \psi_n^0(\theta)} \frac{\sin^{n-2}\theta}{\sqrt{\sin^{2(n-2)}t - \sin^{2(n-2)}\theta}} dt,$$

где $\psi = \psi_n^0(\theta)$ – единственный корень уравнения

$$\int_\theta^\psi \frac{\sin^{2(n-2)}t}{\sqrt{\sin^{2(n-2)}t - \sin^{2(n-2)}\theta}} dt = \int_0^\psi \sin^{n-2}t dt, \tag{2}$$

$\psi_0(n)$ определяется равенством

$$\theta_n^0\left(\pi-\psi_0(n)\right)=\theta_n\left(\pi-\psi_0(n)\right),$$

в котором $\theta_n^0(\psi)$ является решением уравнения (2), а $\theta_n(\psi)$ – решением уравнения

$$\int_\theta^\psi \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\sin^{2(n-2)}t-\sin^{2(n-2)}\theta}}=\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{\sin^{2(n-2)}\psi-\sin^{2(n-2)}\theta}};$$

$$\mathcal{H}_0\left(\theta,\psi_0\left(n\right)\right)=\int_\theta^{\pi-\psi_0(n)}\frac{\sin^{n-2}\varphi_\sigma dt}{\sin^{n-2}t+\sqrt{\sin^{2(n-2)}t-\sin^{2(n-2)}\theta}}+\int_0^\theta\frac{\sin^{n-2}t}{\sin^{n-2}\theta}dt$$

и

$$\mathcal{H}_0\left(n\right)=\mathcal{H}_0\big(\theta_n(\pi-\psi_0(n)),\psi_0(n)\big).$$

2) Если $\frac{l}{r}<e^{\frac{\pi}{\sqrt{n-2}}}$, то для значения $\theta_\Omega\left(\frac{l}{r}\right)$, однозначно определенного уравнением

$$\frac{l}{r}=e^{h_0\left(\theta_\Omega(\frac{l}{r}),\pi-\psi_n^0\left(\theta_\Omega(\frac{l}{r})\right)\right)},$$

имеем

$$\Delta_n\left(\theta\right)=\frac{r}{l}e^{h_0\left(\theta,\pi-\psi_n^0(\theta)\right)},\ \theta\in\left(0,\theta_\Omega\left(\frac{l}{r}\right)\right],$$

причем $\theta_\Omega=\theta_\Omega\left(\frac{l}{r}\right)$, если $k_\Omega\geq re^{h_n(l/r)}$ и θ_Ω определяется равенством $\Delta_n\left(\theta_\Omega\right)=k_\Omega$, если $k_\Omega<re^{h_n(l/r)}$. Здесь

$$h_n(l/r)=h_0\Big(\theta_\Omega\left(\tfrac{l}{r}\right),\pi-\psi_n^0\left(\theta_\Omega\left(\tfrac{l}{r}\right)\right)\Big).$$

Получены явные оценки емкостного дефекта континуума (1) в зависимости от его геометрических параметров, имеющие разнообразные применения.

Список литературы

[1] Асеев В. В., “Обобщенный приведенный модуль в пространственных задачах емкостной томографии”, *Дальневост. матем. журн.*, **7**:1–2 (2007), 17–29.

[2] Шлык В. А., “Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **185** (1990), 168–182.

[3] Игнатенко А. С., Левицкий Б. Е., “Метод оптимальных управлений в решении одной вариационной задачи”, *Научный журнал ВолГУ. Математика. Физика*, **6(37)** (2016), 28–39.

[4] Levitskii B. E., Ignatenko A. S., “Hyperelliptic integrals and special functions for the spatial variational problem”, *Probl. Anal. Issues Anal.*, **13(31)** (2024), 84–105.

Асимптотические свойства решений одного класса неавтономных функционально-дифференциальных уравнений

Матвеева И. И.*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: matveeva@math.nsc.ru

В работе изучается экспоненциальная устойчивость решений класса систем неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Исследованию проблемы устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений посвящено очень много работ. При получении результатов используются различные подходы: метод D-разбиений, метод функций Разумихина, метод функционалов Ляпунова — Красовского, метод сравнения, W-метод Азбелева, test-метод и др. В бóльшей части работ изучается устойчивость решений автономных уравнений. Наличие неавтономности серьезно усложняет проведение исследований. Особенно, если помимо нахождения условий экспоненциальной устойчивости ставится вопрос о скорости стабилизации решений на бесконечности. Если же система является существенно нелинейной, то помимо перечисленных вопросов, необходимо уметь оценивать множество притяжения.

Данная работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [1–3]). Используя специальные функционалы Ляпунова — Красовского, введенные в [4], для рассматриваемого класса систем мы указываем условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, получаем оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности и оценки на множества притяжения.

Список литературы

[1] Матвеева И. И., “Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием”, *Сиб. матем. журн.*, **62**:3 (2021), 579–594 Math-Net.Ru crossref.

[2] Matveeva I. I., “Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **18**:2 (2021), 1689–1697 Math-Net.Ru crossref.

[3] Matveeva I. I., “Estimates for solutions to a class of nonlinear time-varying delay systems”, *Lobachevskii J. Math.*, **42**:14 (2021), 3497–3504 crossref.

[4] И. И. Матвеева И. И., “Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **22**:3 (2019), 96–103 Math-Net.Ru crossref.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

The existence of coincidence point for mappings acting from b-metric space into generalized metric space

Merchela Wassim[1], Benarab S.[2], Khial N.[1]

[1] *University of Mustapha Stambouli Mascara, Algeria*

[2] *University of Constantine 3, Algeria*

e-mail: merchela.wassim@gmail.com, benarab.sarraa@gmail.com, khialnaouel@gmail.com

In this work, we will present a new result of coincidence point for two mappings acting from b-metric space to space with generalized distance. Let ψ, φ be two applications acting from $X \to Y$, the coincidence point of ψ, φ is the solution of the following equation

$$\psi(x) = \varphi(x), \quad x \in X. \tag{1}$$

Firstly, we give the definition of the space X (b-metric space).

Definition 1. Let X be a nonempty set, we define the application $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$, and let $s \geq 1$. If the following relations are satisfied for all $x, y, z \in X$:

(b_1) $\rho(x, y) = 0$ iff $x = y$,

(b_2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(b_3) $\rho(x, z) \leq s(\rho(x, y) + \rho(y, z))$,

so ρ is called a b-metric on X and (X, ρ) is a b-metric space.

Secondly, the space Y is a generalized metric space (that's mean distance satisfied only the axiom of identity). (Y, d) is a generalized metric space where Y is a nonempty set and d is a distance satisfied only the axiom of identity:

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2. \tag{2}$$

Now, we give the definition of covering mapping, where (X, ρ) is a b-metric space, and (Y, d) is a generalized metric space.

Definition 2. Let $\alpha > 0$. Application $\psi : X \to Y$ is called α-covering, if the following relation is satisfied.

$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X : \psi(x) = y, \text{ and}$$

$$\rho(x, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} d(\psi(x), \psi(x_0)).$$

We have the following assertion.

Theorem 1. *Let a b-metric space (X, ρ) be complete and (Y, d) be a space with a generalized distance d. If the following conditions are satisfied:*
an application $\psi : X \to Y$ is α-covering and closed, and an application $\varphi : X \to Y$ is β-Lipschitiz with $\alpha > \beta$.
Then, for all $x_0 \in X$ there exists a coincidence point ξ for ψ and φ such that:

$$\rho(x_0, \xi) \le \frac{s^2 \alpha^{t_0 - 1} R(s\beta/\alpha, t_0 - 1) + s(s\beta)^{t_0 - 1}}{\alpha^{t_0} - s\beta^{t_0}} d(\psi(x_0), \varphi(x_0)), \tag{3}$$

where $t_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \mid s\beta^j < \alpha^j\}$.

This result is a generalization of the results published in [1] and [2].

References

[1] Arutyunov A. V., "Covering mappings in metric spaces and fixed points", *Dokl. RAN*, **416**:2 (2007), 151–155 crossref.

[2] Мерчела В., "К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73 crossref.

Свойство периодичности с подобием функций со значениями в вещественном векторном пространстве

Морева М. А.[†], Орлов С. С.[†], Соколова Г. К.[‡]
[†] *Иркутский государственный университет, Иркутск*
[‡] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск*
e-mail: mariya.moreva.02@yandex.ru, orlov_sergey@inbox.ru, g.sokolova@g.nsu.ru

Последнее время в теории функций интенсивно развивается направление исследований специальных функциональных свойств, которые обобщают классическую периодичность. Как можно извлечь из монографии [1] и её библиографии, это связано, в том числе с приложениями в современном естествознании. Одним из изучаемых в данной области объектов является так называемая (λ, T)-*периодическая* функция [2], т. е. функция $u : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ действительного аргумента $t \in \mathrm{I}$, где $\mathrm{I} = [t_0; +\infty)$ или $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, и значений в комплексном банаховом пространстве E, удовлетворяющая однородному *линейному разностному функциональному уравнению*

$$u(t+T) = \lambda u(t) \tag{1}$$

первого порядка (см. книгу [3] на стр. 408–409) при всех $t \in \mathrm{I}$ и заданных фиксированных ненулевых скалярах $\lambda \in \mathbb{C}$ и $T \in \mathbb{R}$. В представляемом докладе будем рассматривать функции, которые определены всюду на $\mathbb{R}$ и принимают значения в вещественном банаховом пространстве E. Значит, естественно предположить, что и $\lambda \in \mathbb{R}$. Введём основное определение.

Определение. Функцию $u : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ назовём (λ, T)-*периодической* или *периодической с параметром подобия* λ *и сдвигом* T точно тогда, когда найдутся числа $\lambda \neq 0$ и $T \neq 0$ такие, что $u(t+T) = \lambda u(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

В качестве частных случаев при $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$ сюда входят понятия периодической и *антипериодической* функций, причём сдвиг T называют периодом и *антипериодом* соответствующей функции $u : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$. Далее показано, что пара этих функциональных свойств играет важную роль в структуре (λ, T)-периодических функций.

Начало нашего исследования периодичности с подобием основано на рассмотрении линейного разностного функционального уравнения

$$u(t+T) = \lambda u(t) + f(t) \tag{2}$$

с заданной функцией $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ и искомой функцией $u : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$. Данное уравнение порождено линейным оператором $\Delta_{T;\lambda}$, который действует по правилу

$$\Delta_{T;\lambda} u(t) = u(t+T) - \lambda u(t),$$

в вещественном векторном пространстве вектор-функций, заданных на $\mathbb{R}$, и является *нелокальным* (см. монографию [4] на стр. 7): для того, чтобы найти образ $f(t) = \Delta_{T;\lambda}u(t)$ в любой ε-окрестности точки t_0, необходимо знать прообраз $u(t)$ в окрестностях того же радиуса ε точек t_0 и $t_0 + T$. Минимальным промежутком, содержащим одновременно точки t_0 и $t_0 + T$, является сегмент с концами в этих точках.

Пусть $T > 0$ для определённости. Зафиксируем $t_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим уравнение (1). Его форма показывает, что значения $u(t)$ искомой функции на каждом следующем промежутке $[t_0 + nT; t_0 + (n+1)T)$ совпадают со значениями $\lambda u(t)$ на предыдущем промежутке $[t_0 + (n-1)T; t_0 + nT)$, где $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, во-первых, для того, чтобы однозначно восстановить решение уравнения (1), необходимо задать его на некотором из указанных выше полуинтервалов, например на $[t_0; t_0 + T)$, во-вторых, общее решение уравнения (1), а вместе с ним и уравнения (2), содержит обусловленный нелокальностью оператора $\Delta_{T;\lambda}$ произвол и определяется с точностью до функции, заданной на фиксированном сегменте длины T. Заметим, что для случая $T < 0$ следует рассмотреть уравнение (1) после деления обеих его частей на параметр подобия λ и провести аналогичные рассуждения.

Исследование уравнения (2) осуществляется с применением аппарата распределений (обобщённых функций Соболева — Шварца) со значениями в банаховом пространстве [5]. Общее решение построено в кусочном виде

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t+mT)}{\lambda^m} - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{f(t+kT)}{\lambda^{k+1}}, & -mT \leqslant t - t_0 < -(m-1)T; \\ \varphi(t), & 0 \leqslant t - t_0 < T; \\ \lambda^n \varphi(t - nT) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} f(t - kT), & nT \leqslant t - t_0 < (n+1)T; \end{cases}$$

где $\varphi : [t_0; t_0 + T] \to \mathrm{E}$ — произвольная функция, а $m, n \in \mathbb{N}$, и является *локально интегрируемым по Бохнеру* [6] для любых $f(t) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \mathrm{E})$ и $\varphi(t) \in L_{1,\mathrm{loc}}([t_0; t_0 + T]; \mathrm{E})$, т. е. функций, обладающих тем же свойством. Общее решение уравнения (2) сильно непрерывно тогда и только тогда, когда $\varphi(t) \in C([t_0; t_0+T]; \mathrm{E})$, $f(t) \in C(\mathbb{R}; \mathrm{E})$ и выполняется соотношение вида $\varphi(t_0 + T) - \lambda\varphi(t_0) = f(t_0)$. Последнее буквально означает сильную непрерывность решения в начальной точке t_0. Далее общий вид

$$u(t) = \begin{cases} |\lambda|^{\frac{t}{T}} \mathcal{A}(t), & \lambda < 0; \\ \lambda^{\frac{t}{T}}\ \mathcal{P}(t), & \lambda > 0; \end{cases} \tag{3}$$

периодической с параметром подобия λ и сдвигом T функции $u : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ получен из формулы общего решения уравнения (2) при $f(t) = \mathbf{0}$ для всех

$t \in \mathbb{R}$, где $\mathbf{0} \in \mathrm{E}$. Здесь обозначены $\mathcal{A}$ — произвольная антипериодическая функция с антипериодом T, а $\mathcal{P}$ — произвольная периодическая функция с периодом T.

С учётом структуры (3) периодических с подобием функций авторами проведено исследование их основных свойств. Описаны все типы наборов пар (λ, T), которые могут иметь (λ, T)-периодические функции. Доказан критерий (λ, T)-периодичности алгебраической суммы двух непрерывных функций, периодических с различными сдвигами и параметрами подобия. Изучено влияние на свойство (λ, T)-периодичности линейных операторов дифференцирования и интегрирования. Полученные результаты нашли применение в исследовании вопроса существования (λ, T)-периодического решения эволюционного уравнения

$$u'(t) = Au(t) + g(t)$$

с ограниченным линейным оператором A. Уравнение (1) трактуется как дополнительное условие для искомой функции $u : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ при постановке нелокальной задачи. Получен критерий (λ, T)-периодичности равномерно непрерывной полугруппы операторов с генератором A. Этот результат согласован со случаем $\lambda = 1$ периодической полугруппы операторов [7].

Список литературы

[1] Chang Y.-K., N'Guérékata G. M., Ponce R., *Bloch-Type Periodic Functions: Theory and Applications to Evolution Equations*, Series on Concrete and Applicable Mathematics, **22**, Singapore: World Scientific Publishing, 2022 crossref.

[2] Khalladi M. T., Kostić M., Pinto M., Rahmani A., Velinov D., "On semi-c-periodic functions", *Journal of Mathematics*, **2021** (2021), 6620625, 5 pp. crossref.

[3] Полянин А. Д., Манжиров А. В., *Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения*, М.: «Факториал», 1998.

[4] Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F., *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications*, Contemporary Mathematics and Its Applications, **3**, Nasr: Hindawi Publishing Corporation, 2007 crossref.

[5] Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M., *Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, Mathematics and Its Applications, **550**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002 crossref.

[6] Yosida K., *Functional Analysis*, Classics in Mathematics, Heidelberg: Springer Berlin, 1995 crossref.

[7] Bart H., "Periodic strongly continuous semigroups", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **115**:1 (1977), 311–318 crossref.

Применение однопараметрических семейств аналитических функций в геометрической теории функций

Насыров, С. Р.*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

e-mail: semen.nasyrov@yandex.ru

В геометрической теории функций широко используется так называемые параметрический метод. Он основан на включении аналитической функции $f(z)$ в семейство $f(z,t)$, зависящее от вещественного параметра t достаточно гладким образом. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют семейства $f(z,t)$, используются для решения различных экстремальных задач. Среди таких уравнений наиболее известны уравнения Левнера и Левнера–Куфарева для однолистных голоморфных функций. В частности, с помощью параметрического метода Луи де Бранжем была обоснована знаменитая гипотеза Бибербаха об точной оценке модулей коэффициентов голоморфных в единичном круге функций.

В данном докладе мы описываем применение параметрического метода а) в задачах униформизации компактных римановых поверхностей рода 0 и 1 и б) в задачах о нахождения акцессорных параметров в интегралах Критоффеля–Шварца в двусвязном случае (см. [1, 2]).

а) Как известно, любая односвязная риманова поверхность униформизируется некоторой рациональной функцией. Важное значение имеет нахождение параметров, от которых зависит решение. В качестве таковых можно взять критические точки и полюсы. Мы рассматриваем гладкие однопараметрические семейства рациональных функций $f(z,t)$ и находим дифференциальные уравнения в частных производных, которым они удовлетворяют. Динамика семейства определяется законами изменения критических значений, которым отвечают точки ветвления соответствующих римановых поверхностей. Далее из этих уравнений выводится система обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют точки ветвления и полюсы. Решая задачу Коши для этой системы, мы можем определять параметры для поверхностей, которые получаются при гладкой деформации заданной римановой поверхности.

Рассматриваются также семейства компактных римановых поверхностей рода 1 (комплексных торов). Для них с использованием аппарата эллиптических функций получены соответствующие дифференциальные уравнения. Отметим, что в отличие односвязного случая, здесь приходится определять

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант No 23-11-00066).

помимо критических точек и полюсов дополнительный комплексный параметр — модуль комплексного тора, который зависит от вещественного параметра t.

б) Мы также описываем применение параметрического метода в задаче определения акцессорных параметров в интегралах Кристоффеля–Шварца. Идея такого применения возникла в работах П. П. Куфарева и его учеников. Мы используем этот метод для нахождения неизвестных параметров в двусвязном случае. Совместно с А. Ю. Дютиным получены соответствующие дифференциальные семейства, которым удовлетворяют гладкие семейства интегралов Кристоффеля–Шварца $f(z,t)$ в случае, когда соответствующие полигональные области семейства получаются друг из друга проведением нескольких прямолинейных разрезов, концы которых двигаются гладким образом по определенному закону. Рассмотрены случаи как конечных, так и бесконечных полигональных областей.

Приводятся результаты численных расчетов, подтверждающих эффективность разработанных методов.

Список литературы

[1] Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р., Насыров С. Р., “Экстремальные проблемы в геометрической теории функций”, *УМН*, **78**:2(470) (2023), 3–70 Math-Net.Ru crossref.

[2] Dyutin A., Nasyrov S., “One parameter families of conformal mappings of bounded doubly connected polygonal domains”, *Lobachevskii J. Math.*, **45**:1 (2024), 390–411, arXiv: 2312.01112 crossref.

Характеризация соболевских отображений с помощью нелокальных функционалов

Олейник Роман Дмитриевич

Московский физико-технический институт, Россия

e-mail: romanoleinik1999@gmail.com

В 2001 году Ж. Бургейн, Х. Брезис и П. Миронеску в своей работе [1] установили примечательное предельное соотношение, связывающее дробные соболевские полунормы с соболевской полунормой первого порядка для функций на областях в евклидовых пространствах. А именно было получено, что для заданных числа $n \in \mathbb{N}$, ограниченной гладкой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, показателя $p \in [1, +\infty)$ и функции $u \in \mathrm{W}^{1,1}_{Loc}(\Omega) \cap \mathrm{L}^p(\Omega)$ справедливо следующее равенство:

$$\lim_{s \nearrow 1} \int\limits_{\Omega \times \Omega} \frac{(1-s)\big|u(x') - u(x)\big|^p}{\|x' - x\|^{n+ps}} \mathrm{d}(\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m})(x, x')$$

$$= K(n,p) \int\limits_{\Omega} \big\|\nabla u(x)\big\|^p \mathrm{d}\mathcal{L}_n(x), \quad (1)$$

где $\mathcal{L}^n$ — n-мерная мера Лебега, $\|\cdot\|$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^n$, ∇u — слабый градиент функции u, а $K(n,p)$ — некоторая универсальная константа, зависящая только от n и p.

За последние годы было получено множество формул, обобщающих соотношение в (1) в том или ином смысле. Наиболее популярное направление развития заключается в получении такого рода равенств на более общих метрических структурах и для более общих отображений. В частности, автором в его работе [2] была установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задано полное метрическое пространство с мерой* $(\mathsf{X}, \mathsf{d}_\mathsf{X}, \mathfrak{m})$, *удовлетворяющее свойствам удвоения и p-Пункаре для некоторого показателя* $p \in [1, +\infty)$, *а также являющееся сильно спрямляемым. Пусть также задано метрическое пространство* $(\mathsf{Y}, \mathsf{d}_\mathsf{Y})$, *область* $\Omega \subseteq \mathsf{X}$ *со свойством p-продолжения и отображение* $f \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega, \mathsf{Y})$. *Тогда выполняется следующее соотношение:*

$$\lim_{s \nearrow 1} \int\limits_{\Omega \times \Omega} \frac{(1-s)\Big(\mathsf{d}_\mathsf{Y}\big(f(x), f(x')\big)\Big)^p}{\big(\mathsf{d}_\mathsf{X}(x, x')\big)^{ps} \mathfrak{m}\Big(B\big(x, \mathsf{d}(x, x')\big)\Big)} \mathrm{d}(\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m})(x, x') =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{Dim}(x)+p}{p} \frac{1}{\omega_{\mathrm{Dim}(x)}} \int\limits_{B^{\mathrm{Dim}(x)}} \big(\mathsf{md}_x[f](x')\big)^p \mathrm{d}\mathcal{L}^{\mathrm{Dim}(x)}(x') \mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — замкнутый шар в X с соответствующими центром и радиусом, $\mathrm{Dim}(\cdot)$ — функция размерности пространства в данной точке, $B^{(\cdot)}$ и $\omega_{(\cdot)}$ — стандартный единичный шар в евклидовом пространстве указанной размерности и его объём, соответственно, а $\mathsf{md}_{(\cdot)}[f]$ — аппроксимативный метрический дифференциал отображения f в заданной точке.

Помимо сформулированного утверждения в своём докладе автор расскажет также о других возможных обобщениях соотношения BBM.

Список литературы

[1] Bourgain J., Brezis H., Mironescu P., “Another look at Sobolev spaces”, *Optimal Control and Partial Differential Equations*, 2001, 439–455, hal-00747692.

[2] Oleinik R. D., *Asymptotic relations of the Bourgain-Brezis-Mironescu type for mappings between singular spaces*, 2023, arXiv: 2308.13361.

Замкнутость классов гомеоморфизмов с интегрируемым искажением

Павлов С. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: s.pavlov2@g.nsu.ru

Один из подходов к поиску положения, занимаемого гиперупругим телом Ω в результате воздействия на него известных внешних сил, состоит в нахождении отображения $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, доставляющего минимум функционала энергии

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\varphi(x))\, dx.$$

В прошлом веке Дж. Боллом были найдены соответствующие реальным материалам математические условия, при которых удается получить теорему о существовании минимума функционала I в некотором классе непрерывных отображений с обобщенными производными.

В работе [1] представлено приложение методов современного квазиконформного анализа к данной задаче — с их помощью в классе отображений с интегрируемым искажением установлено существование экстремального отображения, являющего взаимно однозначным. В настоящей работе этот подход развивается на группах Карно, обладающих существенно более сложной геометрией по сравнению с евклидовым пространством. Более подробные историческая справка и литература могут быть найдены в [1].

Список литературы

[1] Molchanova A., Vodopyanov S., “Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity”, *Calc. Var.*, **59** (2019), 17 crossref.

[2] Водопьянов С. К., Павлов С. В., “Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **70**:2 (2024), 215–236 crossref.

Fractal functions on post critical finite self-similar sets

Pasupathi Rajan

Sobolev Institute Of Mathematics SB RAS, Novosibirsk

e-mail: pasupathi4074@gmail.com

M. Barnsley introduced the concept of Fractal Interpolation Function (FIF) on real intervals as an alternative method for construction of interpolation functions such that the graph of this function is a fractal set. In this talk, we discuss FIFs with more flexibility and diversity in a more general sense. That is we talk about FIFs on the post critical finite self-similar sets by taking variable scaling factors. We then propose the analytical properties of these functions such as the sufficient conditions for FIFs to be a finite energy, Hölder continuity and oscillation property. Using these properties, we give bounds of the Hausdorff and box dimensions of the graph of these FIFs. The FIFs presented in this talk would have more flexibility than those classical FIFs in fitting and approximation of many complicated phenomena and patterns.

О скорости сходимости $\mathbb{R}^d$-эргодических средних, построенных по строго выпуклому множеству

Подвигин Иван

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: ipodvigin@math.nsc.ru

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, на котором действует группа $\mathbb{R}^d$ унитарными преобразованиями $U_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ — множество конечной положительной меры Лебега $\mathcal{L}_d$, т. е. $0 < \mathcal{L}_d(\mathcal{K}) < \infty$. Гомотетию, порожденную вектором $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, обозначим как

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \odot \mathbf{t} := (x_1 t_1, x_2 t_2, \ldots, x_d t_d), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Для $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathcal{K}_{\mathbf{t}} = \mathcal{K} \odot \mathbf{t}$. Статистическая эргодическая теорема утверждает, что для любого вектора $h \in \mathcal{H}$

$$\left\| \frac{1}{\mathcal{L}_d(\mathcal{K}_{\mathbf{t}})} \int_{\mathcal{K}_{\mathbf{t}}} U_{\mathbf{s}} h \, d\mathcal{L}_d(\mathbf{s}) - Ph \right\|_{\mathcal{H}} \to 0$$

при $t_1, \ldots, t_d \to \infty$, где P — ортогональное проектирование на подпространство неподвижных векторов группы $\{U_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d}$.

Существенное влияние на диапазон степенных скоростей сходимости в статистической эргодической теореме оказывает асимптотика на бесконечности преобразования Фурье индикатора множества $\mathcal{K}$. Влияние этой асимптотики можно увидеть благодаря известной формуле:

$$\left\| \frac{1}{\mathcal{L}_d(\mathcal{K}_{\mathbf{t}})} \int_{\mathcal{K}_{\mathbf{t}}} U_{\mathbf{s}} h \, d\mathcal{L}_d(\mathbf{s}) - Ph \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{\mathcal{L}_d(\mathcal{K})} \mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x} \odot \mathbf{t}) \right|^2 d\sigma_{h-Ph}(\mathbf{x}),$$

где $\mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{K}} e^{i(\mathbf{y},\mathbf{x})} \, d\mathcal{L}_d(\mathbf{y})$ — ненормированное преобразование Фурье индикатора $I_{\mathcal{K}}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k y_k$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$, и σ_{h-Ph} — спектральная мера вектора $h - Ph$.

Мы будем считать, что множество $\mathcal{K}$ выпукло, компактно и имеет достаточно гладкую границу $\partial\mathcal{K}$ со всюду положительной полной (гауссовой) кривизной. Асимптотика при $|\mathbf{x}| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \to \infty$ преобразования Фурье $\mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x})$ такого множества хорошо изучена (см., напр., монографии [1, глава VIII] и [2, § 2.3] и ссылки в них). А именно, пусть граница $\partial\mathcal{K}$ принадлежит классу гладкости C^k при $k > \max\left\{1, \frac{d-1}{2}\right\}$. Тогда найдется константа $D = D(\mathcal{K}) > 0$ такая, что

$$|\mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x})| \leq D|\mathbf{x}|^{-\frac{d+1}{2}}.$$

Более того, справедливо асимптотическое равенство, доказанное Херцем (см. более общий результат в [2, теорема 2.29]):

$$\mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x}) = \mathcal{D}(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^{-\frac{d+1}{2}} + o(|\mathbf{x}|^{-\frac{d+1}{2}})$$

при $|\mathbf{x}| \to \infty$, где $\mathcal{D}(\mathbf{x})$ — ограниченная функция, зависящая от полной кривизны.

Основной результат заключается в следующем спектральном критерии степенной скорости сходимости в статистической эргодической теореме.

Пусть $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\delta} > 0$; положим $\boldsymbol{\delta}^{-1} = (\delta_1^{-1}, \dots, \delta_d^{-1})$. Эллипсоидом будет множество

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\delta}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \quad |\mathbf{x} \odot \boldsymbol{\delta}^{-1}| < 1\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \frac{x_1^2}{\delta_1^2} + \dots + \frac{x_d^2}{\delta_d^2} < 1\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$ и $|\boldsymbol{\alpha}|_1 < d+1$. Тогда при $t_1, \dots, t_d \to \infty$ справедлива эквивалентность*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{\mathcal{L}_d(\mathcal{K})} \mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x} \odot \mathbf{t}) \right|^2 d\sigma_{h-Ph}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\mathbf{t}^{-\boldsymbol{\alpha}}) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{h-Ph}(\mathcal{E}(\mathbf{t}^{-1})) = \mathcal{O}(\mathbf{t}^{-\boldsymbol{\alpha}}).$$

Этот результат, примененный для единичного шара $\mathcal{K}$, дополняет недавний результат [3].

Список литературы

[1] Stein E., *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and osscilatory integrals*, Princeton: Princeton University Press, 1993.

[2] Iosevich A., Liflyand E, *Decay of the Fourier transform. Analytic and geometric aspects*, Basel: Springer, 2014.

[3] Подвигин И. В., “О степенной скорости сходимости в эргодической теореме Винера”, *Алгебра и анализ*, **35**:6 (2023), 159–168 Math-Net.Ru.

Кривые с подобными дугами

Поликанова И. В.
Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
e-mail: Anirix1@yandex.ru

Автором в [1] выдвинута гипотеза, что в *n-мерном евклидовом пространстве E^n кривые, всякие две ориентированные дуги которых подобны, прямолинейны.*

Ныне автором установлены более сильные результаты [2]:

Теорема 1. *Кривая в E^n, всякие 2 ориентированные дуги которой, имеющие общее начало (нефиксированное), подобны, прямолинейна.*

Теорема 2. *Если кривая в E^n имеет в краевой точке полукасательную и всякие 2 её ориентированные дуги с началом в этой точке подобны, то кривая прямолинейна.*

Теорема 3. *Если кривая в E^n имеет во внутренней точке касательную и все её ориентированные дуги с началом в этой точке подобны, то кривая прямолинейна.*

Они опираются на следующий факт:

Теорема 4. *Если всякие 2 ориентированные дуги кривой γ, имеющие общее начало A, подобны, то кривая γ содержится в контингенции к γ в точке A.*

Контингенция кривой в точке — это множество всех касательных лучей к кривой в этой точке. Существуют кривые в E^2 и E^3, у которых все дуги с общим началом подобны, но они непрямолинейны. Дано исчерпывающее описание кривых с подобными дугами в E^2:

Теорема 5. *Кривая в E^2 с подобными дугами, имеющими общее начало в краевой точке кривой, либо прямолинейна, либо является логарифмической спиралью, пополненной собственным полюсом.*

Кривая в E^2 с подобными дугами, имеющими общее начало во внутренней точке кривой, представляет собой либо угол (возможно, развёрнутый), либо объединение двух логарифмических спиралей, пополненных общим полюсом в этой точке.

Примером кривой в E^3 с подобными дугами, имеющими общее начало в краевой точке кривой, является конхо-спираль, пополненная собственным полюсом:

$$\vec{r}(t) = e^{mt}(a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + b\,\vec{k}), \quad t \in \mathbb{R},$$

где a, b, m – произвольные константы. Она расположена на конусе, который является её контингенцией в полюсе.

Методы исследования — топологические, теоретико-множественные, с привлечением аппарата функциональных уравнений.

Ранее автор доказал [3], что в классе C^n-гладких кривых в аффинном n-мерном пространстве A^n кривые с аффинно-эквивалентными дугами *представляют собой эники разных степеней*, т. е. кривые, допускающие в некоторой аффинной системе координат параметризацию вида

$$\vec{r} = (t, t^2, \ldots, t^i, 0, 0, \ldots, 0), \quad t \in I.$$

Здесь верхние индексы означают степени, $i = 1, 2, \ldots, n$, I — числовой промежуток в $\mathbb{R}$. При $n = 2$ утверждение доказано без априорных требований гладкости.

Список литературы

[1] Поликанова И. В., “Критерии прямолинейности кривой”, *Материалы Международной конференции «Классическая и современная геометрия», посвященной 100-летию со дня рождения профессора Левона Сергеевича Атанасяна (15 июля 1921 г.–5 июля 1998 г.). Москва, 1–4 ноября 2021 г. Часть 1*, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **220**, М.: ВИНИТИ РАН, 2023, 86–98 Math-Net.Ru crossref.

[2] Поликанова И. В., *Изв. вузов. Матем.*, 2023, № 11, 26–40 Math-Net.Ru crossref.

[3] Поликанова И. В., “О линиях с аффинно-эквивалентными дугами в n-мерном аффинном пространстве”, *Сиб. матем. журн.*, **63**:1 (2022), 180–196 Math-Net.Ru crossref.

О сингулярных разложениях продольных преобразований Радона, действующих на трехмерные векторные поля

Полякова, Анна Петровна*

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
e-mail: apolyakova@math.nsc.ru

В настоящее время теория лучевых преобразований векторных и тензорных полей хорошо развита, однако обобщенные преобразования Радона таких полей изучены недостаточно. В докладе рассматриваются нормальное и продольные преобразования Радона (с интегрированием по плоскостям), действующие на трехмерные векторные поля.

Плоскость $P_{s,\xi}$ в $\mathbb{R}^3$ задается нормальным уравнением $(\xi \cdot \mathrm{x}) - s = 0$, где $\xi \in \mathbb{S}^2$ — нормальный единичный вектор к плоскости и s — расстояние (со знаком) между плоскостью и началом координат. Точки на плоскости $P_{s,\xi}$ задаются равенством $\mathrm{x} = \mathrm{y} + s\xi$, $\mathrm{y} \in \xi^\perp$. Здесь $\xi^\perp$ — плоскость перпендикулярная ξ и проходящая через начало координат. *Нормальное преобразование Радона* $\mathcal{R}^0$ векторного поля $\mathbf{w}$ определяется формулой

$$[\mathcal{R}^0\mathbf{w}](s,\xi) = \int\limits_{P_{s,\xi}} (\xi \cdot \mathbf{w}(\mathrm{x}))d\mathrm{x} = \int\limits_{P_{s,\xi}} \sum_{j=1}^{3} \xi_j w_j(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}. \tag{1}$$

Единичные взаимноперпендикулярные векторы, задающие базис на $\xi^\perp$, обозначим $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$. *Продольные преобразования Радона* $\mathcal{R}^m$, $m = 1, 2$ действуют на векторное поле $\mathbf{w}$ по правилам

$$[\mathcal{R}^m\mathbf{w}](s,\xi) = \int\limits_{P_{s,\xi}} (\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{w}(\mathrm{x}))d\mathrm{x} = \int\limits_{P_{s,\xi}} \sum_{j=1}^{3} e^m_j w_j(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}, \quad m = 1, 2. \tag{2}$$

Преобразования такого вида рассматривались в [1]. В недавней работе [2] получены новые детальные разложения трехмерных векторных полей в виде суммы попарно ортогональных членов. Для построения каждого члена в сумме требуется только одна функция. С использованием этих разложений описаны ядра и образы обобщенных преобразований Радона.

*Работа осуществлена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00200).

Одной из важных задач исследования операторов является построение сингулярных разложений. Именно, необходимо построить представление оператора A в виде суммы

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \langle f, f_k \rangle_H g_k.$$

Здесь (f_k), (g_k) — ортонормированные системы в Гильбертовых пространствах H и K, соответственно, а $\sigma_k > 0$ называются сингулярными числами оператора A. Если последовательность $\{\sigma_k\}$ ограничена, тогда A — непрерывный линейный оператор из H в K. Если A имеет сингулярное разложение, тогда его двойственный и (псевдо)обратный операторы имеют представление

$$A^* g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \langle g, g_k \rangle_K f_k, \qquad A^\dagger g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} \langle g, g_k \rangle_K f_k. \tag{3}$$

В частности, компактные операторы всегда допускают сингулярное разложение [3]. Отметим, что основная трудность при построении сингулярного разложения состоит в нахождении ортонормированных систем (f_k), (g_k). В работах [4, 5] построены сингулярные разложения нормальных преобразований Радона $\mathcal{R}^0$, действующих на трехмерные векторные и симметричные 2-тензорные поля, соответственно.

В настоящем докладе, используя результаты работ [2,4,5], рассматривается вопрос построения сингулярного разложения продольных преобразований Радона $\mathcal{R}^1$, $\mathcal{R}^2$, действующих на трехмерные векторные поля.

Список литературы

[1] Prince J. L., “Tomographic reconstruction of 3-D vector fields using inner product probes”, *IEEE Trans. Image Processing*, **3**:2 (1994), 216–219 crossref.

[2] Svetov I. E., Polyakova A. P., “Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor fields”, *Inverse Problems*, **40**:1 (2024), 015009 crossref.

[3] Kato T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Classics in Mathematics, **132**, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1995 crossref.

[4] Polyakova A. P., “Reconstruction of a vector field in a ball from its normal Radon transform”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **205**:3 (2015), 418–439 crossref.

[5] Polyakova A. P., “Singular value decomposition of a normal Radon transform operator acting on 3D symmetric 2-tensor fields”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **18**:2 (2021), 1572–1595 crossref.

Спектральные задачи для нелинейных эллиптических операторов*

Валерий Пчелинцев

Томский государственный университет, Россия
e-mail: va-pchelintsev@yandex.ru

Александр Ухлов

Университет им. Бен-Гуриона в Негеве, Израиль
e-mail: ukhlov@math.bgu.ac.il

Мы рассматриваем нелинейную спектральную задачу для эллиптических операторов с краевым условием Неймана [1]

$$-\Delta_p u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda \|u\|^{p-q}_{L^q(\Omega_\gamma)} |u|^{q-2} u \text{ в } \Omega_\gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega_\gamma,$$

в ограниченных областях $\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ с γ-особенностями на границе.

В случае $1 < p < \infty$ и $1 < q < p^*_\gamma = \gamma p/(\gamma - p)$ доказана разрешимость этой спектральной задачи и существование минимайзера для соответсвующей вариацонной задачи. Кроме того, найдены регулярность собственных функций и оценки (p, q)-собственных чисел.

Список литературы

[1] Garain P., Pchelintsev V., Ukhlov A., “On the Neumann (p, q)-eigenvalue problem in Holder singular domains”, *Calc. Var.*, **63** (2024), 172.

*Работа поддержана РНФ, проект 23-21-00080.

Godbillon-Vey type invariants

Vladimir Rovenski

Department of Mathematics, University of Haifa, Israel

e-mail: vrovenski@univ.haifa.ac.il

In [1], we extended the Godbillon-Vey (GV) functional [2] from foliations to arbitrary plane fields on a 3-dimensional smooth manifold M. Namely, for M^3 equipped with a plane field $\mathcal{D}$ and a vector field T transverse to $\mathcal{D}$, we build a 3-form similar to GV class of a foliation. For a compatible metric on M, we express this in Reinhart-Wood form [3], using the curvature and torsion of T-curves and the non-symmetric 2nd fundamental form of $\mathcal{D}$. We discuss critical and extremal points of associated GV-type functionals: for variable pair $(\mathcal{D}, T)$, and for variable Riemannian metric on M with fixed $\mathcal{D}$.

The GV functional was never considered in a variational context in contact geometry. So, the following question arises: can one use the GV functional to find optimal almost contact manifolds? In [4], we introduced another GV-type functional for a 3-dimensional almost contact manifold, presented it in Reinhart–Wood form [3] and found its Euler–Lagrange equations for all variations of Riemannian metric preserving the vector field T. We found critical (for our functional) 3-dimensional almost contact manifolds having a double-twisted product structure, these solutions belong to the class $C_5 \oplus C_{12}$ according to the Chinea–Gonzalez classification [5].

References

[1] Rovenski V., Walczak P., “A Godbillon-Vey type invariant for a 3-dimensional manifold with a plane field”, *Differential Geom. Appl.*, **66** (2019), 212–230 crossref.

[2] Godbillon C., Vey J., “Un invariant des feuilletages de codimension 1”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **273** (1971), A92–A93.

[3] Reinhart B. L., Wood J. W., “A metric formula for the Godbillon–Vey invariant for foliations”, *Proc. AMS*, **38**:2 (1973), 427–430 crossref.

[4] Rovenski V., *Godbillon-Vey type functional for almost contact manifolds*, 2024, 10 pp., arXiv: 2405.11857.

[5] Chinea D., González C., “A classification of almost contact metric manifolds”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **156** (1990), 15–36 crossref.

Модули семейств поверхностей, ёмкость, дифференциальные формы

Романов, А. С.

ИМ СО РАН, Россия

e-mail: asrom@math.nsc.ru

Нас интересует взаимосвязь активно используемых в теории отображений понятий модуля семейства поверхностей (кривых) и ёмкости.

Семейство k-мерных локально липшицевых поверхностей (кривых при $k = 1$) в области $G \subset R^n$ обозначим символом Σ. Неотрицательную борелевскую функцию $\rho : G \to \overline{R}$ называют допустимой метрикой для семейства Σ, если

$$\int\limits_S \rho \, dH^k \geq 1$$

для всех поверхностей $S \in \Sigma$.

Соответственно p-модуль семейства Σ определяется равенством

$$mod_p(\Sigma) = \inf_\rho \int\limits_G \rho^p \, dm_n.$$

Рассмотрим два непересекающихся компакта $K_0, K_1 \subset \overline{G}$. Класс допустимых функций для конденсатора $K = (K_0, K_1)$ определим условием

$$D(K_0, K_1, G) = \{u \in L^1_p(G) \cap C(G \cup K_0 \cup K_1) \mid u|_{K_0} = 0, \; u|_{K_1} = 1\},$$

а соответствующую вариационную p-ёмкость определим равенством

$$cap_p(K) = cap_p(K_0, K_1, G) = \inf_{u \in D(K_0, K_1, G)} \int\limits_G |\nabla u|^p \, dm_n.$$

Известно, что при $1 < p < \infty$ p-ёмкость конденсатора $K = (K_0, K_1)$ совпадает с p-модулем семейства кривых, соединяющих континуумы K_0 и K_1.

Мы рассматриваем модельную ситуацию, иллюстрирующую гипотезу С. К. Водопьянова о том, что в некоторых случаях p-модуль семейства поверхностей допускает описание в терминах специального вида ёмкости, в определении которой вместо допустимых функций используются допустимые дифференциальные формы соответствующей степени.

Рассмотрим ограниченную односвязную область $G \subset R^3$, два непересекающихся континуума $K_0, K_1 \subset \partial G$ и экстремальную для p-ёмкости конденсатора $K = (K_0, K_1)$ функцию u.

Обозначим через Σ_K семейство всех локально липшицевых двумерных поверхностей, разделяющих континуумы K_0 и K_1. Символом Σ_u обозначим семейство гладких поверхностей S_t, являющихся множествами уровня экстремальной функции u, т. е.

$$S_t = \{(x, y, z) \in G \mid \ u(x, y, z) = t\}.$$

Семейство $\Sigma_u \subset \Sigma_K$, при этом несложно доказывается, что

$$mod_{p'}(\Sigma_u) = mod_{p'}(\Sigma_K), \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Рассмотрим поверхность $S_t \in \Sigma_u$ и обозначим её край символом γ_t. Кривая $\gamma_t \subset \partial G$, является замкнутой и разделяет континуумы K_0 и K_1 как подмножества ∂G. Рассмотрим еще последовательность вложенных кусочно-гладких замкнутых контуров $\{l_{t,n}\}$, лежащих на поверхности S_t и стягивающихся к её краю γ_t.

Гладкую в дифференциальную 1-форму Ω будем называть допустимой для семейства Σ_u и использовать обозначение $\Omega \succ \Sigma_u$, если для всякой поверхности $S_t \in \Sigma_u$ выполняется неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{l_{t,n}} \Omega \geq 1.$$

Множество всех допустимых для семейства Σ_u дифференциальных форм обозначим символом F и определим “ёмкость” семейства поверхностей Σ_u равенством

$$CAP_{p'}(\Sigma_u) = \inf_{\Omega\in F} \iiint\limits_G |d\Omega|^{p'}\, dxdydz.$$

Определение ёмкости семейства поверхностей $CAP_{p'}(\Sigma_u)$ вполне аналогично стандартному определению ёмкости конденсатора с учетом единственной замены допустимой функции (0-формы) на допустимую 1-форму.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$CAP_{p'}(\Sigma_u) = mod_{p'}(\Sigma_u) = mod_{p'}(\Sigma_K).$$

Экстремальная дифференциальная форма для ёмкости семейства поверхностей $CAP_{p'}(\Sigma_u)$ непосредственно связана с экстремальной для p-ёмкости конденсатора K функцией u. Если $u \in C^2(G)$, то она удовлетворяет p-уравнению Лапласа

$$div(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) = 0,$$

а дифференциальная форма

$$\omega_u = \frac{|\nabla u|^{p-2}}{cap_p(K)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y}\, dz \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z}\, dx \wedge dy \right)$$

оказывается замкнутой.

По теореме Пуанкаре замкнутая в односвязной области форма ω_u является точной и у неё существует первообразная, т. е. существует такая гладкая 1-форма Ω_u, что $d\Omega_u = \omega_u$.

Именно дифференциальная форма Ω_u и является экстремальной для p'-ёмкости семейства поверхностей, разделяющих континуумы K_0 и K_1.

Список литературы

[1] Романов А. С., “Модули семейств поверхностей, векторные поля, ёмкость, дифференциальные формы”, *Сиб. электрон. мат. изв.*, **21**:1 (2024), 196–212 crossref.

О различных обобщениях классов Соболева

Романовский, Николай Николаевич

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

e-mail: nnrom@math.nsc.ru

Пусть V — ограниченная область метрического пространства X, μ — борелевская счетно-аддитивная мера на X, $\mathcal{A}$ — некоторое семейство открытых подмножеств V.

Определение 1. Будем говорить, что отображение $u : V \to Y$, где Y метрическое пространство с метрикой ρ, принадлежит пространству $W^{1,p}_{\mathcal{A}}(V;Y)$, если функция

$$[\tilde{D}_{\max} u](x) = \sup_{A \in \mathcal{A} : x \in A} \inf_{E : \mu(E)=0} \frac{\operatorname{diam}(u(A \setminus E))}{\operatorname{diam}(A)}$$

принадлежит пространству $L_p(V)$.

Приведем также определения соболевских классов функций, заданных в области евклидова пространства, со значениями в метрическом пространстве из [1] и [4].

Определение 2 ([1])**.** Отображение $u : V \to Y$ принадлежит $W^1_p(V;Y)$, если для любой точки $y \in Y$ функция $u_y(x) = \rho(y, u(x))$ принадлежит $W^1_p(V)$, причем существует функция $w(x) \in L_p(V)$ такая, что для всех $y \in Y$ и для п. в. $x \in V$ выполняется неравенство $|\nabla_x v_y(x)| \leq w(x)$.

Определение 3 ([4])**.** Отображение $u : V \to Y$ принадлежит $W^1_p(V;Y)$, если L_p-нормы разностных метрических соотношений $\frac{\rho(u(x+he_i),u(x))}{h}$ ограничены равномерно по $h \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *В случае, если $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ — множество всех шаров, содержащихся в V, либо $\mathcal{A}$ — множество всех выпуклых открытых подмножеств V, определение 1 эквивалентно определениям 2 и 3.*

Доказательство. В [4] доказана эквивалентность определений 2 и 3.

Пусть V — область $\mathbb{R}^n$, отображение u принадлежит классу Соболева $W^1_p(V;Y)$, $1 < p < \infty$, согласно определению 2. Для любого y, для п. в. $x \in V$ и любого шара $B \subset V$, содержащего точку x, выполняется

$$|u_y(x) - [u_y]_B| \leq \operatorname{diam}(B) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B w(x) \right) dx.$$

Поскольку $p \in (1, \infty)$, максимальный оператор ограничен в $L_p(V)$. Обозначим $\tilde{w}(x) = M(w)(x)$.

Далее, получаем, что для любого $y \in Y$ для любого евклидова шара B содержащегося в области V и содержащего точку x найдется множество E меры нуль, такое, что выполняется оценка $\operatorname{diam}(u_y(B \setminus E)) \leq \tilde{w}(x)\operatorname{diam}(B)$, где $\tilde{w} = Mw$.

Учитывая, что $\operatorname{diam}(u(B \setminus E)) = \sup\limits_{y \in Y} \operatorname{diam}(u_y(B \setminus E))$ и то, что правая часть последнего неравенства не зависит от y, приходим к оценке $\operatorname{diam}(u(B \setminus E)) \leq \tilde{w}(x)\operatorname{diam}(B)$, где $\tilde{w} \in L_p(V)$ в силу ограниченности нормы максимального оператора в L_p для $1 < p < \infty$. В итоге, получаем, что $u \in W^{1,p}_{\mathcal{A}}(V; Y)$.

Обратно, предположим, что $u \in W^{1,p}_{\mathcal{A}}(V; Y)$. Покажем, что $u \in W^1_p(V; Y)$ согласно определению 3. Последнее означает, что L_p - нормы разностных метрических соотношений $\frac{\rho(u(x+he_i), u(x))}{h}$ ограничены равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Эту равномерную ограниченность нетрудно доказать исходя непосредственно из определения 1. $\square$

В случае, если на X и на Y задана линейная структура определение 1 можно обобщить следующим образом.

Определение 4. Пусть на декартовом произведении $X \times Y$ задан линейный проекционный оператор Π. Будем говорить, что отображение $u : V \to Y$, принадлежит пространству $W^{1,p}_{\Pi,\mathcal{A}}(V; Y)$, если функция

$$[\tilde{D}_{\Pi,\max} u](x) = \sup_{A \in \mathcal{A} : x \in A} \inf_{E : \mu(E) = 0} \frac{\operatorname{diam}(P_Y(\Pi(A \times u(A \setminus E)))}{\operatorname{diam}(P_X(\Pi(A \times u(A \setminus E)))}$$

принадлежит пространству $L_p(V)$.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега, область V ограничена. Пусть множество $\mathcal{A}$ состоит из всех выпуклых множеств, содержащихся в области V.

Пусть $\Pi(x; y) = (P_\alpha x; y)$, где P_α — проекция на фиксированную координатную плоскость или координатное направление $\mathbb{R}^n$ (можно полагать α вектором размерности n все координаты которого равны либо 0 либо 1, $P_\alpha x$ полагать равным скалярному произведению векторов α и x).

В этом случае, элементами $W^{1,p}_{\Pi,\mathcal{A}}(V; Y)$ являются функции, имеющими суммируемые в степени p обобщенные производные, причем обобщенные производные этих функций вдоль направлений ортогональных фиксированной координатной плоскости или координатному направлению (т. е. тем i для которых $\alpha_i = 0$) будут п. в. равны нулю.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, μ — мера Лебега, область V ограничена. Пусть множество $\mathcal{A}$ состоит из всех выпуклых множеств, содержащихся в области V.

Пусть $\Pi(x; y) = (P_\alpha(x); P_\beta(y))$, где P_α — проекция на фиксированную координатную плоскость или координатное направление $\mathbb{R}^n$, P_β — проекция на фиксированную координатную плоскость или координатное направление $\mathbb{R}^m$.

В этом случае, элементами $W^{1,p}_{\Pi,\mathcal{A}}(V; Y)$ являются вектор-функции чьи проекции на фиксированные на $\mathbb{R}^m$ направления имеют суммируемые в степени p обобщенные производные, равные (п.в.) нулю вдоль направлений ортогональных фиксированной на $\mathbb{R}^n$ координатной плоскости или фиксированному на $\mathbb{R}^n$ координатному направлению.

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$, μ — мера Лебега, область V ограничена. Пусть множество $\mathcal{A}$ состоит из всех выпуклых множеств, содержащихся в области V.

В этом случае, подбирая подходящим образом Π, можно построить пространство $W^{1,p}_{\Pi,\mathcal{A}}(V; Y)$ состоящим только из обобщенно дифференцируемых функций являющихся решениями a) уравнения $\mathrm{div}(u) = 0$, b) системы Коши-Римана, c) системы, которая означает, что линейный тензор упругости равен нулю.

Список литературы

[1] Решетняк Ю. Г., “Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве”, *Сиб. матем. журн.*, **38**:3 (1997), 657–675 Math-Net.Ru crossref.

[2] Решетняк Ю. Г., “Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:4 (2004), 855–870 Math-Net.Ru crossref.

[3] Решетняк Ю. Г., “К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:1 (2006), 146–168 Math-Net.Ru crossref.

[4] Водопьянов С. К., Романовский Н. Н., “Классы отображений Соболева на пространствах Карно–Каратеодори. Различные нормировки и вариационные задачи”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:5 (2008), 1028–1045 Math-Net.Ru crossref.

[5] Романовский Н. Н., “Теоремы вложения Соболева и некоторые их обобщения для отображений, заданных на топологическом пространстве с мерой”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2022, № 1, 25–37 Math-Net.Ru crossref.

On the commuting Killing Vector Fields on the Spheres

Saitova, Sayyora

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: sayorass1985@gmail.com

M. O. Katanaev has proposed an integrable model of gravity with torsion in two-dimensional spacetime, developed through the method of conformal blocks for constructing global solutions in gravity for arbitrary two-dimensional metrics admitting a single Killing vector field In his 2016 work [2], he examines Killing vector fields and homogeneous and isotropic universes, investigating fundamental theorems related to Killing vector fields.

In this paper we investigate the Killing vector fields on the spheres in Euclidian spaces. Unless otherwise specified obtain with Euclidian metric and appropriate coordinate system. And the vector fields on the sphere are the rotations with the center coincident the origin (center of the sphere).

Definition 1 ([1])**.** A vector field X on the Riemannian manifold (M, g) is called a Killing vector field if the infinitesimal transformations $\to X^t\,(x)$ generated by the vector field X are isometries.

Or, equivalently $L_X g = 0$, where L is the Lie derivative on (M, g).

Example 1. Let us consider the following vector fields on $R^2\,(x, y)$: $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. The generated maps are the translation along the axis Ox and the rotation around the origin. Both transformations are isometries of the plane. Consequently, these vector fields are Killing vector fields.

For a Killing vector field X and a real number λ the vector field $Y = \lambda X$ is also a Killing vector field, as the integral curves of the vector fields coincide as sets, only differing in their traversal speed. In this case, it is easy to verify $[X, Y] = 0$.

Frequently in mathematical physics models, the problem of finding Killing vectors for a given metric on a manifold is given. Each Killing field is associated with a one-parameter group of transformations, which in this case preserves the metric.

Proposal 1 ([2])**.** *Let $(M; g)$ be the Riemannian manifold and have $N \le \dim M$ nonzero commuting and independent Killing vector fields K_i, $i = 1, \dots, n$. Then there exists a coordinate system in which all metric components do not depend on N coordinates corresponding to Killing trajectories. Inversely, if in a certain coordinate system the components of a metric do not depend on N coordinates then the metric allows at least N commuting Killing vector fields.*

According to the stated statement, in the limiting case where the number of Killing commuting fields is equal to the dimension of the manifold i. e. $N = n$, there is a coordinate system in which all components of a metric are constant.

If a Riemannian manifold has two or more noncommuting Killing vector fields, this does not mean that there is a coordinate system in which the components of the metric do not depend on two or more coordinates.

Example 2. Let us consider the 2-sphere $S^2 \subset R^3$. The metric on the sphere g is induced via immersion $i : S^2 \to R^3$. Riemannian manifold $\left(S^2; g\right)$ has three Killing vector fields, according the group $SO\,(3)$ of rotations of Euclidian space R^3. These rotations are noncommuting.

Easy to show that there is no local coordinate system on a sphere in which the components of a metric do not depend on two coordinates. Indeed, this means that in a given coordinate system the components of the metric are constant and therefore the curvature is zero. But this is impossible because the curvature of the sphere is constant and non-zero.

Definition 2 ([7]). Define the orbit $L\,(x)$ of the family of vector fields D through the point x as the set of points y in M such that there exist real numbers $t_1, t_2, \ldots, t_k$ and vector fields $X_{i_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{i_k}$ in D (for all natural k) such that: $y = X_{i_k}^{t_k}\left(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}\left(\ldots\left(X_{i_1}^{t_1}\,(x)\right)\ldots\right)\right)$.

Theorem 1 ([1]). *Let X, Y are smooth vector fields on manifold M. Then the condition $X^t\,(Y^s\,(p)) = Y^s\,(X^t\,(p))$ (for commuting vector fields) is equivalent to $[X, Y] = 0$ for all $t, s \in R^1$ and $p \in M$.*

According the investigations given in [5–7] the invariant subspace of the rotations in Euclidian space has dimension 2, the space of the fixed points has dimension $(n-2)$, and according the S. Kobayasi $(n-2)$ is even. Also the origin is the center of our sphere. Further, in our research we investigate irreducible rotations on spheres (see example).

On the base of theorems from [6] we know that rotations has two dimensional invariant subspaces. For Spheres we have the sections of such invariant subspaces and the sphere, hence the invariant subset of rotation is the circle of the maximal radius, i. e. totally geodesic submanifold. The set of fixed points of such rotations are invariant subspace too, and due to Theorem of S. Kobayasi it has even dimension. So the set of fixed points on the Sphere is the sections with such subspaces.

Theorem 2 ([6]). *Let X, Y be the Killing vector fields generating the rotations in the Euclidian space (we call them "rotations"), and N_1, N_2 are the set fixed points* *of rotations and the same time (singularities for “rotations” X and Y). Then the Killing vector fields X and Y are commuting if either* $\dim N_1 = \dim N_2 = 0$ *or* $R^n = N_1 \oplus N_2$.

The invariant subspace of our rotations is orthogonally complement to the subspace of fixed points.

Corollary 1. *Invariant subspaces (including the origin) of linearly independent “rotations” on the sphere in the Euclidian space produce the orthogonal circles of maximal radius, i. e. orthogonally totally geodesic submanifolds of the sphere.*

In the Riemannian geometry, on the Riemannian manifold (M, g) with the Riemannian metric g, Levi-Civita connection ‘nabla’ for Killing vector fields, whose trajectories are the geodesics we have the following statement.

Theorem 3. *The given Killing vector fields (“rotations”) on the sphere are commuting iff* $\nabla_x Y = 0$ *and* $\nabla_y X = 0$.

Notation. The considered commuting vector fields have more than one fixed point.

References

[1] Kobayashi Sh., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*, **1**, Moscow: Nauka, 1981 (Russian translation).

[2] Катанаев М. О., “Векторные поля Киллинга и однородная и изотропная вселенная”, *УФН*, **186**:7 (2016), 763–775; *Phys. Usp.*, **59**:7 (2016), 689–700.

[3] Narmanov A. Ya., Saitova S., “On the geometry of orbits of Killing vector fields”, *Differ. Equ.*, **50**:12 (2014), 1582–1589.

[4] Narmanov A. Ya., Saitova S., “On the geometry of the reachable set of vector fields”, *Differ. Equ.*, **53**:3 (2017), 321–326.

[5] Саитова С. С., “О геометрической классификации орбит семейства векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах”, *Геометрия и топология*, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **197**, М.: ВИНИТИ РАН, 2021, 56–61 Math-Net.Ru crossref.

[6] Саитова С. С., “О коммутирующих векторных полях Киллинга”, *Узбекский матем. журн.*, **1** (2013), 109–117.

[7] Саитова С. С., “О геометрии орбит векторных полей Киллинга”, *Узбекский матем. журн.*, **4** (2016), 49–58.

Граничное поведение отображений классов Соболева на римановых многообразиях

Сбоев Д. А.*

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: dnlsboev@gmail.com

Исследование граничного поведения квазиконформных отображений восходит к работе К. Каратеодори, в которой было установлено, что такое отображение может быть продолжено до гомеоморфизма областей с обобщенными границами (простыми концами).

В докладе будут рассказаны результаты о граничном поведении отображений классов Соболева, обобщающих квазиконформные отображения, на римановых многообразиях. Исследуются вопросы граничного поведения отображений, изменяющих емкость контролируемым образом (например, обратные к $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмам в евклидовом случае), в терминах емкостных граничных элементов (см. [1] в случае евклидова пространства). С другой стороны, при некоторых ограничениях удается установить взаимосвязь между емкостной границей и границей в исходной геометрии.

Отметим, что есть альтернативный подход к построению обобщенной границы — простые концы (см. [2]), но эта конструкция не учитывает функционально-аналитические особенности отображений.

Список литературы

[1] Vodopyanov S. K., Molchanova A. O., “The boundary behavior of $\mathcal{Q}_{p,q}$-homeomorphisms”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **87**:4 (2023), 47–90 Math-Net.Ru crossref.

[2] Adamowicz T., Björn A., Björn J., Shanmugalingam N., “Prime ends for domains in metric spaces”, *Adv. Math.*, **238** (2013), 459–505 crossref.

*Работа подготовлена в рамках выполнения гранта РНФ, проект № 23-21-00359.

О лучевых преобразованиях моментов, действующих на двумерные тензорные поля

Светов, Иван Евгеньевич*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: svetovie@math.nsc.ru

Лучевым преобразованиям моментов тензорных полей в последние несколько лет посвящено довольно много работ (см., например, [1–3]). В этих работах исследуются традиционные вопросы реконструкции тензорных полей ранга m. Отметим, что практически во всех работах в качестве данных используются продольные лучевые преобразования моментов. В данном докладе, используя детальные разложения двумерных симметричных 2-тензорных полей, устанавливаются новые свойства лучевых преобразований моментов. Рассматриваются не только продольные, но и поперечные и смешанные лучевые преобразования моментов.

Единичные векторы $\xi = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\eta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ при $\theta \in [0, 2\pi)$ и число $s \in \mathbb{R}$ определяют прямую $L_{\xi,s} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = s\xi + t\eta,\ t \in \mathbb{R}\}$. *Преобразование Радона* $\mathcal{R}$ определяется как интеграл от функции f вдоль прямых $L_{\xi,s}$ для всех s, ξ:

$$(\mathcal{R}f)(s,\xi) = (\mathcal{R}f)(s,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s\xi + t\eta)dt.$$

Рассматривается один из вариантов интегральных операторов, порождаемых преобразованием Радона. Именно, *лучевые преобразования моментов* тензорных полей

$$(\mathcal{P}^{(j)}_{km}\mathbf{w})(s,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \sum_{i_1,..,i_m=1}^{2} w_{i_1\dots i_m}(s\xi + t\eta)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_j}\eta^{i_{j+1}}\dots\eta^{i_m}dt.$$

Здесь индекс m определяет ранг тензорного поля, $k \geqslant 0$ — порядок моментов, индекс (j), $0 \leqslant j \leqslant m$ отвечает за количество компонент нормального вектора ξ. При $j = m = 0$ получаем преобразование Радона $\mathcal{P}^{(0)}_{k0}$ с весом t^k, которое при $k = 0$ совпадает с преобразованием Радона: $\mathcal{P}^{(0)}_{00}f = \mathcal{R}f$. Напомним, что при $j = 0$ лучевые преобразования называются *продольными*,

*Работа осуществлена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00200).

при $j = m$, $m \geqslant 1$ — *поперечными*, а при $0 < j < m$, $m \geqslant 2$ — *смешанными*. При $k = 0$ эти операторы исследовались в [4]. Нас будет интересовать случай $m = 2$ и связи со случаем $m = 0$.

Операторы *внутреннего дифференцирования* d и *внутреннего $\perp$-дифференцирования* $\mathrm{d}^{\perp}$ действуют на функцию f и векторное поле $\mathbf{v}$:

$$(\mathrm{d}f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (\mathrm{d}\mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$
$$(\mathrm{d}^{\perp}f)_i = (-1)^i \frac{\partial f}{\partial x_{3-i}}, \qquad (\mathrm{d}^{\perp}\mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}\left((-1)^j \frac{\partial v_i}{\partial x_{3-j}} + (-1)^i \frac{\partial v_j}{\partial x_{3-i}}\right).$$

Напомним, что симметричное m-тензорное поле $\mathbf{w}$ называется *потенциальным*, если существует тензорное поле $\mathbf{v}$ такое, что $\mathbf{w} = \mathrm{d}\mathbf{v}$. Тензорное поле $\mathbf{w}$ — *соленоидальное*, если его дивергенция равна нулю: $\delta\,\mathbf{w} = 0$. Более того, известно [5], что существует ψ такое, что $\mathbf{w} = (\mathrm{d}^{\perp})^2\psi$.

Будем рассматривать поля с ограниченным носителем, сосредоточенным внутри единичного круга B. Хорошо известно [6], что любое симметричное m-тензорное поле w может быть единственным образом разложено на сумму соленоидальной и потенциальной частей

$$\mathbf{w} = {}^s\mathbf{w} + \mathrm{d}\mathbf{v}, \qquad \delta\,{}^s\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{v}\big|_{\partial B} = 0.$$

Для 2-тензорного поля $\mathbf{w}$ существует [5] более детальное разложение

$$w = \mathrm{d}^2\varphi + \mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp}\chi + (\mathrm{d}^{\perp})^2\psi,$$

где $\varphi, \chi, \psi \in H^2(B)$, $\varphi\big|_{\partial B} = 0$, $(\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}^{\perp}\chi)\big|_{\partial B} = 0$.

Основные результаты приведены в следующих утверждениях.

Лемма 1. *Для произвольного $k \geqslant 0$ и функции $\varphi \in H^2(B)$ имеют место следующие связи между продольным, поперечным и смешанным лучевыми преобразованиями момента k:*

$$\mathcal{P}^{(0)}_{k2}\mathrm{d}^2\varphi = \mathcal{P}^{(2)}_{k2}(\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi, \qquad \mathcal{P}^{(1)}_{k2}\mathrm{d}^2\varphi = -\mathcal{P}^{(2)}_{k2}\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp}\varphi,$$
$$\mathcal{P}^{(0)}_{k2}\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp}\varphi = -\mathcal{P}^{(2)}_{k2}\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp}\varphi, \qquad \mathcal{P}^{(1)}_{k2}\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp}\varphi = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{P}^{(2)}_{k2}\mathrm{d}^2\varphi - \mathcal{P}^{(2)}_{k2}(\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi\Big),$$
$$\mathcal{P}^{(0)}_{k2}(\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi = \mathcal{P}^{(2)}_{k2}\mathrm{d}^2\varphi, \qquad \mathcal{P}^{(1)}_{k2}(\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi = \mathcal{P}^{(2)}_{k2}\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp}\varphi.$$

Из Леммы 1 следует, что можно исследовать только один из типов операторов, например, продольные лучевые преобразования моментов.

Лемма 2. *Пусть* $\mathrm{d}^2\varphi$, $\mathrm{d}\mathrm{d}^\perp\chi$, $(\mathrm{d}^\perp)^2\psi$ *— 2-тензорные поля с потенциалами* $\varphi,\chi,\psi \in H_0^2(B)$, *тогда имеют место следующие связи поперечных лучевых преобразований* $\mathcal{P}_{k2}^{(2)}$, $k=0,1,2$ *и преобразования Радона* $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{02}^{(2)}\mathrm{d}^2\varphi = (\mathcal{R}\varphi)''_{ss}, && \mathcal{P}_{02}^{(2)}\mathrm{d}\mathrm{d}^\perp\chi = 0, && \mathcal{P}_{02}^{(2)}(\mathrm{d}^\perp)^2\psi = 0,\\
&\mathcal{P}_{12}^{(2)}\mathrm{d}^2\varphi = -(\mathcal{R}\varphi)''_{s\theta}, && \mathcal{P}_{12}^{(2)}\mathrm{d}\mathrm{d}^\perp\chi = (\mathcal{R}\chi)'_{s}, && \mathcal{P}_{12}^{(2)}(\mathrm{d}^\perp)^2\psi = 0,\\
&\mathcal{P}_{22}^{(2)}\mathrm{d}^2\varphi = (\mathcal{R}\varphi)''_{\theta\theta} - (s\,\mathcal{R}\varphi)'_{s}, && \mathcal{P}_{22}^{(2)}\mathrm{d}\mathrm{d}^\perp\chi = -2(\mathcal{R}\chi)'_{\theta}, && \mathcal{P}_{22}^{(2)}(\mathrm{d}^\perp)^2\psi = 2\,\mathcal{R}\psi.
\end{aligned}$$

Из Леммы 2 и свойств операторов $\mathcal{P}_{02}^{(j)}$, $j=0,1,2$ (см., например, [5]) следуют связи между поперечными лучевыми преобразованиями $\mathcal{P}_{k2}^{(0)}$ моментов $k=0,1,2$ и лучевыми преобразованиями $\mathcal{P}_{02}^{(j)}$, $j=0,1,2$.

Теорема. *Для симметричного 2-тензорного поля* $\mathbf{w} = \mathrm{d}^2\varphi + \mathrm{d}\mathrm{d}^\perp\chi + (\mathrm{d}^\perp)^2\psi$ *с потенциалами* $\varphi,\chi,\psi \in H_0^2(B)$ *имеют место следующие связи между поперечными лучевыми преобразованиями* $\mathcal{P}_{k2}^{(0)}$, $k=0,1,2$ *и лучевыми преобразованиями* $\mathcal{P}_{02}^{(j)}$, $j=0,1,2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{02}^{(2)}\mathrm{d}^2\varphi &= \mathcal{P}_{02}^{(2)}\mathbf{w},\\
\mathcal{P}_{02}^{(1)}\mathrm{d}\mathrm{d}^\perp\chi &= \frac{1}{2}\big((\mathcal{P}_{12}^{(2)}\mathbf{w})'_s + (\mathcal{P}_{02}^{(2)}\mathbf{w})'_\theta\big),\\
\mathcal{P}_{02}^{(0)}(\mathrm{d}^\perp)^2\psi &= \frac{1}{2}\big((\mathcal{P}_{22}^{(2)}\mathbf{w})''_{ss} + 2(\mathcal{P}_{12}^{(2)}\mathbf{w})''_{s\theta} + (\mathcal{P}_{02}^{(2)}\mathbf{w})''_{\theta\theta} + 3\mathcal{P}_{02}^{(2)}\mathbf{w} + s\,(\mathcal{P}_{02}^{(2)}\mathbf{w})'_s\big).
\end{aligned}$$

Таким образов в докладе установлены связи лучевых преобразований моментов и хорошо изученных ранее операторов преобразования Радона и лучевых преобразований $\mathcal{P}_{02}^{(j)}$, $j=0,1,2$.

Список литературы

[1] Krishnan V. P., Manna R., Sahoo S. K., Sharafutdinov V. A., "Momentum ray transforms", *Inverse Probl. Imaging.*, **13**:3 (2019), 679–701 crossref.

[2] Mishra R. K., "Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in $\mathbb{R}^n$", *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **28**,:2 (2020), 173–184 crossref.

[3] Derevtsov E. Yu., "Ray transforms of the moments of planar tensor fields", *J. Appl. Ind. Math.*, **17**:3 (2023), 521–534 crossref.

[4] Derevtsov E. Yu., Svetov I. E. paper Tomography of tensor fields in the plain, *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, **3**:2 (2015), 24–68.

[5] Svetov I. E., "Properties of the ray transforms of two-dimensional 2-tensor fields defined in the unit disk", *J. Appl. Industr. Math.*, **8**:1 (2014), 106–114 crossref.

[6] Sharafutdinov V. A., *Integral Geometry of Tensor Fields*, Utrecht: VSP, 1994.

About Bellman principle and solution properties for Navier–Stokes equations in the 3d Cauchy problem

Vladimir Semenov

I. Kant Baltic Federal University, Russia

e-mail: visemenov@rambler.ru

Without belittling the achievements of many mathematicians in the studying of the Navier-Stokes equations the real ways were opened by J. Leray and O. A. Ladyzhenskaya. The main goal of this work is to compare the smoothness property of a weak solution in the Cauchy problem after some moment if the solution regularity is known until that moment with the optimality property in the Bellman principle. Naturally, all this is connected with the existence problem of the blow up solution in the Cauchy problem for Navier–Stokes equations in the space attracting a lot of attention up to now. The smoothness control and controlling parameters can be varied. It is important to control the dissipation of kinetic energy to the fix moment or rate of change of kinetic energy square or the summability of velocity gradient to the fixed point in time etc. There are possible other control parameters which due to a weak solution.

Quantum-Spacetime Symmetries: A Principle of Minimum Group Representation

Diego Julio Cirilo-Lombardo

M. V. Keldysh Institute of the Russian Academy of Sciences, Federal Research Center-Institute of Applied Mathematics, Miusskaya sq. 4, 125047 Moscow, Russia;

Departamento de Fisica, Instituto de Fisica Interdisciplinaria y Aplicada (INFINA), CONICET-Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires C1428EGA, Argentina

e-mail: diego777jcl@gmail.com

We show that, as in the case of the principle of minimum action in classical and quantum mechanics, there exists an even more general principle in the very fundamental structure of quantumspacetime: this is the principle of minimal group representation, which allows us to consistently and simultaneously obtain a natural description of spacetime's dynamics and the physical states admissi-ble in it. The theoretical construction is based on the physical states that are average values of the generators of the metaplectic group Mp(n), the double covering of SL(2C) in a vector representation,with respect to the coherent states carrying the spin weight. Our main results are [1]:

(i) There exists a connection between the dynamics given by the metaplectic-group symmetry generators and the physical states (the mappings of the generators through bilinear combinations of the basic states)

$$\underbrace{g_{ab} \;=\; \left\langle \psi \,\middle|\, M_{ab} \,\middle|\, \psi \right\rangle}$$

Physical States, spacetime metric

(*Observables*)

$$\nearrow \qquad\qquad\qquad\qquad \nwarrow$$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} Mp(n) \ni \\ \textit{Coherent States} \\ (\textit{basic states}) \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \psi_+, \psi_-, \\ \psi_A, \psi_S \end{array} \right. & \leftrightarrow & & \begin{array}{c} \textit{Generators}: \ M_{ab} \\ (\textit{group manifold,} \\ \textit{phase space} \\ \textit{symmetries}) \end{array} \end{array}$$

(ii) The ground states are coherent states of the Perelomov–Klauder type defined by the action of the metaplectic group that divides the Hilbert space into even and odd states that are mutually orthogonal. They carry spin weight of 1/4 and 3/4, respectively, from which two other basic states can be formed.

(iii) The physical states, mapped bilinearly with the basic 1/4- and 3/4-spin-weight states, plus their symmetric and antisymmetric combinations, have spin contents s = 0, 1/2, 1, 3/2 and 2.

(iv) The generators realized with the bosonic variables of the harmonic oscillator introduce a natural supersymmetry and a superspace whose line element is the geometrical Lagrangian of our model.

(v) From the line element as operator level, a coherent physical state of spin 2 can be obtained and naturally related to the metric tensor.

(vi) The metric tensor is naturally discretized by taking the discrete series given by the basic states (coherent states) in the n number representation, reaching the classical (continuous) spacetime for $n \to \infty$.

(vii) There emerges a relation between the eigenvalue aof our coherent-state metric solution and the black-hole area (entropy) as $A_{bh}/4lp^2 = |\alpha|$, relating the phase space of the metric found, g_{ab}, and the black hole area, A_{bh}, through the Planck length lp^2 andthe eigenvalue $|\alpha|$ of the coherent states. As a consequence of the lowest level of the quantum-discrete-spacetime spectrum—e.g., the ground state associated to $n = 0$ and its characteristic length—there exists a minimum entropy related to the black-hole history.

Список литературы

[1] Cirilo-Lombardo D. J., Sanchez N. G., "Quantum-Spacetime Symmetries: A Principle of Minimum Group Representation", *Universe*, **10**:1 (2024), 22 crossref.

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и модели динамики популяций

Скворцова М. А.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: sm-18-nsu@yandex.ru

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом широко используются при моделировании различных биологических процессов. В частности, широко распространены модели динамики популяций, описываемые такими уравнениями. Запаздывания, возникающие в уравнениях, могут отвечать, в том числе, за время взросления особей популяции, время задержки реакции на внешние изменения, время восстановления ресурсов, время миграции особей между разными территориями и т. д.

При изучении конкретных моделей в первую очередь рассматриваются вопросы существования, единственности решений начальных задач, непрерывной зависимости решений от начальных данных, т. е. корректность поставленной задачи. Важным аспектом также является исследование качественных свойств решений, в частности, знакоопределенность и ограниченность решений, существование стационарных и периодических решений, их устойчивость.

В последнее время активно развивающимся направлением в теории устойчивости является получение оценок, характеризующих скорость стабилизации решений на бесконечности, и нахождение областей притяжения асимптотически устойчивых решений. При проведении исследований в данном направлении широко используется метод функционалов Ляпунова — Красовского (см., например, [1]).

В настоящей работе мы покажем, как результаты работы [1] можно применить к исследованию моделей динамики популяций.

Список литературы

[1] Demidenko G. V., Matveeva I. I., “The second Lyapunov method for time-delay systems”, *Functional Differential Equations and Applications*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **379**, ed. Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S., Singapore: Springer Nature, 2021, 145–167 crossref.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

О прямоугольном операторе Харди в весовых пространствах Лебега

В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия; Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

e-mail: stepanov@mi-ras.ru, elenau@inbox.ru

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^n_+ := (0,\infty)^n$ функций n-мерный прямоугольный оператор Харди задан формулой

$$I_n f(x_1,\dots,x_n) := \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n \qquad (x_1,\dots,x_n>0).$$

Пусть $0<p,q\le\infty, 1\le p\le\infty$ и $v,w\ge 0$ весовые функции на $\mathbb{R}^n_+$. Весовое пространство Лебега $L^p_v(\mathbb{R}^n_+)$ состоит из всех измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций f таких, что $\|f\|^p_{p,v} := \int_{\mathbb{R}^n_+} |f|^p v < \infty$. В докладе рассматривается задача о характеризации интегрального неравенства $\big\|I_n f\big\|_{q,w} \le C_n \|f\|_{p,v},\ f \in L^p_v(\mathbb{R}^n_+)$, и свойствах оператора Харди.

Список литературы

[1] Stepanov V. D., Ushakova E. P., “On weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator — extension of the E. Sawyer theorem”, *Math. Inequal. Appl.*, **24**:3 (2021), 617–634 crossref.

[2] Степанов В. Д., Ушакова Е. П., “Об ограниченности и компактности двумерного прямоугольного оператора Харди”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **506** (2022), 68–72 Math-Net.Ru crossref.

[3] Stepanov V. D., Ushakova E. P., “Compactness of the two-dimensional rectangular Hardy operator”, *Math. Inequal. Appl.*, **25**:2 (2022), 535–549 crossref.

[4] Stepanov V. D., Ushakova E. P., “Weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator: the case $q<p$”, *Math. Inequal. Appl.*, **26**:1 (2023), 267–288 crossref.

[5] Степанов В. Д., Ушакова Е. П., “Об аппроксимативных числах двумерного прямоугольного оператора Харди”, *Матем. зам.*, **115**:3 (2024), 422–438 Math-Net.Ru crossref.

Спектральный критерий степенной скорости сходимости в эргодической теореме для $\mathbb{Z}^d$ действий

В. Э. Тодиков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: v.todikov@g.nsu.ru

Доклад основан на совместной работе с Качуровским, Подвигиным, Хакимбаевым [1], обобщающей результат работы [2]. Доказана эквивалентность степенной скорости сходимости в L_2-норме эргодических средних для $\mathbb{Z}^d$ действий и степенной же оценки спектральной меры симметричных d-мерных параллелепипедов: для показателей степеней, являющихся корнями некоторого специального симметрического многочлена от d переменных. При этом в случае $d = 1$ накрывается весь возможный диапазон степенных скоростей.

Список литературы

[1] Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э., Хакимбаев А. Ж., “Спектральный критерий степенной скорости сходимости в эргодической теореме для $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ действий”, *Сиб. матем. журн.*, **65**:1 (2024), 92–114 Math-Net.Ru crossref.

[2] Качуровский А. Г., “О сходимости средних в эргодической теореме для групп $\mathbb{Z}^d$”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. III*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **256**, СПб.: ПОМИ, 1999, 121–128 Math-Net.Ru crossref.

Характеризация абсолютно непрерывных и соболевских кривых с помощью липшицевых пост-композиций

А. И. Тюленев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
e-mail: tyulenev-math@yandex.ru, tyulenev@mi-ras.ru

Основываясь на некоторых идеях работы Л. Амброзио [1], Ю. Г. Решетняк [2] ввел определение пространств Соболева $W_p^1(\Omega, \mathrm{Y})$ отображений (далее мы отождествляем борелевское отображение с его классом эквивалентности по модулю совпадения почти всюду) из ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в произвольное полное сепарабельное метрическое пространство Y. Более точно, при $p \in (1, \infty)$ отображение $u \in L_p(\Omega, \mathrm{Y})$ принадлежит пространству $W_p^1(\Omega, \mathrm{Y})$, если существует такая неотрицательная функция $G \in L_p(\Omega)$, что для любой липшицевой функции $h : \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$, пост-композиция $h \circ u$ принадлежит классическому пространству Соболеву $W_p^1(\Omega, \mathbb{R})$, и при этом

$$|D(h \circ u)(t)| \leq \operatorname{lip} h(u(t)) G(t) \quad \text{при } \mathcal{L}^n\text{-п.в. } x \in \Omega,$$

где $\mathcal{L}^n$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $D(h \circ u)$ — обобщенный по Соболеву дифференциал, а $\operatorname{lip} h$ — локальная константа Липшица функции h.

Оказывается, по крайней мере в одномерном случае, возможно убрать из этого определения требование наличия мажоранты G и получить более простую характеризацию. Более точно, в совместной работе автора и Р. Д. Олейника [3] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ *— полное сепарабельное метрическое пространство. При* $p \in (1, \infty)$ *отображение* $\gamma : [a, b] \to \mathrm{X}$ *принадлежит классу* $W_p^1([a, b], \mathrm{X})$ *в том и только том случае, если* $h \circ \gamma$ *принадлежит пространству* $W_p^1([a, b], \mathbb{R})$ *для любой липшицевой на* X *функции* h.

Список литературы

[1] Ambrosio L., "Metric space valued functions of bounded variation", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **17** (1990), 439–478.

[2] Reshetnyak Yu. G., "Sobolev classes of functions with values in a metric space", *Sibirsk. Mat. Zh.*, **38** (1997), 657–675.

[3] Oleinik R. D., Tyulenev A. I., *Characterization of AC and Sobolev curves via Lipschitz post-compositions*, 2024, arXiv: 2408.08762v2.

Приложения неравенств для операторов Римана–Лиувилля

Ушакова, Елена Павловна*

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
e-mail: elenau@inbox.ru

В работах [2–5] рассматривались неравенства, связывающие нормы образов и прообразов интегральных операторов Римана–Лиувилля [1] положительных порядков в весовых пространствах Бесова. Там же были получены достаточные условия для их выполнения. Совсем недавно формулировки некоторых из этих результатов были улучшены до критериев. На этой основе в докладе представлены теоремы об оценках на аппроксимативные и энтропийные числа операторов Римана–Лиувилля. Обновленные результаты также применяются для решения задачи об ограниченности преобразования Гильберта в весовых пространствах Бесова.

Список литературы

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения*, М.: Наука и техника, 1987.

[2] Ушакова Е. П., “Образы операторов интегрирования в весовых функциональных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **63**:6 (2022), 1382–1410 Math-Net.Ru crossref.

[3] Ушакова Е. П., Ушакова К. Э., “Неравенства для норм с дробными интегралами”, *Алгебра и анализ*, **35**:3 (2023), 185–219 Math-Net.Ru.

[4] Ushakova E. P., “Boundedness of the Hilbert transform in Besov spaces”, *Anal. Math.*, **49**:4 (2023), 1137–1174 crossref.

[5] Ushakova E. P., “The study by splines of norm inequalities for Riemann–Liouville operators in weighted Besov spaces”, *J. Math. Sc.*, 2024 crossref.

*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 24-11-00170, https://rscf.ru/project/24-11-00170/).

Теорема Якоби-Шаля в неевклидовых пространствах*

А. Т. Фоменко, Г. В. Белозеров

Согласно классической теореме Якоби-Шаля геодезический поток на n-осном эллипсоиде в евклидовом n-мерном пространстве является интегрируемым. Более того, касательные прямые, проведенные в каждой точке геодезической на эллипсоиде, одновременно касаются $n-2$ квадрик, софокусных с эллипсоидом и общих для всех точек этой геодезической (см. [1, 2]).

Напомним, что *семейством софокусных квадрик в евклидовом n-мерном пространстве* $\mathbb{R}^n$ называется множество квадрик, заданных уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n-\lambda}=1,$$

где $a_1<\cdots<a_n$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр.

Не так давно В. А. Кибкало исследовал вопрос об интегрируемости геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик. Он показал, что если размерность пересечения равна двум, то такая система будет интегрируемой. Как оказалось, верен более общий факт.

Теорема 1 (Белозеров). *Пусть $Q_1,\ldots,Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики в $\mathbb{R}^n$ различных типов и $Q=\bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$. Тогда*

1. *геодезический поток на Q квадратично интегрируем;*
2. *касательные линии, проведенные во всех точках геодезической на Q, касаются помимо $Q_1,\ldots,Q_k$ еще $n-k-1$ софокусных с ними квадрик, общих для всех точек данной геодезической.*

Доказательство теоремы 1 подробно изложено в работе [3].

Замечание 1. Пересечение нескольких софокусных квадрик в $\mathbb{R}^n$ диффеоморфно прямому произведению вида $\mathbb{R}^{k_0}\times S^{k_1}\times\cdots\times S^{k_m}$ (здесь S^{k_i} — сфера размерности k_i). При этом, числа $m,k_0,\ldots,k_m$ определяются следующим образом. Обозначим через $i_1\leqslant\cdots\leqslant i_m$ номера эллиптических координат, зафиксированных на пересечении софокусных квадрик, и положим $i_0=0$, $i_{m+1}=n+1$ тогда $k_j=i_{j+1}-i_j-1$ для всех $j=0,\ldots,m$. Доказательство этого факта также изложено в работе [3].

*Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ №22-71-10106, https://rscf.ru/en/project/22-71-10106/

Аналог классической теоремы Якоби-Шаля для пространств $\mathbb{R}^{p,q}$ был доказан Б. Хесиным и С. Табачниковым. Как оказалось, в псевдоевклидовых пространствах также верен аналог теоремы 1.

Зачастую оказывается так, что если некоторое утверждение справедливо в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах, то непременно существует аналог этого факта для пространств постоянной кривизны. Основываясь на этом соображении, А. Т. Фоменко предположил, что обобщенная теорема Якоби-Шаля должна выполняться на сферах S^n, проективных пространствах $\mathbb{R}P^n$, пространствах Лобачевского L^n произвольной размерности (со стандартными римановыми метриками) и, возможно, для фактор-пространств S^n и L^n по дискретным подгруппам групп изометрий. Как оказалось, эта гипотеза верна. Она является следствием обобщенной теоремы Якоби-Шаля для евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Помимо этого, нам удалось доказать, что в случае размерности 2 многообразие, на котором любой малый круговой геодезический биллиард квадратично интегрируем, локально изометрично либо двумерной сфере, либо плоскости Лобачевского, либо евклидовой плоскости, т.е. пространствам постоянной кривизны (положительной, отрицательной, нулевой). Это наталкивает на мысль о том, что обобщенная теорема Якоби-Шаля может быть справедлива только в случае пространств постоянной секционной кривизны по двумерным направлениям.

Список литературы

[1] Якоби К., *Лекции по динамике*, М.: Гостехиздат, 1936.

[2] Chasles M., “Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **11** (1846), 5–20.

[3] Белозеров Г. В., “Интегрируемость геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **509** (2023), 5–7.

Равномерная сходимость на подпространствах в эргодической теореме фон Неймана с дискретным временем

А. Ж. Хакимбаев

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: a.khakimbaev@g.nsu.ru

В работе изучается степенная равномерная (в операторной норме) сходимость на векторных подпространствах со своими нормами в эргодической теореме фон Неймана с дискретным временем [1]. Найдены все возможные показатели степени рассматриваемой степенной сходимости; для каждого из этих показателей даны спектральные критерии такой сходимости и получено полное описание всех таких подпространств. Равномерная сходимость на всем пространстве имеет место лишь в тривиальных случаях, что объясняет интерес к равномерной сходимости именно на подпространствах.

Кроме того, попутно обобщены и уточнены старые оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана [2].

Список литературы

[1] Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Хакимбаев А. Ж., “Равномерная сходимость на подпространствах в эргодической теореме фон Неймана с дискретным временем”, *Мат. заметки*, **113**:5 (2023), 713–730 Math-Net.Ru crossref.

[2] Качуровский А. Г., Седалищев В. В., “Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа”, *Матем. сб.*, **202**:8 (2011), 21–40 Math-Net.Ru crossref.

Многомерные вычеты и фейнмановские интегралы

А. К. Цих

Институт математики и фундаментальной информатики, СФУ, Красноярск

Теория многомерных вычетов берёт своё начало от статей А. Пуанкаре и Е. Пикара 1886 г., в которых были обозначены основные моменты теории 2-мерных вычетов. В первой половине 20-го века не было существенных продвижений в размерности $n \geq 3$. В 1969 г. Ф. Гриффитс опубликовал большой труд (Ann. Math.) о многомерной теории вычетов в комплескном проективном пространстве. Основным мотивом его исследования была гипотеза Ходжа о геометрической структуре гармонических дифференциальных форм (одна из 7-ми проблем тысячелетия по версии института Клеа). Этот интерес Гриффитса объясняется тем, что концепция вычета в виде интеграла включает в себя подынтегральную диффереciальную форму (персонаж из дифференциальной геометрии) и множество интегрирования в роли гомологического класса (из алгебраической топологии).

Однако, более популярным результатом Гриффитса стало укрепление веры о гипергеомеричности вычетов как функций от переменных коэффициентов полярного многочлена. Полная ясность была установлена теоремой В. Батырева (Duke Math., 1993) о гипергеометричности по ГКЗ (Гельфанду – Капранову – Зелевинскому) вычетов в торических многообразиях.

В докладе предполагается на языке многомерных вычетов осветить связь между концепциями «гипергеометрические функции» и «фейнмановские интегралы квантовой теории поля».

Основная часть новых результатов получена совместно с И. А. Антиповой.

On the Solvability of Some Nonlinear Differential Equations

A. V. Chueshev, N. A. Chuesheva
Kemerovo State University, Kemerovo, Russia
e-mail: chueshev@mail.ru, chuesheva@mail.ru

At present, in Russia and abroad, there has been a significant growth of interest in explicit exact solutions to a number of nonlinear partial differential equations related to solutions to the well-known Korteweg–de Vries equations and other nonlinear equations. In 2010 K. Tomoeda found conditions for the well-posedness of the Cauchy problem for the fifth-order Korteweg–de Vries (KdV) equation. In 2016 Bing-Yu Zhang and Deqin Zhou considered the fifth-order KdV equation with an additional term and investigated the continuity and uniform continuity of the boundary value problem on a finite interval with respect to the spatial variable.

In Section 1, we find several exact solutions to the fifth-order Korteweg–de Vries equation (KdV). Conditions are found for the coefficients of such equations and boundary conditions under which solutions to the KdV equations vanish almost everywhere in a bounded domain. We give examples of solutions to these equations that are bounded real functions in some domains and are unbounded functions on other domains in $\mathbb{R}^2$. Moreover, in some domains of the complex plane, they are $\mathbb{C}$-differentiable functions or there is no domain on the complex plane where the solutions are $\mathbb{C}$-differentiable functions.

In Section 2, we consider several ill-posed statements of boundary value problems for a third-order nonlinear partial differential equation written down in V. K. Beloshapka's paper. We also find several exact real and complex solutions to this equation.

In Section 3, we consider the second-order nonlinear equation $Lu \equiv au_{xx}(u_y)^2 + cu_{xy}u_xu_y + bu_{yy}(u_x)^2 = f(u, u_x, u_y, x, y)$. Under certain conditions on the right-hand side of the equation and the coefficients, we obtain an a priori estimate of the solution. For different right-hand sides, coefficients, and domains of definition for this equation, we study the solvability of the equation. For $a = b = 1, c = -2, f(u, u_x, u_y, x, y) = 0$, this equation was considered on the conference "December Readings — 2017" in M. L. Bialy's talk, based on the joint work with A. E. Mironov, and in A. A. Glutsyuk's talk at the conference "Dynamics in Siberia" on March 2, 2022.

References

[1] Chueshev A., Chuesheva N., "On the Solvability of Some Nonlinear Differential Equations", *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*, **5**:3 (2022), Article 3.

Формулы Решетняка и уравнения Йона в тензорной томографии

Шарафутдинов, Владимир А.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск

e-mail: sharafut@list.ru

Классическая формула Решетняка для преобразования Радона R утверждает, что

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|Rf\|_{H^{(n-1)/2}_{(n-1)/2}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R})}$$

для определенной на $\mathbb{R}^n$ функции f. Эта формула обобщается на соболевские нормы

$$\|f\|_{H^s_t(\mathbb{R}^n)} = \|Rf\|_{H^{s+(n-1)/2}_{t+(n-1)/2}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R})}.$$

Аналогичная формула справедлива для лучевого преобразования I

$$\|If\|^2_{H^{s+1/2}_{t+1/2}(T\mathbb{S}^{n-1})} = \sum_{k=0}^{[m/2]} a_k \|j^k({}^s\!f)\|^2_{H^s_t(\mathbb{R}^n;S^{m-2k}\mathbb{R}^n)}, \tag{1}$$

где ${}^s\!f$ — соленоидальная часть симметричного тензорного поля f валентности m, j — свертка с тензором Кронекера, $a_k = a_k(m,n)$ — некоторые положительные коэффициены, $[m/2]$ — целая часть числа $m/2$.

В классической работе Йона (1938) доказано, что функция $\varphi \in \mathcal{S}(T\mathbb{S}^2)$ является лучевым преобразованием некоторой функции из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению второго порядка. Этот результат обобщен Хелгасоном на лучевое преобразование скалярных функций на $\mathbb{R}^n$ для произвольного $n \geq 3$; вместо одного уравнения здесь появляется система дифференциальных уравнений второго порядка. Позже автор перенес эти результаты на лучевое преобразование симметричных тензорных полей валентности m на $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$; здесь появляется система дифференциальных уравнений порядка $2(m+1)$, которые по-прежнему называются уравнениями Йона. Подчеркнем, что все перечисленные результаты относятся к характеризации образа лучевого преобразования на пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; S^m\mathbb{R}^n)$ гладких быстро убывающих тензорных полей.

В настоящей работе мы характеризуем образ лучевого преобразования на соболевском пространстве $H^s_t(\mathbb{R}^n; S^m\mathbb{R}^n)$ $(n \geq 3)$. Уравнения Йона, понимаемые в смысле теории распределений, остаются необходимыми и достаточными условиями для принадлежности функции образу лучевого преобразования. В отличие от случая пространства Шварца, формула Решетняка (1) играет решающую роль в доказательстве.

Это совместная работа с Venkateswaran P. Krishnan (TIFR CAM, Bangalore, India).

Операторы Стокса, ассоциированные с эллиптическими комплексами*

Шлапунов Александр Анатольевич[1], Полковников Александр Николаевич[1], Миронов Виктор Леонидович[2]

[1] *Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*

[2] *Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород*

e-mail: ashlapunov@sfu-kras.ru, paskaattt@yandex.ru, mironov@ipmras.ru

Мы предлагаем новый способ генерации систем квази-линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые потенциально могут описывать модели современного естествознания. Подобные системы появляются в таких типичных конструкциях гомологической алгебры как комплексы дифференциальных операторов, описывающих условия совместности переопределенных систем уравнений. Соответствующие модели могут быть как стационарными, так и эволюционными. Дополнительное предположение об эллиптичности комплекса приводят к рассмотрению широкого класса эллиптических, параболических и гиперболических, операторов, которые могут быть сгенерированы на этом пути. Оказывается, что значительное число уравнений современной математической физики порождено комплексом де Рама дифференциалов на внешних дифференциальных формах. В частности, так получаются эллиптические операторы Лапласа и Ламе, параболический оператор теплопроводности, уравнения Эйлера и Навье-Стокса в гидродинамике, гиперболическое волновое уравнение и уравнения Максвелла в электродинамике, уравнение Клейна-Гордона и уравнения релятивистской квантовой механики. Предложенный нами генератор моделей покрывает широкий класс систем квазилинейных уравнений, особенно в случае высоких пространственных размерностей, благодаря использованию отличных от традиционных для (математической) физики алгебраических структур.

Опишем конструкцию в самом простом случае, когда изначально рассматривается дифференциальный оператор $A(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ с постоянными коэффициентами на $\mathbb{R}^n$ порядка $m \in \mathbb{Z}_+$, где a_α суть $(l \times k)$-матрицы над полем $\mathbb{C}$. В этой ситуации можно использовать теорию $\mathcal{P}$-модулей над кольцом $\mathcal{P}$ всех полиномов с комплексными коэффициентами, см., например, [2, §1.2]: после формальной замены $\frac{\partial}{\partial x_i} \leftrightarrow \iota\zeta_i$, $1 \leq i \leq n$, теорема Гильберта о сизигиях, примененная к полиномиальному отображению $A'(\iota\zeta) : \mathcal{P}^l \to \mathcal{P}^k$,

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

естественным образом порождает дифференциальный комплекс Гильберта

$$0 \to [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^{k_0} \stackrel{A_0}{\to} [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^{k_1} \stackrel{A_1}{\to} [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^{k_2} \to \dots \stackrel{A_{N-1}}{\to} [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^{k_N} \to 0, \tag{1}$$

где $A_0 = A$, $k_0 = k$, $k_1 = l$, ι обозначает мнимую единицу, а $A'(\iota\zeta)$ – сопряженную матрицу для полиномиальной матрицы $A(\iota\zeta)$. В частности, $A_{q+1} \circ A_q = 0$, $0 \le q \le N-1$. Практическое нахождение оператора A_q, $1 \le q \le N-1$, сводится к алгебраической задаче нахождения базиса в подмодуле из $\mathcal{P}^{k_q}$, состоящего из элементов, удовлетворяющих $A'_{q-1}(\iota\zeta)p = 0$.

В предположении что порядки всех операторов в (1) равны m, эллиптичность комплекса эквивалентна сильной эллиптичности всех обобщенных лапласианов $\Delta_q = A_q^* A_q + A_{q-1} A_{q-1}^*$ порядка $2m$, где A^* обозначает формально сопряженный оператор для A. Использование наборов неотрицательных чисел $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0^{(0)}, \mu_0^{(1)}, \dots, \mu_N^{(0)}, \mu_N^{(1)})$ позволяет рассматривать эллиптические операторы типа Ламе $\mathfrak{D}_{q,\boldsymbol{\mu}} = \mu_q^{(0)} A_q^* A_q + \mu_q^{(1)} A_{q-1} A_{q-1}^*$.

Для того, чтобы использовать дифференциальные комплексы в моделях, где задействовано время, мы рассматриваем векторные функции переменных $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{I}$, где $\mathcal{I} = [0,T]$ с конечным временем $T > 0$, т.е. рассматриваем вектор-столбцы из $[C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathcal{I})]^{k_q}$, зависящие от параметра $t \in \mathcal{I}$. Потребовав эллиптичность комплекса (1), мы получаем набор операторов $\mathcal{L}_{q,\boldsymbol{\mu}} = \partial_t + \mathfrak{D}_{q,\boldsymbol{\mu}}$, $0 \le q \le N$, которые сильно равномерно параболичны по Петровскому, и операторы $\partial_t^2 + \mathfrak{D}_{q,\boldsymbol{\mu}}$, $0 \le q \le N$, которые гиперболичны.

Введем теперь в рассмотрение операторы Стокса, ассоциированные с дифференциальным комплексом (1). Положим $r_q = (\sum_{j=0}^q k_j)$, $0 \le q \le N$. Через B^N обзначим $(N+1) \times (N+1)$-блочную матрицу (на самом деле это $(r_N \times r_N)$-матрица), такая, что каждый ее блок b_{ij}^N есть $(k_{N-i+1} \times k_{N-j+1})$-матрица. Пусть B_j будет такая матрица, что $b_{jj}^N = I_{k_j}$ и $B_{pq}^N = 0$ для $p \ne j$ или $q \ne j$. Ясно, что $B_j B_j = B_j$, $B_i B_j = 0$ при $j \ne i$, а все блоки матрицы $B_i B^N B_j$ равны нулю, кроме блока $(B_i B^N B_j)_{ij} = b_{ij}^N$. Поэтому, если P есть $(k_{N-i+1} \times k_{N-j+1})$-матричный оператор, то естественно обозначить через $B_i P B_j$ блочную $(N+1) \times (N+1)$-матрицу, все блоки которой равны нулю, кроме блока $b_{ij}^N = P$.

Оператором Стокса, ассоциированным с комплексом (1) и набором операторов $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots \mathcal{P}_N)$, будем называть оператор вида

$$S_q(A, \mathcal{P}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=0}^{q} B_j(\mathcal{P}_j + \mathfrak{D}_{q,\boldsymbol{\mu}})B_j + \sum_{j=0}^{q-1} \Big(B_{j+1} A_j B_j + B_j A_j^* B_{j+1} \Big). \tag{2}$$

Как нетрудно понять, это трехдиагональные матрицы, с возможными нулями на главной диагонали. Из эллиптичности комплекса (1) следует, что стационарный обобщенный оператор Стокса $S_q(A, 0, \boldsymbol{\mu})$ при положительных числах $\mu_j^{(i)}$ эллиптичен по Дуглису-Ниренбергу. Кроме того, если комплекс (1) эллиптичен, то оператор $S_q(A, \partial_t, \boldsymbol{\mu})$ параболичен при условии, что $\mu_j^{(i)} \neq 0$ для всех $0 \leq j \leq q$ и i; он "эллиптико-параболичен" при $\mu_j^{(i)} \neq 0$ для всех $q_0 \leq j \leq q$ и i, если $\mu_j^{(i)} = 0$ для всех $0 \leq j \leq q_0 - 1$ и i, где $0 < q_0 \leq q$. Естественно, что $S_q(A, \partial_t^2, \boldsymbol{\mu})$ гиперболичен, если $\mu_j^{(i)} \neq 0$ для всех $0 \leq j \leq q$ и i. Конечно, подходящие нелинейные возмущения таких систем приходится искать из других соображений – особенностей предметной области, законов сохранения, симметрий и т.д.

Если в качестве оператора $A = A_0$ взять стандартный оператор градиента ∇_n в $\mathbb{R}^n$, то при $n = 3$ стандартные алгебраические конструкции (векторного и скалярного произведений) дают так называемый комплекс де Рама $\{A_0, A_1, A_2\}$, где $A_1 \vec{u} = \nabla_3 \times \vec{u} = \operatorname{rot} \vec{u}$, $A_2 \vec{v} = \nabla_3 \cdot \vec{v} = \operatorname{div}_3 \vec{v}$ для векторов $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, т.е. $k = k_0 = 1$, $l = k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$, а операторы rot и div_3 – суть стандартные ротор и дивергенция, соответственно. Значительная часть квазилинейных уравнений современной математической физики в случае трех пространственных переменных порождена именно этим эллиптическим комплексом, через описанную выше конструкцию операторов Стокса. В этом случае при $q = 0$ в качестве операторов Стокса получаются оператор Лапласа Δ, оператор теплопроводности $\partial_t - \Delta$ и волновой оператор $\partial_t^2 - \Delta$, при $q = 1$ получаются классические (линейные) операторы Стокса из гидродинамики, см, например, [3]; дальнейшее увеличение индекса q позволяет получить при различных $\boldsymbol{\mu}$ главные линейные части уравнений вращающейся жидкости и уравнений Максвелла, см. [1]. При $n = q = 3$, рассматривая системы Стокса над полем $\mathbb{C}$ получаем 8 скалярных уравнений на 8 неизвестных, а после декомплексификации – 16 на 16, соответственно. Это согласуется с седенионным подходом В.Л. Миронова и С.В. Миронова, см., например, [1], где в рамках клиффордова анализа разработано специальное представление моделей гидродинамики и теории поля в «симметричной» форме.

Список литературы

[1] Mironov V. L., Mironov S. V., “Generalized sedeonic equations of hydrodynamics”, *Eur. Phys. J. Plus*, **135**:9 (2020), 708.

[2] Tarkhanov N., *Complexes of differential operators*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[3] Temam R., *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Amsterdam: North Holland Publ. Comp., 1979.

On the geometry of isoenergetic surface

Ergashova Shohida

National University of Uzbekistan, Uzbekistan

e-mail: shohida.ergashova@mail.ru

Definition 1 ([4]). Let M^{2n} be a symplectic manifold and $sgradH$ be a Hamiltonian vector field with a smooth Hamiltonian function H.

Hamiltonian system with the Hamiltonian vector field $sgradH$ is called *completely integrable in the sense of Liouville or completely integrable*, if there exists a set of smooth functions $f_1, \dots, f_n$ such that:

1) $f_1, \dots, f_n$ are the first integrals of the Hamiltonian vector field $sgradH$,

2) they are functionally independent on M, that is, almost everywhere on M their gradients are linearly independent,

3) $\{f_i, f_j\} = 0$ for any i and j,

4) the vector fields $sgradf_i$ are complete, that is the natural parameter on their integral trajectories is defined on the whole number line.

Let $sgradH$ be a Hamiltonian vector field with the completely integrable Hamiltonian system on the four-dimensional symplectic manifold M^4.

Definition 2 ([1]). An *isoenergetic surface* is a set of points defined by the equation

$$H = const.$$

If $H(x) = c$ then $Q_c = \{x : x \in M, H(x) = c\}$ is the invariant surface with respect to the vector field $sgradH$.

Let M^n be a smooth Riemannian manifold with the Riemannian metric $g_{ij}(x)$.

Definition 3 ([2]). *Geodesics* of a given metric are smooth parameterized curves

$$\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

that are the solutions to the system of differential equations

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$$

where $\dot{\gamma} = \dfrac{d\gamma}{dt}$ is the velocity vector of the curve γ, and ∇ is the covariant differentiation operator corresponding to the symmetric connection consistent with the metric g_{ij}.

Definition 4 ([3])**.** An *integral curve* of a vector field X is a smooth parametrized curve $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ whose tangent vector at any point coincides with the value of X at the same point:

$$\dot{\gamma}(t) = X|_{\gamma(t)}$$

for all t. In local coordinates, $x = \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ must be a solution to the autonomous system of ordinary differential equations

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x), i = \overline{1, n}$$

where the are the coefficients of X at x.

Let us consider the Hamiltonian $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ on the Euclidean four dimensional space $\mathbb{R}^4$ which is given by the formula

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2). \tag{1}$$

Theorem 1. *The integral curve of the Hamiltonian vector field* $sgradH = (-q_1, -q_2, p_1, p_2)$ *corresponding to the Hamiltonian function* (1) *is the geodesic of the isoenergetic surface*

$$Q_c = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) = c$$

where $c > 0$.

References

[1] Bolsinov A. V., Fomenko A. T., *Integrable Hamiltonian systems*, Izhevsk: Udmurtskiy universitet, 1999.

[2] Bolsinov A. V., Fomenko A. T., *Integrable Hamiltonian systems 2*, Izhevsk: Udmurtskiy universitet, 1999.

[3] Olver P. J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, New York: Springer, 1993.

[4] Narmanov A. Ya., Ergashova Sh. R., “On the geometry of Liouville foliations”, *E3S Web of Conferences*, **402** (2023), 03032 crossref.