

DOI: <http://doi.org/10.5281/zenodo.1342529>

ISSN 2225-6717 Выпуск №41
2018

Доклады **Н**езависимых **А**второв

Авиация и космонавтика
Логика
Строительство
Физика и астрономия

Хмельник С.И.

Новое решение уравнений Максвелла для сферической волны

Оглавление

- 1. Введение
- 2. Решение уравнений Максвелла
- 3. Поток энергии
- 4. Заключение
- Приложение 1
- Литература
- Таблицы

Аннотация

Отмечается, что известное решение для сферической электромагнитной волны не удовлетворяет закону сохранения энергии (она сохраняется только в среднем), одноименные (по координатам) электрические и магнитные напряженности синфазны, выполняется только одно из системы уравнений Максвелла, решение не является волновым, отсутствует поток энергии с реальным значением. Предлагается решение, свободное от этих недостатков.

1. Введение

В [1] предложено решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне. Далее рассматривается решение уравнений Максвелла для сферической волны во всей области существования волны (без разбиения на зоны). Такая задача возникает при решении уравнений электродинамики для элементарного электрического диполя – вибратора. Решение этой задачи известно и именно на основе этого решения строятся антенны. Вместе с тем это решение обладает рядом недостатков, в частности [2],

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем,
2. решение неоднородно и практически необходимо разбивать его на отдельные зоны (как правило,

- близкую, среднюю и дальнюю), в которых решения оказываются полностью различными,
3. в ближней зоне отсутствует поток энергии с реальным значением
 4. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
 5. в ближней зоне решение не является волновым (т.е. расстояние не является аргументом тригонометрической функции),
 6. известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла (решение, удовлетворяющее одному уравнению системы, нельзя считать решением системы уравнений).

На рис. 1 [8] показана картина силовых линий электрического поля, построенная на основе известного решения. Очевидно, что такая картина не может существовать в сферической волне.

Практически указанные недостатки известного решения означают, что они (математические решения) нестрого описывают реальные излучения технических устройств. Более строгое решение, будучи примененным в системах проектирования таких устройств, безусловно, должно повысить их качество.

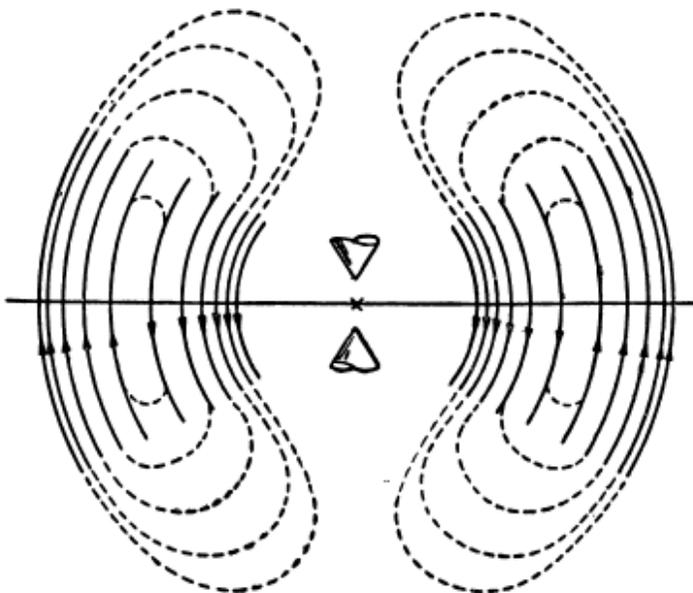


Рис. 1.

2. Решение уравнений Максвелла

Итак, будем использовать сферические координаты. На рис. 1 показана система сферических координат (ρ, θ, φ) . Далее формулы мы будем размещать в таблицах и использовать следующие обозначения:

$T(\text{номер_таблицы})-(\text{номер_столбца})-(\text{номер_строки})$

В таблице **T1-3** приведены выражения для ротора и дивергенции вектора в этих координатах [3]. Здесь и далее

E - напряженность электрического поля,

H - напряженность магнитного поля,

J - плотность электрического тока смещения,

M - плотность магнитного тока смещения,

μ - абсолютная магнитная проницаемость,

ε - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

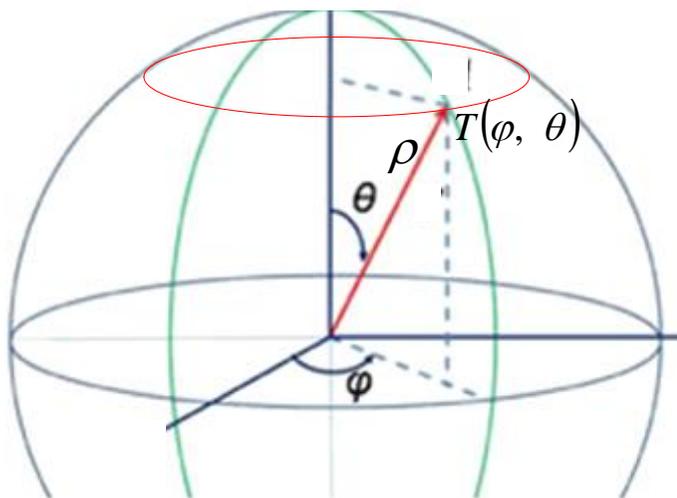


Рис. 1 (Sfera155.vsd).

Примем следующие обозначения:

$$\Psi(E_\rho) = \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} \quad (1)$$

$$T(E_\varphi) = \left(\frac{E_\varphi}{\text{tg}(\theta)} + \frac{\partial(E_\varphi)}{\partial(\theta)} \right) \quad (2)$$

С учетом этих обозначений формулы в таблице **T1-3** принимают вид, приведенный в таблице **T1-4**. В таблице **T1A-2** запишем уравнения Максвелла.

Итак, имеется 8 уравнений Максвелла с 6-ю неизвестными. Эта система является переопределенной. Принято считать, что в сферической волне отсутствуют радиальные напряженности (хотя это и не доказано). При этом появляется система 8 уравнений Максвелла с 4-мя неизвестными. В [1] найдено решение этой задачи. В сущности, там находится решение 4-х уравнений (см. **T1A-2.2, 3, 6, 7**). В этом решении функции напряженностей имеют одинаковый для всех функций множитель – функцию $g(\theta)$ от аргумента θ . Остальные 4 уравнения выполняются при определенном выборе этой функции. Она оказывается такой, что у нее существуют бесконечные значения – это делает то решение практически неприменимым.

Приходится признать, что в сферической волне присутствуют радиальные напряженности. Однако и при этом система уравнений Максвелла остается переопределенной. Допустим еще, что существуют радиальные электрические токи смещения. Это допущение не снимает проблему переопределенности, но добавляет еще одну проблему. Дело в том, что сфера имеет идеальную симметрию и решение, очевидно, должно быть симметричным.

Напрашивается предположение о том, что существуют еще и радиальные магнитные токи смещения. Такое предположение не требует существования магнитных монополей также, существование электрических токов смещения не следует из существования электрических зарядов.

Итак, далее мы будем искать решение в виде функций E, H, J, M , представленных в таблице **T2-2**, где действительные функции вида $g(\theta)$ и $e(\rho), h(\rho), j(\rho), m(\rho)$, предстоит вычислить, а коэффициенты χ, α, ω известны.

При этих условиях преобразуем формулы **T1-3** в **T1-4**, где приняты следующие обозначения:

$$\boxed{e_\varphi} = \frac{\partial(e_\varphi(\rho))}{\partial(\rho)}, \quad (3)$$

$$q = \kappa\rho + \omega t \quad (4)$$

Из (2, 4) найдем:

$$T(E_\varphi) = \left(\frac{\sin(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \cos(\theta) \right) e_\varphi \cos(q) = 2e_\varphi \cos(\theta) \cos(q) \quad (5)$$

Аналогично,

$$T(E_\theta) = 2e_\theta \cos(\theta) \sin(q) \quad (6)$$

$$T(H_\varphi) = 2h_\varphi \cos(\theta) \sin(q) \quad (7)$$

$$T(H_\theta) = 2h_\theta \cos(\theta) \cos(q) \quad (8)$$

С учетом этих обозначений формулы в таблице **T1-3** принимают вид, приведенный в таблице **T1-4**.

Далее по приведенным выше формулам и формулам из таблицы **T2** построим таблицы **T2i, T2ρ, T2Ψ**.

В таблице **T1A-2** запишем уравнения Максвелла. Далее примем условие

$$\alpha = 0 \quad (9)$$

Подставим роторы и дивергенции из таблицы **T1-4** в уравнения **T1A-2**, учтем условие (9), сократим полученные выражения на функции аргумента θ и результат запишем в таблицу **T1A-3**. Затем подставим функции из таблиц **T2i, T2ρ, T2Ψ** в функции **T1A-3** и запишем результат в таблицу **T4-2**. В этой таблице и далее применены обозначения вида

$$si = \sin(\chi\rho + \omega t), \quad (10)$$

$$co = \cos(\chi\rho + \omega t). \quad (11)$$

Далее каждое уравнение в таблице **T4-2** заменим на два уравнения, одно из которых содержит слагаемые со множителем si , а другое – со множителем co . Результат запишем в таблицу **T5-2**.

Уравнения **T5-2-2, 6, 3, 7** имеют решение, найденное в [1] и имеющее следующий вид (что можно проверить непосредственной подстановкой):

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (12)$$

$$e_\varphi = A/\rho, e_\theta = A/\rho, \quad (13)$$

$$h_\varphi = -B/\rho, h_\theta = B/\rho, \quad (14)$$

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (15)$$

Рассмотрим уравнения **T5-2.4, T5-2.8**. Их решение рассмотрено в приложении 1, где найдены функции $e_\rho(\rho)$, $\bar{e}_\rho(\rho)$, $h_\rho(\rho)$, $\bar{e}_\rho(\rho)$. После этого по уравнениям **T5-2.1, T5-2.5** могут быть найдены функции $j_\rho(\rho)$, $\bar{j}_\rho(\rho)$, $m_\rho(\rho)$, $\bar{m}_\rho(\rho)$.

Тем самым задача решена.

В частности, при $A=B$ и малой величине χ эти функции принимают следующий вид:

$$h_\rho = e_\rho - \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)), \quad (16)$$

$$\bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho = \frac{D}{\rho}, \quad (17)$$

$$j_\rho = \frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (18)$$

$$\bar{j}_\rho = -\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)), \quad (19)$$

$$m_\rho = -\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (20)$$

$$\bar{m}_\rho = -\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)). \quad (21)$$

Здесь

G – константа, которая может принимать различные для функций e_ρ и h_ρ ,

D – константа, которая может принимать различные для функций \bar{e}_ρ и \bar{h}_ρ .

3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В системе СИ $\eta = 1$ и формула (1) принимает вид:

$$S = E \times H. \quad (3)$$

В сферических координатах φ, θ, ρ плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты $S_\varphi, S_\theta, S_\rho$, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. В [4] показано, что они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Найдем вначале радиальный поток энергии. Подставляя сюда формулы из таблицы **T2** и (1.4, 2.13, 2.14), находим:

$$S_\rho = \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \sin(q) \frac{B}{\rho} \sin(\theta) \sin(q) - \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \cos(q) \frac{-B}{\rho} \sin(\theta) \cos(q) \\ = \frac{AB}{\rho^2} \sin^2(\theta) (\sin^2(q) + \cos^2(q))$$

или, с учетом (2.15),

$$S_\rho = \frac{A^2}{\rho^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin^2(\theta) \quad (5)$$

Заметим, что площадь поверхности сферы с радиусом ρ равна $4\pi\rho^2$. Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом ρ равен

$$\overline{S}_\rho = \int_\theta 4\pi \rho^2 S_\rho d\theta = -4\pi\rho^2 \eta \frac{A^2}{\rho^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_\theta \sin^2(\theta) d\theta$$

или

$$\overline{S}_\rho = -4\pi\eta A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta$$

или

$$\overline{S}_\rho = -4\pi^2 \eta A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (6)$$

Таким образом, плотность потока энергии, проходящего сквозь сферу, не зависит от радиуса и не зависит от времени, т.е. этот поток имеет одну и ту же величину на сферической поверхности любого радиуса в любой момент времени. Иначе говоря, поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

4. Заключение

1. Решение уравнений Максвелла, свободное от указанных выше недостатков, представлено в таблице **T2**.

2. Решение является монохроматическим.

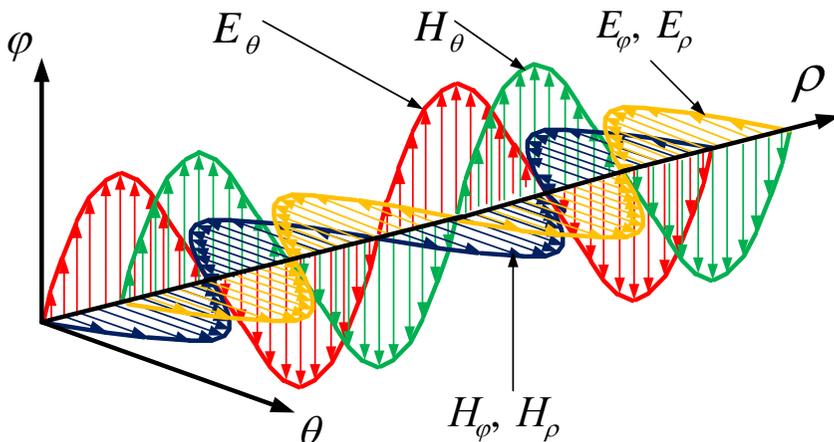
3. Амплитуды напряженностей поперечной волны пропорциональны ρ^{-1}

4. Одноименные (по координатам ρ , φ , θ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.

5. Поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

6. Существуют радиальные электрическая и магнитная напряженности.

7. Существуют радиальные электрические и магнитные токи смещения.



Приложение 1.

Из **Т5-4.1** и (2.13) находим:

$$\bar{e}_\rho = -\frac{1}{\chi} \boxed{e_\rho} - \frac{1}{\chi\rho} e_\rho - \frac{2A}{\chi\rho^2}. \quad (1)$$

Дифференцируя (1), получаем:

$$\boxed{\bar{e}_\rho} = -\frac{1}{\chi} \boxed{e_\rho} - \frac{1}{\chi\rho} \boxed{e_\rho} + \frac{1}{\chi\rho^2} e_\rho + \frac{4A}{\chi\rho^3}. \quad (2)$$

Подставим (2) в **Т5-4.2** и найдем:

$$\left(-\frac{1}{\chi\rho} \boxed{e_\rho} - \frac{1}{\chi\rho^2} e_\rho - \frac{2A}{\chi\rho^3} - \chi e_\rho - \frac{1}{\chi} \boxed{e_\rho} - \frac{1}{\chi\rho} \boxed{e_\rho} + \frac{1}{\chi\rho^2} e_\rho + \frac{4A}{\chi\rho^3} \right) = 0$$

или

$$\boxed{e_\rho} + \frac{2}{\rho} \boxed{e_\rho} + \chi^2 e_\rho - \frac{2A}{\rho^3} = 0. \quad (3)$$

По этому дифференциальному уравнению можно найти функцию $e_\rho(\rho)$, а при этой известной функции и дифференциальному уравнению **Т5-4.2** найти функцию $\bar{e}_\rho(\rho)$.

Из **Т5-8.1** и (2.14) находим:

$$\bar{h}_\rho = \frac{1}{\chi} \boxed{h_\rho} + \frac{1}{\chi\rho} h_\rho + \frac{2B}{\chi\rho^2}. \quad (4)$$

Дифференцируя (4), получаем:

$$\boxed{\bar{h}_\rho} = \frac{1}{\chi} \boxed{h_\rho} + \frac{1}{\chi\rho} \boxed{h_\rho} - \frac{1}{\chi\rho^2} h_\rho - \frac{4B}{\chi\rho^3}. \quad (5)$$

Подставим (5) в **Т5-8.2** и найдем:

$$\left(\frac{1}{\chi\rho} \boxed{h_\rho} + \frac{1}{\chi\rho^2} h_\rho + \frac{2B}{\chi\rho^3} + \chi h_\rho + \frac{1}{\chi} \boxed{\boxed{h_\rho}} + \frac{1}{\chi\rho} \boxed{h_\rho} - \frac{1}{\chi\rho^2} h_\rho - \frac{4B}{\chi\rho^3}\right) = 0$$

или

$$\boxed{\boxed{h_\rho}} + \frac{2}{\rho} \boxed{h_\rho} + \chi^2 h_\rho - \frac{2B}{\rho^3} = 0 \quad (6)$$

По этому дифференциальному уравнению можно найти функцию $h_\rho(\rho)$, а при этой известной функции и дифференциальному уравнению **T5-8.2** найти функцию $\bar{\bar{h}}_\rho(\rho)$.

В частности, при $\varepsilon = \mu$, например, для вакуума, из (2.15) находим, что $A=B$, и, сравнивая (3) и (6), находим, что

$$h_\rho = e_\rho. \quad (7)$$

При $A=B$ и малой величине χ уравнения **T5-4.1** и **T5-8.1** совпадают и принимают вид

$$\dot{y} + \frac{2}{\rho} y - \frac{2A}{\rho^3} = 0, \quad (8)$$

где

$$y = \boxed{h_\rho} = \boxed{e_\rho}. \quad (9)$$

Метод решения такого уравнения приведен в [9, стр. 50]. Следуя этому методу, находим

$$y = \frac{C+2A\ln(\rho)}{\rho^2} \quad (10)$$

где C – константа, которая может принимать различные для функций $\boxed{e_\rho}$ и $\boxed{h_\rho}$. Из (9, 10) находим:

$$h_\rho = e_\rho = -\frac{C}{\rho} - 2A\left(\frac{1+\ln(\rho)}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (11)$$

где G – константа, которая может принимать различные для функций e_ρ и h_ρ .

При малой величине χ уравнения **T5-4.1** и **T5-8.1** совпадают и принимают вид

$$\dot{z} + \frac{1}{\rho} z = 0, \quad (12)$$

где

$$z = \bar{\bar{h}}_\rho = \bar{\bar{e}}_\rho. \quad (13)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\bar{\bar{h}}_\rho = \bar{\bar{e}}_\rho = \frac{D}{\rho}, \quad (14)$$

где D – константа, которая может принимать различные для функций $\bar{\bar{e}}_\rho$ и $\bar{\bar{h}}_\rho$.

Из **T5-2.1** и (2.13, 14, 11) находим:

$$j_\rho = \frac{2}{\rho} e_\varphi - \frac{\mu}{c} \omega \bar{h}_\rho = \frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (15)$$

$$\bar{j}_\rho = \frac{\mu}{c} \omega h_\rho = -\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)). \quad (16)$$

Из Т5-2.2 и (2.14, 14, 11) находим:

$$m_\rho = \frac{2}{\rho} h_\varphi + \frac{\varepsilon}{c} \omega \bar{e}_\rho = -\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (17)$$

$$\bar{m}_\rho = \frac{\varepsilon}{c} \omega e_\rho = -\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)). \quad (18)$$

Литература

1. Хмельник С.И. Новое решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне, <http://vixra.org/abs/1711.0242>, 2017-11-08.
2. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Под редакцией Ю.В. Пименова, Москва, 2002 г., 536 стр.
3. Андре Анго. Математика для электро- и радионинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
4. Хмельник С.И.. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, publ. “MiC”, Israel, Printed in USA, Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2016, 196 с.
5. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, пятая редакция. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875, ISBN 978-0-557-4837-3, 2014, 360 с.
6. Ближние и дальние зоны электромагнитного поля, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/BIZ.pdf>
7. Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Д.П. Современная теория и практические применения антенн. Под ред. Неганова В.А. Изд. «Радиотехника», Москва, 2009, 720 стр.
8. Antennas: Theory and Practice», Sergei A. Schelkunoff and Harald T. Friis, Bell Telephone Laboratories, New York: John Wiley & Sons, 1952. (Щелкунов С. А., Фриис Г.Т. Антенны. Теория и практика - Москва: Советское радио, 1955, 604 с.)
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001, 576 стр.

Таблицы

Таблица 1.

1	2	3	4
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho g(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha E_\theta}{\rho \sin(\theta)}$
5	$\text{rot}_\rho(H)$	$\frac{H_\varphi}{\rho g(\theta)} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha H_\theta}{\rho \sin(\theta)}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho}$	$\frac{i\alpha E_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \psi(E_\varphi)$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\rho \partial \varphi}$	$\psi(E_\theta) - \frac{i\alpha E_\rho}{\rho}$
6	$\text{rot}_\theta(H)$	$\frac{\partial H_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{H_\varphi}{\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho}$	$\frac{i\alpha H_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \psi(H_\varphi)$
7	$\text{rot}_\varphi H$	$\frac{H_\theta}{\rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\rho \partial \varphi}$	$\psi(H_\theta) - \frac{i\alpha H_\rho}{\rho}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\theta}{\rho g(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha E_\varphi}{\rho \sin(\theta)}$
8	$\text{div}(H)$	$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{H_\theta}{\rho g(\theta)} + \frac{\partial H_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha H_\varphi}{\rho \sin(\theta)}$

Таблица 1А.

1	2	3
1.	$\text{rot}_\rho E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} + \frac{i\omega\mu H_\rho}{c} = 0$
5.	$\text{rot}_\rho H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} = 0$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - \frac{i\omega\varepsilon E_\rho}{c}$
2.	$\text{rot}_\theta E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$	$-\Psi(E_\varphi) + \frac{i\omega\mu H_\theta}{c} = 0$
3.	$\text{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0$	$\Psi(E_\theta) + \frac{i\omega\mu H_\varphi}{c} = 0$
6.	$\text{rot}_\theta H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = 0$	$-\Psi(H_\varphi) - \frac{i\omega\varepsilon E_\theta}{c} = 0$
7.	$\text{rot}_\varphi H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0$	$\Psi(H_\theta) - \frac{i\omega\varepsilon E_\varphi}{c} = 0$
4.	$\text{div}(E) = 0$	$\Psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} = 0$
8.	$\text{div}(H) = 0$	$\Psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} = 0$

Таблица 2.

1	2
	$E_\theta = e_\theta \sin(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\varphi = e_\varphi \sin(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\rho = \cos(\theta) \left(e_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) + \bar{e}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) \right)$
	$J_\rho = \cos(\theta) \left(j_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{j}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) \right)$
	$H_\theta = h_\theta \sin(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\varphi = h_\varphi \sin(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\rho = \cos(\theta) \left(h_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{h}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) \right)$
	$M_\rho = \cos(\theta) \left(m_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) + \bar{m}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) \right)$

Таблица 2i.

1	2
	$i\omega E_\theta = \omega \sin(\theta) (-e_\theta \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega E_\varphi = \omega \sin(\theta) (e_\varphi \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega E_\rho = \omega \cos(\theta) (-e_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{e}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega H_\theta = \omega \sin(\theta) (h_\theta \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega H_\varphi = \omega \sin(\theta) (-h_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega H_\rho = \omega \cos(\theta) (h_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{h}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t))$

Таблица 2p.

1	2
	$\frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta) (-e_\theta \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta) (e_\varphi \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = \chi \cos(\theta) (-e_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{e}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta) (-h_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta) (-h_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} = \chi \cos(\theta) (h_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{h}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t))$

Таблица 2Ψ.

2
$\Psi(E_\theta) = \frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left(\frac{1}{\rho} (e_\theta \text{co}) + \chi(-e_\theta \text{si}) + (\overline{[e_\theta] \text{co}}) \right)$
$\Psi(E_\varphi) = \frac{E_\varphi}{\rho} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left(\frac{1}{\rho} (e_\varphi \text{si}) + \chi(e_\varphi \text{co}) + (\overline{[e_\varphi] \text{si}}) \right)$
$\begin{aligned} \Psi(E_\rho) &= \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} \\ &= \cos(\theta) \left(\frac{1}{\rho} (e_\rho \text{co}) + \frac{1}{\rho} (\overline{e}_\rho \text{si}) + \chi(\overline{e}_\rho \text{co}) \right. \\ &\quad \left. - \chi(e_\rho \text{si}) + (\overline{[e_\rho] \text{co}}) + (\overline{[\overline{e}_\rho] \text{si}}) \right) \end{aligned}$
$\Psi(H_\theta) = \frac{H_\theta}{\rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left(\frac{1}{\rho} (h_\theta \text{si}) + \chi(h_\theta \text{co}) + (\overline{[h_\theta] \text{si}}) \right)$
$\Psi(H_\varphi) = \frac{H_\varphi}{\rho} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left(\frac{1}{\rho} (h_\varphi \text{co}) + \chi(-h_\varphi \text{si}) + (\overline{[h_\varphi] \text{co}}) \right)$
$\begin{aligned} \Psi(H_\rho) &= \frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} \\ &= \cos(\theta) \left(\frac{1}{\rho} (h_\rho \text{si}) + \frac{1}{\rho} (\overline{h}_\rho \text{co}) - \chi(\overline{h}_\rho \text{si}) \right. \\ &\quad \left. + \chi(h_\rho \text{co}) + (\overline{[h_\rho] \text{si}}) + (\overline{[\overline{h}_\rho] \text{co}}) \right) \end{aligned}$

Таблица 4.

1	2
1.	$\frac{2}{\rho}(e_{\varphi} \text{si}) - \frac{\mu}{c}\omega(\bar{h}_{\rho} \text{si}) = j_{\rho} \text{si}$ $\frac{\mu}{c}\omega(h_{\rho} \text{co}) = \bar{j}_{\rho} \text{co}$
5.	$\frac{2}{\rho}(h_{\varphi} \text{co}) + \frac{\varepsilon}{c}\omega(\bar{e}_{\rho} \text{co}) = m_{\rho} \text{co}$ $\frac{\varepsilon}{c}\omega(e_{\rho} \text{si}) = \bar{m}_{\rho} \text{si}$
2.	$-\left(\frac{1}{\rho}(e_{\varphi} \text{si}) + \chi(e_{\varphi} \text{co}) + \left(\boxed{e_{\varphi}} \text{si}\right)\right) + \frac{\mu}{c}\omega(h_{\theta} \text{co}) = 0$
3.	$\left(\frac{1}{\rho}(e_{\theta} \text{co}) + \chi(-e_{\theta} \text{si}) + \left(\boxed{e_{\theta}} \text{co}\right)\right) + \frac{\mu}{c}\omega(-h_{\varphi} \text{si}) = 0$
6.	$-\left(\frac{1}{\rho}(h_{\varphi} \text{co}) + \chi(-h_{\varphi} \text{si}) + \left(\boxed{h_{\varphi}} \text{co}\right)\right) - \frac{\varepsilon}{c}\omega(-e_{\theta} \text{si}) = 0$
7.	$\left(\frac{1}{\rho}(h_{\theta} \text{si}) + \chi(h_{\theta} \text{co}) + \left(\boxed{h_{\theta}} \text{si}\right)\right) - \frac{\varepsilon}{c}\omega(e_{\varphi} \text{co}) = 0$
4.	$\left(\frac{1}{\rho}(e_{\rho} \text{co}) + \chi(\bar{e}_{\rho} \text{co}) + \left(\boxed{e_{\rho}} \text{co}\right)\right) + \frac{2}{\rho}(e_{\theta} \text{co}) = 0$ $\left(\frac{1}{\rho}(\bar{e}_{\rho} \text{si}) - \chi(e_{\rho} \text{si}) + \left(\boxed{\bar{e}_{\rho}} \text{si}\right)\right) = 0$
8.	$\left(\frac{1}{\rho}(h_{\rho} \text{si}) - \chi(\bar{h}_{\rho} \text{si}) + \left(\boxed{h_{\rho}} \text{si}\right)\right) + \frac{2}{\rho}(h_{\theta} \text{si}) = 0$ $\left(\frac{1}{\rho}(\bar{h}_{\rho} \text{co}) + \chi(h_{\rho} \text{co}) + \left(\boxed{\bar{h}_{\rho}} \text{co}\right)\right) = 0$

Таблица 5

1	2
1.	$\frac{2}{\rho} e_\varphi - \frac{\mu}{c} \omega \bar{h}_\rho = j_\rho; \frac{\mu}{c} \omega h_\rho = \bar{j}_\rho$
5.	$\frac{2}{\rho} h_\varphi + \frac{\varepsilon}{c} \omega \bar{e}_\rho = m_\rho; \frac{\varepsilon}{c} \omega e_\rho = \bar{m}_\rho$
2.	$\boxed{e_\varphi} = -\chi e_\varphi - \frac{1}{\rho} e_\varphi + \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi$
6.	$\boxed{h_\varphi} = \chi h_\varphi - \frac{1}{\rho} h_\varphi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\theta$
3.	$\boxed{e_\theta} = \chi e_\theta - \frac{1}{\rho} e_\theta - \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi$
7.	$\boxed{h_\theta} = -\chi h_\theta - \frac{1}{\rho} h_\theta + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi$
4.	1 $\left(\frac{1}{\rho} e_\rho + \chi \bar{e}_\rho + \boxed{e_\rho}\right) + \frac{2}{\rho} e_\theta = 0$
	2 $\left(\frac{1}{\rho} \bar{e}_\rho - \chi e_\rho + \boxed{\bar{e}_\rho}\right) = 0$
8.	1 $\left(\frac{1}{\rho} h_\rho - \chi \bar{h}_\rho + \boxed{h_\rho}\right) + \frac{2}{\rho} h_\theta = 0$
	2 $\left(\frac{1}{\rho} \bar{h}_\rho + \chi h_\rho + \boxed{\bar{h}_\rho}\right) = 0$