DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.1326666

Серия: **ФИЗИКА И АСТРОНОМИЯ**

Хмельник С.И.

Новое решение уравнений Максвелла для сферической волны

Оглавление

Аннотация

Отмечается, что известное решение для сферической электромагнитной волны не удовлетворяет закону сохранения энергии (она сохраняется только в среднем), одноименные (по координатам) электрические и магнитные напряженности синфазны, выполняется только одно из системы уравнений Максвелла, решение не является волновым, отсутствует поток энергии с реальным значением. Предлагается решение, свободное от этих недостатков.

1. Введение

В [1] предложено решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне. Далее рассматривается решение уравнений Максвелла для сферической волны во всей области существования волны (без разбиения на зоны). Такая задача возникает при решении уравнений электродинамики для элементарного электрического диполя – вибратора. Решение этой задачи известно и именно на основе этого решения строятся антенны. Вместе с тем это решение обладает рядом недостатков, в частности [2],

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем,
2. решение неоднородно и практически необходимо разбивать его на отдельные зоны (как правило,

ближнюю, среднюю и дальнюю), в которых решения оказываются полностью различными,
3. в ближней зоне отсутствует поток энергии с реальным значением
4. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
5. в ближней зоне решение не является волновым (т.е. расстояние не является аргументом тригонометрической функции),
6. известное решение НЕ удовлетворяет <u>системе</u> уравнений Максвелла (решение, удовлетворяющее одному уравнению системы, нельзя считать решением системы уравнений).

На рис. 1 [8] показана картина силовых линий электрического поля, построенная на основе известного решения. Очевидно, что такая картина не может существовать в <u>сферической</u> волне.

Практически указанные недостатки известного решения означают, что они (математические решения) нестрого описывают реальные излучения технических устройств. Более строгое решение, будучи примененным в системах проектирования таких устройств, безусловно, должно повысить их качество.

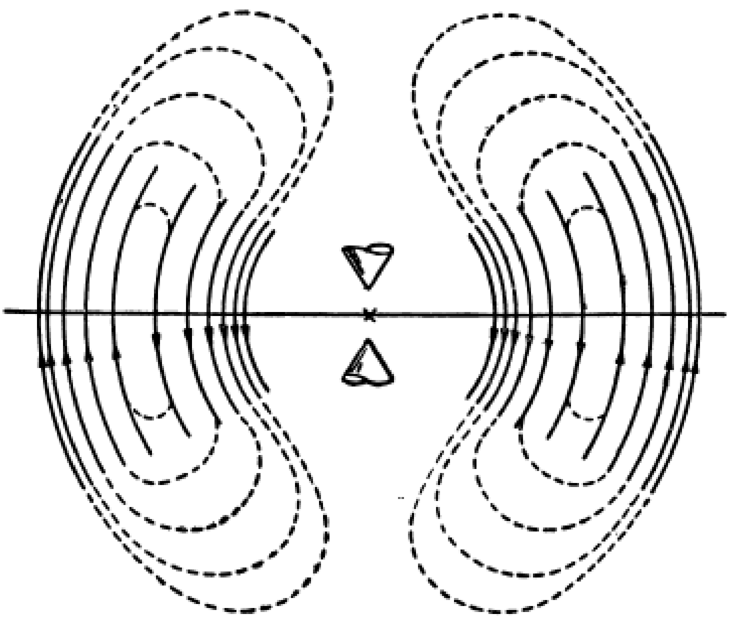


Рис. 1.

2. Решение уравнений Максвелла

Итак, будем использовать сферические координаты. На рис. 1 показана система сферических координат (ρ, θ, φ). Далее формулы мы будем размещать в таблицах и использовать следующие обозначения:

T(номер_таблицы)-(номер_столбца)-(номер_строки)

В таблице **T1-3** приведены выражения для ротора и дивергенции вектора в этих координатах [3]. Здесь и далее

E **-** напряженность электрического поля,

H **-** напряженность магнитного поля,

μ - абсолютная магнитная проницаемость,

ε **-** абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Далее мы будем искать решение в виде функций E, H, представленных в таблице **T2-2**, где действительные функции вида $g(\theta)$ и $e(\rho)$, $h(\rho)$ предстоит вычислить, а коэффициенты χ, α, ω известны.

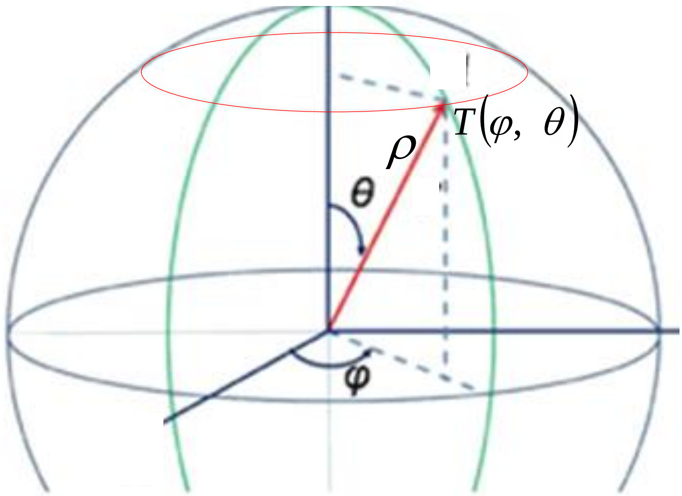


Рис. 1 (Sfera155.vsd).

При этих условиях преобразуем формулы (T1-3) в (T1-4), где приняты следующие обозначения:

$$\boxed{e_\varphi} = \frac{\partial\left(e_\varphi(\rho)\right)}{\partial(\rho)}, \tag{1}$$

$$\Psi\left(E_\rho\right) = \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial\rho} \tag{3}$$

$$T\left(E_\varphi\right) = \left(\frac{E_\varphi}{\mathrm{tg}(\theta)} + \frac{\partial\left(E_\varphi\right)}{\partial(\theta)}\right) \tag{4}$$

$$q = \kappa\rho + \omega t \tag{5}$$

Из (4, 5) найдем:

$$T\left(E_\varphi\right) = \left(\frac{\sin(\theta)}{\mathrm{tg}(\theta)} + \cos(\theta)\right) e_\varphi \cos(q) = 2e_\varphi \cos(\theta)\cos(q) \tag{6}$$

Аналогично,

$$T(E_\theta) = 2e_\theta \cos(\theta)\sin(q) \tag{7}$$

$$T\left(H_\varphi\right) = 2h_\varphi \cos(\theta)\sin(q) \tag{8}$$

$$T(H_\theta) = 2h_\theta \cos(\theta)\cos(q) \tag{9}$$

Из (3, 5) найдем:

$$\Psi\left(E_\rho\right) = \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial\rho} =$$

$$= \left(\frac{e_\rho}{\rho}\cos(\theta)\cos(\kappa\rho + \omega t) + \frac{\partial\left(e_\rho \cos(\kappa\rho + \omega t)\right)}{\partial\rho}\cos(\theta)\right)$$

или

$$\Psi\left(E_\rho\right) = \left(\Psi_o\left(e_\rho\right)\cos(q) - \kappa e_\rho \sin(q)\right)\cos(\theta), \tag{10}$$

где

$$\Psi_o\left(e_\rho\right) = \left(\frac{e_\rho}{\rho} + \frac{\partial\left(e_\rho\right)}{\partial\rho}\right). \tag{11}$$

Аналогично,

$$\Psi\left(H_\rho\right) = \left(\Psi_o\left(h_\rho\right)\sin(q) + \kappa h_\rho \cos(q)\right)\cos(\theta), \tag{12}$$

$$\Psi(E_\theta) = \left(\Psi_o(e_\theta)\cos(q) - \kappa e_\theta \sin(q)\right)\sin(\theta), \tag{13}$$

$$\Psi(H_\theta) = \left(\Psi_o(h_\theta)\sin(q) + \kappa h_\theta \cos(q)\right)\sin(\theta), \tag{14}$$

$$\Psi\left(E_\varphi\right) = \left(\Psi_o\left(e_\varphi\right)\cos(q) - \kappa e_\theta \sin(q)\right)\sin(\theta), \tag{15}$$

$$\Psi\left(H_\varphi\right) = \left(\Psi_o\left(h_\varphi\right)\sin(q) + \kappa h_\theta \cos(q)\right)\sin(\theta). \tag{16}$$

С учетом этих обозначений формулы в таблице **Т1-3** принимают вид, приведенный в таблице **Т1-4**.

Далее приведенным выше формулам и формулам из таблицы **Т2** построим таблицы $\mathbf{T2i}, \mathbf{T2\rho}, \mathbf{T2\Psi}$.

В таблице **T3-2** запишем уравнения Максвелла. Далее примем условие

$$\alpha = 0 \quad (17)$$

Подставим роторы и дивергенции из таблицы **T1-4** в уравнения **T3-2**, учтем условие (17), сократим полученные выражения на функции аргумента θ и результат запишем в таблицу **T3-3**. Затем подставим функции из таблиц $\mathbf{T2i}, \mathbf{T2\rho}, \mathbf{T2\Psi}$ в функции **T3-3** и запишем результат в таблицу **T4-2.** В этой таблице и далее применены обозначения вида

$$\mathrm{si} = \sin(\chi\rho + \omega t), \quad (18)$$

$$\mathrm{co} = \cos(\chi\rho + \omega t). \quad (19)$$

Далее каждое уравнение в таблице **T4-2** заменим на два уравнения, одно из которых содержит слвгаемые со множителем si, а другое – со множителем **co.** Результат запишем в таблицу **T5-2.**

Далее будем использовать известное условие вида

$$\chi = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (20)$$

Формулы **T5-2-1, T5-2-5** с учетом этого условия преобразуются в формулы **T5-3-1, T5-3-5** соответственно.

Далее будем полагать (по аналогии с [1]), что существуют следующие зависимости:

$$\bar{\bar{e}}_\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\bar{\bar{h}}_\theta, \quad (21)$$

$$e_\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}h_\theta, \quad (22)$$

$$\bar{\bar{h}}_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\bar{\bar{e}}_\theta, \quad \mathrm{m} \quad (23)$$

$$h_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}e_\theta, \quad (24)$$

$$\bar{\bar{e}}_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\bar{\bar{h}}_\varphi, \quad \mathrm{m} \quad (25)$$

$$e_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}h_{\varphi,} \quad (26)$$

$$\bar{\bar{h}}_\theta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\bar{\bar{e}}_\varphi, \quad (27)$$

$$h_\theta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}e_\varphi. \quad (28)$$

Можно убедится, что после примения формулы (21-28) к уравнениям **T5-2-2,6,3** эти уравнения сокращаются и принимают вид уравнений **T5-3-2,6,3**. Решение этих уравнений имеет вид:

$$e_\varphi = \frac{A}{\rho}, \bar{\bar{e}}_\varphi = \frac{A}{\rho}, h_\varphi = \frac{A}{\rho}, \bar{\bar{h}}_\varphi = \frac{A}{\rho},$$
$$e_\theta = \frac{A}{\rho}, \bar{\bar{e}}_\theta = \frac{A}{\rho}, h_\theta = \frac{-A}{\rho}, \bar{\bar{h}}_\theta = \frac{-A}{\rho}, \qquad (29)$$

где A – константы, различные (вообще говоря) для разных переменных. Мы выбрали все константы, равными по абсолютной величине, и знаки, указанные в (29). Такой выбор будет оправдан в дальнейшем.

Наконец, из **T5-3-1, T5-3-5** и (29) найдем:

$$h_\rho = \frac{-2A}{\chi\rho^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \qquad (30)$$

$$\bar{\bar{h}}_\rho = \frac{2A}{\chi\rho^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \qquad (31)$$

$$e_\rho = \frac{-2A}{\chi\rho^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad (32)$$

$$\bar{\bar{e}}_\rho = \frac{2A}{\chi\rho^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \qquad (33)$$

Таблица T**5-2** содержит систему из 16-ти уравнений с 12-ю неизвестными. Эта система является переопределенной. Выше мы нашли эти 12 неизвестных из решения уравнений **T5-2-1,5,2,6,3.**

Найдем теперь невязку уравнений **T5-2-7,8.** Подставляя (29-33) в уравнение T**5-2-7**, находим:

$$\mathrm{Er}(e_\rho) = -\boxed{e_\rho} - \chi\bar{\bar{e}}_\rho - \frac{1}{\rho}(2\bar{\bar{e}}_\theta + e_\rho) = \frac{2A}{\rho^2}\left(\left(\frac{1}{\chi\rho} + \frac{1}{\chi} - 1\right)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} - 1\right)$$

$$\mathrm{Er}(\bar{\bar{e}}_\rho) = -\boxed{\bar{\bar{e}}_\rho} + \chi e_\rho - \frac{1}{\rho}(2e_\theta + \bar{\bar{e}}_\rho) = \frac{2A}{\rho^2}\left(\left(1 - \frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi\rho}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} - 1\right)$$

$$\mathrm{Er}(h_\rho) = -\boxed{h_\rho} + \chi\bar{\bar{h}}_\rho - \frac{1}{\rho}(2\bar{\bar{h}}_\theta + h_\rho) = \frac{2A}{\rho^2}\left(\left(1 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi\rho}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - 1\right)$$

$$\mathrm{Er}(\bar{\bar{h}}_\rho) = -\boxed{\bar{\bar{h}}_\rho} - \chi h_\rho - \frac{1}{\rho}(2h_\theta + \bar{\bar{h}}_\rho) = \frac{2A}{\rho^2}\left(\left(1 - \frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi\rho}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - 1\right)$$

Найдем теперь относительные невязки:

$$\mathrm{Er}o(e_\rho) = \frac{\mathrm{Er}(e_\rho)}{e_\rho} = \left(\left(-\chi + 1 + \frac{1}{\rho}\right) - \chi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)$$

$$\mathrm{Er}o\left(\bar{\bar{e}}_\rho\right) = \frac{\mathrm{Er}\left(\bar{\bar{e}}_\rho\right)}{\bar{\bar{e}}_\rho} = \left(\left(\chi - 1 - \frac{1}{\rho}\right) - \chi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)$$

$$\mathrm{Er}o\left(h_\rho\right) = \frac{\mathrm{Er}\left(h_\rho\right)}{h_\rho} = \left(\left(\chi + 1 + \frac{1}{\rho}\right) - \chi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right)$$

$$\mathrm{Er}o\left(\bar{\bar{h}}_\rho\right) = \frac{\mathrm{Er}\left(\bar{\bar{h}}_\rho\right)}{\bar{\bar{h}}_\rho} = \left(\left(\chi - 1 - \frac{1}{\rho}\right) - \chi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right)$$

В частности, если $\mu = \varepsilon$, например, в вакууме, то

$$\mathrm{Er}o\left(e_\rho\right) = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)$$

$$\mathrm{Er}o\left(\bar{\bar{e}}_\rho\right) = -\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)$$

$$\mathrm{Er}o\left(h_\rho\right) = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)$$

$$\mathrm{Er}o\left(\bar{\bar{h}}_\rho\right) = -\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)$$

Таким образом, амплитуда ошибки дивергенции приблизительно равна амплитуде радиальной напряженности.

Перепишем таблицу **Т2-2** в таблицу **Т6-2**, отбросывая функции аргумента θ и заменяя коэффициенты (29) только знаками констант А. Используя известные формулы тригонометрии, перепишем таблицу **Т6-2** в таблицу **Т6-3**, где принято обозначение

$$\beta = \chi\rho + \omega t.$$

Затем прибавим к аргументам функций **Т6-3** величину $\frac{\pi}{4}$ и запишем результат (без множителя $\sqrt{2}$) в таблицу **Т6-4.** Из этих преобразований следует, что таблица **Т2** эквивалентна таблице **Т7.**

3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H \,, \qquad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi \,. \qquad (2)$$

В системе СИ $\eta = 1$ и формула (1) принимает вид:

$$S = E \times H \,. \qquad (3)$$

В сферических координатах $\varphi,\ \theta,\ \rho$ плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты $S_\varphi,\ S_\theta,\ S_\rho$, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. В [4] показано, что они определяются по формуле

$$S=\begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix}=\eta(E\times H)=\eta\begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Учитывая (2.7-2.9) из (4) находим:

$$S_\rho = E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \tag{5}$$

Подставляя сюда формулы из таблицы **Т7**, находим:

$$S_\rho = -\frac{A}{\rho}\sin(\theta)\sin(\beta)\frac{A}{\rho}\sin(\theta)\sin(\beta) - \frac{A}{\rho}\sin(\theta)\cos(\beta)\frac{A}{\rho}\sin(\theta)\cos(\beta)$$
$$= -\frac{A}{\rho}\sin^2(\theta)\left(\sin^2(\beta)+\cos^2(\beta)\right)$$

или

$$S_\rho = -\frac{A^2}{\rho^2}\sin^2(\theta) \tag{6}$$

Заметим, что площадь поверхности сферы с радиусом ρ равна $4\pi\rho^2$. Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом ρ равен

$$\overline{\overline{S_\rho}} = \int_\theta 4\pi\,\rho^2 S_\rho d\theta = -4\pi\rho^2\eta\frac{A^2}{\rho^2}\int_\theta \sin^2(\theta)\,d\theta$$

или

$$\overline{\overline{S_\rho}} = -4\pi\eta A^2\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta$$

или

$$\overline{\overline{S_\rho}} = -4\pi^2\eta A^2 \tag{7}$$

Таким образом, плотность потока энергии, проходящго сквозь сферу, не зависит от радиуса и не зависит от времени, т.е. этот поток имеет одну и ту же величину на сферической поверхности любого радиуса в любой момент времени. Иначе говоря, поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

4. Заключение

1. Решение уравнений Максвелла, свободное от указанных выше недостатков, представлено в таблице **T7**.

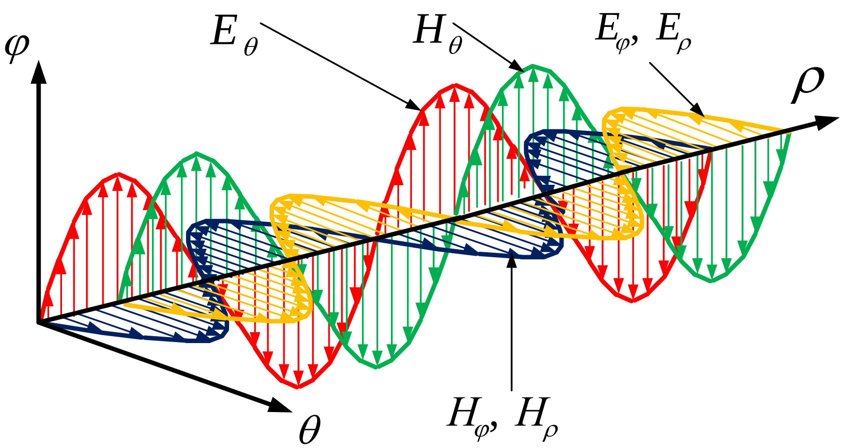
2. Решение является монохроматическим.

3. Амплитуды напряженностей поперечной волны пропорциональны ρ^{-2}

4. Одноименные (по координатам ρ, φ, θ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.

5. Поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

6. Решение является нестрогим в том смысле, что равенство нулю дивергенций магнитной и электрической напряженностей выполняется неточно. При этом в решении появляется продольная волна. Амплитуды напряженностей продольной волны пропорциональны ρ^{-3}, т.е. продольная волна «затухает» быстрее поперечной. Это означает, что точность решения возрастает с увеличением радиуса.



Литература

1. Хмельник С.И. Новое решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне, http://vixra.org/abs/1711.0242, 2017-11-08.
2. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Под редакцией Ю.В. Пименова, Москва, 2002 г., 536 стр.

3. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
4. Хмельник С.И.. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, publ. “MiC”, Israel, Printed in USA, Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2016, 196 с.
5. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, пятая редакция. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875, ISBN 978-0-557-4837-3, 2014, 360 с.
6. Ближние и дальние зоны электромагнитного поля, http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/BIZ.pdf
7. Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Д.П. Современная теория и практические применения антенн. Под ред. Неганова В.А. Изд. «Радиотехника», Москва, 2009, 720 стр.
8. Antennas: Theory and Practice», Sergei A. Schelkunoff and Harald T. Friis, Bell Telephone Laboratories, New York: John Wiley & Sons, 1952. (Щелкунов С. А., Фриис Г.Т. Антенны. Теория и практика - Москва: Советское радио, 1955, 604 с.)

Таблицы

Таблица 1.

1	**2**	**3**	**4**
1	$\mathrm{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho\,\mathrm{tg}(\theta)}+\frac{\partial E_\varphi}{\rho\partial\theta}-\frac{\partial E_\theta}{\rho\sin(\theta)\partial\varphi}$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho}-\frac{i\alpha E_\theta}{\rho\sin(\theta)}$
5	$\mathrm{rot}_\rho(H)$	$\frac{H_\varphi}{\rho\,\mathrm{tg}(\theta)}+\frac{\partial H_\varphi}{\rho\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\rho\sin(\theta)\partial\varphi}$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho}-\frac{i\alpha H_\theta}{\rho\sin(\theta)}$
2	$\mathrm{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho\sin(\theta)\partial\varphi}-\frac{E_\varphi}{\rho}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial\rho}$	$\frac{i\alpha E_\rho}{\rho\sin(\theta)}-\psi(E_\varphi)$
3	$\mathrm{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho}+\frac{\partial E_\theta}{\partial\rho}-\frac{\partial E_\rho}{\rho\partial\varphi}$	$\psi(E_\theta)-\frac{i\alpha E_\rho}{\rho}$
6	$\mathrm{rot}_\theta(H)$	$\frac{\partial H_\rho}{\rho\sin(\theta)\partial\varphi}-\frac{H_\varphi}{\rho}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial\rho}$	$\frac{i\alpha H_\rho}{\rho\sin(\theta)}-\psi(H_\varphi)$
7	$\mathrm{rot}_\varphi H$	$\frac{H_\theta}{\rho}+\frac{\partial H_\theta}{\partial\rho}-\frac{\partial H_\rho}{\rho\partial\varphi}$	$\psi(H_\theta)-\frac{i\alpha H_\rho}{\rho}$

4	$\mathrm{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho}+\frac{\partial E_\rho}{\partial\rho}+\frac{E_\theta}{\rho\mathrm{tg}(\theta)}+$ $+\frac{\partial E_\theta}{\rho\partial\theta}+\frac{\partial E_\varphi}{\rho\sin(\theta)\partial\varphi}$	$\psi(E_\rho)+\frac{T(E_\theta)}{\rho}+\frac{i\alpha E_\varphi}{\rho\sin(\theta)}$
8	$\mathrm{div}(H)$	$\frac{H_\rho}{\rho}+\frac{\partial H_\rho}{\partial\rho}+\frac{H_\theta}{\rho\mathrm{tg}(\theta)}+$ $+\frac{\partial H_\theta}{\rho\partial\theta}+\frac{\partial H_\varphi}{\rho\sin(\theta)\partial\varphi}$	$\psi(H_\rho)+\frac{T(H_\theta)}{\rho}+\frac{i\alpha H_\varphi}{\rho\sin(\theta)}$

Таблица 2.

1	**2**
	$E_\theta=\sin(\theta)\left(e_\theta\sin(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{e}}_\theta\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$E_\varphi=\sin(\theta)\left(e_\varphi\cos(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{e}}_\varphi\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$E_\rho=\cos(\theta)\left(e_\rho\cos(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{e}}_\rho\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$H_\theta=\sin(\theta)\left(h_\theta\cos(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{h}}_\theta\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$H_\varphi=\sin(\theta)\left(h_\varphi\sin(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{h}}_\varphi\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$H_\rho=\cos(\theta)\left(h_\rho\sin(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{h}}_\rho\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$

Таблица 2i.

1	**2**
	$i\omega E_\theta=\omega\sin(\theta)\left(e_\theta\cos(\chi\rho+\omega t)-\bar{\bar{e}}_\theta\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$i\omega E_\varphi=\omega\sin(\theta)\left(-e_\varphi\sin(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{e}}_\varphi\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$i\omega E_\rho=\omega\cos(\theta)\left(-e_\rho\sin(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{e}}_\rho\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$i\omega H_\theta=\omega\sin(\theta)\left(-h_\theta\sin(\chi\rho+\omega t)+\bar{\bar{h}}_\theta\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$i\omega H_\varphi=\omega\sin(\theta)\left(h_\varphi\cos(\chi\rho+\omega t)-\bar{\bar{h}}_\varphi\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$
	$i\omega H_\rho=\omega\cos(\theta)\left(h_\rho\cos(\chi\rho+\omega t)-\bar{\bar{h}}_\rho\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$

Таблица 2ρ.

1	2
	$\frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta)\left(e_\theta \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{\bar{e}}_\theta \sin(\chi\rho + \omega t)\right)$
	$\frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta)\left(-e_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{\bar{e}}_\varphi \cos(\chi\rho + \omega t)\right)$
	$\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = \chi \cos(\theta)\left(-e_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{\bar{e}}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t)\right)$
	$\frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta)\left(-h_\theta \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{\bar{h}}_\theta \cos(\chi\rho + \omega t)\right)$
	$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta)\left(h_\varphi \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{\bar{h}}_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t)\right)$
	$\frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} = \cos(\theta)\left(\chi\left(h_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{\bar{h}}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t)\right)\right)$

Таблица 2Ψ.

2
$\Psi(E_\theta) = \frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} = \sin(\theta)\left(\frac{1}{\rho}(e_\theta \mathrm{si} + \bar{\bar{e}}_\theta \mathrm{co}) + \chi(e_\theta \mathrm{co} - \bar{\bar{e}}_\theta \mathrm{si}) + \left(\boxed{e_\theta}\mathrm{si} + \boxed{\bar{\bar{e}}_\theta}\mathrm{co}\right)\right)$
$\Psi(E_\varphi) = \frac{E_\varphi}{\rho} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = \sin(\theta)\left(\frac{1}{\rho}(e_\varphi \mathrm{co} + \bar{\bar{e}}_\varphi \mathrm{si}) + \chi(-e_\varphi \mathrm{si} + \bar{\bar{e}}_\varphi \mathrm{co}) + \left(\boxed{e_\varphi}\mathrm{co} + \boxed{\bar{\bar{e}}_\varphi}\mathrm{si}\right)\right)$
$\Psi(E_\rho) = \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = \cos(\theta)\left(\frac{1}{\rho}(e_\rho \mathrm{co} + \bar{\bar{e}}_\rho \mathrm{si}) + \chi(-e_\rho \mathrm{si} + \bar{\bar{e}}_\rho \mathrm{co}) + \left(\boxed{e_\rho}\mathrm{co} + \boxed{\bar{\bar{e}}_\rho}\mathrm{si}\right)\right)$
$\Psi(H_\theta) = \frac{H_\theta}{\rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} = \sin(\theta)\left(\frac{1}{\rho}(h_\theta \mathrm{co} + \bar{\bar{h}}_\theta \mathrm{si}) + \chi(-h_\theta \mathrm{si} + \bar{\bar{h}}_\theta \mathrm{co}) + \left(\boxed{h_\theta}\mathrm{co} + \boxed{\bar{\bar{h}}_\theta}\mathrm{si}\right)\right)$
$\Psi(H_\varphi) = \frac{H_\varphi}{\rho} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = \sin(\theta)\left(\frac{1}{\rho}(h_\varphi \mathrm{si} + \bar{\bar{h}}_\varphi \mathrm{co}) + \chi(h_\varphi \mathrm{co} - \bar{\bar{h}}_\varphi \mathrm{si}) + \left(\boxed{h_\varphi}\mathrm{si} + \boxed{\bar{\bar{h}}_\varphi}\mathrm{co}\right)\right)$
$\Psi(H_\rho) = \frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} = \cos(\theta)\left(\frac{1}{\rho}(h_\rho \mathrm{si} + \bar{\bar{h}}_\rho \mathrm{co}) + \chi(h_\rho \mathrm{co} - \bar{\bar{h}}_\rho \mathrm{si}) + \left(\boxed{h_\rho}\mathrm{si} + \boxed{\bar{\bar{h}}_\rho}\mathrm{co}\right)\right)$

Таблица 3.

1	2	3
1.	$\mathrm{rot}_\rho E + \frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0$	$\frac{T(E_\varphi)}{\varrho} + \frac{i\omega\mu H_\rho}{c} = 0$
5.	$\mathrm{rot}_\rho H - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_\rho}{\partial t} = 0$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - \frac{i\omega\varepsilon E_\rho}{c}$
2.	$\mathrm{rot}_\theta E + \frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$	$-\Psi(E_\varphi) + \frac{i\omega\mu H_\theta}{c} = 0$
3.	$\mathrm{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0$	$-\Psi(E_\theta) + \frac{i\omega\mu H_\varphi}{c} = 0$
6.	$\mathrm{rot}_\theta H - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_\theta}{\partial t} = 0$	$-\Psi(H_\varphi) - \frac{i\omega\varepsilon E_\theta}{c} = 0$
7.	$\mathrm{rot}_\varphi H - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0$	$\Psi(H_\theta) - \frac{i\omega\varepsilon E_\varphi}{c} = 0$
4.	$\mathrm{div}(E) = 0$	$\Psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\varrho} = 0$
8.	$\mathrm{div}(H) = 0$	$\Psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\varrho} = 0$

Таблица 4.

1	2
1.	$\frac{2}{\varrho}\left(e_\varphi \mathrm{co} + \bar{\bar{e}}_\varphi \mathrm{si}\right) + \frac{\mu}{c}\omega\left(h_\rho \mathrm{co} - \bar{\bar{h}}_\rho \mathrm{si}\right) = 0$
5.	$\frac{2}{\rho}\left(h_\varphi \mathrm{si} + \bar{\bar{h}}_\varphi \mathrm{co}\right) - \frac{\varepsilon}{c}\omega\left(-e_\rho \mathrm{si} + \bar{\bar{e}}_\rho \mathrm{co}\right) = 0$
2.	$-\left(\frac{1}{\rho}\left(e_\varphi \mathrm{co} + \bar{\bar{e}}_\varphi \mathrm{si}\right) + \chi\left(-e_\varphi \mathrm{si} + \bar{\bar{e}}_\varphi \mathrm{co}\right) + \left(\boxed{e_\varphi}\mathrm{co} + \boxed{\bar{\bar{e}}_\varphi}\mathrm{si}\right)\right)$ $+ \frac{\mu}{c}\omega\left(-h_\theta \mathrm{si} + \bar{\bar{h}}_\theta \mathrm{co}\right) = 0$
3.	$-\left(\frac{1}{\rho}(e_\theta \mathrm{si} + \bar{\bar{e}}_\theta \mathrm{co}) + \chi(e_\theta \mathrm{co} - \bar{\bar{e}}_\theta \mathrm{si}) + \left(\boxed{e_\theta}\mathrm{si} + \boxed{\bar{\bar{e}}_\theta}\mathrm{co}\right)\right)$ $+ \frac{\mu}{c}\omega\left(h_\varphi \mathrm{co} - \bar{\bar{h}}_\varphi \mathrm{si}\right) = 0$

6.	$$-\left(\frac{1}{\rho}\left(h_\varphi \mathrm{si}+\bar{\bar{h}}_\varphi \mathrm{co}\right)+\chi\left(h_\varphi \mathrm{co}-\bar{\bar{h}}_\varphi \mathrm{si}\right)+\left(\boxed{h_\varphi}\mathrm{si}+\boxed{\bar{\bar{h}}_\varphi}\mathrm{co}\right)\right)-\frac{\varepsilon}{c}\omega(e_\theta \mathrm{co}-\bar{\bar{e}}_\theta \mathrm{si})=0$$
7.	$$\left(\frac{1}{\rho}\left(h_\theta \mathrm{co}+\bar{\bar{h}}_\theta \mathrm{si}\right)+\chi\left(-h_\theta \mathrm{si}+\bar{\bar{h}}_\theta \mathrm{co}\right)+\left(\boxed{h_\theta}\mathrm{co}+\boxed{\bar{\bar{h}}_\theta}\mathrm{si}\right)\right)-\frac{\varepsilon}{c}\omega\left(-e_\varphi \mathrm{si}+\bar{\bar{e}}_\varphi \mathrm{co}\right)=0$$
4.	$$\left(\frac{1}{\rho}\left(e_\rho \mathrm{co}+\bar{\bar{e}}_\rho \mathrm{si}\right)+\chi\left(-e_\rho \mathrm{si}+\bar{\bar{e}}_\rho \mathrm{co}\right)+\left(\boxed{e_\rho}\mathrm{co}+\boxed{\bar{\bar{e}}_\rho}\mathrm{si}\right)\right)+\frac{2}{\varrho}(e_\theta \mathrm{si}+\bar{\bar{e}}_\theta \mathrm{co})=0$$
8.	$$\left(\frac{1}{\rho}\left(h_\rho \mathrm{si}+\bar{\bar{h}}_\rho \mathrm{co}\right)+\chi\left(h_\rho \mathrm{co}-\bar{\bar{h}}_\rho \mathrm{si}\right)+\left(\boxed{h_\rho}\mathrm{si}+\boxed{\bar{\bar{h}}_\rho}\mathrm{co}\right)\right)+\frac{2}{\varrho}\left(h_\theta \mathrm{co}+\bar{\bar{h}}_\theta \mathrm{si}\right)=0$$

Таблица 5

1	2	3
1.	$\frac{2}{\rho}e_\varphi+\frac{\mu\omega}{c}h_\rho=0$ $\frac{2}{\rho}\bar{\bar{e}}_\varphi-\frac{\mu\omega}{c}\bar{\bar{h}}_\rho=0$	$h_\rho=\frac{-2}{\chi\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}e_\varphi$ $\bar{\bar{h}}_\rho=\frac{2}{\chi\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\bar{\bar{e}}_\varphi$
5.	$\frac{2}{\rho}h_\varphi+\frac{\varepsilon\omega}{c}e_\rho=0$ $\frac{2}{\rho}\bar{\bar{h}}_\varphi-\frac{\varepsilon\omega}{c}\bar{\bar{e}}_\rho=0$	$e_\rho=\frac{-2}{\chi\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}h_\varphi$ $\bar{\bar{e}}_\rho=\frac{2}{\chi\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\bar{\bar{h}}_\varphi$
2.	$\boxed{e_\varphi}=-\chi\bar{\bar{e}}_\varphi-\frac{1}{\rho}e_\varphi+\frac{\mu\omega}{c}\bar{\bar{h}}_\theta$ $\boxed{\bar{\bar{e}}_\varphi}=\chi e_\varphi-\frac{1}{\rho}\bar{\bar{e}}_\varphi-\frac{\mu\omega}{c}h_\theta$	$\boxed{e_\varphi}=-\frac{1}{\rho}e_\varphi$ $\boxed{\bar{\bar{e}}_\varphi}=-\frac{1}{\rho}\bar{\bar{e}}_\varphi$

6.	$\boxed{h_\varphi} = \chi\bar{\bar{h}}_\varphi - \frac{1}{\rho}h_\varphi - \frac{\varepsilon\omega}{c}\bar{\bar{e}}_\theta$ $\boxed{\bar{\bar{h}}_\varphi} = -\chi h_\varphi - \frac{1}{\rho}\bar{\bar{h}}_\varphi + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_\theta$	$\boxed{h_\varphi} = -\frac{1}{\rho}h_\varphi$ $\boxed{\bar{\bar{h}}_\varphi} = -\frac{1}{\rho}\bar{\bar{h}}_\varphi$
3.	$\boxed{e_\theta} = \chi\bar{\bar{e}}_\theta - \frac{1}{\rho}e_\theta - \frac{\mu\omega}{c}\bar{\bar{h}}_\varphi$ $\boxed{\bar{\bar{e}}_\theta} = -\chi e_\theta - \frac{1}{\rho}\bar{\bar{e}}_\theta + \frac{\mu\omega}{c}h_\varphi$	$\boxed{e_\theta} = -\frac{1}{\rho}e_\theta$ $\boxed{\bar{\bar{e}}_\theta} = -\frac{1}{\rho}\bar{\bar{e}}_\theta$
7.	$\boxed{h_\theta} = -\chi\bar{\bar{h}}_\theta - \frac{1}{\rho}h_\theta + \frac{\varepsilon\omega}{c}\bar{\bar{e}}_\varphi$ $\boxed{\bar{\bar{h}}_\theta} = \chi h_\theta - \frac{1}{\rho}\bar{\bar{h}}_\theta - \frac{\varepsilon\omega}{c}e_\varphi$	$\boxed{h_\theta} = -\frac{1}{\rho}h_\theta$ $\boxed{\bar{\bar{h}}_\theta} = -\frac{1}{\rho}\bar{\bar{h}}_\theta$
4.	$\boxed{e_\rho} = -\chi\bar{\bar{e}}_\rho - \frac{1}{\rho}\left(2\bar{\bar{e}}_\theta + e_\rho\right)$ $\boxed{\bar{\bar{e}}_\rho} = \chi e_\rho - \frac{1}{\rho}\left(2e_\theta + \bar{\bar{e}}_\rho\right)$	
8.	$\boxed{h_\rho} = \chi\bar{\bar{h}}_\rho - \frac{1}{\rho}\left(2\bar{\bar{h}}_\theta + h_\rho\right)$ $\boxed{\bar{\bar{h}}_\rho} = -\chi h_\rho - \frac{1}{\rho}\left(2h_\theta + \bar{\bar{h}}_\rho\right)$	

Таблица 6.

1	**2**	**3**	**4**
E_θ	$\left(\sin(\chi\rho+\omega t)+\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$	$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$	$\cos(\beta)$
E_φ	$\left(\cos(\chi\rho+\omega t)-\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$	$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$	$\sin(\beta)$
E_ρ	$\left(\cos(\chi\rho+\omega t)+\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$	$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$	$\cos(\beta)$
H_θ	$\left(-\cos(\chi\rho+\omega t)+\sin(\chi\rho+\omega t)\right)$	$-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$	$-\sin(\beta)$
H_φ	$\left(\sin(\chi\rho+\omega t)+\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$	$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$	$\cos(\beta)$
H_ρ	$\left(-\sin(\chi\rho+\omega t)-\cos(\chi\rho+\omega t)\right)$	$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$	$-\cos(\beta)$

Таблица 7.

1	2
	$E_\theta = \frac{A}{\rho}\sin(\theta)\cos(\beta)$
	$E_\varphi = \frac{A}{\rho}\sin(\theta)\sin(\beta)$
	$E_\rho = \frac{2A}{\chi\rho^2}\cos(\theta)\cos(\beta)$
	$H_\theta = -\frac{A}{\rho}\sin(\theta)\sin(\beta)$
	$H_\varphi = \frac{A}{\rho}\sin(\theta)\cos(\beta)$
	$H_\rho = -\frac{2A}{\chi\rho^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos(\theta)\cos(\beta)$