

DOI: <http://doi.org/10.5281/zenodo.1319606>

ISSN 2225-6717

Выпуск №41

2018

ДОКЛАДЫ **Н**ЕЗАВИСИМЫХ **А**ВТОРОВ

Авиация и космонавтика

Логика

Строительство

Физика и астрономия

Хмельник С.И.

Новое решение уравнений Максвелла для сферической волны

Оглавление

- 1. Введение
- 2. Решение уравнений Максвелла
- 3. Потоки энергии
- 4. О продольной волне
- 5. Заключение
- Приложение 1
- Литература
- Таблицы

Аннотация

Отмечается, что известное решение для сферической электромагнитной волны не удовлетворяет закону сохранения энергии (она сохраняется только в среднем), одноименные (по координатам) электрические и магнитные напряженности синфазны, выполняется только одно из системы уравнений Максвелла, решение не является волновым, отсутствует поток энергии с реальным значением. Предлагается решение, свободное от этих недостатков.

1. Введение

В [1] предложено решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне. Далее рассматривается решение уравнений Максвелла для сферической волны во всей области существования волны (без разбиения на зоны). Такая задача возникает при решении уравнений электродинамики для элементарного электрического диполя – вибратора. Решение этой задачи известно и именно на основе этого решения строятся антенны. Вместе с тем это решение обладает рядом недостатков, в частности [2],

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем,

2. решение неоднородно и практически необходимо разбивать его на отдельные зоны (как правило, ближнюю, среднюю и дальнюю), в которых решения оказываются полностью различными,
3. в ближней зоне отсутствует поток энергии с реальным значением
4. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
5. в ближней зоне решение не является волновым (т.е. расстояние не является аргументом тригонометрической функции),
6. известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла (решение, удовлетворяющее одному уравнению системы, нельзя считать решением системы уравнений).

Практически эти недостатки известного решения означают, что они (математические решения) нестрого описывают реальные излучения технических устройств. Более строгое решение, будучи примененным в системах проектирования таких устройств, безусловно, должно повысить их качество.

2. Решение уравнений Максвелла

Итак, будем использовать сферические координаты. На рис. 1 показана система сферических координат (ρ, θ, φ) . Далее формулы мы будем размещать в таблицах и использовать следующие обозначения:

T(номер_таблицы)-(номер_столбца)-(номер_строки)

В таблице 1-3 приведены выражения для ротора и дивергенции вектора E в этих координатах [3]. Здесь и далее

E - напряженность электрического поля,

H - напряженность магнитного поля,

μ - абсолютная магнитная проницаемость,

ε - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Далее мы будем искать решение в виде функций E, H , представленных в таблице 2-2, где действительные функции вида $g(\theta)$ и комплексные функции вида $e(\rho), h(\rho)$ предстоит вычислить, а коэффициенты χ, α, ω известны.

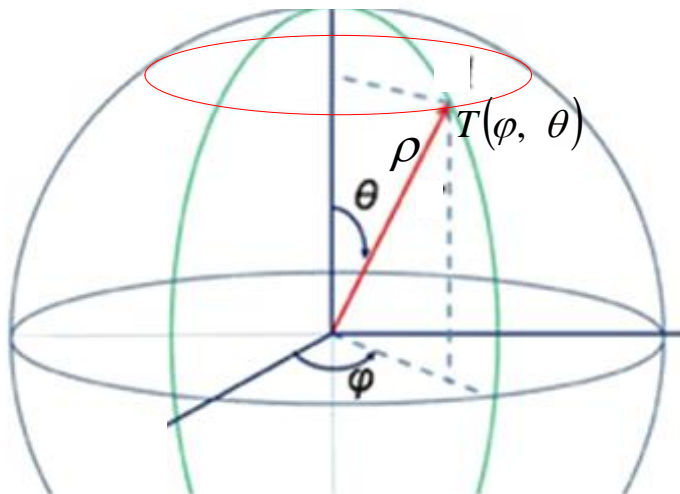


Рис. 1 (Sfera155.vsd).

При этих условиях преобразуем формулы (Г1-3) в (Г1-4), где приняты следующие обозначения:

$$e'_\rho = \frac{\partial(e_\rho(\rho))}{\partial\rho}, \quad (1)$$

$$\hat{g} = \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta}, \quad (2)$$

$$\Psi(E_\rho) = \psi(e_\rho(\rho)) \cdot g(\theta) \cdot \exp(\dots), \quad (3)$$

$$T(E_\rho) = \Gamma_\rho(\theta) \cdot e_\rho(\rho) \cdot \exp(\dots), \quad (4)$$

где

$$\psi(e_\rho(\rho)) = \left(\frac{e_\rho}{\rho} + e'_\rho + i\chi e_\rho \right), \quad (5)$$

$$\Gamma_\rho(\theta) = \left(\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \hat{g}(\theta) \right). \quad (6)$$

Функция (3) образуется из функции вида $\left(\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial(E_\rho)}{\partial\rho} \right)$

Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов имеют вид, приведенный в таблице 3-2.

Далее подставим роторы и дивергенции из таблицы 2-4 и функции E , H из таблицы 2 (после дифференцирования по времени) в таблицу 3-3. Далее перепишем уравнения из таблицы 3-3 в таблицу 4-2. При этом сократим также общие сомножители вида $\exp(\dots)$ и воспользуемся формулами (1-6).

В результате этих преобразований мы получили переопределенную систему из 8-ми дифференциальных уравнений в частных производных относительно 6-ти неизвестных функций с двумя аргументами ρ и θ .

Решение системы уравнений Максвелла, помимо естественного требования о выполнимости всех уравнений системы, должно удовлетворять основным физическим закономерностям:

1. закону сохранения энергии (не в среднем по времени, а в каждый момент времени),
2. экспериментально установленного в электротехнике сдвига фаз между электрической и магнитной напряженностями,
3. экспериментально установленного волнового характера распространения электрической и магнитной напряженностей в пространстве,
4. решение не должно допускать существования бесконечного значения какой-либо напряженности.

Математически эти закономерности должны быть не следствием решения системы уравнений Максвелла, а дополнительными условиями, превращающими переопределенную систему уравнений Максвелла в строго определенную систему. Однако решение может быть найдено и без учета этих условий, поскольку даже определенная (а уж тем более, переопределенная) система уравнений в частных производных, может иметь множество решений. В этом множестве решений есть единственное, удовлетворяющее перечисленным закономерностям. Величие системы уравнений Максвелла в том, что **всегда** существует решение, описывающее реальность. Но как же природа находит такое решение? Ответ, возможно, кроется в том факте, что существует функционал (с седловой точкой) относительно напряженностей, у которого первые вариации по напряженностям при обращении в нуль совпадают с уравнениями Максвелла. При этом спуск по функционалу в направлении этих вариаций эквивалентен решению этих уравнений [5].

Волновой характер решения обеспечивается сомножителями вида $\exp(\dots)$ в определении электрической и магнитной напряженностей по таблице 2. Достаточными условиями для сдвига фаз между электрической и магнитной напряженностями являются следующие:

$$E_{\rho} = -iH_{\rho}, H_{\rho} = iE_{\rho} \quad (7)$$

$$E_{\varphi} = iH_{\varphi}, H_{\varphi} = -iE_{\varphi} \quad (8)$$

$$E_{\theta} = -iH_{\theta}, H_{\theta} = iE_{\theta} \quad (9)$$

Обозначим:

$$E_{\rho,\varphi,\theta}^{sumH} = E_{\rho,\varphi,\theta} + H_{\rho,\varphi,\theta} \quad (11)$$

$$E_{\rho,\varphi,\theta}^{minH} = E_{\rho,\varphi,\theta} - H_{\rho,\varphi,\theta} \quad (12)$$

Вначале будем искать решение для вакуума, где в системе СГС

$$\varepsilon = \mu = 1. \quad (13)$$

и обозначим

$$q = \omega/c \quad (14)$$

Сложим попарно уравнения из таблицы Т4-2 и запишем полученные уравнения в таблицу Т4-3, используя обозначения (11, 12, 14). В результате этих преобразований мы получили недоопределенную систему из 4-х дифференциальных уравнений в частных производных относительно 6-ти неизвестных функций с двумя аргументами ρ и θ .

Из (7-12) следует:

$$E_{\rho}^{sumH} = e_{\rho} + h_{\rho} = e_{\rho}(1+i) = -ih_{\rho}(1+i) = h_{\rho}(1-i) \quad (15)$$

$$E_{\rho}^{minH} = e_{\rho} - h_{\rho} = e_{\rho}(1-i) = -ih_{\rho}(1-i) = -h_{\rho}(1+i) \quad (16)$$

$$E_{\varphi}^{sumH} = e_{\varphi} + h_{\varphi} = e_{\varphi}(1-i) = ih_{\varphi}(1-i) = h_{\varphi}(1+i) \quad (17)$$

$$E_{\varphi}^{minH} = e_{\varphi} - h_{\varphi} = e_{\varphi}(1+i) = ih_{\varphi}(1+i) = h_{\varphi}(-1+i) \quad (18)$$

$$E_{\theta}^{sumH} = e_{\theta} + e_{\theta} = e_{\theta}(1+i) = -ih_{\theta}(1+i) = h_{\theta}(1-i) \quad (19)$$

$$E_{\theta}^{minH} = e_{\theta} - h_{\theta} = e_{\theta}(1-i) = -ih_{\theta}(1-i) = -h_{\theta}(1+i) \quad (20)$$

$$E_{r,f,\theta}^{sumH} + E_{r,f,\theta}^{minH} = 2e_{r,f,\theta}, \quad H_{r,f,\theta}^{sumH} + H_{r,f,\theta}^{minH} = 2h_{r,f,\theta} \quad (21)$$

Перепишем теперь уравнения из таблицы Т4-3 в таблицу Т5-2, заменив переменные $E_{\rho,\varphi,\theta}^{sumH}$, $E_{\rho,\varphi,\theta}^{minH}$ на переменные $e_{\rho,\varphi,\theta}$ согласно с (15-20).

Видно, что уравнения Т6-2-2 и Т6-2-3 совместимы только в том случае, если выполняются два условия:

$$\alpha = 0 \tag{22}$$

$$e_\theta = i \cdot e_\varphi \tag{23}$$

$$g_\theta = g_\varphi \tag{23a}$$

С учетом этих условий перепишем уравнения из таблицы Т6-2 в таблицу Т6-3. Видно, что уравнения Т6-3-2 и Т6-3-3 совпадают, а из уравнений Т6-3-1 и Т6-3-4 можно исключить слагаемое $\frac{e_\varphi}{\rho} \hat{g}_\varphi$.

Полученные 2 уравнения запишем в таблицу Т-7-2. После простых преобразований эти уравнения переписаны в таблицу Т-7-3. Запишем теперь эти уравнения с учетом формулы (2.5):

$$\frac{e_\rho g_\rho}{\rho} + e'_\rho g_\rho + i\chi e_\rho g_\rho + i q e_\rho g_\rho + \frac{\cos}{\rho \sin}(1+i)e_\varphi g_\varphi = 0 \tag{24}$$

$$\frac{e_\varphi}{\rho} + e'_\varphi + i\chi e_\varphi + i q e_\varphi = 0 \tag{25}$$

Уравнение (25) распадается на два уравнения:

$$\frac{e_\varphi}{\rho} + e'_\varphi = 0 \tag{26}$$

$$i\chi e_\varphi + i q e_\varphi = 0 \tag{27}$$

откуда следует, что

$$\chi = -q \tag{28}$$

$$e_\varphi = \frac{A}{\rho} \tag{29}$$

где A – некоторая константа. Подставляя (28, 29) в (24), находим:

$$e'_\rho g_\rho = -\frac{e_\rho g_\rho}{\rho} - \frac{\cos}{\sin} \frac{A(1+i)}{\rho^2} g_\varphi \tag{30}$$

или

$$e'_\rho = -\frac{e_\rho}{\rho} - \frac{\cos}{\sin} \frac{A(1+i)}{\rho^2} \frac{g_\varphi}{g_\rho} \tag{31}$$

Пусть

$$g_\varphi = \sin, \quad g_\rho = \cos \quad (32)$$

Из (31, 32) находим:

$$e'_\rho = -\frac{e_\rho}{\rho} - \frac{A \cdot (1+i)}{\rho^2} \quad (33)$$

Анализ этого уравнение приведен в разделе 4.

В результате вышеприведенных вычислений определяются комплексные функции $e_\rho(\rho)$, $e_\varphi(\rho)$, $e_\theta(\rho)$. При данных функциях $g(\theta)$ функции E_ρ , E_φ , E_θ определяются по таблице 2.

При данных функциях E_ρ , E_φ , E_θ функции H_ρ , H_φ , H_θ определяются по (7-8), откуда следует, что

$$h_\rho = ie_\rho \quad (34)$$

$$h_\varphi = -ie_\varphi \quad (35)$$

$$h_\theta = ie_\theta \quad (36)$$

Функции H_ρ , H_φ , H_θ также приведены в таблице 2.

3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В системе СИ $\eta = 1$ и формула (1) принимает вид:

$$S = E \times H. \quad (3)$$

В сферических координатах φ , θ , ρ плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты S_φ , S_θ , S_ρ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. В [4] показано, что они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Учитывая (2.7-2.9) из (4) находим:

$$S_\rho = E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi = E_\varphi i E_\theta + E_\theta i E_\varphi \quad (4a)$$

или

$$S_\rho = 2iE_\theta E_\varphi, \quad (5)$$

$$S_{\theta} = E_{\rho}H_{\varphi} - E_{\varphi}H_{\rho} = iH_{\rho}H_{\varphi} - iH_{\varphi}H_{\rho} = 0 \quad (6)$$

$$S_{\varphi} = E_{\theta}H_{\rho} - E_{\rho}H_{\theta} = -iH_{\theta}H_{\rho} + iH_{\rho}H_{\theta} = 0. \quad (7)$$

Из (6, 7) следует, что поток энергии вдоль окружностей сферы отсутствует.

В приложении 1 показано, что плотность потока энергии, проходящей сквозь сферу с радиусом ρ ,

$$\overline{S_{\rho}} = 8\eta\pi^2 A^2. \quad (8)$$

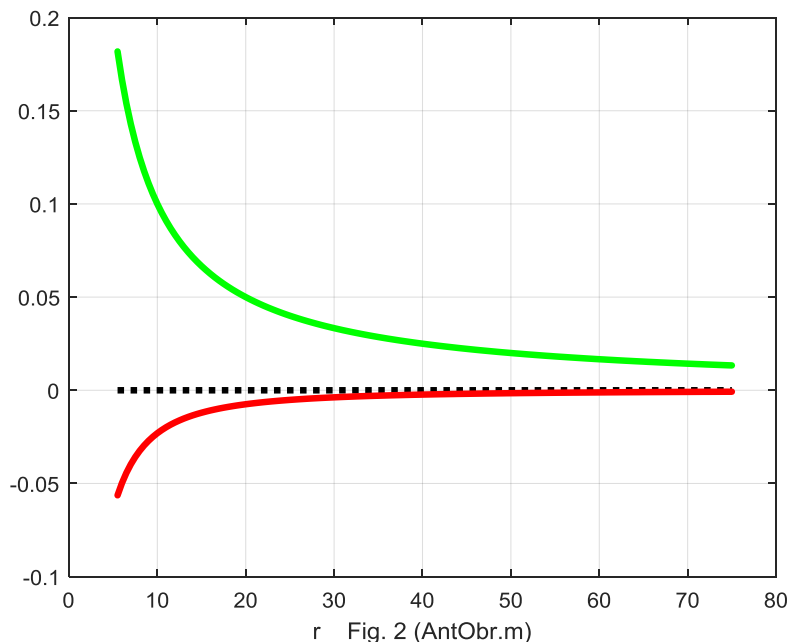
и не зависит от времени, т.е. этот поток имеет одну и ту же величину на сферической поверхности любого радиуса в любой момент времени. Иначе говоря, поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

4. О продольной волне

Рассмотрим подробнее уравнение (2.33). Оно имеет решение следующего вида [8, стр. 12]:

$$e_{\rho} = -A \cdot (1+i) \frac{\ln(\rho)}{\rho^2} \quad (1)$$

Оно определяет электрическую напряженность продольного электромагнитного поля - см. таблицу 2. Магнитная напряженность продольного электромагнитного поля также следует из таблицы 2. Электрическая напряженность продольного электромагнитного поля присутствует также в известном решении для сферической волны в ближней зоне, но там отсутствует магнитная напряженность продольного электромагнитного поля, что (конечно же) противоречит уравнениям Максвелла. Кроме того, в предложенном решении электрическая напряженность имеет другое описание. Вообще, решение не существует при отсутствии продольных напряженностей – можно легко убедиться, что уравнения Т6-3 не совместимы при $e_{\rho}(\rho) = 0$. В [1] дано решение для дальней зоны, где $e_{\rho}(\rho) = 0$. Но в том решении существуют случаи, когда существуют бесконечные значения какой-либо напряженности – это делает то решение практически неприменимым.



На рис. 2 приведен вид решения уравнения (1) при $A=1$, где показаны реальная часть функции (1) e_ρ (см. нижнюю кривую) и функция (2.29) $e_\phi = A/\rho$ (см. верхнюю кривую). Важно отметить, что функция (1) всегда имеет отрицательное значение (по отношению к постоянной A). При $A=-1$ продольная волна направлена в сторону от источника, т.е. совпадает по направлению с потоком энергии. Энергия из основного потока энергии поперечной волны (3.8) передается в продольную волну. При этом основной поток энергии уменьшается (сравнительная оценка энергии продольной и поперечной волны здесь не приводится). Таким образом, энергия поперечной волны преобразуется в энергию продольной волны. Одновременно с этим напряженность поперечной волны уменьшается и распространение волны прекращается (действительно, трудно представить себе неограниченную в пространстве сферическую волну).

5. Заключение

1. Строгое решение уравнений Максвелла, показанное в табл. 1 и свободное от указанных выше недостатков, представлено в табл. 2, где

$$\varepsilon = \mu = 1. \quad (1)$$

$$q = \omega/c \quad (2)$$

$$\chi = -q \quad (3)$$

$$\alpha = 0 \quad (4)$$

$$E_\rho = -iH_\varphi, H_\rho = iE_\varphi \quad (5)$$

$$E_\varphi = iH_\rho, H_\varphi = -iE_\rho \quad (6)$$

$$E_\theta = -iH_\theta, H_\theta = iE_\theta \quad (7)$$

$$g_\rho = \cos(\theta) \quad (8)$$

$$g_\theta(\theta) = g_\varphi(\theta) = \sin(\theta) \quad (9)$$

$$e_\varphi = \frac{A}{\rho} \quad (10)$$

$$e_\theta = i \cdot e_\varphi \quad (11)$$

$$e_\rho = -A \cdot (1+i) \frac{\ln(\rho)}{\rho^2} \quad (12)$$

$$h_\rho = ie_\rho \quad (13)$$

$$h_\varphi = -ie_\varphi \quad (14)$$

$$h_\theta = ie_\theta \quad (15)$$

2. Найденное решение является комплексным. Известно, что реальная часть комплексного решения также является решением. Следовательно, в качестве решения вместо функций, представленных в табл. 2, можно принять их реальные части. Учитывая это замечание и вышеприведенные формулы, перепишем табл. 2 в табл. 8, где показаны реальные значения напряженностей. На рис. 3 показаны векторы напряженностей в сферической системе координат.

3. Одноименные (по координатам ρ , φ , θ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.

4. Существует продольная электромагнитная волна, имеющая электрическую и магнитную компоненты.

5. В поперечной электромагнитной волне поток энергии, проходящий сквозь сферы по радиусу, остается постоянным с увеличением радиуса и НЕ изменяется во времени.

6. Энергия поперечной волны преобразуется в энергию продольной волны. При этом напряженность поперечной волны уменьшается и распространение волны прекращается.

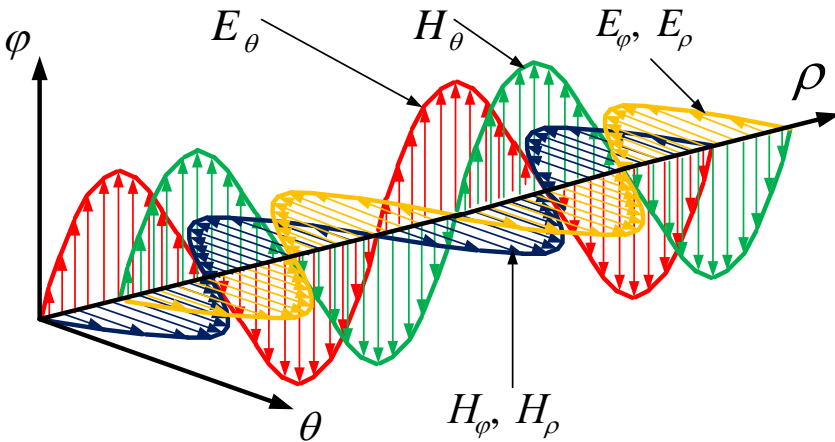


Рис. 3.

Приложение 1

Рассматривая табл. 2 и формулы (2.22, 2.23, 2.23а, 29, 32) находим:

$$E_\varphi = \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \exp(i \cdot (\chi\rho + \omega t)) = \frac{A}{\rho} \sin(\theta) [\cos(\chi\rho + \omega t) + i \sin(\chi\rho + \omega t)] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} E_\theta = i \cdot E_\varphi &= i \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \exp(i \cdot (\chi\rho + \omega t)) = \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \exp\left(i \cdot \left(\chi\rho + \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ &= \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \left[\cos\left(\chi\rho + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\chi\rho + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{A}{\rho} \sin(\theta) [-\sin(\chi\rho + \omega t) - i \cos(\chi\rho + \omega t)] \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1, 2, 4.5) находим:

$$\begin{aligned} S_\rho = 2iE_\theta E_\varphi &= \frac{2iA^2}{\rho^2} \sin^2(\theta) [\cos(\dots) + i \sin(\dots)] [-\sin(\dots) - i \cos(\dots)] = \\ &= \frac{2iA^2}{\rho^2} \sin^2(\theta) [-i \cos^2(\dots) - i \sin^2(\dots)] = \frac{2iA^2}{\rho^2} \sin^2(\theta) (-i) \end{aligned}$$

или

$$S_{\rho} = \frac{2A^2}{\rho^2} \sin^2(\theta). \quad (3)$$

Заметим еще, что площадь поверхности сферы с радиусом ρ равна $4\pi\rho^2$. Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом ρ равен

$$\overline{S}_{\rho} = \eta \int_{\theta} 4\pi\rho^2 S_{\rho} d\theta = \eta 4\pi\rho^2 \frac{2A^2}{\rho^2} \int_{\theta} \sin^2(\theta) d\theta$$

или

$$\overline{S}_{\rho} = 8\eta\pi^2 A^2. \quad (4)$$

Литература

1. Хмельник С.И. Новое решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне, <http://vixra.org/abs/1711.0242>, 2017-11-08.
2. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Под редакцией Ю.В. Пименова, Москва, 2002 г., 536 стр.
3. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
4. Хмельник С.И.. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, publ. “MiC”, Israel, Printed in USA, Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2016, 196 с.
5. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, пятая редакция. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875, ISBN 978-0-557-4837-3, 2014, 360 с.
6. Ближние и дальние зоны электромагнитного поля, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/BIZ.pdf>
7. Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Д.П. Современная теория и практические применения антенн. Под ред. Неганова В.А. Изд. «Радиотехника», Москва, 2009, 720 стр.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001, 576 стр.

Таблицы

Таблица 1.

1	2	3	4
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha E_\theta}{\rho \sin(\theta)}$
5	$\text{rot}_\rho(H)$	$\frac{H_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha H_\theta}{\rho \sin(\theta)}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$	$\frac{i\alpha E_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \psi(E_\varphi)$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\rho \partial \varphi}$	$\psi(E_\theta) - \frac{i\alpha E_\rho}{\rho}$
6	$\text{rot}_\theta(H)$	$\frac{\partial H_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{H_\varphi}{\rho} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho}$	$\frac{i\alpha H_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \psi(H_\varphi)$
7	$\text{rot}_\varphi H$	$\frac{H_\theta}{\rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\rho \partial \varphi}$	$\psi(H_\theta) - \frac{i\alpha H_\rho}{\rho}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha E_\varphi}{\rho \sin(\theta)}$
8	$\text{div}(H)$	$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{H_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha H_\varphi}{\rho \sin(\theta)}$

Таблица 2.

1	2
	$E_\theta = e_\theta(\rho)g_\theta(\theta)\exp(i \cdot (\chi\rho + \alpha\varphi + \omega t))$
	$E_\varphi = e_\varphi(\rho)g_\varphi(\theta)\exp(i \cdot (\chi\rho + \alpha\varphi + \omega t))$
	$E_\rho = e_\rho(\rho)g_\rho(\theta)\exp(i \cdot (\chi\rho + \alpha\varphi + \omega t))$
	$H_\theta = h_\theta(\rho)g_\theta(\theta)\exp(i \cdot (\chi\rho + \alpha\varphi + \omega t))$
	$H_\varphi = h_\varphi(\rho)g_\varphi(\theta)\exp(i \cdot (\chi\rho + \alpha\varphi + \omega t))$
	$H_\rho = h_\rho(\rho)g_\rho(\theta)\exp(i \cdot (\chi\rho + \alpha\varphi + \omega t))$

Таблица 3.

1	2	3
1.	$\text{rot}_\rho E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha E_\theta}{\rho \sin(\theta)} + \frac{i\omega\mu}{c} H_\rho = 0$
5.	$\text{rot}_\rho H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} = 0$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha H_\theta}{\rho \sin(\theta)} - \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_\rho = 0$
2.	$\text{rot}_\theta E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$	$\frac{i\alpha E_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \Psi(E_\varphi) + \frac{i\omega\mu}{c} H_\theta = 0$
3.	$\text{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0$	$\Psi(E_\theta) - \frac{i\alpha E_\rho}{\rho} + \frac{i\omega\mu}{c} H_\varphi = 0$
6.	$\text{rot}_\theta H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = 0$	$\frac{i\alpha H_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \Psi(H_\varphi) - \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_\theta = 0$
7.	$\text{rot}_\varphi H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0$	$\Psi(H_\theta) - \frac{i\alpha H_\rho}{\rho} - \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_\varphi = 0$
4.	$\text{div}(E) = 0$	$\Psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha E_\varphi}{\rho \sin(\theta)} = 0$
8.	$\text{div}(H) = 0$	$\Psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha H_\varphi}{\rho \sin(\theta)} = 0$

Таблица 4.

1	2	3
1	$\frac{e_\varphi g_\varphi}{\rho \operatorname{tg}} + \frac{e_\varphi \hat{g}_\varphi}{\rho} - \frac{i\alpha}{\rho \sin} e_\theta g_\theta + \frac{i\omega\mu}{c} h_\rho g_\rho = 0$	$\frac{E_\varphi^{\text{sumH}}}{\rho \operatorname{tg}} g_\varphi + \frac{E_\varphi^{\text{sumH}}}{\rho} \hat{g}_\varphi -$
5	$\frac{h_\varphi g}{\rho \operatorname{tg}} + \frac{h_\varphi \hat{g}_\varphi}{\rho} - \frac{i\alpha}{\rho \sin} h_\theta g_\theta - \frac{i\omega\varepsilon}{c} e_\rho g_\rho = 0$	$-\frac{i\alpha}{\rho \sin} E_\theta^{\text{sumH}} g_\theta -$ $-iqE_\rho^{\text{minH}} g_\rho = 0$
2	$\frac{i\alpha}{\rho \sin} e_\rho g_\rho - \psi(e_\varphi) g_\varphi + \frac{i\omega\mu}{c} h_\theta g_\theta = 0$	$\frac{i\alpha}{\rho \sin} E_\rho^{\text{sumH}} g_\rho - \psi(E_\varphi^{\text{sumH}}) g_\varphi$
6	$\psi(e_\theta) g_\theta - \frac{i\alpha}{\rho} e_\rho g_\rho + \frac{i\omega\mu}{c} h_\varphi g_\varphi = 0$	$-iqE_\theta^{\text{minH}} g_\theta = 0$
3	$\frac{i\alpha}{\rho \sin} h_\rho g_\rho - \psi(h_\varphi) g_\varphi - \frac{i\omega\varepsilon}{c} e_\theta g_\theta = 0$	$\psi(E_\theta^{\text{sumH}}) g_\theta - \frac{i\alpha}{\rho} E_\rho^{\text{sumH}} g_\rho -$
7	$\psi(h_\theta) g_\theta - \frac{i\alpha}{\rho} h_\rho g_\rho - \frac{i\omega\varepsilon}{c} e_\varphi g_\varphi = 0$	$-iqE_\varphi^{\text{minH}} g_\varphi = 0$
4	$\psi(e_\rho) g_\rho + \frac{e_\theta}{\rho \operatorname{tg}} g_\theta + \frac{e_\theta \hat{g}_\theta}{\rho} + \frac{i\alpha}{\rho \sin} e_\varphi g_\varphi = 0$	$\psi(E_\rho^{\text{sumH}}) g_\rho + \frac{E_\theta^{\text{sumH}}}{\rho \operatorname{tg}} g_\theta +$
8	$\psi(h_\rho) g_\rho + \frac{h_\theta g}{\rho \operatorname{tg}} + \frac{h_\theta \hat{g}_\theta}{\rho} + \frac{i\alpha}{\rho \sin} h_\varphi g_\varphi = 0$	$+\frac{E_\theta^{\text{sumH}}}{\rho} \hat{g}_\theta + \frac{i\alpha}{\rho \sin} E_\varphi^{\text{sumH}} g_\varphi = 0$

Таблица 5.

1	2
1.	$\frac{(1-i)e_\varphi}{\rho \operatorname{tg}} g_\varphi + \frac{(1-i)e_\varphi}{\rho} \hat{g}_\varphi - \frac{i\alpha}{\rho \sin} (1+i)e_\theta g_\theta - (1-i) \frac{i\omega\mu}{c} e_\rho g_\rho = 0$
2.	$\frac{i\alpha}{\rho \sin} (1+i)e_\rho g_\rho - (1-i)\psi(e_\varphi) g_\varphi - (1-i) \frac{i\omega\mu}{c} e_\theta g_\theta = 0$
3.	$(1+i)\psi(e_\theta) g_\theta - (1+i) \frac{i\alpha}{\rho} e_\rho g_\rho - (1-i) \frac{i\omega\mu}{c} e_\varphi g_\varphi = 0$
4.	$(1+i)\psi(e_\rho) g_\rho + (1+i) \frac{e_\theta}{\rho \operatorname{tg}} g_\theta + (1+i) \frac{e_\theta}{\rho} \hat{g}_\theta + (1-i) \frac{i\alpha}{\rho \sin} e_\varphi g_\varphi = 0$

Таблица 6.

1	2	3
1	$\frac{1}{\rho \sin}(e_\theta \alpha g_\theta - e_\varphi g_\varphi \cos) + i q e_\rho g_\rho -$ $-\frac{e_\varphi}{\rho} \hat{g}_\varphi = 0$	$\frac{e_\varphi}{\rho} \hat{g} = \frac{g \cos}{\rho \sin} e_\varphi + i q e_\rho g_\rho$
2	$\psi(e_\varphi) g_\varphi + q e_\theta g_\theta + \frac{\alpha}{\rho \sin} e_\rho g_\rho = 0$	$\psi(e_\varphi) g_\varphi + i q e_\varphi g_\varphi = 0$
3	$\psi(e_\theta) g_\theta - q e_\varphi g_\varphi - \frac{i \alpha}{\rho} e_\rho g_\rho = 0$	$i \cdot \psi(e_\varphi) g_\varphi - q e_\varphi g_\varphi = 0$
4	$\psi(e_\rho) g_\rho + \frac{1}{\rho \sin}(e_\theta g_\theta \cos + e_\varphi \alpha g_\varphi) +$ $+\frac{e_\theta}{\rho} \hat{g}_\theta = 0$	$\psi(e_\rho) g_\rho + \frac{i g_\varphi \cos}{\rho \sin} e_\varphi +$ $+\frac{i e_\varphi}{\rho} \hat{g}_\varphi = 0$

Таблица 7.

1	2
1.	$-\psi(e_\rho) g_\rho - \frac{i \cos}{\rho \sin} e_\varphi g_\varphi - \frac{\cos}{\rho \sin} e_\varphi g_\varphi - i q e_\rho g_\rho = 0$
2.	$\psi(e_\varphi) g_\varphi + i q e_\varphi g_\varphi = 0$

Таблица 8.

1	2
	$E_\theta = e_\varphi(\rho) \sin(\theta) \sin(\chi \rho + \omega t)$
	$E_\varphi = e_\varphi(\rho) \sin(\theta) \cos(\chi \rho + \omega t)$
	$E_\rho = e_\rho(\rho) \cos(\theta) \cos(\chi \rho + \omega t)$
	$H_\theta = -e_\varphi(\rho) \sin(\theta) \cos(\chi \rho + \omega t)$
	$H_\varphi = e_\varphi(\rho) \sin(\theta) \sin(\chi \rho + \omega t)$
	$H_\rho = e_\rho(\rho) \cos(\theta) \sin(\chi \rho + \omega t)$