ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ / TECHNICAL SCIENCE

УДК:621.352.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕЖСЛОЙНЫХ НАГРУЗОК В СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЯХ, ПОДВЕРГАЕМЫХ ВОЗДЕЙСТВИЮ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

©Мусави С. А., *Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан, musavisaida@mail.ru*
©Хейрабади Г. С., *Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан*

INTER-LAYER LOADS DETERMINATION IN LAYERED STRUCTURES SUBJECTED TO EXPOSURE TO HIGH TEMPERATURES

©Musavi S., *Azerbaijan state oil and industry University, Baku, Azerbaijan, musavisaida@mail.ru*
©Heirabadi G., *Azerbaijan state oil and industry University, Baku, Azerbaijan*

Аннотация. В статье рассматривается несущая способность трехслойной пластины, подверженной воздействию высокотемпературной внешней среды. (Это подобие конструкции отдельного топливного элемента, являющегося системой, включающей наслаиваемые один на другой три конструктивных элемента, а именно: анод, электролит и катод).

С этой целью сформулированы основные гипотезы, используемые для математической формулировки задачи. Составлена математическая модель для осесимметричного деформационного поведения многослойной конструкции в условиях воздействия высоких температур. Для этого определены соотношения деформационного процесса с учетом физико–механических свойств слоев пластины.

Смоделированы теплофизические и механические свойства материалов слоев конструкции топливного элемента и сделаны аппроксимации по напряжениям и деформациям.

В итоге решена задача о выпучивании нагреваемого многослойного тела, которая приведена к задаче Коши с начальными условиями, определенными по ее механической модели.

Abstract. In the article, the bearing capacity of the three-layered plate, exposed to high-temperature is considered. (This similarity separate fuel cell structures, which is a system comprising laminated to each other three structural elements, namely, anode, electrolyte and cathode).

For this purpose, the basic hypotheses used for the mathematical formulation of the problem are set out. The mathematical model for axisymmetric deformation behaviour of multilayer design in conditions of high temperatures interface is developed.

To this, the ratios of the determined the ratios of the deformation process, taking into account the physical and mechanical properties of the plate layers are determined.

Thermal and mechanical properties of the fuel cell structure layers materials structure are modelled and approximations of the stresses and deformations are made.

As a result, the problem of buckling heated multi-layer body is solved, which is given as the Cauchy problem with the initial conditions set for its mechanical model.

Ключевые слова: многослойное тело, деформационное поведение, температура, математическая модель, межслойные нагрузки.

Keywords: multi-layer body, deformation behavior, temperature, mathematical model, interlayer loads.

В статье рассматривается несущая способность трехслойной пластины, подверженной воздействию высокотемпературной внешней среды. (Это подобие конструкции отдельного топливного элемента, являющегося конструктивным элементом, включающегося наслаиваемых одна на другую трех слоев, а именно, анод, электролит и катод).

Для решения поставленной задачи составлена математическая модель при нижеследующих гипотез:

– предполагается, что толщина серединного слоя конструкции значительно меньше толщины крайних слоев, из-за чего конструкцию можно рассматривать как двухслойную.

– материалы слоев конструкции ведут себя как вязкоупругие тела при воздействии высокой температуры;

– потеря устойчивости конструкции происходит за пределами вязкоупругих деформаций, т.е. при потере устойчивости имеют место деформации ползучести;

– деформационное поведение конструктивно-многослойной пластины исследуется с учетом геометрической нелинейности. Объясняется это тем, что потеря несущей способности многослойной пластины происходит при прогибах, имеющих метрические показатели, сопоставимые с порядком ее толщины;

– предполагается наличие геометрической нелинейности (ГН) только в направлении нормали к серединной поверхности пластины, а ГН по остальным сечениям и направлениям пренебрегается и не рассматривается;

– сохраняется в силе гипотеза Кирхгофа Лява и компоненты упругих, вязких деформаций и деформации ползучести определяются по ниже приводимым математическим выражением:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\ell} + \varepsilon_{ij}^{v} + \varepsilon_{ij}^{c} + \theta g_{ij} \tag{1}$$

где деформации в упругой области «$\varepsilon^{e}{}_{ij}$» в зависимости от возникающих напряжений определяются согласно закону Гука:

$$\varepsilon_{ij}^{\ell} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} g_{ij} \cdot J_1, \tag{2}$$

где, соответственно, Е, ν — модуль Юнга, коэффициент Пуассона; τ_{ij} — компоненты тензора напряжений; g_{ij} — компоненты метрического тензора; J_1 — первый инвариант тензора напряжений.

Вязкие деформации

$$\varepsilon_{ij}^{v} = \frac{1}{E}\int_0^t H(t,\tau)[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu J_1 g_{ij}]d\tau, \tag{3}$$

где $H(t,\tau)$ — ядро ползучести.

θ -относительное объемное изменение, возникающее только за счет воздействия температуры. Причем температурное поле рассматривается высокотемпературным полем с постоянным (незначительным изменением во времени можно пренебречь) потенциалом. Это означает, что температурные напряжения принимаются постоянными.

Связь между деформациями ползучести и напряжениями представляются выражением вида:

$$\varepsilon_{ij}^{c} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_{m}^{c}(1-K_{10})}{4\sigma_{1T}}(3\sigma_{ij} - J_1 g_{ij}) \quad ; \text{ где } \quad \sigma_{1T} = \frac{\sigma_{т}}{\sqrt{1+h(t)}}$$

$$K_{10} = \sqrt{\frac{2\sigma_{T}^{2}}{J_1^2 + 3J_2} - 1} \qquad (4)$$

где J_2 — второй инвариант тензора деформаций ε_m^c — максимальная деформация ползучести и определяется из опыта на одноосное растяжение.

Окончательно, с учетом идеальной пластичности материалов слоев конструкции топливного элемента ($\nu = 0{,}5$) и модели линейного их упрочнения.

$$\varepsilon_{ij}^{c} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_{m}^{c}(1-K_{10})}{4\sigma_{1T}}(3\sigma_{ij} - J_1 g_{ij})$$

— является так же как E_3-функцией времени.

Связь между перемещениями и напряжениями представляется выражением вида:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2E_4}(3\sigma_{ij} - J_1 g_{ij}) + \theta g_{ij}$$

где

$$\frac{1}{E_4} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_3} + \frac{\sqrt{2}\varepsilon_{m}^{p}(1-K_{10})}{2\sigma_{1T}}$$

С учетом осесимметричности граничных условий и распределения температурного поля рассматривается осесимметричное деформационное поведение, для постановки которого выражения деформаций через перемещения представляются в нижеприведенном виде:

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = \varepsilon_{rr} + z\,?_{rr}; \qquad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi} + z\,?_{\varphi\varphi};;$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}; \quad ?_{rr} = -\frac{d^2 w}{dr^2}; \quad ?_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}$$

где Z-продольная координата, которая изменяется в интервале от «-h» до «+h»; 2 h-общая толщина пластины;

ε_{rr}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ — компоненты тензора деформаций серединной плоскости, $æ_{rr}$, $æ_{\varphi\varphi}$ — компоненты изгиба, u, w — компоненты вектора перемещений, соответственно, в направлениях r и z, r, φ — полярные координаты.

Для характеристики свойств материальных слоев пластины предполагается, что:

-слои пластины изготовлены из материалов с разными физико-механическими свойствами, а именно, модулем Юнга, коэффициентом температурного расширения и пределом текучести;

-полная деформация представляется в виде суммы со слагаемыми из отдельных деформаций:

-изменение теплофизических характеристик материалов слоев конструкции топливного элемента имеет вид.

Это означает, что теплофизические свойства изменяются скачкообразно, где «α_1» и «α_2» есть коэффициенты температурного расширения, соответственно первого и второго слоев конструкции.

Ступенчатый характер изменения «α_1» заменяется изменением по наклонной кривой, т.е.

$$\alpha(z) = \alpha_0 + kz$$

где, постоянные величины α_0 и k определяются из граничных условий $\alpha(-h) = \alpha_1$; $\alpha(h) = \alpha_2$. Из этих условий $\alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$; $k = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2h}$.

Следовательно

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{h} z \tag{5}$$

Модуль Юнга «E» для двухслойной пластинки определяется как приведенной модуль упругости для цельной конструкции в виде

$$E = \frac{S_1 E_1 + S_2 E_2}{S_1 + S_2}, \tag{6}$$

где E_1, E_2 — соответственно модули упругости S_1, S_2 -площади боковых поверхностей первого и второго слоев. Учитывая, что $S_1 = S_2$ из (6) получается, что

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \tag{7}$$

Тонкостенность конструкции позволяет использовать разложения в ряд по координате «Z», оставив при этом только линейную их часть, представляемых нижеприводимыми выражениями:

$$\tilde{\sigma}_{rr} = \frac{1}{2h} N_{rr} + z \cdot \frac{3}{2h^3} M_{rr}; \qquad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2h} N_{\varphi\varphi} + z \cdot \frac{3}{2h^3} M_{\varphi\varphi}, \tag{8}$$

где

$$N_{rr}=\int_{-h}^{h}\tilde{\sigma}_{rr}dz;\quad N_{\varphi\varphi}=\int_{-h}^{h}\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}dz;$$

$$M_{rr}=\int_{-h}^{h}\tilde{\sigma}_{rr}zdz;\quad M_{\varphi\varphi}=\int_{-h}^{h}\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}zdz;$$

С учетом (8) соотношения для деформаций можно переписать следующим образом

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}&=\frac{1}{E_4}\frac{N_{rr}}{2h}-\frac{1}{2E_4}\cdot\frac{N_{\varphi\varphi}}{2h}+\theta\\
\varepsilon_{\varphi\varphi}&=\frac{1}{E_4}\frac{N_{\varphi\varphi}}{2h}-\frac{1}{2E_4}\cdot\frac{N_{rr}}{2h}+\theta_1\\
\varpi_{rr}&=\frac{3}{2h^3E_4}M_{rr}-\frac{3}{4h^3E_4}M_{rr}+\theta_2\\
\varpi_{\varphi\varphi}&=\frac{3}{2h^3E_4}M_{\varphi\varphi}-\frac{3}{4h^3E_4}M_{rr}+\theta_2
\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

где
$$\theta_1=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\theta dz;\qquad \theta_2=\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h}\theta\cdot z\cdot dz.\qquad(10)$$

Из-за сложности полученной математической формулировки задачи, представленной в виде системы нелинейных алгебраических уравнений (9) для ее решения применяется вариационный метод, для чего составляется функционал нижеприводимого вида:

$$\begin{aligned}
J=2\pi\int_0^R\Bigg\{&\dot N_{rr}\left(\frac{d\dot u}{dr}+\frac{dw}{dr}\cdot\frac{d\dot w}{dr}\right)+\dot N_{\varphi\varphi}\cdot\frac{\dot u}{r}-\dot M_{rr}\cdot\frac{d\dot w}{dr}-\dot M_{\varphi\varphi}\frac{1}{r}\cdot\frac{d\dot w}{dr}+\frac{1}{2}N_{rr}\left(\frac{d\dot w}{dr}\right)^2-\\
&-\frac{1}{2h}\left[\frac{1}{E_4}N_{rr}-\frac{1}{2E_4}N_{\varphi\varphi}\right]^{\bullet}\dot N_{rr}-\frac{1}{2h}\left[\frac{1}{E_4}N_{\varphi\varphi}-\frac{1}{2E_4}N_{rr}\right]^{\bullet}\cdot\dot N_{\varphi\varphi}-\frac{3}{2h^3}\left[\frac{1}{E_4}M_{rr}-\frac{1}{2E_4}M_{\varphi\varphi}\right]^{\bullet}\dot M_{rr}-\\
&-\frac{3}{2h^3}\left[\frac{1}{E_4}M_{\varphi\varphi}-\frac{1}{2E_4}M_{rr}\right]^{\bullet}\cdot\dot M_{\varphi\varphi}-\dot\theta_1(\dot N_{rr}+\dot N_{\varphi\varphi})-\dot\theta_2(\dot M_{rr}+\dot M_{\varphi\varphi})+\frac{1}{2}\frac{1}{E_4}\left[\frac{1}{2h}\dot N_{rr}^2+\frac{3}{2h^3}\dot M_{rr}^2\right]-\\
&-\frac{1}{2E_4}\cdot\left(\frac{1}{2h}\dot N_{rr}\dot N_{\varphi\varphi}+\frac{3}{2h^3}\dot M_{rr}\dot M_{\varphi\varphi}\right)+\frac{1}{2E_4}\cdot\left(\frac{1}{2h}\dot N_{\varphi\varphi}^2+\frac{3}{2h^3}\dot M^2_{\varphi\varphi}\right)\Bigg\}rdr,
\end{aligned}\qquad(11)$$

где R — радиус пластинок; точки над величинами означают производную по времени. Независимыми варьируемыми величинами являются — $\dot N_{rr}$, $\dot N_{\varphi\varphi}$, $\dot M_{rr}$, $\dot M_{\varphi\varphi}$, $\dot w$, $\dot u$.

Формируются граничные условия для жестко закрепленной по краям пластины:

$$\text{при}\quad r=R;\ \ W=0;\ \ \frac{dW}{dr}=0\qquad(12)$$

Принимаются для определения стационара функционала методами Ритце аппроксимации (по граничным условиям и физическим соображениям) для независимых параметров в нижеприводимом виде:

$$\left.\begin{aligned}
&w = C(t)\cdot\left(R^2 - r^2\right)^2; \qquad u = 0\\
&N_{rr} = N_1\left(R^2 - r^2\right)^2\cdot r^2 - 4hE_4\cdot\theta_1\\
&N_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}N\left(R^2 - r^2\right)^2\cdot r^2 - 4hE_4\cdot\theta_1\\
&M_{rr} = M_1\left(R^2 - \frac{7}{3}r^2\right) - \frac{4}{3}h^3E_4\cdot\theta_2\\
&M_{\varphi\varphi} = M_1\left(R^2 - \frac{5}{3}r^2\right) - \frac{4}{3}h^3E_4\cdot\theta_2
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $C(t)$, $N_1(t)$, $M_1(t)$ -неизвестные функции времени. Если подставить (13) в (11) и раскрыть интегралы, то стационар полученного выражения будет, определяется из решения следующей системы:

Если подставить аппроксимации по независимым параметром (13) в функционал (11), то после интегрирования полученного выражения для определения его стационара получается нижеследующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{8}{105}N_1\dot{C}R^8 - \frac{8}{3}\cdot hE_4\theta_1\dot{C}R^2 + \frac{8}{105}\dot{N}_1CR^8 - \frac{8}{3}h(E_4\theta_1)^{\cdot}CR^2 + \frac{16}{9}\dot{M}_1 = 0\\
&\frac{8}{105}C\dot{C}R^4 - \frac{1}{10080}\left[\frac{N_1}{E_4}\right]^{\cdot} = 0\\
&\frac{16}{9}\dot{C} - \frac{1}{3h^3}\left(\frac{M_1}{E_4}\right)^{\cdot} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

истема (14) решается при следующих граничных условиях: при $t = 0$ $\theta_1 = \theta_2 = 0$;

$C(0) = const = \overline{C}$; $N_1(0) = M_1(0) = 0$; где C — определяет начальное несовершенство пластины до нагрева, которое определяется выражением $\bar{C}(R^2 - r^2)^2$

Аналогия решаемой задачи:

Полученные зависимости свидетельствуют о том, что решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния слоистой пластины при воздействии высокотемпературного поля сводится к решению задачи Коши с начальными условиями (15).

Для упрощения решения вводятся ниже приводимые безразмерные параметры:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{35}\cdot\frac{N_1}{E_4}\cdot C\cdot R^8+\frac{2}{3}\cdot\frac{M_1}{E_4}-\theta ChR^2=0\\&\frac{4}{35}C^2R^4-\frac{N_1}{3360E_4}=0\\&\frac{16}{3}C-\frac{1}{h^3}\cdot\frac{M_1}{E_4}=0\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Введем следующие обозначения безразмерных величин

$$a=C\cdot R^3;\quad \overline{N}_1=\frac{N_1}{E_4}\cdot R^5;\quad \overline{M}_1=\frac{M_1}{E_4};\quad \overline{\theta}_1=\theta_1;\quad \overline{\theta}_2=\theta_2\cdot R;\quad \gamma=\frac{h}{R}\tag{17}$$

С учетом (16) система (17) получит вид:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{35}\overline{N}_1a-\overline{\theta}_1a\gamma+\frac{2}{3}\overline{M}_1=0\\&\frac{4}{35}a^2-\frac{1}{3360}\cdot\overline{N}_1=\frac{4}{35}\overline{a}^2\\&\frac{16}{3}a-\gamma^{-3}\cdot\overline{M}_1=\frac{16}{3}\overline{a}\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Из системы (18) для определения a получаем:

$$\frac{3}{32}\theta_1a=\frac{3}{35}a^3-\left(\frac{8}{35}\overline{a}^2-\frac{1}{3}\gamma^2\right)a-\frac{1}{3}\gamma^2\overline{a}\tag{19}$$

Известно, что объёмное изменение материала θ прямо пропорционально перепаду температуры, т.е.

$$\theta=\alpha\cdot\Delta T\tag{20}$$

Подставляя (18) в (19) с учетом (20) имеем:

$$\theta_1=\frac{1}{2h}\int_{-n}^{h}\theta dz=\frac{1}{2h}\int_{-n}^{h}\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2h}\cdot z\right)\Delta Tdz=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\Delta T\tag{21}$$

В частном случае, когда нет начального несовершенства, т.е. $\overline{a}=0$ из (21) получаем:

$$\frac{3}{32}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\Delta T=\frac{8}{35}a^2+\frac{1}{3}\gamma^2\tag{22}$$

Вывод:

1. Полученные выражения для межслойных нагрузок: могут быть использованы как основные зависимости для определения несущей способности трехслойной пластины, подверженной воздействию высокотемпературной внешней среды. Это подобие конструкции отдельного топливного элемента, являющейся системой, включающей наслаиваемых одна на другую трех конструктивных элемента, а именно, анод, электролит и катод; позволяют производить оценки температурных нагрузок, способствующих слоев многослойной конструкции топливного элемента.

2. Оценка критических температурных нагрузок позволяют решать нижеследующие задачи на уровне проектирования топливных элементов: путем комбинирования механических, реологических и температурным режимом эксплуатации имеется возможность предотвращение разрушения его слоев до потери устойчивости. Это означает, что имеется возможность решения проектных задач следующего содержания, а именно: полученные зависимости приемлемы также для решения задач по определению времени безотказной работы конструкции при известных совместимых характеристиках материалов слоев изделия и режима его эксплуатации.

С этой целью необходимо использование требований к температурному режиму эксплуатации изделия, обеспечивающего безотказность его работы за период эксплуатации.

Список литературы:

1. Noda N., Hetnarski R. B., Tanigawa Y. Thermal Stresses, 2nd ed. Taylor and Francis, New York, 2002.
2. Lowrie F. L., Rawlings R. D. Room and high temperature failure mechanisms in solid oxide fuel cell electrolytes // Journal of the European Ceramic Society. 2000. V. 20. No. 6. P. 751-760.
3. Nakajo A. et al. Modeling of thermal stresses and probability of survival of tubular SOFC // Journal of Power Sources. 2006. V. 158. No. 1. P. 287-294.
4. Hasanov R., Vasilyev O., Smirnova A., Gulgazli A., Jamalov R., Kazimov M. Modeling of deformational behavoiur and determining the loading capacity of a planar design SOFC under influence of operational temperature. Proceeding of special workshop "Advanced numerical analysis of shell-like sturctures". September 26-28, 2007, Zagreb, Croatia.
5. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М., Наука, 1986, 327 с.
6. Бернштейн М. Л., Займовский В.А.Механические свойства металлов. М.: Металлургия, 1979, 495 с.

References:

1. Noda, N., Hetnarski, R. B., & Tanigawa, Y. (2002).Thermal Stresses, Taylor and Francis, New York.
2. Lowrie, F. L., & Rawlings, R. D. (2000). Room and high temperature failure mechanisms in solid oxide fuel cell electrolytes. *Journal of the European Ceramic Society*, *20*(6), 751-760.
3. Nakajo, A., Stiller, C., Härkegård, G., & Bolland, O. (2006). Modeling of thermal stresses and probability of survival of tubular SOFC. *Journal of Power Sources*, *158*(1), 287-294.
4. Hasanov, R., Vasilyev, O., Smirnova, A., Gulgazli, A., Jamalov, R., & Kazimov, M. (2007). Modeling of deformational behavoiur and determining the loading capacity of a planar design

SOFC under influence of operational temperature. Proceeding of special workshop "Advanced numerical analysis of shell-like sturctures". September 26-28, Zagreb, Croatia.

5. Birger, I. A., & Mavlyutov, R. R. (1986). Resistance of materials. Moscow: *Science,* 327.

6. Bernstein, M. L., & Zaimovskii, V. A. (1979). Mechanical properties of metals. Moscow: *Metallurgy,* 495.

Работа поступила в редакцию 26.05.2018 г.

Принята к публикации 02.06.2018 г.

Ссылка для цитирования:

Мусави С. А., Хейрабади Г. С. Определение межслойных нагрузок в слоистых конструкциях, подвергаемых воздействию высоких температур // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. №7. С. 189-197. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/musavi (дата обращения 15.07.2018).

Cite as (APA):

Musavi, S., & Heirabadi, G. (2018). Inter-layer loads determination in layered structures subjected to exposure to high temperatures. *Bulletin of Science and Practice, 4*(7), 189-197.