

DOI.org/10.5281/zenodo.1196715  
УДК 627.824, 532.531, 532.533

Н.В. Земляная, В.А. Шаланин

ЗЕМЛЯНАЯ НИНА ВИКТОРОВНА – д.т.н., профессор, e-mail: nina-z@list.ru  
ШАЛАНИН ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВИЧ – старший преподаватель, e-mail: vic\_stro\_@mail.ru  
Кафедра инженерных систем зданий и сооружений Инженерной школы  
Дальневосточный федеральный университет  
Суханова ул., 8, Владивосток, 690091

## Применение принципа минимума кривизны для расчета формы криволинейной водосливной поверхности низконапорных водосбросных сооружений

**Аннотация:** Описано применение вариационного принципа минимума кривизны для расчета формы криволинейной водосливной поверхности низконапорных водосбросных сооружений на примере падения потока жидкости с вертикального уступа и водослива с широким порогом. Приведены натурный и численный эксперименты с использованием программного комплекса ANSYS. Установление формы водосливной поверхности производилось посредством определения координат нижней части струи падающего потока жидкости. Численный эксперимент проведен для случая свободной и поджатой, подтопленной снизу струи. Проведена проверка достоверности выбранной гипотезы с применением индекса детерминации и критерия Фишера. В рассмотренном диапазоне расходов теоретическая зависимость достаточно точно описывает экспериментальные данные; по результатам всех опытов минимальное значение индекса детерминации 0,975, а минимальное значение критерия Фишера – 515,79.

**Ключевые слова:** численное моделирование, вычислительная гидродинамика, принцип минимума кривизны, индекс детерминации, низконапорный водосброс, речной гидроузел, водозаборный гидроузел.

### Введение

В практике строительства и эксплуатации водозаборных сооружений на реках для регулирования естественного стока применяют водозаборные плотинные гидроузлы. Водосбросные сооружения гидроузлов равнинных водотоков проектируются как водосливы с широким порогом. Для равнинных водотоков характерен малый перепад отметок рельефа, что позволяет классифицировать такие водосбросные сооружения как низконапорные.

Большинство таких гидроузлов возводятся без укрепления основания и без устройств гашения напора. Длительная эксплуатация сооружения в таком режиме приводит к размыву нижнего бьефа и разрушению плотинного гидроузла. Один из способов минимизации размыва нижнего бьефа без создания устройств гашения напора – построение плавной криволинейной формы водослива с широким порогом. В настоящее время все используемые методы расчета таких поверхностей разработаны для средне- и высоконапорных водосбросных сооружений.

Согласно [2], основными требованиями, предъявляемыми к криволинейным водосливам, являются безвакуумный режим работы сооружения при пропуске основного расчетного расхода и плавное сопряжение оголовка с водосливной гранью.

В практике для построения криволинейных профилей используют эксперимент и расчет на основе обобщенных эмпирических данных.

Проектирование на основе обобщенных экспериментальных данных применяется для хорошо изученных случаев и направлено на определение формы верхней и нижней частей водосливной поверхности. При этом расчет формы верхней водосливной поверхности производится на основании заданного напора над гребнем водослива. Выбор очертания нижней поверхности связан с типом используемого метода гашения напора в нижнем бьефе сооружения. Большинство используемых на практике методов разработано и применяется для случаев средне- и высоконапорных водосбросных сооружений. Так, для построения профиля водосливов практического профиля без плоского гребня применяют координаты Кригера–Офицера. Все вышеперечисленные методы основаны на теоретических и экспериментальных исследованиях форм струй, образующихся при истечении потока через водослив.

Цель предлагаемого исследования – оценка возможности применения вариационного принципа минимума кривизны для расчета формы криволинейной водосливной поверхности низконапорных водосливов с горизонтальным гребнем без использования эмпирических коэффициентов.

### Описание теоретического исследования

Для описания процесса формирования струи используем вариационный принцип наименьшего действия, который в формулировке Гамильтона имеет вид

$$S = \int_A^B L dt = \int_A^B (T - U) dt,$$

где  $T$  и  $U$  – соответственно потенциальная и кинетическая энергия.

Следствием принципа наименьшего действия является основанный на работах Якоби и Гаусса вариационный принцип наименьшей кривизны Герца, устанавливающий, что при отсутствии активных (заданных) сил из всех кинематически возможных (т.е. допускаемых связями) траекторий действительной будет траектория, имеющая наименьшую кривизну [1].

В рассматриваемой задаче движение определяется соотношением потенциальной и кинетической энергий, поэтому применение принципа наименьшего действия является допустимым. Однако решение будет справедливо для области, в которой силами трения на границе тангенциально-го разрыва вода–воздух можно пренебречь.

Для нахождения траектории нижней границы струи используем прямой вариационный метод Ритца, в соответствии с которым из набора функций заданного аналитического вида  $\Psi(\varepsilon, \varphi; \alpha, \beta, \dots)$  с неизвестными параметрами  $\alpha, \beta$  формируется функционал, имеющий локальный минимум.

В качестве аналитической функции выберем полином третьей степени, выписанный в безразмерных переменных:

$$\frac{x}{h} = \bar{x}, \quad \frac{y}{h} = \bar{y}, \quad \frac{L}{h} = \bar{L} = 1/n, \quad (1)$$

где  $x, y$  – горизонтальная и вертикальная координаты струи,  $L$  – дальность падения струи,  $\bar{x}, \bar{y}$  – безразмерные координаты струи,  $h$  – высота уступа,  $\bar{L}$  – безразмерная дальность падения струи (рис. 1). Величины  $h$  и  $L$  принимаются известными.

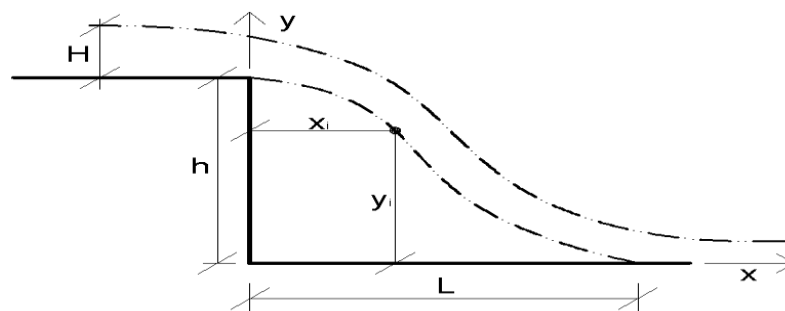


Рис. 1. Схема падения жидкости с уступа низконапорного водосброса, где  $x_i, y_i$  – координаты точки на нижней поверхности струи,  $H$  – напор на выходе с уступа.

Полином 3-й степени имеет вид:

$$\bar{y} = \frac{y}{h} = a * \bar{x}^3 + b * \bar{x}^2 + c * \bar{x} + d, \quad (2)$$

где  $a, b, c, d$  – коэффициенты полиномиального уравнения.

Используя два граничных условия:

$$1) \text{ if } \bar{x} = 0, \bar{y} = 1 \text{ и } 2) \text{ if } \bar{x} = 0, d\bar{y}/d\bar{x} = 0,$$

получим значения двух коэффициентов уравнения (2),  $d = 1, c = 0$ .

Прямой метод вариационного исчисления в применении к нашей задаче предполагает найти уравнение кривизны для полиномиального уравнения, минимизация которого совместно с граничными условиями позволит найти остальные коэффициенты уравнения (2). Однако в классической постановке метод Ритца не реализуем, так как уравнение кривизны полинома третьей степени аналитически не удается минимизировать (задача не имеет решения).

В представленной работе для реализации ее целей была применена следующая интерпретация принципа Герца. Минимальную кривизну имеет прямая линия, следовательно, при стремлении потока реализовать движение с траекториями минимальной кривизны с допускаемыми связями любая кривая будет стремиться к прямой. В таком случае минимизировать следует разницу  $\bar{y}^*$  между полиномом третьей степени и прямой линией  $\bar{y}_л$ , которая в нашей интерпретации принципа Герца будет описываться уравнением:

$$\begin{aligned} \bar{y}^* &= \bar{y} - \bar{y}_л = a * \bar{x}^3 + b * \bar{x}^2 + 1 - \bar{y}_л = a * \bar{x}^3 + b * \bar{x}^2 + 1 - 1 + n\bar{x} = \\ &= a * \bar{x}^3 + b * \bar{x}^2 + n\bar{x} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3)$$

В рассматриваемой задаче интерес представляет абсолютная величина разницы, поэтому возводим уравнение (3) в квадрат, берем частные производные от полученной функции по « $a$ » и « $b$ ». В итоге получаем два тождественных уравнения вида

$$a * \bar{x}^2 + b * \bar{x} + n = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) недостаточно для определения двух коэффициентов, поэтому воспользуемся следующим граничными условиями:

$$1) \text{ if } \bar{x} = \bar{L}, \bar{y}^* = 0 \text{ и } 2) \text{ if } \bar{x} = \bar{L}, d\bar{y}/d\bar{x} = 0. \quad (5)$$

Второе условие означает плавный переход полинома третьей степени к прямой горизонтальной линии.

Решая уравнение (4) совместно с граничными условиями (5), получаем значения коэффициентов  $a = 2/\bar{L}^3, b = -3/\bar{L}^2$ .

Подставляя полученные коэффициенты в уравнение (2), получим уравнение для определения формы подструйного пространства струи при падении потока с уступа:

$$\bar{y} = \frac{2}{\bar{L}^3} \bar{x}^3 + \left(-\frac{3}{\bar{L}^2}\right) \bar{x}^2 + 1. \quad (6)$$

В работе были выполнены натурный эксперимент и численное моделирование плоской задачи движения потока жидкости при падении с вертикального уступа.

### Лабораторный эксперимент

Для проведения физического эксперимента использовался гидравлический лоток, в котором устанавливалась модель водослива с широким порогом с вертикальным входным и выходным ребрами. Размеры канала: длина 5000 мм, ширина 100 мм, высота 300 мм. Размеры водослива: длина 210 мм, ширина 100 мм, высота 150 мм. Опыты велись в диапазонах:  $Re=7000-53000$  и  $Q=0,007-0,0053 \text{ м}^3/\text{с}$ . Число Рейнольдса определено по характеру течения над гребнем водослива и во всех опытах соответствует турбулентному режиму течения.

### Численный эксперимент

Численный эксперимент проводился в программном комплексе ANSYS Workbench. Полный комплекс моделирования состоял из построения геометрии, построения расчетной сетки, получения численного решения задачи и визуализации полученного решения.

Конечно-элементная сетка является основой, для которой производится решение уравнений, описывающих физику моделируемого процесса. Работа велась в программе ANSYS Meshing. Максимальный допустимый линейный размер сеточного элемента составляет 0,015 м. Дополнительно при построении использована функция Proximity and Curvature, позволяющая автоматически сгущать сетку в наиболее узких и искривленных участках геометрии. В исследовании применена модель турбулентности REALIZABLE, семейства k-ε. Отличительной особенностью семейства k-ε является использование двух дополнительных уравнений для кинетической энергии турбулентных пульсаций k и скорости диссипации энергии турбулентных пульсаций ε. Отличительной чертой рассматриваемых сооружений является наличие поверхности раздела вода–воздух. Наиболее эффективным инструментом для численного решения таких задач является метод VOF (Volume of fluid) [3]. Данный метод применяется для моделирования многофазных потоков с наличием поверхностей тангенциального разрыва [4–6].

Численное решение задач гидравлики в программе ANSYS Fluent достигалось решением следующих уравнений.

1. Уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

где:  $u_i$  – компонента скорости,  $x_i$  – компонента координат.

2. Уравнения энергии:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (8)$$

где  $\rho$  – плотность,  $t$  – время,  $\mu$  – коэффициент молекулярной вязкости,  $\mu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости.

3. Уравнения k для модели турбулентности REALIZABLE:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k, \quad (9)$$

где  $G_k$  – производство турбулентной кинетической энергии, вызванное градиентами осредненного потока,  $G_b$  – производство турбулентной кинетической энергии, вызванное плавучестью,  $Y_M$  – параметр, характеризующий пульсации, вызванные расширением в сжимаемых турбулентных потоках,  $\sigma_k$  – турбулентное число Прандтля для k,  $S_k$  – задаваемое исходное условие для k.

4. Уравнения ε для модели REALIZABLE:

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \varepsilon - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\gamma \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b + S_\varepsilon, \quad (10)$$

где  $C_1, C_{1\varepsilon}, C_2, C_{3\varepsilon}$  – эмпирические константы модели,  $\sigma_\varepsilon$  – турбулентное число Прандтля для ε,  $S_\varepsilon$  – задаваемое исходное условие для ε.

В рассматриваемом исследовании по умолчанию применены значения констант:  $C_2(C_2 - Epsilon) = 1,9$ ,  $\sigma_k$  (TKE Prandtl Number)=1,  $\sigma_\varepsilon$  (TDR Prandtl Number) =1,2.

5. Уравнение неразрывности для границы раздела сред:

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial t} + \mu_i \frac{\partial \alpha_a}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

где  $\alpha_w$  – объем фракции воды,  $\alpha_a$  – объем фракции воздуха [3].

### Результаты экспериментов

В результате проведенных экспериментов были получены координаты нижней части струи, падающей с вертикальной стенки водослива с широким порогом. Результаты численных экспериментов представлены в безразмерном виде на рис. 2 для свободной струи и рис. 3 для поджатой, подтопленной снизу струи, результаты лабораторного эксперимента представлены на рис. 4.

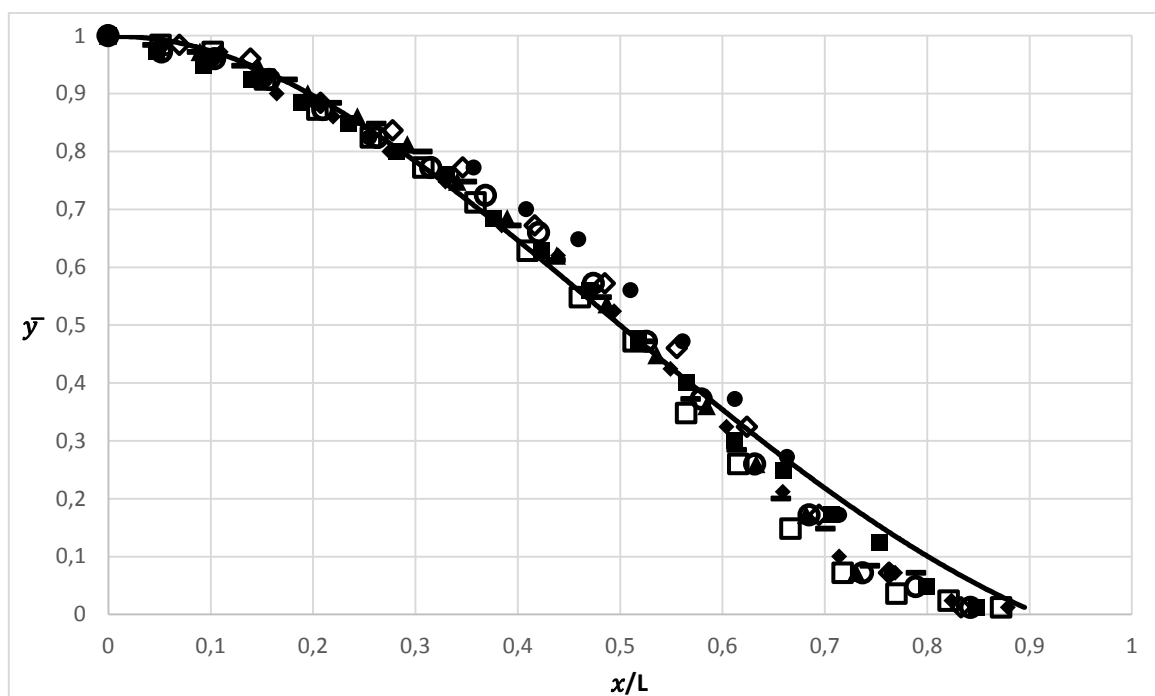


Рис. 2. Сравнение данных численного эксперимента и результатов, полученных на основе принципа наименьшей кривизны; — - теоретическая зависимость; экспериментальные результаты при расходах:  $\blacktriangle$  – 0,1 м<sup>3</sup>/с,  $\bullet$  – 0,2 м<sup>3</sup>/с,  $\diamond$  – 0,3 м<sup>3</sup>/с,  $\blacksquare$  – 0,4 м<sup>3</sup>/с,  $\circ$  – 0,5 м<sup>3</sup>/с,  $\square$  – 0,6 м<sup>3</sup>/с,  $\blacklozenge$  – 0,7 м<sup>3</sup>/с,  $\circ$  – 0,8 м<sup>3</sup>/с

### Проверка достоверности гипотезы

Для проверки адекватности теоретических зависимостей и экспериментальных данных использовались два критерия.

- Индекс детерминации – показатель качества описания теоретической зависимостью экспериментальных данных. Для опытов со свободной струей минимальное значение индекса составило 0,975, максимальное – 0,998. Для опытов с поджатой, подтопленной снизу струей минимальное значение индекса составило 0,987, максимальное – 0,998.

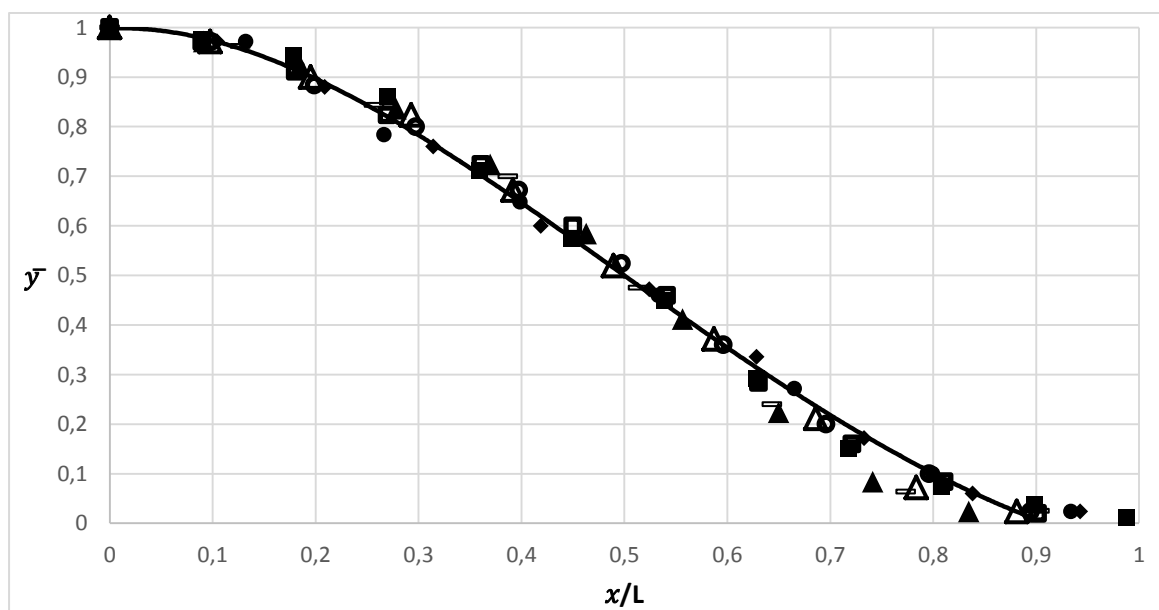


Рис. 3. Сравнение данных численного эксперимента и результатов, полученных на основе принципа наименьшей кривизны для поджатой струи: — - теоретическая зависимость; экспериментальные результаты при расходах:  $\square$  – 0,1 м<sup>3</sup>/с,  $\blacktriangle$  – 0,2 м<sup>3</sup>/с,  $\bullet$  – 0,3 м<sup>3</sup>/с,  $\square$  – 0,4 м<sup>3</sup>/с,  $\circ$  – 0,5 м<sup>3</sup>/с,  $\triangle$  – 0,6 м<sup>3</sup>/с,  $\blacklozenge$  – 0,7 м<sup>3</sup>/с,  $\blacksquare$  – 0,8 м<sup>3</sup>/с.

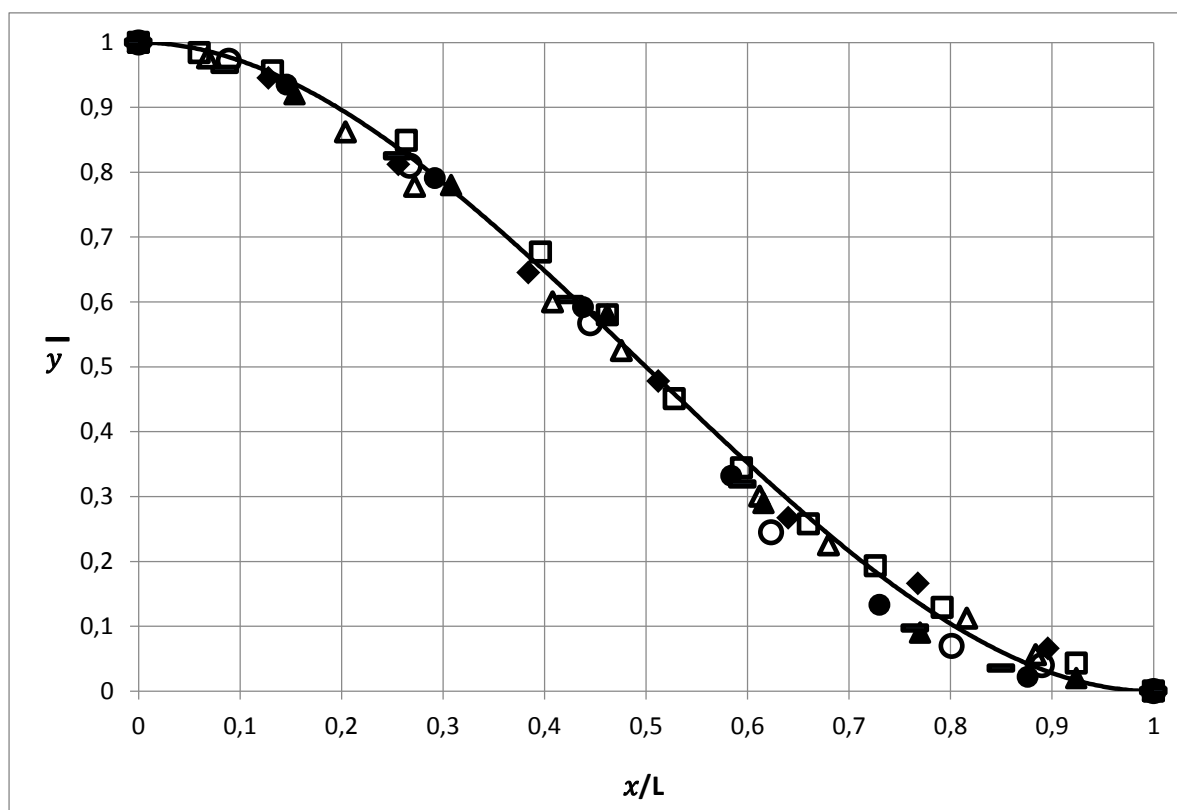


Рис. 4. Сравнение данных лабораторного эксперимента и результатов, полученных на основе принципа наименьшей кривизны для поджаты, подтопленной и не подтопленной снизу струи: — — 0,0007 м<sup>3</sup>/с, ▲ — 0,00115 м<sup>3</sup>/с, ● — 0,0017 м<sup>3</sup>/с, □ — 0,0027 м<sup>3</sup>/с, ○ — 0,0034 м<sup>3</sup>/с, △ — 0,0043 м<sup>3</sup>/с, ◆ — 0,0053 м<sup>3</sup>/с.

Критерий Фишера (F-критерий) – оценивает значимость используемой теоретической зависимости, позволяет принимать или отвергать принятую математическую зависимость на основании экспериментальных данных. Для опытов со свободной струей минимальное значение индекса составило 515,8, максимальное – 2774. Для опытов с поджатой, подтопленной снизу струей минимальное значение индекса составило 645, максимальное – 6494.

### Выводы

Проведенные натурный и численный эксперименты подтверждают верность разработанной теории, основанной на принципе минимума кривизны.

Анализ данных численного эксперимента говорит о том, что в диапазоне расходов 0,1–0,8 м<sup>3</sup>/с полученная зависимость дает результаты, согласующиеся с данными численного эксперимента как для свободной, так и для поджатой струи. Аналогичные результаты получены в ходе эксперимента на модели водослива с широким порогом при числах Рейнольдса  $Re = 7000–53000$  и расходах на модели 0,007–0,0053 м<sup>3</sup>/с.

Представленный метод, основанный на принципе минимума кривизны, позволяет проектировать профили криволинейной водосливной поверхности низконапорных водосбросных сооружений с горизонтальным гребнем, применяя простые зависимости, без использования поправочных эмпирических коэффициентов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
2. СП 290.1325800.2016. Водопропускные гидротехнические сооружения (водосбросные, водоспускные и водовыпускные). Правила проектирования. М.: Минстрой России, 2016. 124 с.

3. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 1981;39:201–225.
4. Ju J., Liu S., Yang X. The application of Fluent software on discharge engineering. *J. Hydroelectric Engineering.* 2009;2:110–114.
5. Mashayeh K.F., Ashgriz N. Advection of axisymmetric interfaces by the volume-of fluid method. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1995;20:1337–1361.
6. Mu Zhenwei, Zhang Zhiyan, Zhao Tao. Numerical Simulation of 3-D flow field of Spillway based on VOF method. *International Conference on Modern Hydraulic Engineering. Procedia Engineering.* 2012(28):808–812.

[THIS ARTICLE IN ENGLISH SEE NEXT PAGE](#)

DOI.org/10.5281/zenodo.1196715

Zemljanaja N., Shalanin V.

NINA ZEMLJANAJA, Doctor of Engineering Sciences, Professor, e-mail: nina-z@list.ru  
VIKTOR SHALANIN, Senior Lecturer, e-mail: vic\_stro\_@mail.ru  
Department of Engineering Systems of Buildings and Structures, School of Engineering  
*Far Eastern Federal University*  
8 Sukhanova St., Vladivostok, Russia, 690091

## Application of the principle of minimum curvature for calculating the shape of the curved spillway surface of low-backwater spillway structures

**Abstract:** The paper deals with the application of the curvature minimum principle for calculating the shape of the curved spillway surface of low-backwater spillway structures using the example of the descent of the fluid of a stream from a vertical ledge and from broad crest spillway. There were carried out field and numerical experiments using the software complex ANSYS. Determined was the shape of the spillway surface by way of determining the coordinates of the lower part of the descending jet of fluid. The numerical experiment was carried out for a free jet as well as a submerged adherent one. The reliability of the chosen hypothesis was verified with the use of the determination index and the Fisher criterion. In the considered range of flow rate, the theoretical dependence rather well depicts the experimental data. According to the results of all the experiments, the minimum value of the determination index is 0.975, and the minimum value of the Fisher test is 515.79.

*Key words:* fluent, numerical modeling, computational fluid dynamics, minimum curvature principle, determination index, low-backwater spillway, spillway, river water catchment system.

### REFERENCES

1. Berdichevskij V.L. Variacionnye principy mehaniki sploshnoj sredy. M., Nauka, 1983, 448 p.
2. SP 290.1325800.2016. Culvert hydraulic engineering structures (spillway, drainage and water outlet). Design rules. Minstroj Rossii, 2016. 124 p.
3. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 1981;39:201–225.
4. Ju J., Liu S., Yang X. The application of Fluent software on discharge engineering. *J. Hydroelectric Engineering.* 2009;2:110–114.
5. Mashay K.F., Ashgriz N. Advection of axisymmetric interfaces by the volume-of fluid method. *Int. J. Numer. Methods Fluids,* 1995;20:1337–1361.
6. Mu Zhenwei, Zhang Zhiyan, Zhao Tao. Numerical Simulation of 3-D flow field of Spillway based on VOF method. *International Conference on Modern Hydraulic Engineering. Procedia Engineering.* 2012(28):808–812.