

Berechnung von 3-dimensionalen Integralen(und 2-dimensionalen Integralen)

Harald Schröder

2014

Wir betrachten zuerst folgende Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{-c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} g(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x_1, \langle \lambda \cdot x_1 \rangle, \langle \mu \cdot x_1 \rangle) dx_1 \quad (1) \end{aligned}$$

Dabei wird die Transformationsformel vgl. Forster [2] (§§2 und 13) und das Korollar 3.2.8 von He [3] S.88 in folgender Weise gebraucht:

Die Transformationsformel wird auf die Abbildung

$$\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = (cx_1 - \frac{c}{2}, bx_2 - \frac{b}{2}, ax_3 - \frac{a}{2})$$

mit der Jacobi-Matrix

$$D\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

und der Determinante

$$\det D\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = c \cdot b \cdot a$$

angewendet. Die Funktion f wird definiert durch:

$$f(x_1, x_2, x_3) := a \cdot b \cdot c \cdot g(cx_1 - \frac{c}{2}, bx_2 - \frac{b}{2}, ax_3 - \frac{a}{2})$$

$\langle \rangle$ ist der Bruchteil von einer Zahl.

Diese Idee lässt sich auf allgemeine 3-dimensionale Integrale verallgemeinern, wenn man Konvexkombinationen betrachtet, wie zum Beispiel bei Barner [1] Kapitel 13.2 S.30. Durch

$$\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a + x_1 \cdot (b - a) \\ c + x_2 \cdot (d - c) \\ e + x_3 \cdot (f - e) \end{pmatrix}$$

wird eine Abbildung von $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ auf $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ erklärt.

Wir bilden nun die Jacobi-Matrix:

$$D\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (b - a) & 0 & 0 \\ 0 & (d - c) & 0 \\ 0 & 0 & (f - e) \end{pmatrix}$$

mit $\det D\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = (b - a) \cdot (d - c) \cdot (f - e)$.

Dann lautet die Transformation:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2)$$

mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = |\det D\vec{A}(x_1, x_2, x_3)| \cdot g(\vec{A}(x_1, x_2, x_3))$$

Die Transformation auf ein eindimensionales Integral erfolgt dann wie in Gleichung (1).

Diese Überlegungen können auch für 2-dimensionale Integrale verwendet werden, wenn man statt Korollar 3.2.8 Korollar 3.2.5 bei He [3] heranzieht.

References

- [1] Martin Barner, Friedrich Flohr "Analysis II" de Gruyter Verlag Berlin 1983
- [2] Otto Forster "Analysis 3" 2.Auflage Vieweg Verlag Braunschweig 1983
- [3] Tian-Xiao He "Dimensionality reducing expansion of multivariate integration" Birkhäuser Verlag Boston 2001