"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 2, ISSUE 4, 2024. APRIL
ResearchBib Impact Factor: 8.654/2023 ISSN 2992-8869

O'ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI CHIZIQLI BIR JINSLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH JARAYONIDA AKTDAN FOYDALANISH

Tog'aynazarov Sirojiddin Olimovich
"TIQXMMI"MTU Oliy matematika kafedrasi o'qituvchisi

Annotatsiya

Ushbu maqola o'zgarmas koeffitsiyentli 2-tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalar masalalarini yechishda ta'riflar, uning rivojlanish bosqichlari hamda masalalarning soda yechish usullari haqida ma'lumotlar berilgan.Integral chiziqlarni maple matematik paketida chizish usullari ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: differensial tenglamalar haqida tushuncha. O'zgarmas koeffitsiyentli 2-tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalar. Differensial tenglamalarning fizikaga tadbiqi.

Абстрактный

В данной статье представлена информация об определениях, этапах ее развития и методах решения задач по решению задач линейных однородных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Показаны методы рисования целых линий в математическом пакете Maple.

Ключевые слова: понимание дифференциальных уравнений.Линейные однородные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.Применение дифференциальных уравнений в физике.

Annotation

This article provides information on the definitions, stages of its development, and methods of solving problems in solving problems of 2nd-order linear homogeneous equations with constant coefficients. Methods of drawing integral lines in the Maple math package are shown.

Key words: understanding of differential equations.Linear homogeneous equations of the 2nd order with constant coefficients.Application of differential equations to physics.

Erkli o‘zgaruvchi, erksiz o‘zgaruvchi hamda ularning hosilalari (differensiallari) qatnashgan munosabat differensial tenglamada deyiladi.

Agar funksiya bitta o‘zgaruvchiga bog’liq bo‘lsa ,bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi. Differensial tenglamada qatnashgan xosilalarning eng yuqori darajasi differensial tenglamaning tartibi deyiladi .

Differensial tenglamalar nazariyasi XVII asr oxirida differensial va integral hisobning paydo bo‘lishi bilan bir vaqtda rivojlana boshlagan. Differensial tenglama matematikada ayniqsa, uning tadbiqlarida juda katta ahamiyatga ega. Fizika ,mexanika ,iqtisodiyot ,texnika va boshqa sohalarining turli masalalarini tekshirish differensial tenglamani yechishga olib keladi. Biz differensial tenglamani yechish orqali o‘zimizni qizqitirgan kattalik yoki taqsimotni topishimiz mumkin.

Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy ko‘rinishda

$$F(x, y, y') = 0$$

yoziladi. Agar bu differensial tenglamani y' ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, $y' = f(x, y)$ ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

Birinchi tartibli differensial tenglamani

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

shaklda yozish simmetrik yozish deyiladi (bunda x va y o‘zgaruvchilar teng xuquqlidir, M va N x, y ning funksiyalari).

Differensial tenglamani bitta funksiya emas, balki funksiyalarning butun bir to‘plami qanoatlantirilishi mumkin. Ulardan birini ajratib ko‘rsatish uchun argumentning birorta qiymatiga mos qiymatini ko‘rsatish kerak, ya’ni

$x = x_0$ bo‘lganda, $y = y_0$ shart bajariladi, bu shart boshlang’ich shart deyiladi.

Differensial tenglamalarni yechishning aniq bir usuli yo‘q,biz ma’lum bir tipdagi differensial tenglamalarnigina yecha olamiz.

2 . Birinchi tartibli differensial tenglamalarning yechishning bir qancha usullari mavjud, masalan o‘zgaruvchilari ajraladigan, o‘zgaruvchilari ajraladiganga keltiriladigan,Bernulli tenglamasi,Rikkati tenglamasi, Klero tenglamasi va xokazolar.

Yuqorida ta’kidlab o‘tganimizdek ,differensial tenglamada qatnashgan eng yuqori tartibli hosila differensial tenglamaning tartibi bo‘ladi. Ikkinchi va undan ortiq tartibli hosilalar qatnashgan tenglamalar yuqori tartibli differensial tenglama deyiladi. Yuqori tartibli differensial tenglama $y^{(n)} = f\left(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n-1)}\right)$ ko‘rinishda yoziladi.

Endi o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

(bunda p va q o‘zgarmas haqiqiy sonlar) .Chiziqli bir jinsli tenglamalarning umumiy nazariyasidan bunday tenglamaning umumiy yechimini topish uchun xususiy yechimlarining fundamental sistemasini topish yetarli.

(1) tenglamaning xususiy yechimini quyidagicha izlaymiz, bu yerda k–o‘zgarmas son.

Bu funksiyani ikki marta differensiallaymiz:

$$y' = ke^{kx}, \qquad y'' = k^2 e^{kx}$$

y, y', y'' larni (1) tenglamaga olib borib qo‘yamiz ,shunda quyidagi tenglama xosil bo‘ladi:

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$$

bu yerda qavs oldidagi ko‘paytuvchi nolga teng bo‘lmaganligi uchun qavs ichidagi ifoda nolga teng bo‘lgandagina k soni (1) tenglamani qanoatlantiradi. So‘ngra

$$\left(k^2 + pk + q\right) = 0$$

tenglamani yechamiz.

Tenglamani yechganizmizda k uch xil ko‘rinishda bo‘lishi mumkin:

a) k_1 va k_2 -haqiqiy sonlar ,ya’ni $k_1 \neq k_2$

b) k_1 va k_2 –haqiqiy sonlar, ya’ni $k_1 = k_2$

c) k_1 va k_2 –kompleks sonlar ,ya’ni $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 2, ISSUE 4, 2024. APRIL
ResearchBib Impact Factor: 8.654/2023 ISSN 2992-8869

Endi bu uchchala holatlarni alohida qaraymiz:

a) Harakteristik tenglamaning yechimlari haqiqiy va har xil ,bunda xususiy yechimlarini :

$$y_1 = e^{k_1 x}\ , \qquad y_2 = e^{k_2 x}$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yechimlar chiziqli erkli,shuning uchun bu yechimlar fundamental sistemani tashkil etadi. Umumiy yechim esa ularning yig'indisi shaklida ifodalanadi :

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

Misol

$y'' + y' - 2y = 0$ differensial tenglamani yeching va $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ nuqtalardan o'tuvchi integral chizig'ini chizing .

Xususiy yechimlarini $y = e^{kx}$ ko'rinishda izlaymiz..

Bu holda

$$y = e^{kx}\ , \quad y'' = k^2 e^{kx}\ , \quad e^{kx}(k^2 + k - 2) = 0$$

bunda qavs oldidagi ifoda nolga teng bo'lmaganligi uchun qavs ichidagi ifodani nolga tenglaymiz :

$k^2 + k - 2 = 0 \quad k_1 = k_2$ bunda yechim $k_1 = 1, k_2 = -2$

Umumiy integral $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$ bo'ladi.

b) Harakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng:

$$k_1 = k_2$$

Bitta xususiy yechim: $y_1 = e^{k_1 x}$ hosil qilinadi.

Ikkinchi xususiy yechimni olmaymiz,chunki ular bir biriga teng. Shuning uchun ikkinchi xususiy yechimni

$$y_2 = x e^{k_1 x}$$

ko'rinishda olamiz.Ular birgalikda fundamental sistemani tashkil etadi.Umumiy yechim ularning yig'indisi hisoblanadi :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2\ , \quad y = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)$$

"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 2, ISSUE 4, 2024. APRIL
ResearchBib Impact Factor: 8.654/2023 ISSN 2992-8869

Endi maple dasturida $y(0)=2$, $y'(0)=1$ nuqtalardan o'tuvchi integral chizig'ini chizamiz

> $restart;$

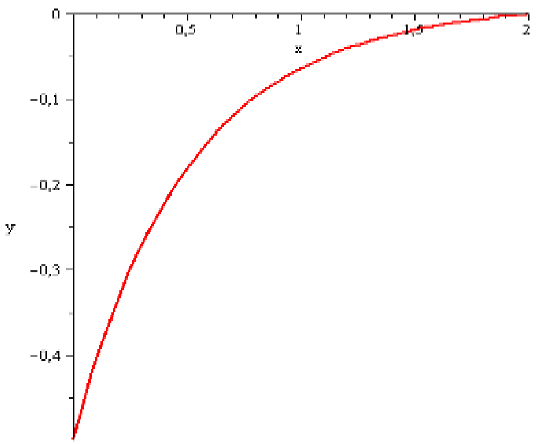
$with(plots):$

$ode1 := diff(y(x), x, x) + diff(y(x), x) - 2 \cdot y(x) = 0;$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{d}{dx} y(x) - 2\, y(x) = 0$$

$sol1 := dsolve(\{ode1, y(2)=0, D(y)(0)=1\}, type = numeric):$

> $odeplot(sol1, -4..3, color = red, thickness = 2);$



Misol. $y''+4y'+4=0$ berilgan tenglamanining yeching va umumiy integralini toping.

Tenglamaning harakteristik tenglamasi tuzib ildizlarini topamiz:

$k^2+4k+4=0$ ko'rinishda bo'ladi . Tenglamaning ildizlari esa $k_1=k_2=2$. Ildizlari haqiqiy karrali,demak umumiy integrali

Xususiy yechimlari: $y_1=c_1e^{-2x}$, $y_2=xe^{-2x}$ ko'rinishda bo'ladi.

Umumiy integrali: $y=e^{-2x}(c_1+c_2x)$

c) xarakteristik tenglamaning yechimlari kompleks sonlardan iborat.

$k_1=\alpha-i\beta$ $\quad k_2=\alpha+i\beta$ harakteristik tenglamaning yechimlari. Xususiy yechimlarni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$y_1=e^{k_1x}=e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$y_2 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}$$

bunda quyidagi tenglikdan foydalanamiz:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x - i e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta$$

Umumiy yechimi esa $y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$ ga teng bo'ladi

Misol. $y'' + 4y' + 5y = 0$ deferensial tenglamani yeching va maple dasturida $y(\pi) = 2$, $y'(0) = 1$ nuqtalardan o'tuvchi integral chizig'ini chizing.

Yechish: Bunda xaraktristik tenglamasi tuziladi:

$$k^2 + 4k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = -2 \pm i$$

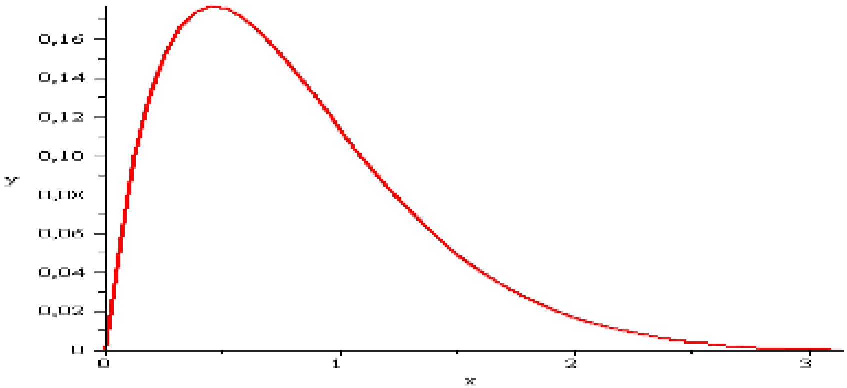
$$y = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

Endi maple dasturida $y(\pi) = 2$, $y'(0) = 1$ nuqtalardan o'tuvchi integral chizig'ini chizamiz:

```
> restart;
with(plots) :
ode1 := diff(y(x), x, x) + 4· diff(y(x), x) + 5·y(x) = 0;
```

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 4\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 5\, y(x) = 0$$

```
sol1 := dsolve({ode1, y(Pi) = 0, D(y)(0) = 1}, type = numeric) :
> odeplot(sol1, -10..10, color = red, thickness = 2);
```



Endi differensial tenglama orqali yechiladigan fizik masala keltiramiz:

Idishdan suyuqlikning oqib chiqishi. Gidravlikada suvning erkin sirtdan h chuqurlikda joylashgan teshikdan suvning v tezlik bilan oqib chiqish qonunini keltirib chiqaylik.

Balandligi 10 sm ,uchidagi burchagi 60^0 bo'lgan va suv bilan to'ldirilgan konus voronka berilgan . Uning pastida yuzi $0,5sm^2$ bo'lgan teshik bo'lsin. Suvning oqib chiqish tezligi topilsin.

Yechish :

Izlanayotgan funksiya vaqtning istalgan t vaqtida suvning balandligidan iborat. Suvning oqib chiqish tezligi v hamma vaqt h bilan birgalikda o'zgarib boradi. Biroq ,agar cheksiz kichik vaqt oralig'i dt olinsa, u holda uni o'zgarmas deb hisoblash mumkin . Vaqtning t dan $t+dt$ gacha oralig'ida oqib chiqadigan suvning suvning hajmini topamiz. Suvning izlanayotgan hajmi quyidagicha o'zgaradi :

$-dV = -0,5vdt = -0,3\sqrt{2gh}dt$ (manfiy ishora kamayotganini bildiradi).

$-dV$ uchun topilgan ifodani yozib olsak

$$\frac{\pi}{3}h^2dh = -0,3\sqrt{2gh}dt$$

bu tenglamadan o'zgaruvchilarni ajratamiz :

$$dt = -\frac{\pi}{0,9\sqrt{2g}}h^{\frac{3}{2}}dh$$

C ixtiyoriy o'zgarmas son boshlang'ich shartlardan aniqlanadi:

"JOURNAL OF SCIENCE-INNOVATIVE RESEARCH IN UZBEKISTAN" JURNALI
VOLUME 2, ISSUE 4, 2024. APRIL
ResearchBib Impact Factor: 8.654/2023 ISSN 2992-8869

$t=0$ da $h=0$ ga egamiz, bu yerdan $C \approx 0,0314 \cdot 10^{\frac{5}{2}}$ va izlanayotgan xususiy yechim bunday bo'ladi :

$$t \approx 16s \quad \to v = 0,6\sqrt{2gh}$$

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Y.P.Oppoqov, N.Turgunov, I.A.Gafarov. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARDAN MISOL VA MASALALAR TO'PLAMI "Voris-nashriyot" 2019-yil
2. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1985 г.,
3. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. -М.: Высшая школа, 1988 г.,
4. M.S.Saloxiddinov,G.N.Nasriddinov. Odiiy differnsial tenglamalar "O'qituvchi"1982-yil
5. Pontryagin.L.S. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. M Bilim- nashriyoti 1969-yil
6. Stepanov.V.V. DIFFRENSIAL TENGLAMALAR KURSI . Fizika matematika adabiyoti 1958-yil
7. Matematik paket "Maple" dasturida matematik masalalarni yechish. Metodik qo'llanma .2016-yil
8. Dyakonov V.P.Maple b: uchebniy kurs.SPb : Piter, 2001
9. A.Gaziyev, I.Israilov, M.Yaxshiboyev.MATEMATIK ANALIZDAN MISOL VA MASALALAR 1-qism. "TURON-IQBOL" 2012-yil