

The background of the cover is a complex geometric pattern of white lines on a black field. These lines form a series of overlapping circles and arcs that converge towards a point in the lower-left quadrant, creating a sense of depth and movement. A bright, diagonal white line cuts across the frame from the top-left towards the bottom-right. In the upper-right corner, there is a dense field of small, reddish-brown dots, resembling a starry sky or a distant galaxy.

UNIVISIOON

# Supermehaanika

Copyright ja autor: Marek-Lars Kruusen

Tallinn

Aprill 2021



Leonardo da Vinci joonistus

MÄRKUS: esikaanel olev foto on võetud järgmisest interneti allikast:

<https://www.youtube.com/watch?v=FVDJJVoTx7s&lc=z22jjxdhxp2glij04t1aokgpi2hbzawq4etvqcvf1jbk0h00410.1520517317390378>

Autor: Marek-Lars Kruusen, aprill 2021, Tallinn.

Kõik õigused kaitstud. Antud ( kirjanduslik ) teos on kaitstud autoriõiguse- ja rahvusvaheliste seadustega. Mitte ühtegi selle teose osa ei tohi reprodutseerida mehaaniliste või elektrooniliste vahenditega ega mingil muul viisil kasutada, kaasa arvatud fotopaljundus, info salvestamine, (õppe)asutustes õpetamine ja teoses esinevate leiutiste ( tehnoloogiate ) loomine, ilma autoriõiguse omaniku ( ehk antud teose autori ) loata. Lubamatu paljundamine ja levitamine, või nende osad, võivad kaasa tuua range tsiviil- ja kriminaalkaristuse, mida rakendatakse maksimaalse seaduses ettenähtud karistusega. Autoriga on võimalik kontakti võtta järgmisel aadressil: [univisioon@gmail.com](mailto:univisioon@gmail.com).

Maarjamaa  
Copyright 2012–2021

# **Ajas rändamine ja selle tehnilised alused**

ISBN 978-9916-9659-0-0



## Resümee

Käesolevas töös on esitatud selline füüsika, mis võimaldaks inimesel ( ja ka teistel füüsikalistel kehal ) liikuda ajas reaalselt minevikku või tulevikku. Sellise tehnoloogia välja töötamine loob uusi võimalusi inimajaloo uurimisel ja ka Universumis liikumiseks. Kogu järgneva töö üldine uurimusmeetod on omane puhtalt teoreetilisele füüsikale. Näiteks hüpoteese, mida antud töös hulganisti püstitatakse, on tuletatud teoreetiliselt. Samas on kõik need hüpoteesid täiesti kooskõlas olemasolevate üldtunnustatud füüsikateooriatega. Töö alguses on teemale lähenetud mitte traditsiooniliselt, sest kõik olemasolevad füüsikateooriad, mis käsitlevad ajas rändamise reaalsel võimalikkust, baseeruvad just ussiaukude ehk aegruumi tunnelite matemaatilistel teooriatel. Antud uurimuses püstitatud teooriate järglused võimaldavad neid ussiauke kirjeldada pisut teistmoodi, kuid samas prognoosides ikkagi nende füüsikalist olemasolu. Antud töös on esitatud ka olemasolevate füüsikateooriate ( näiteks relatiivsusteooria ja kvantmehaanika ) võimalikud edasiarendused, sest ilma nendeta ei ole võimalik ajas rändamist füüsikaliselt mõista. Järgnevas uurimuses selgub üllatav tõsiasi, et inimese ajas rändamine ( näiteks minevikku ) on oma olemuselt väga reaalne ehk võimalik ja see on ka tehniliselt täiesti teostatav. See on ka kõige üllatavam järeldus kogu töö juures. Ajas rändamine osutub reaalselt võimalikuks ainult siis, kui tänapäeva füüsika kahte peamist teooriat edasi arendada. Samas on jõutud areneda ajas rändamise füüsikast isegi veelgi kaugemale. Kui inimese ajas rändamine osutub reaalselt võimalikuks, siis muutub vältimatult meie praegune füüsikaline maailmapilt Universumist. Näiteks näitab ajas rändamine Universumi ajatust, mille korral ei eksisteeri meie teadaolevas Universumis aega.

# SISUKORD

RESÜMEE .....	2
SISSEJUHATUS .....	7
<b>1 AJAS RÄNDAMISE FÜÜSIKATEORIA .....</b>	<b>9</b>
1.1 AJAS RÄNDAMISE FÜÜSIKALISED ALUSED .....	9
1.1.1 Sissejuhatus .....	9
1.1.2 Ajas rändamise teooria lähteprintsibid .....	9
1.1.3 Valguse kiirus vaakumis .....	14
1.1.4 Universumi paisumine ja selle seos ajas rändamisega .....	16
1.1.4.1 Ajas liikumise avaldumine Universumis .....	16
1.1.4.2 Universumi meetriline paisumine ja selle kiirus .....	18
1.1.4.3 Hubble'i seadus .....	18
1.2 KOLMAS RELATIIVSUSTEORIA EHK KOSMORELATIIVSUSTEORIA FÜÜSIKALISED ALUSED .....	23
1.2.1 Aeg: .....	24
1.2.2 Ruum: .....	25
1.2.3 Gravitatsioon: .....	26
1.2.4 Matemaatiline analüüs .....	28
1.2.4.1 Plancki aeg ja Plancki pikkus .....	32
1.2.4.2 Aegruumi intervall .....	39
1.2.4.3 Ajas rändamise füüsika ja relatiivsusteooria .....	40
1.2.4.4 Robertson-Walkeri meetrikad .....	52
1.2.4.5 Friedmanni võrrandid .....	55
1.2.4.6 Energia jäävuse seadus .....	61
1.2.4.7 Kosmoloogia põhivõrrand .....	63
1.2.4.8 de Sitteri Universum .....	72
1.2.4.9 Universumi paisumise kiirus .....	76
1.2.4.10 Friedmanni võrrandite lahendid .....	83
1.2.4.11 Kosmoloogiline konstant .....	85
1.2.4.12 Friedmanni võrrandi analüüs .....	104
1.2.4.13 Universumi y-faktor .....	109
1.2.4.14 Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandid .....	122
1.2.4.15 Aeg ja ruum kosmoloogias .....	129
1.2.4.16 Universumi paisumise avaldumine gravitatsiooniväljades .....	138
1.2.4.16.1 Plancki pinna roll .....	151
1.2.4.17 Hubble'i seadus .....	152
1.2.5 Universumi paisumine Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale .....	159
1.2.6 Universumi paisumine Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale .....	162
1.2.7 Universumi paisumise algus ja lõpp .....	168
1.2.7.1 Universumi Suur Pauk ja algsingulaarsus .....	168
1.2.7.2 Universumi horisont ja inflatsioon .....	169
1.2.7.3 Matemaatiline analüüs .....	171
1.2.7.3.1 Sissejuhatus .....	171
1.2.7.3.2 Friedmanni mudelite lahendid .....	173
1.2.7.3.3 Universumi aine ja energia tihedus .....	189
1.2.7.3.4 Universumi punkt- ja pingsingulaarsus .....	202
1.2.7.3.5 Universumi paisumine ja selle tulevik .....	214
1.3 KVANTKOSMOLOOGIA ALUSED JA SISSEJUHATUS KVANTVÄLJADE TEOORIASSE .....	224
1.3.1 Universumi aine ehk aine ja väli .....	231
1.3.2 Interaktsioonid Universumis .....	252
1.3.3 Higgsi boson ja elektromagnetiline interaktsioon I .....	265
1.3.4 Higgsi välja ja vektorvälja mass .....	271
1.3.5 Elektromagnetiline interaktsioon II .....	280
1.3.6 Elektromagnetiline interaktsioon III .....	288
1.3.7 Nõrk interaktsioon ehk nõrk jõud .....	293
1.3.8 Tugev interaktsioon ja tuumajõud .....	301
1.3.9 Ligikaudne arvutamine .....	330
1.4 ELEMENTAAROSAKESTE FÜÜSIKA MINI-STANDARDMUDEL .....	331
1.4.1 Universumi fundamentaalkonstandid .....	353

1.5	LAGRANŽIAANIDE MATEMAATIKA .....	360
1.5.1	Sissejuhatus.....	360
1.5.2	Universumi DNA mõiste.....	360
1.5.3	Ajas rändamise üldvõrrand .....	365
1.5.4	Füüsikalise süsteemi lagranžiaan .....	369
1.5.5	Välja „kvantiseerimine“ .....	374
1.5.6	Elektron-positronväli .....	381
1.5.7	Elektromagnetväli .....	386
1.5.8	Kvantelektrodünaamika .....	397
1.5.9	Operaatorid kvantmehaanikas.....	405
1.5.10	Kvantkromodünaamika .....	409
1.5.11	Sümmeetria rikkumine .....	411
1.5.12	Kasutatud kirjandus.....	432
1.6	LAINEFUNKTSIOON JA KVANTPÕIMUMINE .....	432
1.7	UNIVERSUMI SINGULAARSUSED JA TERMODÜNAAMIKA.....	468
1.8	RELATIVISTLIKU MEHAANIKA JA KVANTMEHAANIKA SUHE ( KVANTGRAVITATSIOON ) .....	504
1.8.1	Gravitatsioonivälja meetriline võrrand .....	504
1.8.2	Gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrand.....	508
1.8.3	Kvantgravitatsiooni analüüs.....	525
1.9	KVANTGRAVITATSIOON JA MUSTAD AUGUD.....	539
1.9.1	Mustade aukude orbiidid ja akretsioonkettad.....	570
1.10	UNIVERSUMI TUMEAINES.....	575
1.11	AJAS RÄNDAMISE JA UNIVERSUMI KOSMOLOOGILISE PAISUMISE OMAVAHELISE SEOSE FÜÜSIKALINE JA MATEMAATILINE SÜVA-ANALÜÜS 591	
1.11.1	Hyperruumi dimensioon ehk väljaspool aega ja ruumi .....	608
1.11.2	Ajas rändamise seaduspärasused .....	610
1.11.2.1	Aja ja ruumi vahetõrge .....	610
1.11.2.2	Liikumise suhtelisus.....	611
1.11.2.3	Energia jäävuse seadus ajas rändamise korral.....	612
1.12	RELATIIVSUSTEORIA AJAS RÄNDAMISE TEOORIAS ( VANEM MATERJAL ) .....	614
1.12.1	Sissejuhatus.....	614
1.12.2	Eirelatiivsusteooria.....	615
1.12.2.1	Valguse kiirus vaakumis .....	615
1.12.2.2	Relativistliku mehaanika tulenev ajas rändamise teooriast .....	616
1.12.2.3	Aegruumi intervall .....	619
1.12.2.4	Matemaatiline analüüs.....	624
1.12.2.5	Aja dilatatsioon.....	629
1.12.2.5.1	Imaginaarne aeg.....	631
1.12.2.6	Keha pikkuse kontraktsioon.....	633
1.12.2.7	Aja ja ruumi „koos-teisenemine“.....	634
1.12.2.8	Valguse kiiruse jäävusseadus vaakumis .....	641
1.12.2.9	Kineetiline energia eirelatiivsusteoorias .....	644
1.12.2.9.1	Kineetiline energia kosmoloogias .....	655
1.12.2.9.2	Kineetilise energia ja valguse seos.....	663
1.12.3	Üldrelatiivsusteooria ajas rändamise teoorias .....	666
1.12.3.1	Sissejuhatus.....	666
1.12.3.2	Inertne ja raske mass.....	667
1.12.3.3	Üldrelatiivsusteooria tulenev ajas rändamise teooriast, üldrelatiivsusteooria matemaatiline interpretatsioon ilma tensorsüsteemide ja Riemanni geomeetria kasutamisega .....	670
1.12.3.3.1	Gravitatsioonijõud .....	683
1.12.3.3.2	Gravitatsioonivälja meetriline võrrand .....	687
1.12.3.4	Gravitatsioonivälja ehk aegruumi kõveruse füüsikaline olemus.....	696
1.12.3.5	Gravitatsiooniväljade ehk aegruumi kõveruste matemaatiline kirjeldamine .....	703
1.12.3.5.1	Kerapind kui kõverruum .....	705
1.12.3.5.2	Albert Einsteini võrrandid.....	708
1.13	KVANTMEHAANIKA AJAS RÄNDAMISE TEOORIAS ( VANEM MATERJAL ) .....	709
1.13.1	Sissejuhatus.....	709
1.13.2	Kvantmehaanika formalism.....	712
1.13.3	Matemaatiline analüüs kvantmehaanika tulenev ajas rändamise teooriast.....	713
1.13.3.1	Matemaatiline analüüs.....	714
1.13.3.2	Füüsikaline analüüs .....	722

1.13.4	Lainefunktsiooni füüsikaline olemus.....	734
1.13.5	Lainefunktsiooni seaduspärasused.....	740
1.13.6	Schrödingeri lainevõrrand .....	743
1.13.7	Fotoefekti võrrandi tuletamine.....	749
1.13.8	Kvantmehaanika füüsikalised alused.....	750
1.13.8.1	Osakeste lainelised omadused .....	751
1.13.8.2	Relativistlik kvantmehaanika .....	754
1.13.8.3	Plancki konstant .....	755
1.13.8.4	Kompleksarvud kvantmehaanikas .....	756
1.13.8.5	Osakeste määramatuse seosed ja operaatorid.....	757
1.14	ELEKTRILAENGU MÕJU AEGRUUMI MEETRIKALE, VÄLJADE ÜHENDTEOORIA JA VÄLJADE KVANTTEOORIA ( VANEM MATERJAL ) .....	760
1.14.1	Gravitatsiooniväli ehk aegruumi kõverus ja aegruumi lõkspinna mõiste .....	761
1.14.2	Elektrilaengu mõju aegruumi meetrikale .....	766
1.14.3	Gravitatsioonivälja ja elektrivälja suhe .....	768
1.14.4	Gravitatsioonivälja „teisenemine“ elektriväljaks.....	776
1.14.5	Väljade kvantteooria .....	785
1.14.5.1	Operaatorid kvantmehaanikas .....	805
1.14.5.2	Peenstruktuurikonstant ja energia jäävuse seadus .....	809
1.14.5.3	Elektroni elementaarlaeng ja „erilaeng“ .....	817
1.14.5.4	Magnetvälja tekkimine .....	823
1.14.5.5	Elektromagnetilise energia füüsikaline ja matemaatiline analüüs .....	829
1.14.5.6	Tugev interaktsioon ehk „tuumavälja“ kirjeldav valem.....	834
1.14.5.7	Higgsi boson ja selle skalaarväli.....	841
1.14.5.8	Vaakumi virtuaalne kvantenergia .....	848
1.14.5.9	Ligikaudne arvutamine .....	860
2	AJAS RÄNDAMISE TEHNILINE TEOSTUS .....	862
2.1	AEGRUUMI TUNNELID EHK AJAS JA RUUMIS TELEPORTREERUMISE FÜÜSIKALISED ALUSED .....	864
2.1.1	Väljaspool aegruumi.....	864
2.1.2	Aegruumi kõverus.....	869
2.1.3	Aegruumi tunnel ehk ussiauk ehk „Einsteini-Roseni sild“ .....	874
2.1.3.1	Aegruumi tunneli füüsikaline olemus.....	875
2.1.3.2	Aegruumi tunneli pikkus.....	883
2.2	AEGRUUMI TUNNELITE LOOMINE .....	886
2.2.1	Reissner-Nordströmi meetrika.....	886
2.2.2	Aegruumi kõverus ja gravitatsioonijõud.....	892
2.2.3	Elektrivälja energia uurimine .....	896
2.2.4	Aegruumi lõkspind ja elektrienergia.....	898
2.2.5	Aegruumi lõkspinna geomeetriline kuju.....	903
2.2.6	Aegruumi lõkspinna ja lainefunktsiooni omavaheline seos.....	906
2.2.7	Elektriliselt laetud kera väli .....	909
2.2.8	Elektromagnetvälja muutumise kiirus.....	914
2.2.9	Masinaehitus ehk „ajaratta tehnoloogia/elektrotehnika“ .....	925
2.2.9.1	Sissejuhatus.....	925
2.2.9.2	Gaasiturbiin .....	929
2.2.9.3	Asünkroonmootor .....	932
2.2.9.4	Sünkroonmootor ( samm-mootor ) .....	945
2.2.9.5	LISA: Samm-mootorid.....	967
2.2.9.6	Samm-mootori kirjanduse ja erinevate jooniste allikad .....	974
2.3	AEGRUUMI LÕKSPINNA KVANTMEHAANILISED OMADUSED JA SELLEST TULENEVAD ARVUTUSED .....	976
2.3.1	Sissejuhatus.....	976
2.3.2	Aegruumi tunneli pikkus.....	978
2.3.3	Ajaränu suuna määramine.....	996
2.3.4	Inimese ajas rändamise reaalsed juhtumid.....	1003
3	AJAS RÄNDAMISE TEOORIA EDASIARENDED .....	1017
3.1	SISSEJUHATUS .....	1017
3.2	MIS ON UNIVERSUMI FÜÜSIKALINE OLEMUS?.....	1018
3.3	UNIVERSUMI AEGRUUM.....	1019
3.4	AEG, RUUM JA LIKUMINE UNIVERSUMIS .....	1025
3.5	JÄÄVUSESEADUSED .....	1026



3.6	AJATU UNIVERSUM.....	1031
3.7	UNIVERSUMI KINEMATOGRAAFILINE EFEKT.....	1034
3.8	UNIVERSUMI FÜÜSIKALINE OLEMUS.....	1035
3.9	AJAPARADOKSID.....	1036
3.10	KOKKUVÕTTEKS.....	1037
<b>TULEMUSED .....</b>		<b>1039</b>
<b>KASUTATUD KIRJANDUS.....</b>		<b>1041</b>

## Sissejuhatus

Klassikaline mehaanika oli üks esimesi füüsika harusid üldse, mis tekkis ja käsitles aega ning ruumi. See oli pikka aega ainus aega ja ruumi kirjeldav füüsika osa, kuid muutused toimusid 20. sajandi alguses, mil tekkisid kaks täiesti uut aegruumi kirjeldavat teooriat – nendeks oli relatiivsusteooria ja kvantmehaanika. Relatiivsusteooria üheks põhiväiteks on see, et aeg ja ruum moodustavad ühtse terviku, mida nimetatakse aegruumiks. Seda tõestab valguse kiiruse jäävus vaakumis kõigi vaatlejate suhtes. Suurte masside läheduses ja masside ülikiire liikumise korral hakkavad aeg ja ruum teisenema ehk aeg aegleneb ja kehade pikkused lühenevad välise vaatleja suhtes. Kvantmehaanikas on aga võimalik kehade ( s.t. osakeste ) füüsikalist olekut kirjeldada ainult tõenäosuslikult. See tähendab seda, et näiteks kehade liikumise füüsikalisi parameetreid ( näiteks kiirus, asukoht ehk koordinaat  $jpm$  ) ei ole võimalik täpselt ette teada, sest kehtivad nn määramatuse relatsioonid. 20. sajandi algusest alates kuni praeguse ajani ei ole jõutud nende arusaamadest kaugemale. Kuid käesolevas töös tekivadki uued teooriad, mis seletavad ära nendes kahes teoorias esinevaid näiliselt ebaratsionaalseid nähtusi. Käesoleva ajani baseerusid eranditult kõik ajas rändamise võimalikkuse teooriad just Albert Einsteini üldrelatiivsusteoorial. See teooria ennustab ussiaukude ehk aegruumi tunnelite olemasolu. Näiteks kahte punkti ruumis ( või ajas ) ühendab „aegruumi tunnel“, mille läbimise korral on võimalik ületada tohutuid vahemaid ruumis väga väikese ajaga. Nende järgi on võimalik liikuda nii ruumis ( avakosmoses ) kui ka ajas. Selline füüsikaline arusaam ajas rändamisest eksisteerib veel tänapäevalgi. Antud töös ei lükata sellist üldlevinud arusaama küll ümber, kuid sellist teooriat vaadeldakse siin „teise nurga alt“. See tähendab seda, et toimub vana teooria edasiarendus, mille lõpptulemuseks saame selle, et läbides aegruumi tunneli läbib keha kahte punkti ruumis ( või ajas ) ainult ühe hetkega. Sellist võimalikkust tuntakse ainult teleportatsiooni nime all, mille eksisteerimine on võimalik ainult väljaspool aegruumi. Hiljem on näha seda, et selline asjaolu põhjustabki näiteks osakeste tõenäosuslikku käitumist ehk määramatuse seoste tekkimist kvantmehaanikas.

Antud töös kirjeldavas ajas rändamise teoorias võetakse üheks füüsikaliseks põhialuseks erirelatiivsusteooriast tuntud väide, et aeg ja ruum moodustavad tegelikult ühtse terviku, mida nimetatakse aegruumiks. See on erirelatiivsusteooria üheks alusväiteks. Kuid selle järeldus on see, et kui liigutakse ajas minevikku, siis PEAB liikuma ka mingisuguses ruumidimensioonis. See ruum „eksisteerib“ väljaspool meie tavalist igapäevaselt tajutavat ruumi. Füüsikaliselt tähendab see seda, et näiteks üldrelatiivsusteooria võrrandid kaotavad seda ruumi uurides oma kehtivuse, sest sellises ruumis ei eksisteeri enam aega ega ruumi, mis füüsikaliselt avaldub see aja lõpmatus aeglenemises ja pikkuse lõpmatus vähenemises. Seepärast kehade liikumised ei võta „seal“ enam aega ja ilmneb kehade teleportreerumised. Teleportreeruda on võimalik minevikku, tulevikku või olevikus.

Selliseid „aegruumituid“ piirkondi on Universumis avastatud. Näiteks võib tuua mustad augud, mille tsentrites aja kulg aegleneb lõpmatuseni ( ehk aega ennast enam ei olegi ) ja pikkustelgi ei ole enam mõtet ( s.t. ka ruumi eksisteerimine lakkab ). Just sellises piirkonnas ongi võimalik ajas liikuda ehk avaldub teleportatsioon, kui inimene saaks kuidagi sinna sattuda.



*Joonis 1 Aeg ja ruum erinevates füüsikateooriates.*

Stringiteoorias on tsentraalseks ideeks, et aegruumi mõõtmeid on palju rohkem kui ainult neli. Näiteks ruumi mõõtmeid ennustatakse kokku lausa kümme ja ajal on siis ainult üks mõõde. Kokku teeb see 11-mõõtmelise aegruumi, mida siis stringiteooria meile praeguste teadmiste põhjal prognoosib. Kuid antud töös tuletatavad teooriad ( s.t. hüpoteesid ) tõestavad aga hoopis vastupidist – aegruumi mõõtmeid ei tule tegelikult juurde, vaid need hoopis vähenevad ( ehk lakkavad eksisteerimast ). Näiteks selline tõsiasi avaldub selles, et aeg aegleneb ja keha pikkused lühenevad suurte masside vahetus läheduses ja massi üha enam kiireneval liikumisel. Aja ja ruumi dimensioonide lakkamine avaldub väga selgesti ka kvantmehaanikas kirjeldavates nähtustes. Seni teadaolevad katsed näitavad seda, et osakesed eksisteerivad nagu „väljaspool aegruumi“.

Füüsikaliselt väljendades ei eksisteeri väljaspool aegruumi enam aega ega ruumi. Osakeste lainelised omadused tulenevad just nende teleportreerumistest aegruumis. Osake on samas ka laine ja selle laine kirjeldavad füüsikalised parameetrid langevad kokku keha pideva teleportatsiooni parameetritega ajas ja ruumis. Osakeste lainelised omadused on tõestust leidnud difraktsiooni ja interferentsi katsetes. Relativistlikud efektid relatiivsusteoorias tulenevad aja ja ruumi teisenemistest, milles avaldub aja ja ruumi mõõtmete lakkamine. Üldrelatiivsusteoorias kirjeldatakse aja aeglendamist ja kahe ruumipunkti vahelise vahemaa lühenemist ( ehk tegelikult aegruumi lakkamist ) geomeetriaga, mida põhjustab suurte masside olemasolu aegruumis. Aegruumi kõverus on üldrelatiivsusteooria põhiline füüsikaline-matemaatiline eksistens. Kvantmehaanikas kirjeldatavad näiliselt ebaratsionaalsed efektid avalduvad seepärast, et osakeste jaoks ei ole olemas enam aega ega ruumi ja seetõttu esinevad osakeste teleportreerumised ajas ja ruumis. Kõik kvantfüüsikas tuntud efektid tulevad just osakeste teleportreerumistest ja seepärast tulebki tundma õppida teleportatsiooni füüsikalisi alusomadusi, mida antud töös ka kirjeldatakse. Kõik see on täiesti kooskõlas ajas rändamise üldise interpretatsiooniga.

# 1 Ajas rändamise füüsikateooria

## 1.1 Ajas rändamise füüsikalised alused

### 1.1.1 Sissejuhatus

Ajas rändamise teooria põhialustes käsitleme aja ja ruumi ühtsuse printsiipi, mis tuleb välja valguse kiiruse konstantsusest vaakumis ja ajas rändamise eeldusest. Ajas rändamise võimalikkus tuleb välja kahest fundamentaalsest seaduspärasusest: kõik sündmused toimuvad ruumis mingi ajaperioodi vältel ja valguse kiirus vaakumis on igale vaatlejale üks ja sama. Valguse kiiruse konstantsus vaakumis näitab, et aeg ( ehk kestvus ) ei ole kõikjal ühevoolavusega, vaid see „liigub“ erinevates taustsüsteemides erinevalt. Ka ruum ei ole kõikjal eukleidiline, vaid ruum ( ja ka aeg ) on näiteks massiivsete kehade läheduses kõver. Seda näitavad meile eri- ja üldrelatiivsusteooria. Aja ja ruumi ühtsusest tuleneb arusaam, et ajas rändamiseks peame me liikuma ruumis, mis ei ole meie igapäevaselt tajutav kolmemõõtmeline ruum. See omakorda näitab selgelt, et relatiivsusteoorias kirjeldatavad aja ja ruumi teisenemised tulenevad just ajas rändamise teoorias kirjeldavatest seaduspärasustest. Sellepärast käsitlemegi enne relatiivsusteooriaga tutvumist just ajas rändamise teooriat. Aja ja ruumi teisenemised ehk relatiivsusteooria ( ja ka kvantmehaanika ) baseeruvad tegelikult just ajas rändamise teoorial, mis on väga selgelt ja rangelt tuletatavad.

### 1.1.2 Ajas rändamise teooria lähteprintsiibid

Põhiküsimus ei olegi see, et “mis on aeg?”, vaid “mis tekitab/loob aja?”. Aeg on “kestvus”, täpselt nii nagu inimene seda igapäevaselt tajub. Põhiküsimus on lihtsalt see, et mis loob aja või mis tekitab aja Universumis? Samasugune põhimõte kehtib ka „ruumi“ korral.

Albert Einsteini erirelatiivsusteooriast tuleneb see, et valguse kiirus vaakumis on jääv suurus iga vaatleja suhtes ja igasugustes taustsüsteemides ( ka inertsiaalsetes taustsüsteemides ). Selline asjaolu tuleb välja aja ja ruumi koosteisenemisest: mida kiiremini keha liigub ( s.t. mida lähemale valguse kiirusele vaakumis ), seda enam aegleneb aeg ja keha pikkus lüheneb. See tähendab ka seda, et aeg ja ruum ei saa olla üksteisest lahus. Need kaks moodustavad ühtse terviku, mida nimetatakse „aegruumiks“. Aeg ja ruum on ühe ja sama kontiinumi osad, mistõttu ei ole võimalik, et eksisteerib aeg, kuid mitte ruum või vastupidi.

Albert Einstein ühendas erirelatiivsusteoorias omavahel aja ja ruumi ühtseks „aegruumiks“. See tähendab seda, et aeg ja ruum on üksteisest täiesti lahutamatu seotud, mis tuleb välja valguse kiiruse konstantsusest vaakumis. Kuid tegelikult peaks aja ja ruumi kontiinumi hulgas olema ka veel „liikumine“, sest liikumist ei saa eksisteerida kui pole olemas aega ega ruumi ning vastupidi – aega ja ruumi ehk aegruumi ei saa samuti eksisteerida kui pole olemas „millegi liikumist“. Nii ongi aeg, ruum ja ka liikumine üksteisest lahutamatu seotud.

Ka aegruum ja aine on omavahel tihedalt seotud. Näiteks kui kõik kehad Universumis järsku kaoks, siis sellisel juhul pole olemas enam ka aegruumi. See kehtib ka vastupidisel juhul.

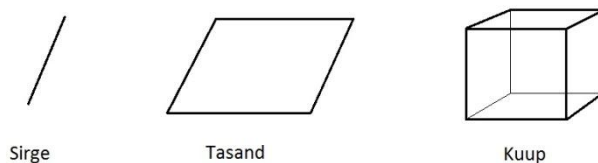
Kui aeg ja ruum on teineteisest lahutamatu seotud, siis seega liikudes ajas ( näiteks minevikku ) liigume ka ruumis. See tähendab seda, et kui me rändame ajas, siis peame liikuma ka mingisuguses



ruumi dimensioonis. Selline järeldus on üks olulisemaid ajas rändamise teoorias. See on üks fundamentaalsemaid ideid üldse. Valguse kiirus vaakumis on kõikidele vaatlejatele üks ja sama suurus. Tegemist on millegi liikumisega ja selle kiirusega. Nii ongi näha seda, et kestvus ( ehk aeg ) ja ruumiline ulatus ( ruumis ) eksisteerivad ( sõltuvalt ) koos ehk teisisõnu: mingile kestvusele ( s.t. ajale ) vastab mingisugune ruumiline ulatus ruumis. Ei saa olla mitte ühtegi liikumist, mis ei toimuks ruumis.

Eelnevalt välja toodud järeldus viib sellisele arusaamisele, et aeg on küll füüsikaliste protsesside kestvus, kuid igale ajahetkele ( s.t. sündmusele ja protsessile ) on olemas kindel asukoht ruumis. See tähendab ka seda, et mida kaugemal on mingi ajahetk praegusest ( näiteks võib see olla kauges minevikus ), seda kaugemal on ka selle koordinaat „ruumis“. Igasugusele kestvusele ( ehk ajahetkele ) vastab samas ka mingisugune „ulatus“ ruumis. Saadud füüsikaline järeldus ongi oma olemuselt ajas rändamise põhiseaduseks. Kõik edasised järeldused tulevad ülal toodud tõsiasiast. Hiljem me näeme seda, et selline seaduspärasus on oma olemuselt Universumi meetriline paisumine. Näiteks mida kaugemal minevikus mingisugune sündmus toimus, seda kaugemal eksisteerib see ka ruumis ( ehk seda väiksem oli Universumi ruumala ). Aeg ei eksisteeri ruumist „eraldi“.

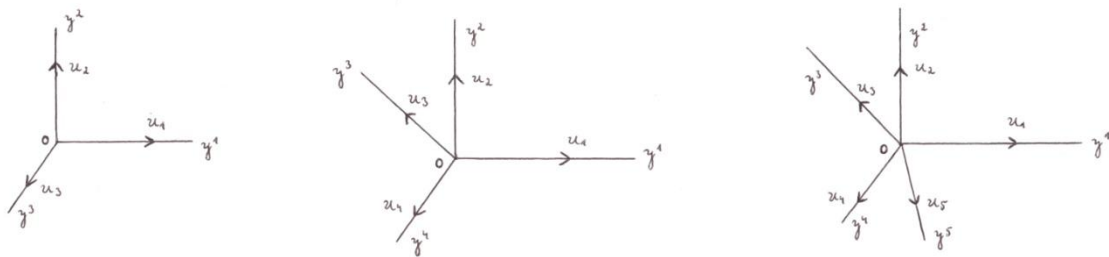
Igal ajahetkel on oma kindel koordinaat ruumis, kuid selle ruumi punktid EI OLE meie tavalise ehk igapäevaliselt kogetava ruumi punktid. See on väga oluline järeldus. Näiteks kui inimene liigub ruumis ühest asukohast teise ( näiteks sõidab linnast ära maale puhkama ), siis ta ju ei rända ajas minevikku. Seetõttu ei ole ajahetkede ruumipunktid sellise ruumi punktid, milles inimesed igapäevaselt elavad. Meie igapäevaselt kogetav ruum on kolmemõõtmeline. Järelikult need ajahetkede ruumipunktid on „väljaspool“ seda kolmemõõtmelist ruumi, milles me igapäevaselt elame.



*Joonis 2 Ruumi kolmemõõtmelisus.*

Sirge on ühemõõtmeline, tasand on kahemõõtmeline ja kuup on kolmemõõtmeline. Punktil ruumimõõtmeid ei ole.

Väljaspool ruumi ja aega eksisteerivaid dimensioone on paraku raske endale ettekujutada. Sama probleem esineb ka stringiteoorias, kus 10-mõõtmelist ruumi ei ole võimalik ettekujutada. Albert Einsteini üldrelatiivsusteoorias tuuakse kõverate ruumide paremini mõistmiseks välja analoogia kera pindadega. Hiljem me näeme seda, et väljaspool ruumi olevad kehad asuvad tegelikult teistes ruumi mõõtmetes. Järgnevalt esitatakse mõned näited kõrgema mõõtmelistest ruumidest, mida on füüsikas püütud geomeetriliselt esitada. Need on koordinaadistikud 3-, 4- ja 5-mõõtmelises ruumis:



Joonis 3 Need on koordinaadistikud 3-, 4- ja 5-mõõtmelises ruumis.

Kui ajahetkede ruumipunktid asuvad väljaspool meie tavalise ruumi punktidest, siis on meil tegemist juba rohkema mõõtmelise ruumiga, kui kolmemõõtmelise ruumiga. Ruum ei saa siis olla enam kolmemõõtmeline. Tegemist peab olema siis vähemalt neljamõõtmelise ruumiga. Ruumi neljas mõõde ongi ajaga seotud just nii, et ruumi mõõtme erinevad punktid on samas ka erinevad ajahetked. Näiteks punkt P võib olla 4-mõõtmelises ruumis koordinaatidega järgmiselt:

$$P = (y_1, y_2, y_3, y_4),$$

milles  $y_1, y_2, y_3$  on tegelikult meie tavalise kolmemõõtmelise ruumi kolm koordinaati:  $x, y, z$ . Kuid see  $y_4$  ruumikoordinaat vastab ajakoordinaadile, mistõttu  $y_4 = t$ . Järelikult 4-mõõtmeline ruum ongi tegelikult meile tuttav tavaline aegruum ehk siis punkti P koordinaadid saab välja kirjutada nõnda:

$$P = (x, y, z, t).$$

Geomeetrias esitatakse  $n$ -mõõtmelise (antud juhul siis 4-mõõtmelise) eukleidilise ruumi põhivormid nõnda:

$$s^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 + (y_4)^2$$

$$s^2 = (y_1^2 - y_1^1)^2 + (y_2^2 - y_2^1)^2 + (y_3^2 - y_3^1)^2 + (y_4^2 - y_4^1)^2$$

$$ds^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2 + (dy_4)^2.$$

Kuid antud juhul need aga ei kehti. Kehtivad ainult juhul, kui:

$$s^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 \quad \text{ja} \quad y_4$$

$$s^2 = (y_1^2 - y_1^1)^2 + (y_2^2 - y_2^1)^2 + (y_3^2 - y_3^1)^2 \quad \text{ja} \quad y_4$$

$$ds^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2 \quad \text{ja} \quad y_4.$$

See on sellepärast nii, et koordinaat  $y_4$  on seotud ka ajaga ja tavalises 3-mõõtmelises ruumis liikudes inimene ju ajas ei liigu (näiteks minevikku). Seetõttu ei saa praegusi teadmisi geomeetriast antud juhul (sellise 4-mõõtmelise ruumi korral) rakendada. Kui aga käsitleme pseudoeukleidilist geomeetriat, siis Minkowski aegruum võib kirjeldada pseudoeukleidilist 4-ruumi, kus kahe sündmuse vahelise intervalli ruut on meetriliseks invariantiks:

$$(\Delta s_{12})^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2.$$

milles on imaginaarne ajakoordinaat:

$$x_4 = ix_0 = ict$$

ja ülejäänud kolm (  $x_1, x_2$  ja  $x_3$  ) on Descartesi ruumikoordinaadid.

Eespool tõdesime, et igal ajahetkel on oma kindel ruumikoordinaat. Aeg on kestvus, mis mitte kunagi ei lakka ehk ei jää „seisma“. See tähendab ka seda, et ajahetkede vahetumisega ( näiteks esimesel sekundil, teisel sekundil jne ) vahetuvad ka ruumi punktid ( näiteks asukohal  $x_1$ , asukohal  $x_2$  jne ). Kuid asukoha muutumist ruumis ( mingi ajaperioodi vältel ) mõistame füüsikas liikumise definitsioonina. Järelikult ilmneb mingisugune liikumine. See viitab selgelt sellele, et ruumi kolm mõõdet nagu „liiguksid“ neljanda ruumi mõõtme suhtes. Seda on raske ettekujutada. Sellest tulenevad 4-mõõtmelise ruumi mõned geomeetrilised iseärasused.

Igal ajahetkel on oma ruumikoordinaat, mis väljendub matemaatiliselt üsna lihtsasti:

$$t_1 = ( y_1 )$$

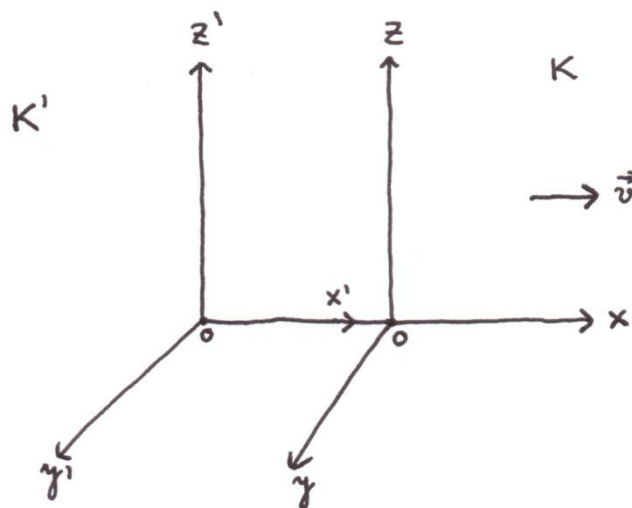
$$t_2 = ( y_2 )$$

$$t_3 = ( y_3 )$$

$$t_4 = ( y_4 )$$

... ..

Kuna kolm ruumi mõõdet „liiguvad“ ühe ( s.t. neljanda ) ruumi mõõtme suhtes, siis võib seda **LIHTSUSTATULT** ettekujutada niimoodi:



*Joonis 4 Hyperruum  $K'$  ja tavaruum  $K$ . Hyperruum ja tavaruum ei ole taustsüsteemid ( ei inertsiaal-ega ka mitteinertsiaaltaustsüsteemid ).*

Antud joonis on hyperruumi ja tavaruumi omavahelise süsteemi „piltlikustamiseks“. Tegelikult ei eksisteeri. Selline on mudel, et aja ja ruumi omavahelist seost paremini mõista ja meelde jätta. Hiljem on näha seda, et reaalsuses avaldub see Universumi paisumisena. Antud juhul on tavaruum  $K$  meie Universumi 3-mõõtmeline ruum ja hyperruum  $K'$  on ruumi neljas mõõde, mis on seotud ajakoordinaadiga.

Juba Ungari päritoluga filosoof ja matemaatik Menyhért Palagyi ( 1859-1924 ) arendas omal ajal aja ja ruumi ühtsuse ideed ja käsitles aega neliruumi ( „jooksva ruumi“ ) imaginaarse koordinaadina, mis tegelikult väga sarnaneb antud juhul  $K$  ja  $K'$ -i füüsikalise süsteemiga.

Antud joonisel on hyperruum  $K'$  esitatud 3-mõõtmelisena, et mudel oleks lihtsalt meile käepärasem. Joonisel on näha, et tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes. Oluline on märkida, et tavaruum ja hyperruum ei ole taustsüsteemid.

Neljamõõtmelise koordinaatsüsteemi ( s.t. Einsteini kõvera aegruumi ) korral kasutatakse kolme ruumitelge ja ühte ajatelge. Ajamomenti korrutatakse valguse kiirusega  $c$ , et tegemist oleks neljanda ruumimõõtmega. Tulemuseks on neli (ruumi)koordinaati:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ja  $ct$ .

Kui me liigume hyperruumi  $K'$  mõõtmes ( mitte meie tavaruumi  $K$  mõõtetes ), siis liigutakse ajas. Me peame liikuma hyperruumis, et rännata ajas. See tähendab, et kui me soovime liikuda ajas, siis seda on võimalik ainult „väljaspool“ meie tavalist tajutavat 4-mõõtmelist aegruumi ( ehk väljaspool 3-mõõtmelist ruumi ). Just ruumi „lisamõõtmelised“ võimaldavad liikuda ajas. Ruumil on veel üks mõõde ja see teeb ruumi tegelikult 4-mõõtmeliseks. Sellisel juhul on ajast saanud ruumikoordinaat, kuid mitte sellises tähenduses nagu seda väidab meie relatiivsusteoorias olev geomeetria. Võib öelda ka nii, et ajas rändamiseks peame liikuma väljaspool ( 3-mõõtmelist ) ruumi, sest siis ilmneb ruumi üks lisamõõde, mis on seotud just „liikuva“ ajakoordinaadiga. „Väljaspool“ meie tavalist 3-mõõtmelist ruumi liigutakse teis(t)es ruumi mõõtme(te)s.

Aja ja ruumi omavahelistest seaduspärasustest ilmneb, et aeg ja ruum on tegelikult illusioonid, mille tekitab liikumine. Kehade enda liikumised Universumis jätavad sellise „mulje“, et need toimuvad ruumis ja kestavad teatud ajaperioodi. Aega ja ruumi ei ole reaalselt tegelikult olemas,



mis on ainult fundamentaalse tähendusega. See tähendab, et see ei ilmne otseselt meie nähtavast maailmast, sest selline aja ja ruumi füüsika, mis esineb relatiivsusteoorias ja kvantmehaanikas, baseerub tegelikult aja ja ruumi eksisteerimise illusioonil. Aeg oleks nagu liikuv.

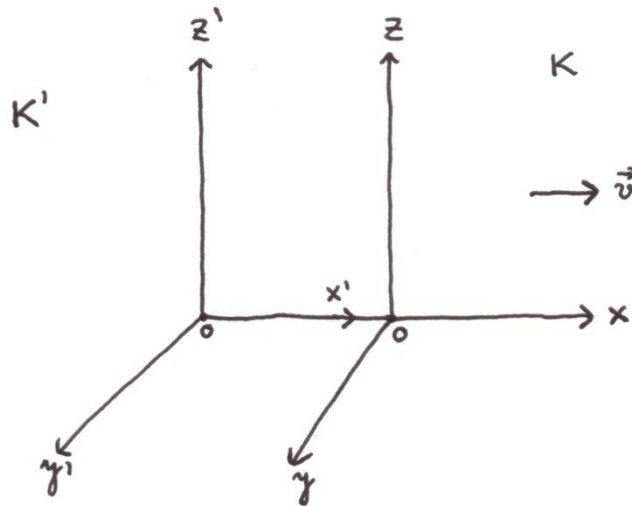
Eirerelatiivsusteoorias ühendatakse omavahel aeg ja ruum üheks tervikuks – aegruumiks. Kuid antud juhul liidetakse aja ja ruumile ( ehk aegruumile ) ka liikumine. On olemas mõned nähtused, mis seda teha sunnivad. Näiteks aja dilatatsioon ehk aeglenemine. Miks me näeme aja aeglenemist just kehade liikumiste ( nende kiiruste ) aeglenemises? Ja kui aeg on üldse peatunud, siis kehade liikumist üldse enam ei eksisteeri. Miks on olemas just selline seos aegruumi ja keha liikumise vahel? Aeg ja ruum ei saa olla teineteisest lahus – nii on ka liikumisega. Aeg, ruum ja liikumine – need kolm „komponenti“ ei saa olla teineteisest lahus. Eespool me juba tõdesime seda, et aeg ( ja seega ka ruum ) on tõepoolest seotud liikumisega, kuid seda väga iseäralikul moel.

Kuigi hyperruumis ei eksisteeri enam aega ega ruumi ( sest vastavalt relatiivsusteooria järgi võrduvad nende dimensioonid nulliga ), võime hyperruumi sellegipoolest ettekujutada näiteks ühemõõtmelise ruumina. Liikudes selles edasi või tagasi rändame ajas vastavalt tulevikku või minevikku ja seetõttu on aeg seal pigem kahemõõtmeline. Kuid hyperruumi on võimalik ettekujutada ka kolmemõõtmelise ruumina, sest sellesse on võimalik siseneda mistahes tavaruumi koordinaadi punktist ja kehad teleportreeruvad „sealt“ mistahes tavaruumi punkti.

Hyperruum on hüpoteetiline aegruum, mis eksisteerib meie igapäevaselt tajutavast ajast ja ruumist väljapool. Ehkki hyperruum ( ja ka hyperaeg ) sisaldavad endas aja ja ruumi igapäevaseid mõisteid, siis realselt ehk tegelikult ei sisalda hyperruum endas mitte mingisuguseid aja- ja ruumidimensioone. Kuid sellegipoolest kujutatakse hyperruumi geomeetrilistes mudelites kolme- või isegi neljamõõtmelise koordinaatsüsteemina, mis eksisteerib paralleelselt meie tavalise aegruumi kõrval. Hyperruum on nagu paralleelaegruum ( mitte segi ajada paralleelmaailmaga ), milles ei eksisteeri aega ega ruumi. Hyperruum on nagu väljaspool aegruumi eksisteeriv ajatu ja ruumitu dimensioon.

### 1.1.3 Valguse kiirus vaakumis

Eirerelatiivsusteooria ei anna vastust küsimusele, et miks esineb aja ja ruumi teisenemine, kui keha liikumiskiirus läheneb valguse kiirusele vaakumis? Vastuse sellele fundamentaalsele küsimusele leiame ajas rändamise teooriast. Selleks, et rännata ajas ( ehk liikuda ühest ajahetkest teise ), peab keha olema ajast ( ja ka ruumist ) „väljas“. See on üldse esimene füüsikaline tingimus sooritamaks tõelist aja rännakut. Väljaspool aega ei eksisteeri enam aega. Eespool tõestasime, et  $K'$ -s ehk hyperruumis liikudes rändab keha ajas. Seega hyperruumis ei eksisteeri enam aega ( ega ka ruumi ). Kuna tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes, siis järelikult keha jõudmiseks hyperruumi ehk  $K'$ -i peab keha liikumiskiirus tavaruumis  $K$  ( milles eksisteerib aeg ja ruum ) suurenema. Kuna  $K'$ -s ehk hyperruumis aega ei eksisteeri ( s.t. aeg on lõpmatuseni aeglenenud ehk aeg on peatunud ), siis seega lähenedes hyperruumile ( ehk keha liikumiskiiruse suurenemisel tavaruumis  $K$  ) aegleneb aeg. Kuid aja aeglenemine keha liikumiskiiruse kasvades on teada ainult eirerelatiivsusteooriast: näiteks mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Keha liikumiskiiruse lähenemist valguse kiirusele vaakumis võib antud kontekstis tõlgendada keha liikumiskiiruse kasvuna tavaruumis  $K$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes hakkab keha paigale jääma. Järelikult  $K$  liigub  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$ . Kuna aeg ja ruum on üksteisest lahutamatult seotud, siis aja aeglenemisega käib kaasas ka keha pikkuse lühenemine, mis on samuti tuntud eirerelatiivsusteooriast.



Joonis 5  $K$  liigub  $K'$  suhtes valguse kiirusega.

Hyperruum on hüpoteetiline aegruum, mis eksisteerib meie igapäevaselt tajutavast ajast ja ruumist väljapool. Ehkki hyperruum ( ja ka hyperaeg ) sisaldavad endas aja ja ruumi igapäevaseid mõisteid, siis reaalselt ehk tegelikult ei sisalda hyperruum endas mitte mingisuguseid aja- ja ruumidimensioone. Kuid sellegipoolest kujutatakse hyperruumi geomeetrilistes mudelites kolme- või isegi neljamõõtmelise koordinaatsüsteemina, mis eksisteerib paralleelselt meie tavalise aegruumi kõrval. Hyperruum on nagu paralleelaegruum ( mitte segi ajada paralleelmaailmaga ), milles ei eksisteeri aega ega ruumi. Hyperruum on nagu väljaspool aegruumi eksisteeriv ajatu ja ruumitu dimensioon.

Me kõik eksisteerime ajas ja ruumis ehk aegruumis. Kuid väljaspool aegruumi ei eksisteeri enam aega ega ruumi. Füüsikaliselt avaldub aja ja ruumi eksisteerimise lakkamine nii, et aeg on peatunud ehk aeglenenud lõpmatuseni ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus vähenenud samuti lõpmatuseni. Selliseid nähtusi leidub näiteks mustade aukude tsentrites ja vaakumis valguse kiirusega liikudes. Sellistesse aegruumi piirkondadesse sattumise korral eksisteerib keha „väljaspool aegruumi“, sest aja ja ruumi eksisteerimine on lakanud, mis on võimalik ainult väljaspool aega ja ruumi.

Hyperruumis oleva aja ja ruumi eksisteerimise lakkamine tähendab tegelikult seda, et keha „liikumine“ hyperruumis ei võta enam aega ega ruumi. Kuid erinevatel joonistel kujutatakse hyperruumi ikkagi tavalise aegruumi koordinaatsüsteemina. Hyperruumi võibki piltlikult ette kujutada aegruumi koordinaatsüsteemina, kuid mis eksisteerib „väljaspool“ meie tavalist aegruumi. Miski, mis on „väljaspool“, on midagi sootuks teistmoodi. Näiteks „väljaspool“ aegruumi ei ole enam olemas aega ega ruumi. Selles seisnebki füüsikaline põhjus, et miks hyperruumis ei ole enam aega ega ruumi ja miks hyperruumis „liikudes“ kehad teleportreeruvad. Kui liikuda „ajast ja ruumist välja“, siis seda aega ja ruumi enam ei eksisteeri. Ajas ongi võimalik rännata ainult siis, kui sellest „välja“ minna nagu tegelane „väljub“ filmist ja hakkab kerima filmilinti soovitud suunas.

Stringiteoorias eeldatakse, et aegruumi mõõtmeid on rohkem kui neli. See on stringiteooria üheks põhialuseks. Kuid ajas rändamise teooria korral on see hoopis vastupidi. Aegruumi mõõtmeid ei tule juurde, vaid need hoopis vähenevad ( ehk lakkavad eksisteerimast ). Ja seetõttu on tegemist stringiteooria „vastandteooriaga“. Näiteks mida lähemale rongi liikumise kiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aegleneb aeg rongis ja rongi pikkus lüheneb vaatleja jaoks, kes vaatleb rongi liikumist kõrvalt. Kuid rongi sees olevale vaatlejale liigub aeg tavapärase kiirusega ja rongi pikkus on sama, mis paigalseisteski. Kui rongis liigub välisvaatleja jaoks aeg lõpmatuseni ( ehk aeg on peatunud ehk aega enam ei ole ) ja rongi pikkus on kahanenud lõpmatuseni ( ehk kahanenud nulliks ), siis rongi sees olev vaatleja ja rongist väljas olev vaatleja ei saa olla enam

omavahel kontaktis. See tähendab sisuliselt seda, et igasuguse aja ja ruumi koos-teisenemise korral hakkab kontakt keha ja aegruumi vahel, milles keha eksisteerib, kaduma. Keha nagu „väljuks“ ajast ja ruumist. Ajas rändamise korral peab keha olema ju ajast väljas, et see saaks üldse liikuda ühest ajahetkest teise. See on üldse esimene füüsikaline tingimus sooritamaks tõelist aja rännakut.

#### **1.1.4 Universumi paisumine ja selle seos ajas rändamisega**

Ajas rändamise teooria järgi on igal ajahetkel oma kindel ruumipunkt. See tuleneb sellest, et aeg ja ruum on üksteisest lahutamatult seotud ning seetõttu peab inimene ajas rändamiseks liikuma ruumidimensioonis. Looduses avaldub see Universumi kosmoloogilise paisumisena, mille tõttu Universumi ruumala suureneb ajas. Selles seisnebki aja ja ruumi omavaheline seos ( ehk üksteise lahutamatus printsiip ): igal ajahetkel on Universumi ruumala erinev ehk mida suurem on Universum, seda kauem ta ka eksisteerib ajas. Ajas eksisteerimiseks peab Universum paisuma. Universumi paisumise tõttu muutuvad kõikide kehade ruumikoordinaadid ajas.

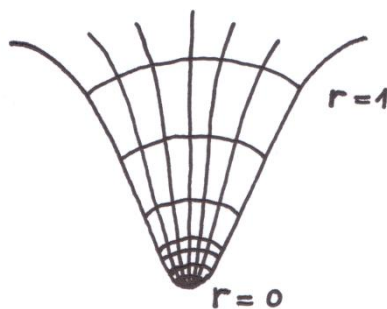
##### **1.1.4.1 Ajas liikumise avaldumine Universumis**

Universumi kosmoloogilise paisumise korral tekib küsimus, et kas Universum paisub inert-siaalselt või mitteinertsiaalselt. See on Universumi paisumise inertsiaalsuse küsimus, mis on absoluutselt fundamentaalse tähtsusega. Näiteks kuna Universumi ruum tervikuna paisub, siis klassikalise füüsika põhjuse ja tagajärje loogika arusaama järgi pidi selle põhjustajaks olema mingi algsündmus, mille tagajärjel hakkas kogu Universumi ruum tervikuna paisuma. Seda algpõhjust kujutatakse plahvatusena, mida nimetatakse Suureks Pauguks. Selle järgi paisub Universumi ruum inertsist ( peaaegu umbes nii nagu plahvatus tagajärjel lendavad killud inertsist ümbritsevasse ruumi laiali ), sest igasugusel liikumisel peab olema tekkepõhjus. Niimoodi tekitas Universumi paisumise sündmus, mida nimetatakse Suureks Pauguks. Kuid teine võimalus seisneb selles, et Universumi paisumise näol esinebki aja, ruumi ja liikumise omavaheline seos. See tähendab seda, et Universum ei paisu tegelikult inertsist ehk mingi algsündmuse tagajärjel, vaid aja, ruumi ja liikumise omavaheline fundamentaalne füüsikaline seos nähtubki just Universumi paisumise näol. Selle vaate järgi on Universumi paisumine mitteinertsiaalne, mis pealtnäha ei vasta klassikalise füüsika põhjuse ja tagajärje loogika arusaamale. Albert Einstein ühendas relatiivsusteoorias omavahel aja ja ruumi ühtseks aegruumiks. Aeg ja ruum on ühe kontiinumi kaks erinevat tahku. Kuid ajas rändamise teoorias ühendatakse aegruum ka liikumisega.

Kosmilise reliktkiirguse olemasolu avastamist peetakse Universumi Suure Pauku teooria empiiriliseks tõestuseks. Kuid lähtudes Universumi paisumise inertsiaalsuse probleemist, siis on siingi mitu tõlgendus võimalust. Universumi inertsiaalse paisumise järgi sai Universum ( materia, aeg ja ruum ) alguse sündmusest, mida me nimetame Suureks Pauguks. Universumi mitteinertsiaalse paisumise järgi ei tõesta reliktkiirgus mitte midagi muud kui ainult seda, et Universumi paisumisega on muutunud aine tihedus ja vastavalt sellele oli üliväikese Universumi korral ainetihedus lihtsalt ülisuur, mistõttu oli ka Universumi keskmine temperatuur väga suur. Selle

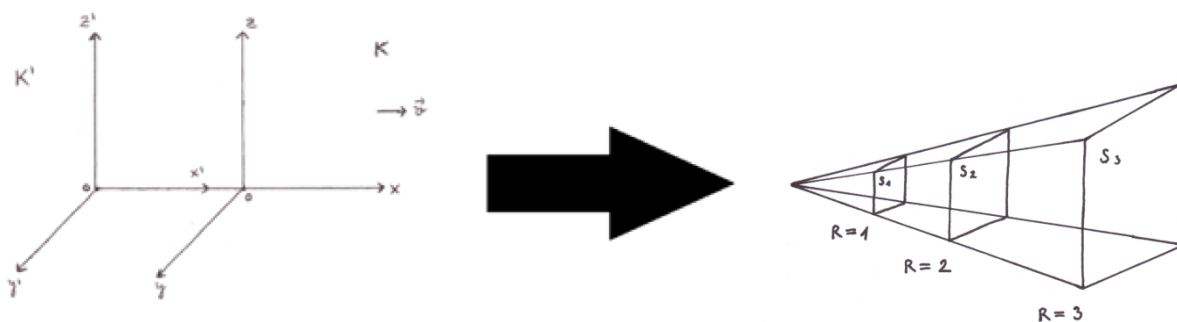
järgi mingit plahvatust ei olnud. Universumi tiheduse evolutsioon määras ära mateeria tekkimise ja selle seaduspärasused, kuid mitte aja ja ruumi füüsika. Väga väikese Universumi ruumala korral pidi olema Universumi ainetihedus samuti väga suur ja vastavalt sellele ka temperatuur ülikõrge.

Ajas rändamise füüsikateooria üheks põhialuseks on väide, et erinevatel ajahetkedel on samas ka erinevad ruumipunktid ehk ajas rändamiseks peab inimene liikuma ruumidimensioonis. See tähendab ka seda, et mida kaugemal ajas ( näiteks minevikus või tulevikus ) mingisugune sündmus aset leiab, seda kaugemal see ka ruumis toimub. Selline seaduspärasus avaldub looduses Universumi paisumisena. Näiteks kui Universum paisub ( s.t. Universumi ruumala suureneb ajas ), siis erinevatel ajahetkedel on Universumi ruumala ( ja seega kõikide kehade ruumikoordinaadid Universumis ) erinev. See on ilmselgelt seotud ajas rändamise teooria ühe alusväitega, mis ütleb, et erinevatel ajahetkedel on samas ka erinevad ruumipunktid. Universumi kosmoloogilist paisumist kujutatakse sageli ette just kera või õhupalli paisumisena ja sellisel juhul on väga selgesti näha seda, et kera pinnal oleva keha sfäärilised koordinaadid ( ehk ruumipunktid ) on erinevatel ajahetkedel erinevad. Sama on ka kera raadiuse pikkusega. Mida enam Universum paisub ( ehk mida suurem on see Universumi kujuteldav raadius  $r$  ), seda enam suureneb kahe punkti vaheline kaugus ruumis ( ehk  $ds$  suureneb ). Universumi ( meetriline ) paisumine avaldubki kahe punkti vahelise kauguse suurenemisel ruumis. Kuid arvestama peab seda, et  $ds$ -i suurenemine ilmneb alles väga suures ruumi mastaabis – näiteks galaktikate parvede ja superparvede tasandil.



Joonis 6 Universumi ruumala on erinevatel ajahetkedel erinev.

Kuna ajas rändamine on seotud Universumi kosmoloogilise paisumisega, siis seega ei kasuta me enam Cartesiuse ristkoordinaadistikku. Järgnevad esitused tulevad nüüd sfäärilistes koordinaatides. See tähendab seda, et minnakse üle Cartesiuse ristkoordinaadistikust sfäärilistesse koordinaatidesse. Seda illustreerivad meile ka allolevad joonised.



Joonis 7 Cartesiuse ristkoordinaadistikust sfäärilisse koordinaadistikku, sest ajas liikumine avaldub looduses Universumi paisumisena.



#### 1.1.4.2 Universumi meetriline paisumine ja selle kiirus

Universumi meetriline paisumine sarnaneb relatiivsusteoorias esinevate aja ja ruumi teisenemistega. Näiteks mida kiiremini keha liigub vaakumis ehk mida lähemale jõuab keha liikumiskiirus valguse kiirusele vaakumis, seda enam lüheneb keha pikkus ehk kahe ruumipunkti vaheline kaugus. Kahe ruumipunkti vaheline kaugus lüheneb ka siis, kui me läheneksime gravitatsiooni kui aegruumi kõveruse tsentrile. Analoogiliselt on nii ka Universumi paisumisega. Näiteks mida suuremat ruumimastaapi Universumis vaadelda, seda enam on näha Universumi paisumist ehk seda kiiremini kahe ruumipunkti vaheline kaugus suureneb. Kui Universum kollabeeruks (s.t. kokkuvariseks), siis näeksime selle asemel kahe ruumipunkti vahelise kauguse vähenemist ehk aja ja ruumi eksisteerimise lakkamist.

Kuid aeg ja ruum omavad Universumi paisumise korral absoluutset tähendust, mitte relativistlikku nagu me relatiivsusteoorias oleme harjunud käsitlema. Näiteks Universumi paisumisele alluvad absoluutselt kõik kehad Universumis ja seda samaaegselt. See ei sõltu vaatleja asukohast Universumis. Täpselt niisamuti on ka Universumi ajaga, mille tegelik kulg Universumis reedab meile Universumi paisumise kiirus.

#### 1.1.4.3 Hubble'i seadus

Galaktikate (parvede ja superparvede) eemaldumise kiirus  $v$  on võrdeline nende kaugusega  $l$  (või  $r$ ) järgmiselt:

$$v = Hr,$$

kus  $H$  on Hubble'i konstant. Seda tuntakse Hubble'i seadusena. Hubble konstandi sõltuvus ajast näitab seos:  $H \sim 1/t$ . Ruumist see aga ei sõltu. See tähendab seda, et Hubble'i konstant sõltub ainult ajast (mitte ruumist) ja ristkoordinaadistikus on see:

$$\frac{dv_x}{dt} = Hx, \frac{dv_y}{dt} = Hy, \frac{dv_z}{dt} = Hz.$$

Praegusajal antakse Hubble'i konstandi väärtus vahemikuna kauguste määranu ebakindluse tõttu järgmiselt:

$$H = (50 - 100) \text{ km} / (\text{s} * \text{Mpc})$$

Teades diferentsiaalvõrrandite matemaatika reegleid:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) * g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) * dx$$

saame Hubble'i valem

$$v = \frac{dr}{dt} = Hr$$

jagada  $r$ -ga ja korrutada  $dt$ -ga ning saame

$$\frac{dr}{r} = H(t)dt$$

Saadud võrrandi esimese poole integreerime  $r_0$ -st  $r$ -ni ja võrrandi teise poole  $t_0$ -st  $t$ -ni:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \int_{t_0}^t H(t)dt$$

Kuna diferentsiaalvõrrandite teooriast on teada seda, et

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

siis seega saame

$$\ln|r| - \ln|r_0| = \int_{t_0}^t H(t)dt$$

Võrrandi esimesel poolel tuleb võtta  $\ln$ :

$$\ln \frac{|r|}{|r_0|} = \int_{t_0}^t H(t)dt.$$

Teades aga seda, et

$$e^{\ln 2} = 2$$

saame lõppkokkuvõtteks järgmise seose

$$\frac{r}{r_0} = e^{\int_{t_0}^t H(t)dt}$$

ehk

$$r(t) = r_0 e^{\int_{t_0}^t H(t)dt}$$

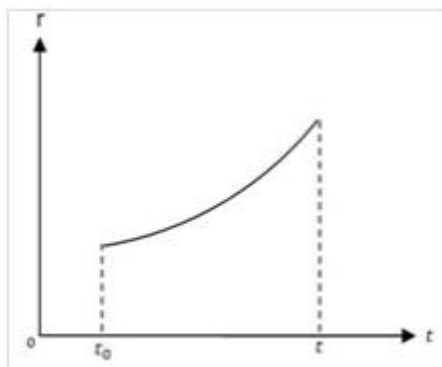
Oletame seda, et  $H(t) = H = \text{constant}$  mingisuguse lühikese ajaperioodi jooksul

$$t \in [t_0, t].$$

Järelikult saame

$$r(t) = r_0 e^{H(t-t_0)}$$

mis näitabki meile seda Hubble'i seadust antud kujul ja graafiliselt avaldub see aga järgmiselt:



Joonis 8 Mida kaugemale ilmaruumi näeme, seda kiiremini galaktika meist eemaldub.

Universumi paisumine avaldub ainult väga suures ruumimastaabis – näiteks galaktikate parvede ja superparvede mõõtkavas. See tähendab, et mida suurem on kahe ruumipunkti vaheline kaugus ( ehk mida kaugemal on üksteisest galaktikate parved ), seda kiiremini need üksteisest eemalduvad. Universumi ruumipunktide vahelised eemaldumiskiirused lähenevad nullile väga väikeses ruumimastaabis ( näiteks planeetide ja tähtede mõõtkavas ), kuid väga väga suures ruumimastaabis ( näiteks isegi suuremas ruumimõõtkavas kui galaktikate superparved ) lähenevad need aga juba valguse kiirusele vaakumis. Näiteks kui kahe ruumipunkti vaheline kaugus on 1 Mpc ehk 3,2 miljonit valgusaastat, siis nende eemaldumiskiirus on umbes 50...80 km/s. Kui aga nende vahekaugus on üks meeter, siis nende eemaldumiskiirus on  $2 \cdot 10^{-18}$  m/s, sest Hubble konstandi väärtus 50...80 (km/s)Mpc korral on SI-süsteemis  $2 \cdot 10^{-18}$  m/s ühe meetri kohta. See on umbes nagu planeedi Maa suurenemine ühe mikromeetri võrra aastas.

Väga väga suures ruumimastaabis ( näiteks isegi suuremas ruumimõõtkavas kui galaktikate superparved ) läheneb Universumi paisumiskiirus valguse kiirusele vaakumis. Kui valemis  $v_r = cz$  on  $z > 1$ , siis galaktikate eemaldumiskiirus  $v_r$  on suurem valguse kiirusest vaakumis. Sellisel juhul peame kasutama relatiivsusteooriat, et leida lainepikkuse muutust ehk spektrijoone nihet valguse kiirusele lähedaste suhteliste kiiruste korral. Lainet kirjeldav üldine võrrand on aga järgmine:

$$E(x, t) = E_0 \sin \omega_0 \left( t + \frac{x}{c} \right),$$

milles  $\omega = 2\pi f$  on nn. ringsagedus ja sagedus ise on  $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ , milles  $\lambda_0$  on lainepikkus. Oletame seda, et valgusallikas eemaldub meist valguse kiirusele  $c$  lähedase kiirusega. Kuna valguse kiirusele  $c$  lähedase kiirusega liikumise korral teisenevad aeg ja ruum, siis seega peame kasutama Lorentzi teisenduse valemiteid:

$$x' = \gamma(x + vt)$$

ja

$$t' = \gamma \left( t + \frac{v}{c^2} x \right).$$

Vastavalt Lorentzi teisendusvalemitele teiseneb lainevõrrandi liige  $\left( t + \frac{x}{c} \right)$  järgmiselt:

$$t' + \frac{x'}{c} = \gamma \left( t + \frac{v}{c^2} x + \frac{x + vt}{c} \right) = \gamma \left( t + \frac{v}{c^2} x + \frac{x}{c} + \frac{vt}{c} \right) = \gamma \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \left( t + \frac{x}{c} \right).$$

$\gamma$  on kinemaatiline tegur:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja seetõttu saame viimast võrrandit teisendada järgmiselt:

$$t' + \frac{x'}{c} = \left( \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \left( t + \frac{x}{c} \right).$$

Avaldise  $1 + \frac{v}{c}$  kirjutame ümber  $\sqrt{\left( 1 + \frac{v}{c} \right)^2}$  ja liikme  $1 - \frac{v^2}{c^2}$  avaldame nõnda:

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Lõpuks saame teha järgmised matemaatilised teisendused:

$$\begin{aligned} t' + \frac{x'}{c} &= \left( \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)}} \right) \left(t + \frac{x}{c}\right) = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right)}} \left(t + \frac{x}{c}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \left(t + \frac{x}{c}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \left(t + \frac{x}{c}\right). \end{aligned}$$

Lainevõrrand peab kehtima ka süsteemis, milles eksisteerib vaatleja, ja seetõttu peab sagedus muutuma järgmiselt:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \omega_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}.$$

Laine sagedus väheneb ehk lainepikkus suureneb, kui valgusallikas meist ehk vaatlejast eemaldub:

$$\frac{v}{c} = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1}$$

ja

$$z = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} - 1.$$

See oli punanihke  $z$  sõltuvus eemaldumiskiirusest  $v$  relativistlikul kujul ehk  $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} > 1$  korral. Mitterelativistlikul juhul on need valemid aga järgmised:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

ja

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Kui me kasutame selliseid Lorentzi teisendusi

$$x' = \gamma(x + vt)$$

ja

$$t' = \gamma\left(t + \frac{v}{c^2}x\right),$$

siis sagedus muutub järgmiselt

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}.$$

Kui aga Lorentzi teisendused on

$$x' = \gamma(x - vt)$$

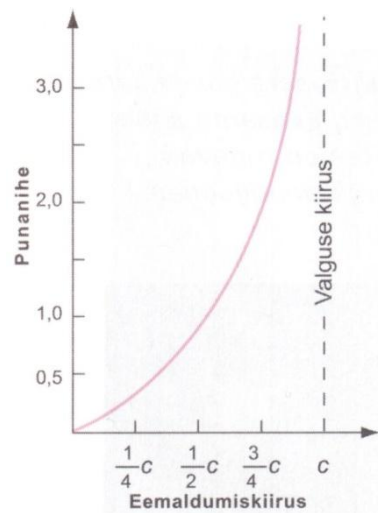
ja

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

siis sagedus muutub nõnda:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

Punanihke  $z$  sõltuvus eemaldumiskiirusest  $v$  relativistlikul kujul on graafiliselt esitatav järgmiselt:



Allikas: „Kosmoloogia, Füüsika XII klassile“, Jaak Jaaniste, Kirjastus: „Koolibri“, Tallinn 1999.

Universumi kosmoloogiline paisumine tekitab sellist nähtust, mida füüsikas nimetatakse „kosmoloogiliseks punanihkeks“. Näiteks tuntud Doppler'i efekt:

$$\omega_1 - \omega = -\omega \frac{v}{c}$$

ehk

$$\omega_1 = \omega - \omega \frac{v}{c} = \omega + d\omega$$

põhjustab vaatleja footonil väiksemat sagedust kui seda on väljakiiratud footonil.  $\omega_1$  on registreeritud footoni sagedus. Galaktikate vahelises ruumis mõjutab valguse kiirusega  $c$

$$\frac{1}{c} = \frac{dt}{dl}$$

liikuvat footonit Hubble'i seadus:

$$v = H(t)dl = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}dl$$

ja seetõttu tuleb Doppler'i efekti võrrand kujul:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}dt$$

Viimasest avaldisest saame omakorda aja momendil  $t$  registreeritud footoni sageduse:

$$\omega(t) = \frac{\omega(t_0)a(t_0)}{a(t)}$$

mis on kvantfüüsikas väljendatav ka de Broglie lainepikkuse kaudu:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(t_0)a(t)}{a(t_0)}$$

Selle järgi saame footoni energia valemiks:

$$E = h\omega = h \frac{\omega(t_0)a(t_0)}{a(t)}$$

Viimane avaldis tähendab seda, et kosmoloogiline punanihe vähendab Universumi paisumise tõttu iga üksiku footoni energiat. Universumi paisumise tõttu suureneb mistahes elementaariosakese de Broglie lainepikkus ja väheneb nende impulss.

## 1.2 Kolmas relatiivsusteooria ehk kosmorelatiivsusteooria füüsikalised alused

Eirelatiivsusteooria käsitles inertsiaalseid ehk liikuvaid taustsüsteeme, mille korral liikuvates taustsüsteemides teisevad aeg ja ruum välisvaatleja suhtes. Üldrelatiivsusteooria käsitleb mitteinertsiaalseid taustsüsteeme, mille korral teisevad aeg ja ruum gravitatsiooniväljades. Selle järgi on gravitatsioon aegruumi kõverdus, mille põhjustab keha mass. Need kaks relatiivsusteooriat formuleeris Albert Einstein 20. sajandi alguses. Need kirjeldavad aja ja ruumi teisenemisi erinevates taustsüsteemides. Kuid peale nende kahe on olemas veel kolmaski relatiivsusteooria liik. Kolmas relatiivsusteooria kirjeldab samuti aja ja ruumi teisenemisi nii nagu kaks esimest relatiivsusteooriat, kuid ainus vahe seisneb selles, et taustsüsteemide asemel on käsitletud nüüd kogu Universumit ehk käsitletakse Universumit kui ühte tervikut. Selle järgi on kogu meie paisuv Universum nagu üks hiigel suur taustsüsteem, mis sisaldab endas lõpmatu hulk väiksemaid taustsüsteeme. Kuna kirjeldatakse ja käsitletakse paisuvat Universumit ühe tervikuna, siis see kolmas relatiivsusteooria liik (nn „kosmorelatiivsusteooria“) on tänapäeva Universumi kosmoloogia põhiõpetuseks ajas rändamise füüsikateoorias.

Hubble'i seadusest järeldub Universumi paisumine, mille korral galaktikaparvede kaugused suurenevad üksteisest:

$$\vec{v} = H\vec{r}$$

Hubble'i konstant  $H(t)$  sõltub ainult ajast. Galaktikas A asuv vaatleja näeks, et Hubble'i seaduse järgi liiguksid galaktikad B ja C järgmiselt:

$$\vec{v}_{AB} = H\vec{r}_{AB}$$

$$\vec{v}_{AC} = H\vec{r}_{AC}$$

Galaktika C liikumiskiirus paistaks galaktikas B asuvale vaatlejale:

$$\vec{v}_{BC} = \vec{v}_{AC} - \vec{v}_{AB}$$

Eelneva põhjal saame:

$$\vec{v}_{BC} = H\vec{r}_{AC} - H\vec{r}_{AB} = H(\vec{r}_{AC} - \vec{r}_{AB})$$

Galaktikas B asuva vaatleja suhtes on vektor

$$\vec{r}_{AC} - \vec{r}_{AB} = \vec{r}_{BC}$$

galaktika C kohavektor. Selle järgi saab öelda, et galaktika C eemaldub galaktikast B vastavalt Hubble'i seadusele. Sellest järeldub, et Hubble'i seadus kehtib igas galaktikas asuva vaatleja jaoks.

Kogu meie paisuv Universum on nagu üks hiigel suur taustsüsteem, milles esineb üleüldine aja ja ruumi teisenemine. Selles hiigel suures taustsüsteemis ( mis on Universumi suurune ) eksisteerivad lõputu hulk väiksemaid taustsüsteeme nagu näiteks liikuvad ehk inertsiaalsed taustsüsteemid ( milles avalduvad erirelatiivsusteooria seaduspärasused ) ja mitteinertsiaalsed taustsüsteemid ehk gravitatsiooniväljad ( milles avalduvad üldrelatiivsusteooria seaduspärasused ).

Relatiivsusteoorias on aeg ja ruum suhtelised ehk relatiivsed nähtused. Kuid kosmoloogias on aeg ja ruum pigem absoluutsed nähtused. Näiteks Universumi vanus ehk eluiga on absoluutse aja mõiste ja Universumi ruumala ehk selle läbimõõt ( s.t. suurus ) on absoluutse ruumi mõiste. Kolmandas relatiivsusteoorias asendub „relatiivsus“ absoluutse mõistega, sest näiteks galaktikate punanihet näeksime ükskõik millises teises galaktikas. Universumi paisumine ei ole enam relatiivne, vaid pigem absoluutne, millele alluvad kõik kehad ja nähtused Universumis.

### 1.2.1 Aeg:

Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale kulgevad sündmused ja protsessid kogu meie Universumis normaalset jada pidi ja Universumi paisumiskiirus on palju kordi aeglasem valguse kiirusest vaakumis, mille kulg „ajas“ kiireneb ( Universumi paisumise kiirus on 73,2 km/s Mpc ehk 3,26 miljoni valgusaasta kohta ). Siinkohal jätame arvestamata aja ja ruumi teisenemised spetsiifilistes taustsüsteemides ( mida kirjeldavad vastavalt eri- ja üldrelatiivsusteooria võrrandid ), milles reaalne vaatleja võib ise eksisteerida või eemalt vaadelda. Selle asemel keskendume Universumile kui tervikule, milles kulgevad peaaegu lõutu hulk erinevaid sündmusi ja protsesse. Kuid Universumist väljapool olevale „hüpoteetilisele“ vaatlejale tundub, et Universumis toimuvad sündmused ja protsessid kulgevad tegelikult palju kordi kiiremini ( niisamuti ka Universumi paisumine ) nii nagu oleks film pandud edasikerimispupu peale, kuid samas selle kulg aegleneb. See tähendab nüüd seda, et Universumi sees olev reaalne vaatleja eksisteerib tegelikult ajas, mille kulg on tegelikkusest palju kordi aeglasem ehk kogu Universumis toimub eksisteerimine aegluubis. Sellist asjaolu reedab meile kui Universumi sees eksisteerivatele reaalsetele vaatlejatele Universumi paisumiskiirus, mis on palju kordi aeglasem valguse kiirusest vaakumis ja mis „ajas“ kiireneb.

Kõike eelnevat on võimalik piltlikult väljendada palju lihtsamalt. Näiteks meile võib tunduda, et Universum on 13,7 miljardit aastat vana, kuid tegelikult võib selle vanuseks olla kõigest üks sekund. See tähendab seda, et kogu meie Universumi eksisteerimise ajaperiood ( milleks on praegu 13,7 miljardit aastat ) on tegelikult „välja veninud“ ühe sekundi pikkusest aja perioodist, mis oleks Universumi tegelikuks vanuseks praegusel ajahetkel.

Oluline on märkida seda, et kui vaatleja eksisteerib süsteemis, milles esineb aja teisenemine, siis ei ole see vaatlejale otseselt tajutav. Aja teisenemist on otseselt tajutav ainult siis, kui vaatleja asub sellest süsteemist väljapool ja vaatleb kõrvalt seda süsteemi, milles esineb aja teisenemine. Selles

mõttes jääb vaatleja „omaaeg“ alati ühesuguseks sõltumata sellest, milline on parajasti aja teisenemine. Vaatleja omaaeg on tegelikult illusioon, mis ei pruugi näidata süsteemis olevale vaatlejale tegelikku aja kulgemist.

Y suurus näitab seda, et mitu korda on aeg aeglenenud Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale või mitu korda on aeg kiirenenud Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale. Universumi kosmoloogiline evolutsioon näitab, et mida kaugemale ajas tagasi vaadata, seda suurem oli y väärtus ja mida aeg edasi, seda väiksem on y väärtus. Y väärtus muutub ajas väiksemaks, mille tulemusena Universumi paisumiskiirus Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale suureneb. Universumi paisumise algmomendi juures oli y väärtus lõpmata suur, kuid väga väga kauges tulevikus läheneb y väärtus ühele.

### 1.2.2 Ruum:

Vastavalt relatiivsusteoorias tuntud aja ja ruumi lahutamatus printsiibile peab aja teisenemisega kaasnema ka ruumi teisenemine. See tähendab seda, et aeg ja ruum teisevad alati koos.

Tavaruumis ehk Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale tundub, et Universum tervikuna paisub, kuna selle aine-energia tihedus ajas muutub väiksemaks ehk galaktikate parved eemalduvad üksteisest seda kiiremini, mida kaugemal nad ruumis üksteisest on. Sellejuures kehade enda mõõtmed ajas ei muutu ja Universum ehk tavaruum võib olla ka lõpmatu ulatusega. See on teaduslik fakt, mida on saadud astronoomilistest vaatlustest. Kuid Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale on asjaolud aga hoopis teistmoodi. Temale näib Universum olevat „palju kordi suurem“, sealhulgas ka kehade enda mõõtmed on palju suuremad ja Universum mitte ei paisu, vaid tõmbub hoopis kokku ( s.t. Universum hoopis kahaneb ). Tavaruumis ehk Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale midagi sellist täheldada ei ole. Temale on kehade mõõtmed ajas muutumatud, muutuvad suuremaks ainult kehade vahelised kaugused väga suures ruumimastaabis. Sellest järeldatakse, et Universum tervikuna paisub ehkki selle ruumala võib olla ka lõpmata suur.

Eelnevat materjali on vaja pikemalt lahti seletada. Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale tunduvad Universumis toimuvad sündmused ja protsessid kulgevad palju kordi kiiremini kui Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale. Sealhulgas ka Universumi paisumine on palju kiirem, mille kulg aegleneb. Aja kiirenemine on aja dilatatsiooni ehk aja aeglenemise vastupidine nähtus. Relatiivsusteoorias tuntud aja ja ruumi lahutamatus printsiibi järgi kaasneb aja dilatatsiooniga ka ruumi kontraktsioon ehk kehade pikkuste lühenemise nähtus. Kuna aja kiirenemine on aja dilatatsiooni vastand nähtus, siis peab kaasnema sellega ka kehade pikkuste pikenemine, mitte enam lühenemine ehk kontraktsioon. Kuna Universum paisub tervikuna ( avaldudes kõikides ruumidimensioonides ), siis ruumi kontraktsiooni vastand nähtus peab avalduma samuti kolmemõõtmelisena, mitte enam ühemõõtmelisena nagu me relatiivsusteoorias oleme harjunud nägema. Tulemuseks ongi kehade ja nende vahekauguste suuremad mõõtmed, mille läbi on ka Universum palju suurem.

Kahes esimeses relatiivsusteoorias avaldub ruumi teisenemine ainult ühes ruumidimensioonis. Näiteks rongi pikkus lüheneb välisvaatleja suhtes, kui selle kiirus läheneb valguse kiirusele vaakumis. Kuid kolmandas relatiivsusteoorias avaldub ruumi teisenemine kõigis kolmes ruumidimensioonis korraga, sest Universum paisub kõikjal tervikuna. Universumi paisumisel ei ole olemas tsentrit ega mingit eelistatud suunda. Kõikjal paisub Universumi ruum korraga.

Piltlikult ehk lihtsustatult väljendades paisub kogu meie Universum tegelikult nii, et kõikide kehade vahekaugused ja ka nende kehade enda mõõtmed ajas korraga suurenevad. Näiteks inimene võis viis minutit tagasi olla palju kordi väiksemate ruumimõõtmetega kui praegusel ajahetkel. Selline Universumi paisumine erineb radikaalselt sellest, mida näeb Universumi sees olev reaalne



vaatleja.

Kõike eelnevat on võimalik piltlikult väljendada palju lihtsamalt. Näiteks meile võib tunduda, et Universum on umbes 100 miljardi valgusaastase läbimõõduga (põhimõtteliselt võib Universum olla ka lõpmatult suur), kuid tegelikult võib selle läbimõõt olla hoopis 10 astmes 100 miljardit valgusaastat. See tähendab seda, et kogu meie eksisteeriva Universumi ruum (mis võib praegu olla umbes 100 miljardi valgusaastase läbimõõduga) on tegelikult kontrakteenud ehk „kokkutõmbunud“ 10 astmes 100 miljardi valgusaastase läbimõõduga ruumist, mis oleks Universumi tegelikult ruumiliseks ulatuseks praegusel ajahetkel.

Oluline on märkida seda, et kui vaatleja eksisteerib süsteemis, milles esineb ruumi teisenemine, siis ei ole see vaatlejale otseselt tajutav. Ruumi teisenemist on otseselt tajutav ainult siis, kui vaatleja asub sellest süsteemist väljapool ja vaatleb kõrvalt seda süsteemi, milles esineb ruumi teisenemine. Selles mõttes jääb vaatleja „omaruum“ alati ühesuguseks sõltumata sellest, milline on parajasti ruumi teisenemine. Vaatleja „omaruum“ on tegelikult illusioon, mis ei pruugi näidata süsteemis olevale vaatlejale tegelikku ruumi mõõtmeid.

Y suurus näitab seda, et mitu korda on ruum kontrakteenud Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale või mitu korda on ruum välja veninud Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale. Universumi kosmoloogiline evolutsioon näitab, et mida kaugemale ajas tagasi vaadata, seda suurem oli y väärtus ja mida aeg edasi, seda väiksem on y väärtus. Y väärtus muutub ajas väiksemaks, mille tulemusena Universumi ruumala Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale suureneb. Universumi paisumise algmomendi juures oli y väärtus lõpmata suur, kuid väga väga kauges tulevikus läheneb y väärtus ühele.

### 1.2.3 Gravitatsioon:

Tekib küsimus, et kui Universumi üleüldist aja ja ruumi teisenemist ei ole põhimõtteliselt võimalik Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale otseselt tajuda, siis miks me näeme ikkagi Universumi paisumist, mis avaldub galaktiliste süsteemide üksteisest eemaldumisel? Universumi sees olev reaalne vaatleja näeb galaktikate punanihet, mida on võimalik füüsikaliselt tõlgendada Universumi paisumisena. Näiteks kaugete galaktikate spektrijoonte lainepikkus  $\lambda$  on lähedastega võrreldes pisut suurem. See punanihe ehk lainepikkuste vahe on võrdeline galaktikate kaugusega. Punanihkst  $z$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

on võimalik välja arvutada galaktikate eemaldumiskiiruse  $v$  ja ka nende kauguse  $s$ :

$$v = cz = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

ja

$$s = \frac{v}{H_0} = \frac{c}{H_0} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

milles  $H_0$  on Hubble konstant. Asi on selles, et gravitatsioon on aegruumi kõverdus, mis seisneb gravitatsioonilises aja dilatatsioonis ja ruumi kontraktsioonis. See tähendab, et kehade mass mõjutab aja kulgemist ja Eukleidilise 3-mõõtmelise ruumi geomeetriat. Masside poolt tekitatud aegruumi kõverdused ja Universumi üleüldine aegruumi teisenemine lähevad omavahel interaktsiooni. Kui masside poolt tekitatud aegruumi kõverus seisneb aja dilatatsioonis ja ruumi

kontraktsioonis, siis Universumi üleüldine aegeuumi teisendus seisneb vastupidises ehk aja ja ruumi tekkimises. Sellest tulenevalt „tasandab“ Universumi aja ja ruumi üleüldine teisenemine Universumis eksisteerivaid aegeuumi kõverusi. See tähendab seda, et Universumi üleüldine aja ja ruumi teisenemine „töötav vastu“ masside poolt tekitatud aegeuumi kõverdustele. Selle füüsikaliseks väljundiks ongi masside üksteisest eemaldumine ehk „tõukumine“. Seetõttu mõjubki Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale inertsiaalne jõud  $F_{in}$ :

$$F_{in} = ml\dot{H} = ml\left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2\right)$$

milles

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2}$$

$l$  on vaatleja kaugus mingist struktuurist ( mille mass on  $m$  ) ja  $H$  on Hubble' konstant. Alguse saab see väga suures ruumimastaabis, sest siis on gravitatsioon väga nõrk ehk aegeuumi kõverdus väga väike. Aja jooksul läheneb selline tõukumine kõikide kehade gravitatsiooni tsentritele Universumis. Seda nähtust oleme seni mõistnud „tume energiana“.

Eespool välja toodud inertsiaalne jõud  $F_{in}$  on tingitud Universumi kosmoloogilisest paisumisest. Seda kirjeldav valem tuletatakse kosmoloogias lühidalt järgnevalt. Näiteks tuntud Hubble'i seadus väljendub teatavasti järgmiselt:

$$v = HR$$

ehk

$$v = Hl$$

milles  $l = R$ . Kui me korrutame viimases võrrandis mõlemad pooled massiga  $m$ , siis saame impulsi  $p$  definitsiooniks:

$$mv = p = mlH$$

Järgnevalt jagame saadud võrrandi mõlemad pooled ajaga  $t$ , tulemuseks saamegi inertsiaalse jõu  $F_{in}$ , mis on tingitud Universumi paisumisest:

$$\frac{p}{t} = \frac{mv}{t} = m\frac{v}{t} = ma = F_{in} = \frac{mlH}{t} = ml\frac{H}{t}$$

Kosmoloogias tõestatakse seos, mis kirjeldab Hubble'i konstandi  $H$  sõltuvust ajast:

$$\frac{H}{t} = \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

ja seetõttu saame inertsiaalse jõu valemi kujuks:

$$F_{in} = ml\dot{H}$$

ehk

$$F_{in} = ml\left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2\right)$$

Kosmoloogias tõestatakse ära ka järgmine seos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2}$$

ja seetõttu saame inertsiaalse jõu  $F_{in}$  valemi välja kirjutada ka järgmiselt:

$$F_{in} = ml \left( -\frac{H^2}{2} - H^2 \right)$$

Viimases võrrandis on  $H$  Universumi paisumiskiirus,  $m$  keha või galaktika mass ja  $l$  kehade või galaktikate vaheline kaugus.

Kui vaateleja eksisteerib süsteemis, milles esinevad aja ja ruumi teisenemised, siis ei ole see vaatelejale otseselt tajutav. Aja ja ruumi teisenemist on otseselt tajutav ainult siis, kui vaateleja asub sellest süsteemist väljapool ja vaatleb kõrvalt seda süsteemi, milles esinevad aja ja ruumi teisenemised. Selles mõttes jäävad vaateleja omaaeg ja omapikkus alati ühesugusteks sõltumata sellest, millised on parajasti aja ja ruumi teisenemised. Vaateleja omaaeg ja omapikkus on tegelikult illusioon, mis ei pruugi näidata süsteemis olevale vaatelejale tegelikku aja kulgemist ja tegelikke kehade ruumalasid. Süsteemi enda aja ja ruumi teisenemised avalduvad süsteemis olevale vaatelejale ainult siis, kui selles samas süsteemis eksisteerib peale vaateleja ka gravitatsiooniväli ehk aegruumi kõverdus, mille võib tekitada näiteks musta augu mass. Sellisel juhul avalduvad süsteemis esinevad aja ja ruumi teisenemised süsteemis olevale vaatelejale musta augu poolt tekitatud aegruumi kõveruse muutumises, mille korral gravitatsiooniline tõmbejõud asendub aja jooksul tõukejõuga ehk aegruumi kõverus muutub tasasemaks. Selline nähtus saab toimuda ainult siis, kui süsteemis endas on aeg ja ruum teisenenud väga suurel määral. Kuna musta augu mass mõjutab aja kulgemist ja eukleidilise 3-mõõtmelise ruumi meetrikat, siis süsteemi üldine aja ja ruumi teisenemine mõjutabki süsteemis endas eksisteeriva musta augu poolt tekitatud aegruumi kõverust, töötades selle kõveruse vastu.

Gravitatsioon on aegruumi kõverdus, mis seisneb aja dilatatsioonis ja ruumi kontraktsioonis. See tähendab seda, et gravitatsiooni tsentrile lähenedes aeg aegleneb ja ruumipunktide vahelised kaugused vähenevad (s.t. ruum kontrakteerub) välisvaateleja suhtes. Keha mass mõjutab aja kulgemist ja 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi meetrikat. Meetrika uurib kahe ruumipunkti vahelist kaugust ds. Gravitatsiooni tsentris on aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni. See tähendab, et aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast teatud kaugusel gravitatsiooni tsentrist. Seda võib põhimõtteliselt tõlgendada ka Universumi „äärena“, kus lõpeb Universumi eksisteerimine. Aja ja ruumi eksisteerimise lakkamise korral lakkab olemast ka kõik see, mis eksisteerib ajas ja ruumis. Ajas ja ruumis eksisteerib kogu meie Universum. Sellist „kohta“, kus lõpeb aeg ja ruum, võib mõista Universumi „äärena“. Näiteks musta augu Schwarzschildi pind on kui Universumi äär. Kuna gravitatsiooni tsentreid on umbes sama palju kui Universumis taevakehasid, siis on ka Universumi ääri põhimõtteliselt sama palju.

Universumi sees ja väljas olevaid vaateleid võib põhimõtteliselt mõista kui aegruumi sees ja väljas olevaid vaateleid. Aegruumist väljas olev vaateleja võib olla näiteks ajarändur, kes võib rännata ajas minevikku ja tulevikku.

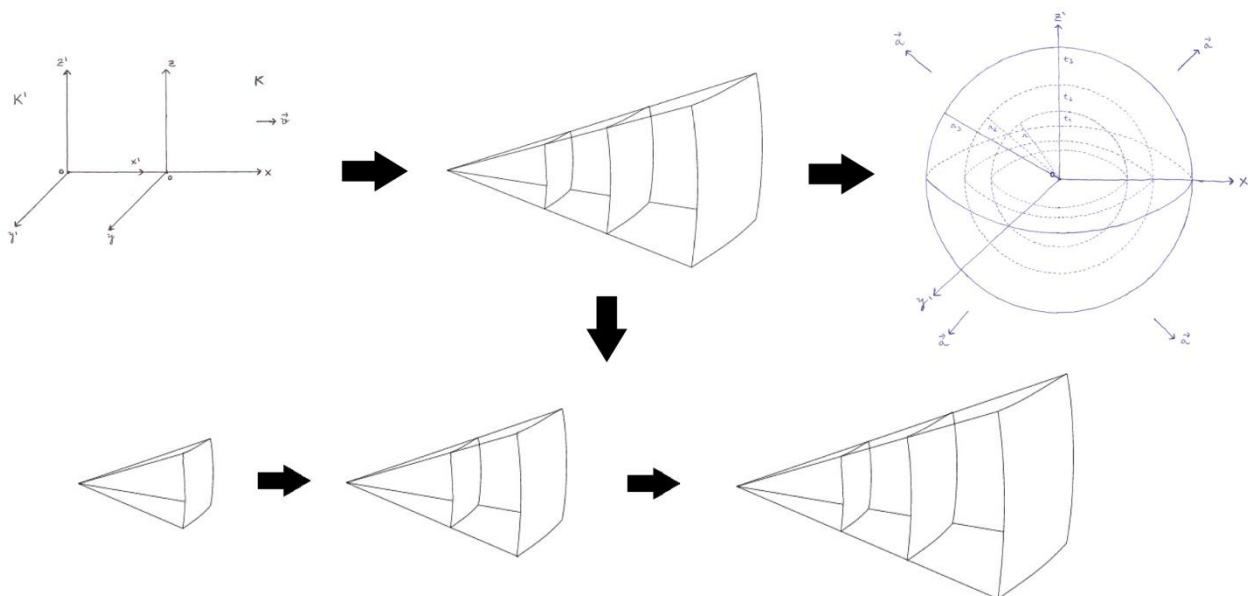
Eelnevalt oli kirja pandud ja esitletud Universumi üleüldise aja ja ruumi teisenemise ning Universumis esinevate aegruumi kõveruste omavahelise interaktsiooni füüsikaline konseptsioon, millest järeldub, et Universumi sees olevale reaalsele vaatelejale näiv Universumi paisumine ei olegi tegelikult päris õige paisumine, vaid meile nähtav Universumi paisumine on tegelikult kõrgema aja ja ruumi teisenemise füüsika avaldumisvorm. Ainult nii on võimalik seletada, et miks meile nähtav Universum ei paisu valguse kiirusega  $c$  ja miks esineb Universumis „tume energia“ ehk Universumi kiirenev paisumine. Järgnevalt esitame selle füüsika konseptsiooni matemaatilise analüüsi.

#### 1.2.4 Matemaatiline analüüs

Universumi paisumise korral esinevad tegelikult kaks aja vormi. Esiteks see, et üks etendab Universumi eluiga ( ehk Universumi enda eksisteerimise kestvust ) ja teiseks on see, et aeg esineb ka Universumi paisumiskiirusel ( ehk kui kiiresti Universum paisub ). Nende kahe aja vahel on olemas ka üks füüsikaline seos – nimelt mida kauem Universum eksisteerib ( ehk mida enam pikeneb Universumi eluiga ), seda enam kiiremini Universum paisub ( ehk Universumi paisumine kiireneb ).

Ajas rändamise teooria üheks põhialuseks on väide, et erinevad ajahetked on samas ka erinevad ruumpunktid. Selline seaduspärasus avaldub looduses Universumi paisumisena. Näiteks kui Universum paisub ( s.t. Universumi ruumala suureneb ajas ), siis erinevatel (kosmoloogilistel) ajahetkedel on Universumi ruumala erinev ja seega on erinevad ka Universumi ruumpunktide koordinaadid. Universumi paisumist kujutatakse sageli ette just kera või õhupalli paisumisena. Siis on väga selgesti näha seda, et kera sfäärilised koordinaadid ( ehk ruumpunktide koordinaadid ) ja kera raadius on erinevatel ajahetkedel erinevad.

Olgu meil Universumi paisumise mudeliks kera paisumine, mis ei pöörle. Sellisel juhul on kolmemõõtmelise kera kahemõõtmeline pind meie kolmemõõtmelise Universumi kolmemõõtmeline versioon. Kera paisub ja mööda kera pinda ehk kera pinnal liigub keha m. Keha liigub alati risti kera raadiusega. Lihtsuse mõttes liigub keha mööda kera ringjoont, mille pikkus on  $2\pi R$ . Kera paisumine illustreerib Universumi paisumist, kuid keha m liikumine kera pinnal aga sündmuste ja protsesside kulgemist Universumis. Mitte miski ei saa liikuda valgusest kiiremini. Valguse liikumiskiirus vaakumis ja kera paisumiskiirus on mõlemad võrdsed  $c$ -ga. Mida lähemale jõuab keha liikumiskiirus valguse kiirusele  $c$  ehk kera paisumiskiirusele, seda aeglasemini liigub keha m paisuva kera pinna suhtes. See illustreerib sündmuste ja protsesside aeglenemist Universumis. Kui kera paisumise kiirus ja keha liikumiskiirus kera pinnal omavahel ühtivad, siis keha m ei liigu enam üldse ja seega aeg on peatunud. Tuleb veelkord märkida seda, et kera paisub, mitte ei pöörle.



*Joonis 1 Tavaruumi K ja hyperruumi K' füüsikaline süsteem avaldub looduses Universumi kosmoloogilise paisumisena.*

Kuna keha m liigub alati risti kera raadiusega ja samas ka alati kera paisumisega kaasa, siis keha liikumist paisuva kera pinnal saab kirjeldada Pythagorase teoreemiga järgmiselt:

$$d^2 = l^2 + (vt)^2$$

ehk

$$d = \sqrt{(ct + vt')^2 + (vt')^2}$$

milles  $c$  on kera paisumise kiirus ( mis ühtib valguse kiirusega vaakumis ),  $d$  on keha  $m$  liikumisest ja kera paisumisest tingitud (resultant)teepikkus,  $vt'$  on ainult keha liikumisest tingitud teepikkus,  $ct$  on kera paisumisest tingitud teepikkus,  $l = ct + vt'$  on keha  $m$  teepikkus paisuva kera pinnal arvestades samas ka kera paisumisest tingitud teepikkuse juurdekasvu ehk  $ct$ ,  $t$  ja  $t'$  on erinevad ajahetked ehk vastavalt kera mittepaisuva ja paisuva oleku ajahetked. Mitte miski ei saa liikuda valgusest kiiremini ehk kera paisumisest kiiremini ja seega  $d = ct'$ , mis tähendab seda, et teepikkuse  $d$  pidi keha  $m$  läbima kiirusega  $c$  ( mitte sellest suurema kiirusega ).

Järgnevalt teeme terve rida matemaatilisi teisendusi, et saada lõplik võrrand, mis kirjeldab antud süsteemi matemaatiliselt. Kuna  $d = ct'$ , siis avaldame Pythagorase teoreemist kera paisumise kiiruse  $c$  järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{l^2 + (vt')^2}}{t'} = c,$$

$l$  on keha  $m$  teepikkus paisuva kera pinnal arvestades samas ka kera paisumisest tingitud teepikkuse juurdekasvu ehk  $ct$ :

$$l = ct + vt'$$

ja seega saame viimase võrrandi lahti kirjutada järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{(ct + vt')^2 + (vt')^2}}{t'} = c$$

Viime  $t'$  võrrandi teisele poole, tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu ja kirjutame lahti ruutvõrrandi avaldise:

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 + (vt')^2 = (ct')^2$$

Viime ühe liikme  $(vt')^2$  teisele poole ja saame

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 = (ct')^2 - (vt')^2$$

ehk

$$(ct')^2 - (vt')^2 = (c^2 - v^2)t'^2,$$

jagame viimase saadud võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga:

$$\frac{(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2}{c^2} = \frac{(c^2 - v^2)t'^2}{c^2}$$

ehk

$$\frac{(c^2 - v^2)t'^2}{c^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} t'^2$$

ehk

$$\frac{c^2 - v^2}{c^2} t'^2 = \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right] t'^2.$$

Kuna kehtib ruutvõrrandi matemaatiline seos

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 = (ct + vt')^2,$$

siis saame viimase võrrandi kujuks järgmise avaldise:

$$(ct + vt')^2 = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] t'^2 c^2$$

ehk võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla viies:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c.$$

Viimane avaldis ongi meie otsitav lõplik võrrand, mis kirjeldab antud füüsikalist süsteemi. Tegemist on tegelikult üldvõrrandiga, millest on võimalik tuletada terve rida väga tähtsaid fundamentaal-füüsikalisi- ja matemaatilisi seoseid ja järeldusi. Võib ka nii öelda, et tegemist on ühe põhivõrrandiga, mille järeldused on heas kooskõlas ajas rändamise teooria aluspõhimõtetega. Neid järeldusi on relatiivsusteooria ja kvantmehaanika osas põhjalikumalt uuritud ja analüüsitud.

Kuid järgnevalt teeme sellegipoolest ühe väikese matemaatilise analüüsi, mis muidu on esitatud eri- ja üldrelatiivsusteooria osas. See on vajalik selleks, et jõuda lõpuks mõistmiseni Universumi paisumise kinemaatikas. Näiteks eelnevalt matemaatiliselt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandis

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

võrdus selles olev liige järgmiselt:

$$ct + vt' = l$$

Niimoodi saadud võrrandil:

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

ehk

$$l = ct' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on ainult neli võimalikku täpset lahendit. Näiteks kui:

$$l = vt'$$

siis saame vastavalt

$$vt' = ct' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ehk

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Kuid sellist valemit analüüsime edaspidi palju põhjalikumalt. Kui aga  $l = ct'$ , siis saame:

$$ct' = ct' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Saadud võrrand peab taanduma ainult ühele:

$$1 = \frac{ct'}{ct} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

milles  $v = 0$ . Kui aga  $l = vt$ , siis saame seoseks:

$$vt = ct' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ehk

$$\frac{t}{t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{v}$$

Kuna kinemaatilise aja dilatatsiooni võrrand avaldus erirelatiivsusteoorias kujul:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{t}{0} = \infty$$

milles  $v = c$ , siis seega saab võrrand võrduda ainult ühega:

$$\frac{t}{t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{t'} \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{c}{v} = 1$$

milles  $v = c$ . Kui aga  $l = ct$ , siis saame võrrandi kujuks:

$$ct = t'c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

#### 1.2.4.1 Plancki aeg ja Plancki pikkus

Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki aja  $t$  jagatis annab meile valguse kiiruse  $c$  ehk „Plancki kiiruse  $v$ “:

$$v^2 = \frac{l^2}{t^2} = \frac{Ghc^5}{c^3 Gh} = c^2$$

ehk

$$c = \frac{l}{t}$$

Plancki aja ja Plancki pikkuse olemasolu ehk selle tulenemine aegruumi füüsikast näitab, et hyperruumi dimensioon „eksisteerib“ väljaspool aegruumi, mida on võimalik mõista Plancki aja ja Plancki pikkuse „järgse“ dimensioonina. See tähendab seda, et hyperruum „algab“ sealt, kust lõpeb meie tajutav aegruum. Meie tajutavat aegruumi „piirabki“ Plancki aeg ja Plancki pikkus.

Plancki aja  $t$  ja Plancki pikkuse  $l$  tuletamine aegruumi füüsikast algabki tegelikult ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

Sellest saame omakorda järgmise avaldise:

$$ct = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

milles  $vt' = 0$ . Saadud tulemus kattub täielikult erirelatiivsusteooriast tuntud kinemaatilise aja dilatatsiooni võrrandiga:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

millest on võimalik omakorda „tuletada“ gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrand:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

Viimases avaldises on kasutatud Schwarzschildi raadiust  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

planeedi paakiirust  $v$ :

$$v^2 = \frac{2GM}{r}$$

ja gravitatsioonipotentsiaali  $U$  avaldist:

$$\frac{GM}{r} = U$$

Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki aja  $t$  saame otseselt tuletada gravitatsioonipotentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U = \frac{GM}{R}$$

kui me avaldame massi  $M$  seisenergia seosest:

$$M = \frac{E}{c^2}$$

ja energia  $E$  omakorda määramatuse relatsioonist aja  $t$  ja energia  $E$  vahel:



$$E = \frac{h}{2t}$$

Gravitatsioonipotentsiaali võrrand tuleb seega kujul:

$$U = G \frac{h}{2} \frac{1}{c^2 t} \frac{1}{R} = G \frac{h}{2} \frac{1}{l^2 c}$$

Gravitatsioonipotentsiaal on Schwarzschildi raadiusega  $R$  seotud järgmiselt:

$$c^2 = \frac{2GM}{R} = 2U$$

millest saame omakorda suurima võimaliku gravitatsioonipotentsiaali kogu Universumis:

$$\frac{c^2}{2} = U$$

Sellest tulenevalt saame võrrandi  $U$ :

$$U = G \frac{h}{2} \frac{1}{l^2 c}$$

kirjutada kujule:

$$l^2 = \frac{Gh}{c^3}$$

Tegemist ongi juba Plancki pikkusega:

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

millest väiksematel ruumi skaaladel ei ole enam tajutavat füüsikalist reaalsust ehk Universumi eksistensi. Teades aja  $t$  definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$t = \frac{l}{v}$$

saame tuletada ka Plancki ajaperioodi:

$$t^2 = \frac{l^2}{c^2} = \frac{Gh}{c^5}$$

ehk

$$t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

millest väiksematel ajaperioodidel ei ole Universumis enam tajutavat füüsikalist mõtet. Plancki aja ja Plancki pikkuse matemaatilisel tuletamisel kasutasime seisenergia  $E$  seost:

$$M = \frac{E}{c^2}$$

ja määramatuse relatsiooni kvandi energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$E = \frac{h}{2t}$$

Mõlemaid seoseid on võimalik matemaatiliselt tuletada ja analüüsida ajas rändamise üldvõrrandist, mis omakorda kinnitab seda, et hyperruumi dimensioon on meie igapäevaselt tajutavast aegruumist ehk tavaruumist väljapool alates Plancki ajast ja Plancki pikkusest. Tavaruum ise on meile tajutav kuni Plancki ajani ja Plancki pikkuseni. Seisueenergia ja määramatuse relatsioon kvandi energia ja aja vahel on põhjalikumalt analüüsitud ja tuletatud käesoleva teose relatiivsusteooria ja kvantfüüsika erinevates osades.

Schwarzschildi raadius  $R$  näitab kerakujulise aegruumi lõkspinna ehk Schwarzschildi pinna suurst, millel on aegruum kõverdunud lõpmatuseni ehk aja ja ruumi füüsikaline eksisteerimine on lakanud:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast niisamuti ka Plancki pikkuse  $l$  mõõtkavas:

$$4\pi R = 1,73415 * 10^{-35} \text{ m}$$

ehk

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616 * 10^{-35} \text{ m}$$

See tähendab seda, et Plancki pikkusest  $l$  väiksematel mõõtkavadel ei ole Universumil enam füüsikalist eksistentsi. Niimoodi moodustab Plancki pikkus  $l$  väikseima võimaliku ruumi mõõtkava, mis hõlmab ühtlaselt kogu Universumi kolmemõõtmelist ruumi. Seda nimetame „Plancki pinnaks  $S$ “. See tähendab, et mida väiksemasse ruumi mõõtkavasse jõuda, seda lähemale jõuame Plancki pinnani  $S$ .

Kusjuures laialt tuntud Schwarzschildi raadius  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

tuletatakse tavaliselt „kineetilise“ ja „potentsiaalse“ energia võrdusest:

$$E = \frac{mc^2}{2} = \frac{GMm}{R}$$

Kuid selline võrrand:

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

tuletatakse järgmisest võrrandist:

$$E = mc^2 = \frac{GMm}{R}$$

mis sisaldab endas juba „seisueenergiat“. Sellist analüüsi põhjendame edaspidi palju põhjalikumalt.

Aegruumi lõkspinnal on elektrijõud ja gravitatsioonijõud omavahel võrdsed. Selle võrduse valem tuletatakse võrrandist:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

milles  $e$  on elementaarne elektrilaeng:

$$e = 1,602 * 10^{-19} \text{ C}$$

ja raadius R näitab sfäärilise kujuga aegruumi lõkspinna raadiust:

$$R = 1,3807 * 10^{-36} m$$

Kui me korrutame viimase avaldise  $4\pi$ -ga:

$$4\pi R = 1,73415 * 10^{-35} m$$

siis algebraline tulemus kattub „peaaegu“ Plancki pikkuse  $l$  väärtusega:

$$l_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616 * 10^{-35} m$$

$4\pi R$  korral saaksime ka massi  $M$  väärtuse:

$$\frac{4\pi R}{G} c^2 = M = 2,3 * 10^{-8} kg$$

mis kattub „peaaegu“ Plancki massi  $m$  väärtusega:

$$m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}} \approx 2,2 * 10^{-8} kg$$

Elementaarlaengu  $e$ , Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki massi  $m$  omavahelised seosed näitavad seda, et kõik Universumi fundamentaalkonstandid on omavahel lahutamatult seotud.

Siinkohal peame ära seletama selle, et kuidas „tekib“ võrrandisse  $4\pi R$ :

$$\frac{4\pi R}{G} c^2 = M$$

See on tegelikult väga lihtne. Näiteks Schwarzschildi ja Nordströmi raadiuste omavahelisest võrdusest:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi \epsilon_0 c^4}}$$

ehk

$$R^2 = \frac{e^2 G}{4\pi \epsilon_0 c^4}$$

saamegi kohe kätte  $4\pi R$ -i:

$$4\pi R = \frac{e^2 G}{R \epsilon_0 c^4} = 4\pi \frac{GM}{c^2}$$

Kuna massi ja energia vahel esineb ekvivalentsuse printsiip:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2} = \frac{E}{2}$$

ja valguse kiiruse  $c$  ning Plancki konstandi  $h$  vahel esineb samuti seos:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi}$$

siis me näeme, et võrrandi ühel poolel taandub  $4\pi$  ilusti välja:

$$4\pi R = 4\pi \frac{GM}{c^2} = 4\pi \frac{h}{2\pi} G \frac{E}{2} = hGE$$

Tulemuseks saamegi eespool kasutatud seose:

$$4\pi R = \frac{GM}{c^2}$$

ehk

$$\frac{4\pi R}{G} c^2 = M$$

milles seekord:  $E = mc^2$  ja  $\frac{1}{c^4} \rightarrow h$ .

Kuna tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$  ehk Universum paisub valguse kiirusega  $c$ , siis seega peame arvestama Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki aja  $t$  jagatisega ehk „Plancki kiirusest  $v$ “ tulenevate järeldustega:

$$v^2 = \frac{l^2}{t^2} = \frac{Ghc^5}{c^3 Gh} = c^2$$

ehk

$$c = \frac{l}{t}$$

See tähendab seda, et Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse“ skaalast alates:

$$1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

ja seetõttu oleks õigem eeldada, et reaalne Universum ei saanud tegelikult alguse lõpmata väikesest ruumalast ehk punktist, vaid hoopis „läbimõõdust“, mis vastab Plancki pikkusele  $10^{-35}$  m. Plancki pikkuse läbimõõduga Universumisse ei mahuks absoluutselt mitte ükski teadaolev osake. Samasugune põhimõte kehtib tegelikult ka Universumi vanuse kohta, mille korral Universumi eksisteerimise aeg ei hakka „käima“ 0 sekundist, vaid hoopis ajahetkest, mis vastab „Plancki ajale“  $t$ :

$$t = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

See tähendab seda, et Universumi ruumala vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} \text{ m}$$

ja eksisteerimise aeg vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} \text{ s}$$

ei ole füüsikaliselt absoluutselt mõtet, küll aga omab matemaatilist mõtet. See viib järelduseni, et Universum hakkas paisuma  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga „ruumalalt“ ja Universumi eksisteerimise aeg ehk „Universumi kell hakkas käima“ alates  $10^{-44}$  sekundist, mitte aga 0 sekundist.

Sellest tulenevalt võib põhimõtteliselt mõista, et näiteks  $10^{-35}$  meetri pikkusega „ruumilõik“ on põhimõtteliselt sama mis 0 meetri pikkusega „ruumilõik“. Need on põhimõtteliselt füüsikaliselt samaväärsed. Sama on näiteks ka ajaperioodiga. Näiteks kui mingi protsess võtab aega  $10^{-44}$  sekundit, siis on see põhimõtteliselt samaväärne

0 sekundi kestvuse protsessiga. Seda tegelikult tõestabki kogu eelnev ja ka järgnev Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki aja  $t$  matemaatiline ja füüsikaline analüüs.

Punktil endal ei ole mõõtmeid ehk see on lõpmata väike. Kuid punkti, mille “mõõtmel” võrduvad  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga kera “ruumalaga”, võib põhimõtteliselt nimetada “Plancki punktiks”. See tähendab, et Plancki punkti läbimõõt vastab Plancki pikkusele  $l$ .

Siinkohal on oluline märkida, et Plancki aja ja pikkuse valemite matemaatilisel tuletamisel kasutasime Schwarzschildi raadiuse  $R$  avaldist:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Selline võrrand on tuntud eelkõige Schwarzschildi meetrikast:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ehk

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2$$

ja

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = dl^2$$

mille korral näitab Schwarzschildi raadius  $R$  ( geomeetrilise ) kerakujulise pinna raadiust, mille pinnal ( ja tegelikult ka sees ) on aeg ja ruum „kõverdunud“ lõpmatuseni ehk aja ja ruumi eksisteerimised lakkavad olemast. See väljendub gravitatsioonilises aja dilatatsioonis:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

ja gravitatsioonilises ruumi kontraktsioonis:

$$ds^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2$$

ehk

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{R}} = 0$$

See tähendab seda, et Universumi punktisingulaarsuse füüsikaline olemus langeb väga täpselt kokku Schwarzschildi pinna

$$4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2$$

füüsikalise olemusega, mille korral ei eksisteerinud aega ega ruumi, kui Universumi läbimõõt vastas Plancki pikkusele:

$$2R = l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

Universumi „läbimõõdu“ mõiste kattubki siinkohal Schwarzschildi kerakujulise pinna läbimõõdu mõistega ja seetõttu on Universumi punktsingulaarsust võimalik füüsikaliselt tõlgendada ka kui „Schwarzschildi ehk musta augu kahemõõtmelise pinna kolmemõõtmelise versioonina“, mille läbimõõt vastabki Plancki pikkusele. See tähendab seda, et Universumi ruumalal vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} \text{ m}$$

ja eksisteerimise ajaperioodil vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} \text{ s}$$

ei ole füüsikalist eksistensi. See viib järelduseni, et Universum hakkas paisuma  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga „ruumalalt“ ja Universumi eksisteerimise aeg ehk „Universumi kell hakkas käima“ alates  $10^{-44}$  sekundist, mitte aga 0 sekundist.

#### 1.2.4.2 Aegruumi intervall

Pikkust või kahe ruumpunkti vahelist kaugust 1 kolmemõõtmelises ruumis kirjeldab meile järgmine tuntud võrrand:

$$l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

milles olevad kolmemõõtmelise ruumi koordinaadid on avaldatavad:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

Aja koordinaat võrdub aga järgmiselt:

$$t' = \Delta t = t_2 - t_1$$

Eelnevaid seoseid arvestades saame kiiruse v definitsiooni

$$v = \frac{l}{\Delta t}$$

Tõstame viimase kiiruse v võrrandi ruutu

$$v^2 = \frac{l^2}{\Delta t^2} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}$$

ja niisamuti ka eelnevalt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandi:

$$(ct)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (t'c)^2$$

Viimasest võrrandist kirjutame lahti kiiruse  $v$  definitsiooni eelnevalt tuletatud seoste kaudu:

$$(ct)^2 = \left(1 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2 c^2}\right) (\Delta t c)^2 = \Delta t^2 c^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

Saadud võrrandit

$$c^2 t^2 = \Delta t^2 c^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

nimetatakse „aegruumi intervalliks“, mis näitab kahe sündmuse või kahe ruumipunkti vahelist kaugust aegruumis ehk ajas ja ruumis. Selles tuletatud võrrandis on näha seda, et aeg  $t$

$$t = \tau$$

on otseselt seotud valguse kiirusega  $c$

$$c\tau = s$$

ehk

$$c = \frac{s}{\tau}$$

mis tegelikult näitabki seda, et tavaruum  $K$  „liigub“ hyperruumi  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$ . Seda on võimalik antud juhul niimoodi tõlgendada, kuna intervalli võrrand

$$s^2 = \Delta t^2 c^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

oli eelnevalt otseselt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c$$

Kuid Albert Einsteini relatiivsusteoorias kasutatakse neljamõõtmelise koordinaatsüsteemi korral kolme ruumitelge ja ühte ajatelge. Ajamomenti korrutatakse valguse kiirusega  $c$ , et tegemist oleks neljanda ruumimõõtmega. Tulemuseks on neli koordinaati:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ja  $ct$ .

### 1.2.4.3 Ajas rändamise füüsika ja relatiivsusteooria

Eirelatiivsusteooria ei anna vastust küsimusele, et miks esineb aja ja ruumi teisenemine, kui keha liikumiskiirus läheneb valguse kiirusele vaakumis? Vastuse sellele fundamentaalsele küsi-

musele tegelikult leiamegi ajas rändamise füüsikateooriast.

Näiteks selleks, et rännata ajas ( ehk liikuda ühest ajahetkest teise ), peab keha olema ajast ( ja ka ruumist ) „väljas“. See on üldse esimene füüsikaline tingimus sooritamiseks tõelist aja rännakut. Väljaspool aega ei eksisteeri enam aega. Eespool tõestasime, et  $K'$ -s ehk hyperruumis liikudes rändab keha ajas. Seega hyperruumis ei eksisteeri enam aega ( ega ka ruumi ). Kuna tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes, siis järelikut keha jõudmiseks hyperruumi ehk  $K'$ -i peab keha liikumiskiirus tavaruumis  $K$  ( milles eksisteerib aeg ja ruum ) suurenema. Kuna  $K'$ -s ehk hyperruumis aega ei eksisteeri ( s.t. aeg on lõpmatuseni aeglenenud ehk aeg on peatunud ), siis seega lähenedes hyperruumile ( ehk keha liikumiskiiruse suurenemisel tavaruumis  $K$  ) aegleneb aeg.

Juba Ungari päritoluga filosoof ja matemaatik Menyhért Palagyi ( 1859-1924 ) arendas omal ajal aja ja ruumi ühtsuse ideed ja käsitles aega neliruumi ( „jooksva ruumi“ ) imaginaarse koordinaadina, mis tegelikult väga sarnaneb antud juhul tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$ -i füüsikalise süsteemiga.

Kuid aja aeglenemine keha liikumiskiiruse kasvades on teada ainult erirelatiivsusteooriast: näiteks mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Lõpuks teisenevad aeg ja ruum lõpmatuseni:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

Valguse kiirus  $c$  on suurim võimalik kiirus kogu Universumis:

$$c = \frac{l}{t}$$

ja seda mistahes taustsüsteemist vaadatuna:

$$c = \frac{d}{t'} = \frac{\sqrt{l^2 + v^2 t'^2}}{t'} = c$$

Kui me matemaatiliselt teisendame viimast avaldist järgmiselt:

$$(ct)^2 + (vt')^2 = c^2 t'^2$$

ehk

$$(ct)^2 = (c^2 - v^2) t'^2$$

siis me näemegi seda, et liikudes valguse kiirusega  $c$ :

$$t^2 = \frac{c^2 - v^2}{c^2} t'^2 = \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right] t'^2$$

„teiseneks“ ehk „aegleneks“ aeg  $t'$  lõpmatuseni:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

Valguse osakesed footonid liiguvad vaakumis kiirusega  $c$ , mille korral on aeg ja ruum teisenenud



lõpmatuse. Seetõttu võib öelda, et footonid eksisteerivad „väljaspool“ aegruumi, sest liikudes vaakumis kiirusega  $c$  on aeg aeglenenud lõpmatuse

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

ja ruumi pikkus lühenenud samuti lõpmatuse

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$$

Sellisel juhul ei eksisteeri enam aega ega ruumi. Näiteks välisvaatleja jaoks ehk aegruumis eksisteeriva vaatleja suhtes on valguse kiirusega liikuv keha kiiruseks  $c$ , kuid kiirusega  $c$  liikuva keha enda suhtes ehk n. „omaajas“ jõuab see mistahes ruumipunkti Universumis ühe hetkega ehk tema kiirus on seega lõpmata suur. See tähendab seda, et valguse kiirusega liikuv keha on liikumiskiirus „omaajas“ lõpmata suur ehk seega ei eksisteeri tema jaoks enam aega, kuid samas välisvaatleja suhtes ehk aegruumis eksisteeriva vaatleja suhtes on selle keha kiirus ikkagi  $c$ , kuna tema jaoks eksisteerib aeg ja ruum.

Kusjuures aja ja ruumi teisenemised ei ole „näivad“, vaid need on täiesti reaalsed. Näiteks kui üks kaksikvendadest läheb kosmosereisile ja naaseb hiljem Maale tagasi, siis ei ole vennad enam ühevanused. Kosmoserändur on jäänud vennast nooremaks. Teoreetiliselt võib vanusevahe suurendada piiramatult. Näiteks kui isa reisib Maast eemale 2 aastat ja tagasi teine 2 aastat (isa poolt mõõdetud ajavahemikud), siis on ta oma tütre 20 aastat noorem. Enne reisi algust oli isa oma tütre 20 aastat vanem. Seega saame konstantse kiirusparameetri  $\beta$  Maa suhtes järgmiselt:

$$40 = 4y$$

milles

$$y = 10 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

milles omakorda

$$\beta = 0,995.$$

Kui aga mingi vaatleja siirduks oma tähelaevaga kosmosesse kiirusega, mis läheneb valguse kiirusele vaakumis ja tuleks 22 aastat hiljem maa peale tagasi, siis maa peal on möödunud selle aja jooksul peaaegu 1000 aastat. Seega vaatleja rändas ajas tulevikku.

Keha liikumiskiiruse lähenemist valguse kiirusele vaakumis võib antud kontekstis tõlgendada keha liikumiskiiruse kasvuna tavaruumis  $K$ , kuid hyperruumis  $K'$  suhtes hakkab keha paigale jääma. Järelikult  $K$  liigub  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$ . Näiteks eelnevalt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c$$

on võimalik tuletada aja dilatatsiooni valem, mis on täiesti identne erirelatiivsusteooriast tuntud aja teisenemise valemiga. Näiteks kui eelnevalt välja toodud üldvõrrandis on  $vt' = 0$  ehk

$$ct = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

siis saame matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'$$

ehk

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t,$$

milles jagatise liiget

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

nimetatakse erirelatiivsusteoorias  $\gamma$ -faktoriks ehk kinemaatiliseks teguriks, mis näitab aja aeglustumist välisvaatleja suhtes. Selle füüsikalise olemuse mõistmiseks on vajalik tuletada veel üks võrrand, mis näitab matemaatiliselt aja dilatatsiooni nähtuse tulenemist eelnevalt tuletatud hyperruumi ja tavaruumi füüsikalisest süsteemist. Selleks teeme eelnevalt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandis

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

järgmised matemaatilised teisendused. Juhul kui  $ct = 0$ , saame võrrandi

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled  $t'$ -ga:

$$\frac{vt'}{t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{ct'}{t'}$$

ja sellest tulenevalt saame lõpuks järgmise väga olulise avaldise, mida erirelatiivsusteoorias pole võimalik matemaatiliselt tuletada:

$$v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

ehk visuaalselt paremini esitatuna:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Tähistame  $v$ -d  $v'$ -ga:

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Viimase võrrandi füüsikaline sisu seisneb järgmises analüüsis. Eelnevalt on teada, et meie tavaruum K liigub hyperruumi K' suhtes kiirusega c ja sellest tulenevalt peab Universum paisuma valguse kiirusega. Sellest ongi näha seda, et kui keha m liikumiskiirus on tavaruumi suhtes c ehk  $v = c$  (näiteks valguse liikumiskiirus meie tajutavas aegruumis), siis hyperruumi suhtes on keha paigal ehk  $v' = 0$ . Kui aga keha liikumiskiirus on tavaruumi suhtes null (keha on paigal) ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi suhtes on keha liikumiskiirus võrdne c-ga ehk  $v' = c$ . See tähendab ka seda, et kõik kehad Universumis liiguvad valguse kiirusega c. Valgus ise on tegelikult paigal. Kuna aja dilatatsiooni võrrand, mis on tuletatav samuti ajas rändamise üldvõrrandist, on kujul

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja seetõttu saame kinemaatilise teguri ruutjuure avaldise avaldada järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}.$$

Ajas rändamise üldvõrrandist tuletatud valemi

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

saame seega viia järgmisele matemaatilisele kujule:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{ct}{t'}$$

ehk

$$v = c \frac{t}{t'}.$$

Viime  $t'$  teisele poole

$$vt' = ct$$

ja teisendame viimast võrrandit kujule:

$$v \Delta t = ct,$$

milles  $\Delta t = t'$ . Viimasest tuletatud väga olulisest võrrandist, mis viib lõpuks kvantmehaanika füüsikalise mõistmiseni

$$v \Delta t = ct$$

on selgelt näha seda, et keha m liikumiskiirus v sõltub aja kulgemisest (näiteks mida rohkem aeg teiseb välisvaatleja suhtes, seda väiksema omaajaga jõuab keha liikuda ühest ruumipunktist teise) või keha liikumiskiirus ise tingib aja kulgemise iseloomu (näiteks mida kiiremini liigub keha, seda enam teiseb aeg):

$$v = \frac{ct}{\Delta t}$$

Teepikkus  $ct$  võib olla valguse teepikkus tavaruumi  $K$  suhtes või seisumassiga keha teepikkus hyperruumi  $K'$  suhtes:

$$v = \frac{s}{\Delta t} ,$$

milles  $s = ct$ . Järgnevalt analüüsime aja teisenemise

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tulenevust hyperruumi  $K'$  ja tavaruumi  $K$  füüsikalisest süsteemist. Näiteks kui keha massiga  $m$  liigub tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$  ( see võib olla näiteks valguse liikumine vaakumis ), siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal ehk  $v' = 0$ . Eelnevalt tuletatud valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on sellisel juhul  $v = c$ :

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}$$

ja saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks

$$v' = 0 .$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui keha liigub vaakumis kiirusega  $c$  mistahes vaatleja suhtes, siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal ( s.t. „absoluutselt paigal“ ). Kuna keha  $m$  liigub sellisel juhul tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$ , siis aeg on tavaruumi  $K$  suhtes teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja seetõttu saame hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0 .$$

See tähendab seda, et kui keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes liikumiskiiruseks  $c$  ehk  $v = c$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = c .$$

Kui aga keha  $m$  on hyperruumi  $K'$  suhtes paigal ehk  $v' = 0$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes on aeg teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$v' = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0 .$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui mingi keha liigub vaakumis kiirusega  $c$ , siis see on konstantne kiirus mistahes vaatleja jaoks, kes vaakumis parajasti eksisteerivad. See tuleneb otseselt sellest, et mida lähemale jõuame keha liikumiskiirusele  $c$ , seda aeglasemini kulgeb aeg välisvaatleja suhtes. Kiirusel  $c$  liikudes läheb ajavahe  $\Delta t$  lõpmata suureks ehk

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja see tähendab seda, et välisvaatleja suhtes kulgeb aeg lõpmata aeglaselt, kuid keha enda suhtes ( n.ö. keha „omaajas“ ) kulgeb aeg lõpmata kiiresti. See tähendab seda, et keha jõuab omaajas tavaruumis  $K$  ( näiteks vaakumis ) mistahes ruumipunkti hetkega ehk lõpmata suure kiirusega:  $v \rightarrow \infty$ . Kuid hyperruumi  $K'$  suhtes on keha „absoluutselt“ paigal ja seetõttu ei ole hyperruumi  $K'$  suhtes ka aja teisenemist ehk:

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t.$$

See tähendab seda, et hyperruumi  $K'$  suhtes on keha kiirus „omaajas“ lõpmata väike. Kui keha massiga  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes aga hoopis paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes liigub see kiirusega  $v' = c$ . Näiteks kui me kiiruse teisenemise valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on kiirus  $v$  võrdne nulliga ehk

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}$$

siis saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks  $c$ :

$$v' = c.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et absoluutselt kõik kehad Universumis, millel on seisumass  $m_0$  ja seega seisuenergia  $E_0 = m_0 c^2$ , liiguvad valguse kiirusega  $c$  hyperruumi  $K'$  suhtes, kuid samas võivad need meie tavaruumis  $K$  olla paigal. Ka valguse suhtes liiguvad kõik kehad kiirusega  $c$ . Kuna keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t$$

ja seetõttu saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

See tähendab seda, et kui keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes on aeg teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{s}{\infty} = 0.$$

Kui keha  $m$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v' = c$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$v' = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

See tähendab seda, et kui valguse korral oli nii, et liikudes vaakumis ehk tavaruumis  $K$  kiirusega  $c$  ja seetõttu omaajas jõudis valgus hetkega mistahes ruumipunkti tavaruumis, siis siin antud juhul on olukord aga vastupidine. Näiteks seisumassiga kehad liiguvad hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$  ja sellest tulenevalt on hyperruumi ja tavaruumi ajavahe lõpmata suur. See tähendab seda, et hyperruumi  $K'$  poolt vaadatuna kulgeb aeg tavaruumis ehk kogu meie Universumis tervikuna lõpmata kiiresti, kuid tavaruumis olles kulgeb aeg vaatleja jaoks tavapärasel tempos ja aja kulgemine ei näi mitte kunagi katkevat ehk selle eksisteerimine näib olevat igavikuline. Kuna kõik kehad liiguvad hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ , siis seega hõlmab „omaaeg“ hyperruumi suhtes vaadatuna üle kogu Universumi ehk kogu tavaruumi  $K$ . Selles mõttes kõik kehad Universumis, millel on seisumass ja seisuenergia ning mis liiguvad hyperruumi suhtes kiirusega  $c$ , liiguvad hyperruumi poolt vaadatuna ( ehk n. hyperruumi omaajas ) lõpmata suure kiirusega ehk  $v \rightarrow \infty$ , sest aeg kulgeb lõpmata suure kiirusega.

Selle paremaks mõistmiseks toome järgnevalt välja ühe „mõttelise eksperimendi“. Näiteks kogu meie paisuv Universum on nagu üks hiigel suur taustsüsteem, milles esineb üleüldine ehk globaalne aja ja ruumi teisenemine. Selles hiigel suures taustsüsteemis ( mis on Universumi suurune ) eksisteerivad lõputu hulk väiksemaid taustsüsteeme nagu näiteks liikuvad ehk inertsiaalsed taustsüsteemid ( milles avalduvad erirelatiivsusteooria seaduspärasused ) ja mitteinertsiaalsed taustsüsteemid ehk gravitatsiooniväljad ( milles avalduvad üldrelatiivsusteooria seaduspärasused ). Oletame, et meil on kaks vaatlejat, kellest üks asub meie paisuvas Universumis ja teine hüpoteetiline vaatleja asub sellest väljapool. Paisuva Universumi sees olevale vaatlejale tunduvad Universumis toimuvad sündmused kulgevad normaalsel jadapidi, kui välja arvata erinevates taustsüsteemides esinevaid aja kulgemisi, mille erinevusi võivad põhjustada kehade liikumiskiiruste või raskusjõu erinevad vahekorrad. Kuid teisele vaatlejale, kes asub paisuvast Universumist väljapool, tundub aeg Universumis kulgevat lõpmata kiiresti.

„Tuleb muidugi arvestada, et aeg ei ole relatiivsusteoorias mingi absoluut. See, millest praegu jutt, on „kaasaliikuva vaatleja aeg“, s.t. aeg, mida tajub paisuva Universumi mingis galaktikas olev ja sellega koos liikuv vaatleja. Vanajumalal, kes asja kõrvalt vaatab, võib sootuks teine ajaarvamine olla.“ ( „Füüsika XII klassile, Kosmoloogia“, Jaak Jaaniste, Kirjastus „Koolibri“ 1999, lk: 107 )

Kogu eelnev matemaatiline analüüs näitas üsna veenvalt, et kui tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes, siis järelikult keha jõudmiseks hyperruumi ehk  $K'$ -i peab keha liikumiskiirus tavaruumis  $K$  ( milles eksisteerib aeg ja ruum ) suurenema. Kuna  $K'$ -s ehk hyperruumis aega ei eksisteeri ( s.t. aeg on lõpmatuseni aeglenenud ehk aeg on peatunud ), siis seega lähenedes hyperruumile ( ehk keha liikumiskiiruse suurenemisel tavaruumis  $K$  ) aegleneb aeg. Kuid aja aeglenemine keha liikumiskiiruse kasvades on teada ainult erirelatiivsusteooriast: näiteks mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Keha liikumiskiiruse lähenemist valguse kiirusele vaakumis võib antud kontekstis tõlgendada keha liikumiskiiruse kasvuna tavaruumis  $K$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes hakkab keha

paigale jääma. Järelikult K liigub K'-i suhtes kiirusega c.

Kuna aeg ja ruum on üksteisest lahutamatult seotud, siis aja aeglenemisega käib kaasas ka keha pikkuse lühenemine, mis on samuti tuntud erirelatiivsusteooriast.

Erirelatiivsusteoorias kirjeldatavad aja ja ruumi teisendused tuletatakse Lorentzi teisendusvalemite, mis omakorda tuletatakse Galilei Galileo teisendusvalemite:

$$\begin{cases} x = x' + vt' = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Need teisendusvalemid ei tohi muutuda koordinaatide alguspunkti nihutamisel ehk koordinaati x-i ei tohi asendada suurusega  $x + a$ . See tuleneb ruumi homogeensusest ja seda tingimust rahuldavad ainult lineaarsed teisendused. Selleks peab lineaarse teisenduse valem olema järgmise kujuga:

$$x = y(x' + vt') = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

või

$$x' = y(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

milles olev kordaja liige y

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

on kinemaatiline tegur, mis oli meil juba varem teada ja matemaatiliselt tuletatud. Nendest koordinaatide teisendusvalemite saame tegelikult leida ka aja teisendusvalemi.

Koordinaatide teisendusvalemeid tavaruumis K liikuvate taustsüsteemide jaoks kirjeldavad Lorentzi teisendused:

$$x' = y(x - vt)$$

ja

$$x = y(x' + vt')$$

Keha pikkuse ehk ruumi teisendusvalemist  $x' = y(x - vt)$  leiame ka aja t teisendusvalemi järgmiselt:

$$\frac{x'}{y} = x - vt$$

ehk

$$vt = x - \frac{x'}{y}$$

milles x-i võib avaldada koordinaadi teisendusvalemiga ja seejärel matemaatiliselt edasi teisendada järgmiselt, et leida aja t teisendusvalem:

$$vt = [y(x' + vt')] - \frac{x'}{y}$$

ehk

$$vt = yx' + yvt' - \frac{x'}{y}$$

Kui me viime kiiruse  $v$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$t = \frac{yx' + yvt' - \frac{x'}{y}}{v}$$

siis saame matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$t = y \frac{x'}{v} + y \frac{vt'}{v} - \frac{x'}{v} \frac{1}{y}$$

ehk

$$t = y \left[ t' + \frac{x'}{v} - \frac{x'}{v} \frac{1}{y^2} \right]$$

ehk

$$t = y \left[ t' + \frac{x'}{v} \left( 1 - \frac{1}{y^2} \right) \right]$$

Viimases võrrandis avaldame kineetilise teguri  $y$ :

$$t = y \left[ t' + \frac{x'}{v} \left( 1 - \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2} \right) \right]$$

mille tõttu saame:

$$t = y \left[ t' + \frac{x'}{v} \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Viimaks saamegi matemaatiliselt tuletatud aja teisendusvalemi  $t$ :

$$t = y \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \frac{\left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

või

$$t' = y \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) = \frac{\left( t - \frac{v}{c^2} x \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Neid valemeid nimetatakse ametlikus erirelatiivsusteoorias Lorentzi teisendusvalemiteks, milles on selgelt näha seda, et aeg  $t$  ja ruumikoordinaat  $x$  võivad ühekorraga muutuda:

$$x' = \frac{(x + vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



ja

$$t' = \frac{\left(t + \frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Aeg  $t$  ja koordinaat  $x$  on meie süsteemis, kuid aeg  $t'$  ja koordinaat  $x'$  on aga süsteemis, mis meie suhtes liigub. Nii aja kui ka koordinaadi teisendusvalemid sõltuvad üksteisest. Neid valemeid nimetatakse Lorentzi teisendusvalemiteks. Nendest valemitest on võimalik tuletada aja aeglenemine

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja keha pikkuse lühenemine ehk kontraktsioon

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Näiteks kui me Lorentzi koordinaadi  $x$  teisendusvalemis

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

võtame  $v = 0$  või  $t' = 0$ , siis saamegi keha pikkuse kontraktsiooni valemi:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk

$$x' = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Kui aga Lorentzi aja teisendusvalemis  $t'$

$$t' = \frac{\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

võtame  $v = 0$  või  $x = 0$ , siis saamegi aja aeglenemise ehk aja dilatatsiooni valemi:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Gravitatsiooniväli seisneb samuti aja dilatatsioonis ja ruumi kontraktsioonis. See tähendab seda, et gravitatsiooni tsentrile lähenedes aeg aegleneb ja ruumipunktide vahelised kaugused vähenevad ( ruum kontrakteerub ) välisvaatleja suhtes. Keha mass mõjutab aja kulgemist ja 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi meetrikat. Meetrika uurib kahe ruumipunkti vahelist kaugust  $ds$ . Gravitatsiooni tsentris on aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni. See tähendab, et aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast teatud kaugusel  $R$  gravitatsiooni tsentrist:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

Eirelatiivsusteoorias käsitletakse ainult inertsiaalseid taustsüsteeme, milles kehtib inertsiaalse seadus. Inertsiaalse seadus seisneb selles, et keha liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt seni kuni miski seda olekut ei muuda. Tekib küsimus, et kui aja ja ruumi teisenemised ( s.t. aja dilatatsioon ja keha pikkuse kontraktsioon ) toimuvad inertsiaalsetes taustsüsteemides, siis kas need võivad ilmned ka mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides? Inertsiaalsetes taustsüsteemides tulevad aja ja ruumi teisenemised esile liikumiskiiruse lähenemisel valguse kiirusele c, kuid mitteinertsiaalsed taustsüsteemid on gravitatsiooniväljad. Gravitatsioonijõud ja koos sellega ka jõuvali on seotud keha massiga. Inertsiaalsetes taustsüsteemides käsitletakse eelkõige inertset massi. Vastavalt Newtoni II seadusele

$$F = ma \quad \text{ehk} \quad a = F/m$$

iseloomustatakse inertse massiga keha inertsust ehk vastupanuvõimet liikumisoleku muutumisele. Näiteks mida suurem on kehal mass, seda rohkem jõudu tuleb rakendada, et keha hakkaks liikuma või jääks paigale. Kuid mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides ehk seega gravitatsiooniväljades kasutatakse raske massi mõistet, mis ütleb, et mida suurem on kehal mass, seda suurema gravitatsioonijõu see tekitab.

Inertne mass ja raske mass on omavahel ekvivalentsed, mis tähendab seda, et ei ole võimalik kindlaks teha, et kas vaadeldav keha asub gravitatsiooniväljas või kiirendusega liikuv taustsüsteemis.

Näiteks kaaluta oleku korral langevas liftis või ümber Maa tiirlevas kosmose-laevas ei ole võimalik kindlaks teha kiirenduse või gravitatsioonivälja olemasolu.

Matemaatiliselt väljendub see kõveras ruumis. Näiteks kosmoselaeva orbiit tasases ehk eukleidilises ruumis on ekvivalentne sirgega kõveras ruumis. Kõvera ruumi sirget joont nimetatakse geodeetiliseks jooneks. Piisava kõverusega trajektoor võib olla kõveras ruumis sirge. Sirge on kõige lühem tee kahe ruumipunkti vahel.

Negatiivse kõverusega nn. hüperboolsete ruumide geometria töötas välja 1826. aastal N. Lobatševski ja suvalise kõverusega ruumi geometria lõi 1854. aastal B. Riemann.

Albert Einstein sidus ruumi kõveruse selliste füüsikaliste suurustega, mis kirjeldavad massi ja liikumist. Einsteini võrrandi lahendamisel saadakse mingi vaadeldava keha maailmajoon kõveras ruumis, mis on määratud teiste kehade masside poolt. Maailmajoon on neliruumis keha liikumistee. Neljamõõtmelise koordinaatsüsteemi ( ehk kõvera aegruumi ) korral kasutatakse kolme ruumitelge ja ühte ajatelge. Ajamomenti korrutatakse valguse kiirusega c, et tegemist oleks neljanda ruumimõõtmega. Tulemuseks on neli koordinaati: x, y, z ja ct.

Selge on see, et kehade mass kõverdab aega ja ruumi, kuid üldrelatiivsusteooria ei anna vastust küsimusele, et miks mass kõverdab aegruumi? Mass kõverdab ümbritsevat aegruumi, kuid miks see nii on? Vastuse sellele fundamentaalsele küsimusele annabki meile ajas rändamise füüsikateooria.

Üldrelatiivsusteooria järgi on inertne mass ja raske mass omavahel võrdsed ehk ekvivalentsed. Mass on keha inertsiaalse mõõduks ehk see kirjeldab keha inertsiaalse kiiruse muutuste suhtes. See tähendab seda, et mida suurem on kehal mass, seda rohkem aega läheb vaja keha kiiruse muutmiseks.

Näiteks raske rongi pidurdamine võtab oluliselt kauem aega kui näiteks lapsevankri pidurdamine. Nende kahe keha pidurdusteade pikkused on väga erinevad ühe ja sama kiiruse arväärtuse korral.

Viimasest võib omakorda järeldada seda, et näiteks kui rong sõidab ühtlaselt ja sirgjooneliselt mööda teed ja rongi sees mõne keha mass ajas tohutult suureneb, siis mida suurem on kehal mass, seda aeglasemalt liigub rong ja koos sellega ka keha rongis. Keha kiirus jääb lõpuks maapinna suhtes üldse paigale.

Viimastest näidetest on võimalik järeldada seda, et kui keha mass suureneb, siis peab see avaldama suuremat „vastupanu“ aja dimensioonile, kuna kõik kehad „liiguvad“ ajas tuleviku suunas. Seda kirjeldab füüsikaline mudel, mille korral suureneb keha mass tavaruumis  $K$ , mitte aga liikumiskiirus tavaruumi  $K$  suhtes. Sellisel juhul muutub keha liikumiskiirus hyperruumi  $K^*$ -i suhtes aeglasemaks, kuid tavaruumi  $K$  enda liikumiskiirus hyperruumi  $K^*$  suhtes jääb alati samasuguseks. Kuid keha liikumiskiiruse muutumise korral hyperruumi  $K^*$  suhtes peab esinema juba aja ja ruumi teisenemised nagu seda oli näidatud erirelatiivsusteooria osas. Sellest nähtubki see, et mida suurem on kehal mass, seda enam peab see kõverdama ümbritsevat aega ja ruumi.

Tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K^*$  füüsikaline süsteem avaldub looduses Universumi kosmoloogilise paisumisena. Mass kõverdab ümbritsevat aegruumi ja seeläbi avaldab mass vastupanu Universumi paisumisele. See tähendab seda, et gravitatsioon kui aegruumi kõverdus avaldab vastupanu Universumi paisumisele, mis on heaks näiteks sellele, et kuidas on mass kui keha inertsimõõt seotud tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K^*$  füüsikalise süsteemiga.

#### 1.2.4.4 Robertson-Walkeri meetrikad

Ajas rändamise üldvõrrandist tuletatud aegruumi intervalli võrrandist:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dl^2$$

on võimalik matemaatiliselt tuletada tuntud Robertson-Walkeri meetrikad, mis kirjeldab matemaatiliselt Universumi aegruumi paisumist. Selleks aga esitame Cartesius' e ristkoordinaadistiku

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

asemel sfäärilised koordinaadid

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

kuna Universumi paisumise mudeliks on kosmoloogias enamasti kera paisumine ruumis. Sellest tulenevalt saamegi järgmise võrrandi:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Kuna kera paisub, siis selles viimases võrrandis on suurus  $r$  koordinaadisüsteemiga kaasasliikuv radiaalkoordinaat:

$$R = r = a(t)\chi$$

Radiaalne kaugus  $R = r = a(t) \chi$  võib olla ka kahe galaktika vaheline kaugus Universumis. Sellest tulenevalt saame sfäärilised koordinaadid kirja panna järgmiselt:

$$(dl)^2 = a^2(t) \{ (d\chi)^2 + K[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2] \}$$

ja Robertson-Walkeri meetrika võtab kuju:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \{ (d\chi)^2 + K[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2] \}$$

milles  $K$  väärtused võivad olla:

$$K = \begin{cases} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ sh^2\chi \end{cases}$$

Vahel esitatakse Robertson-Walkeri meetriline kuju ka järgmiselt:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2] \right\}$$

milles  $k$  väärtused võivad olla:

$$k = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

Robertson-Walkeri meetrikas

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (dl)^2$$

milles

$$(dl)^2 = a^2(t) \{ (d\chi)^2 + K[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2] \}$$

on kordajal  $K$ -l kolm erinevat võimalust. See tuleneb sellest, et Universumi ruum võib olla positiivne, negatiivne või tasane. Positiivse ruumi korral on  $K$  väärtuseks:

$$K = \sin^2\chi$$

ja seega  $k = +1$ . Selle muutumiskiirkonnad on aga järgmised:  $\chi \in (0, \pi)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Negatiivse ruumi korral on  $K$  väärtus:

$$K = (sh\chi)^2$$

ja seega  $k = -1$ . Selle muutumiskiirkonnad on:  $\chi \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Tasase ruumi korral on  $K$  väärtus:

$$K = \chi^2$$

ja seega  $k = 0$ . Selle muutumiskiirkonnad on:  $\chi \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

Suurus  $r$  on koordinaadisüsteemiga kaasasliikuv radiaalkoordinaat:

$$R = r = a(t)\chi$$

Radiaalne kaugus  $R = r = a(t) \chi$  võib olla ka kahe galaktika vaheline kaugus Universumis. Kuna see kaugus suureneb ajas Universumi meetrilise paisumise tõttu, siis saame võtta sellest aja järgi tuletise järgmiselt:

$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(a(t)\chi) = \chi \frac{da(t)}{dt} = \chi \dot{a}$$

milles aja järgi tuletist tähistab täpp a peal:

$$\dot{a} = \frac{da(t)}{dt}$$

Radiaalsest kaugusest  $R = r = a(t) \chi$  saame järgmise seose:

$$\chi = \frac{R}{a}$$

ja sellest tulenevalt saamegi kosmoloogias üldiselt tuntud Hubble'i seaduse:

$$v = \frac{R}{a} \dot{a} = \frac{\dot{a}}{a} R = HR$$

milles Hubble'i konstant H on

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ehk

$$\dot{a} = Ha$$

Hubble'i konstant H sõltub ajast:

$$H \sim \frac{1}{t}$$

Eelnevat analüüsi võib lihtsustatult mõista nii, et Hubble'i seaduses  $v = HR$  olevast radiaal-koordinaadist R:

$$R = a(t)\chi$$

aja järgi tuletis on kiirus  $v = \dot{a}\chi$  ja teist korda aja järgi tuletis on kiirendus  $\dot{v} = \ddot{a}\chi$ . Kuna  $\ddot{a}$  võrdub järgmiselt:

$$\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$$

siis saame kiirenduseks a:

$$\dot{v} = \frac{d^2 a}{dt^2} \chi = \frac{d^2 R}{dt^2}$$

Kiiruse v korral on tegemist ühekordse tuletisega aja järgi:

$$v = \frac{dR}{dt}$$

ja kui tuletist üldse ei ole, siis  $\dot{R} = R$ .

Robertson-Walkeri meetrikates olev ajakoordinaat t on Universumi eluiga, K on konstant, mis on seotud kõvera ruumiga ja a(t) on aja funktsioon, mis sõltub Universumi paisumisest või võimalikust kokkutõmbumisest. Kahe ruumipunkti vahelist kaugust ( ehk ka Universumi „suurust“ ) näitab s, mille väärtus ajas t muutub. Meetrika sõltub ka K konstandi väärtusest ehk ruumi kõverusest – seda, et kas tegemist on tasase, negatiivse või positiivse kõveruse Universumi ruumiga. Viimane võrrand, mida nimetatakse Robertson-Walkeri meetrikaks, näitab meile Universumi paisumise kosmoloogilist tulevikku. See sõltub sellest, et kas Universumi ruum on üldiselt tasane, positiivne või negatiivne. Joonis:

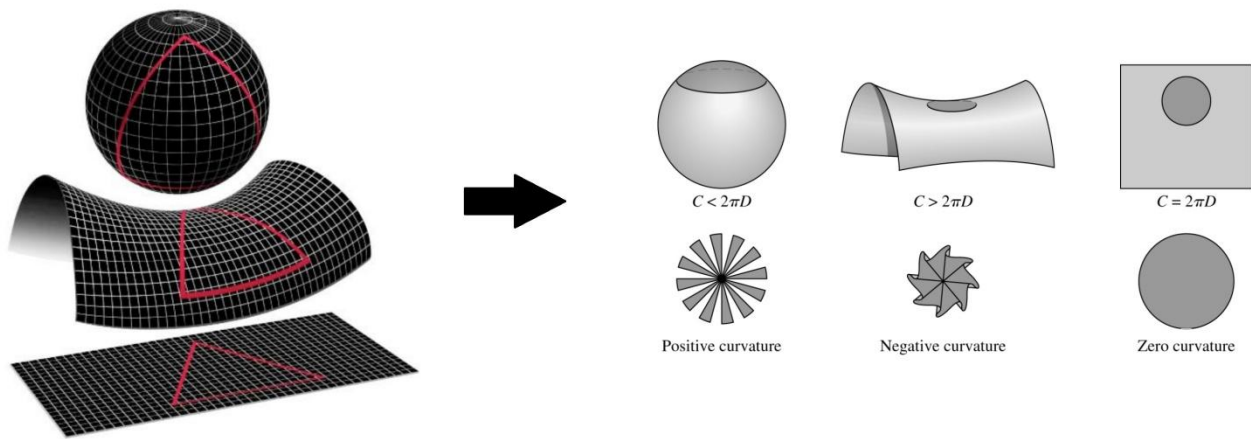


Foto allikad: <https://people.ast.cam.ac.uk/~pettini/Intro%20Cosmology/Lecture03.pdf>

<http://popia.ft.uam.es/Cosmology/files/02FriedmannModels.pdf>

#### 1.2.4.5 Friedmanni võrrandid

Traditsioonilises kosmoloogias võetakse Universumi paisumise mudeliks kõver aegruum, eelkõige just kõver ruum. Albert Einstein'i üldrelatiivsusteooria on ainuke füüsikateooria, mis kirjeldab neid kõveraid aegruume ja seega on Einstein'i üldrelatiivsusteooria aluseks ka kogu tänapäeva kosmoloogia õpetusele. Aegruumi kõveruse kirjeldamiseks on kõige levinumaks matemaatiliseks vormiks just meetriline formalism. Lähtudes eelnevalt tuletatud Robertson-Walkeri meetrikast

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (dl_k)^2$$

mitte aga Riemann'i meetrikast:

$$(ds)^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik}(x) dx_i dx_k$$

milles  $g_{ik} = g_{ki}$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

arvutatakse üldrelatiivsusteooriast tuntud Albert Einstein'i tensori komponendid  $G_{il}$  Einstein'i võrrandist:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

milles  $g(x)$  on:

$$g(x) = g_{ik}(x)$$

Sellest tulenevalt sisaldavad Einstein'i tensori komponendid funktsiooni  $a(t)$ , mis sõltub ajast:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)\sin\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)\sin\chi \sin\theta \end{pmatrix}$$

Seda tundmatut funktsiooni tuleb leida Einsteini võrranditest. Kosmoloogias on funktsioon  $a(t)$  Universumi mastaabikordajaks. Kosmoloogilist printsiipi arvestades peaks energia-impulsstensori komponendid avalduma antud Robertson-Walkeri meetrika korral järgmiselt:

$$T_{00} = \rho c^2$$

$$T_{\alpha\alpha} = -p g_{\alpha\alpha}$$

milles  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $T_{il} = 0$ , kui  $i \neq l$ ,  $i, l = 0, 1, 2, 3$ .  $g_{\alpha\alpha}$  on meetrilise tensori diagonaalsed ruumilised komponendid,  $\rho c^2$  on aine ja energia tihedus Universumis ja  $p$  on rõhk. Kuna galaktikate omavahelised põrked toimuvad äärmiselt harva, siis rõhk  $p$  on null. Kui eelnevalt kirjeldatud viisil leitud Einsteini tensori  $G_{il}$  ja energia-impulsstensori  $T_{il}$  komponendid pandakse Einsteini võrranditesse, siis saadaksegi tuntud Friedmann'i võrrandid, mis on aluseks kogu tänapäeva kosmoloogia õpetusele:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

milles  $k = 1, 0, -1$  ja

$$\dot{a} = \frac{d}{dt}a(t)$$

$$\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$$

Viimased matemaatilised võrrandid näitavad, et saadud seos (juhul kui  $p = 0$ )

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3}\rho$$

on tegelikult olemas ka võrrandis

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

ja seetõttu võib viimase võrrandi kirjutada kujule:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + \ddot{a}a = -\frac{kc^2}{2}$$

Eelnevalt esitatud võrrandites on  $a(t)$  mastaabikordaja,  $c^2\rho(t)$  on aine-energia tihedus ja  $p(t)$  on rõhk.

Järgnevalt näitame analüütiliselt seda, et eelnevalt tuletatud kosmoloogia põhivõrrandit ehk Friedmanni võrrandit ei ole võimalik tuletada Newtoni mehaanikast. Selleks alustame massitiheduse  $M$  valemist, mis võib kirjeldada ka Universumi paisumist ehk masside eemaldumist üksteisest:

$$M = \frac{4\pi\rho r^3}{3}.$$

Tegemist on siis paisuva keraga ehk sfääriga, millel on raadius  $r$  ja mass  $m$ ,  $\rho$  on sellisel juhul energiatihedus. Masside vahel avaldub Newtoni gravitatsiooniline vastastikjõud  $F$ :

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

mille tõttu on kehael gravitatsiooniline potentsiaalne energia:

$$U = - \int_r^\infty \vec{F} d\vec{r} = - \frac{GMm}{r} = - \frac{4\pi Gm\rho r^2}{3}.$$

Liikuva keha kineetiline energia on

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2},$$

milles  $\dot{r}$  tähistab tuletist aja järgi. Keha koguenergia valemi saame energia jäävuse seadusest järgmise avaldise:

$$E = T + U = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{4\pi Gm\rho r^2}{3}.$$

Keha koguenergia avaldis  $E$  peab olema ajas konstantne. Järgnevalt lähme üle kaasasliikuvate koordinaatide koordinaadisüsteemile, sest meil on vaja kirjeldada Universumi paisumist. Seetõttu on kehade vaheline tegelik kaugus  $\vec{r}$  ning algne fikseeritud kaugus  $\vec{x}$ :

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}.$$

$a(t)$  on kosmoloogias tuntud mastaabikordaja, mis kirjeldab „kahe ruumipunkti suhtelise kauguse muutumist ajas“. Sellest tulenevalt saame keha koguenergia  $E$  avaldiseks:

$$E = \frac{m\dot{a}^2 x^2}{2} - \frac{4\pi Gm\rho a^2 x^2}{3}.$$

Viimases võrrandis korrutame mõlemad pooled avaldisega

$$\frac{2}{ma^2 x^2}$$

ja võtame k väärtuseks

$$k \equiv - \frac{2E}{mx^2}$$

ning k ruudu väärtuseks

$$k^2 \equiv 8\pi G,$$

saame tulemuseks järgmise võrrandi:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{k^2 \rho}{3} - \frac{k}{a^2},$$

milles avaldis

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

on Hubble'i parameeter, mis kirjeldab aegruumi paisumise kiirust. Järgnevalt analüüsime  $H^2$  võrdu, mille käigus me näeme seda, et Friedmanni võrrandit ei ole tegelikult võimalik tuletada



Newtoni mehaanikast. Näiteks viimane saadud  $H^2$  võrrand avaldub järgmiselt:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{k^2 \rho}{3} - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{2E}{ma^2 x^2}$$

ja seda sellepärast, et võrrandi liikmed võrduvad:  $k^2 \equiv 8\pi G$ ,  $k \equiv -\frac{2E}{mx^2}$  ja  $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ . Sellest tulenevalt võib viimase võrrandi liige võrduda ka järgmiselt:

$$+ \frac{2E}{ma^2 x^2} = \frac{2E}{mr^2}$$

Järgnevalt oletame, et kui viimase võrrandi liige  $\frac{8\pi G}{3} \rho$  võrdub nulliga, siis saame valemi

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{2E}{ma^2 x^2}$$

Kui me viime selles oleva liikme  $a^2 x^2$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\dot{a}^2 x^2 = \frac{2E}{m}$$

siis me näeme seda, et saadud võrrand võrdub järgmiselt:

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m}$$

ehk tegemist on klassikalisest mehaanikast tuntud kineetilise energia E avaldisega:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E$$

milles kiiruse v ruut avaldub:

$$v^2 = \dot{r}^2 = \dot{a}^2 x^2$$

Kui aga oletame seda, et  $H^2$  võrrandi liige  $+\frac{2E}{ma^2 x^2}$  võrdub nulliga, siis saame järgmise avaldise:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

ehk

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

Kui me jagame viimase võrrandi mõlemad pooled kahega, siis saame:

$$\frac{H^2}{2} = \frac{4\pi G}{3} \rho = \frac{GM}{R^3}$$

milles mass M avaldub massitihedusena  $\rho$ :

$$M = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

Viimane saadud võrrand võrdub ka järgmiselt:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

milles kiirus  $v$  ongi Hubble'i seadus  $v = HR$  ehk  $v^2 = H^2 R^2$ . Saadud võrrand on klassikalisest mehaanikast tuntud mehaanilise energia jäävuse seadus:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

milles kineetilise ja potentsiaalse energia vahe võrdub nulliga. Viimane võrrand on tegelikult ka eespool tuletatud võrrandis olemas:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{2E}{ma^2 x^2}$$

Näiteks kui me jagame  $H^2$  võrrandi mõlemad pooled kahega, siis saame:

$$\frac{H^2}{2} = \frac{4\pi G}{3} \rho + \frac{E}{ma^2 x^2}$$

Viime viimase võrrandi liikme  $\frac{4\pi G}{3} \rho$  teisele poole võrdusmärgi, tulemuseks saame:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{4\pi G}{3} \rho = + \frac{E}{ma^2 x^2}$$

Viimasest võrrandist on näha seda, et see ei võrdu eespool tuletatud Friedmanni võrrandiga:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{4\pi G}{3} \rho = - \frac{kc^2}{2}$$

ja seda sellepärast, et Newtoni mehaanikast ( s.t. klassikalisest mehaanikast tulenevast energia jäävuse seadusest ) ei tule välja valguse kiiruse  $c$  konstanti sisaldav liige:

$$+ \frac{E}{ma^2 x^2} \neq - \frac{kc^2}{2} = const$$

Seetõttu võibki järeldada seda, et Newtoni mehaanikast ei ole võimalik tuletada Friedmanni võrrandeid. Friedmanni võrrandid tulevad välja ainult relativistliku mehaanika võrranditest ( koos Robertson-Walkeri meetrikaga ), antud juhul siis Albert Einsteini üldrelatiivsusteooria võrranditest.

Kosmoloogias kirjeldatakse ka Milne'i mudelit, mis näitab samuti kosmoloogia põhivõrrandi ehk Friedmanni võrrandi tulenemist klassikalisel teel ehk Newtoni mehaanikast. Selline matemaatiline tuletuskäik mõnevõrra erineb eelnevalt väljatoodust järgnevalt. Esiteks alustame kaasasliikuvate koordinaatide koordinaadisüsteemist, sest meil on vaja kirjeldada Universumi kosmoloogilist paisumist. Seetõttu on kehade vaheline tegelik kaugus  $\vec{r}$  ning algne fikseeritud kaugus  $\vec{r}_0$ :

$$\vec{r} = R(t)\vec{r}_0$$

Ajast sõltuv funktsioon  $R(t)$  on kosmoloogias tuntud mastaabikordaja, mis kirjeldab „*kahe ruumipunkti suhtelise kauguse muutumist ajas*“. Viimasest võrrandist tuleneb ka seos:

$$R(t_0) = 1$$

Universumi ainetiheduse sõltuvust ajas  $\rho(t)$  kirjeldab valem:

$$\rho(t) = \rho(t_0) \frac{r^3(t_0)}{r^3(t)} = \frac{\rho(t_0)r^3(t_0)}{R^3(t)r^3(t_0)} = \frac{\rho(t_0)}{R^3(t)}$$

Universumi paisumise tõttu eemalduvad galaktikad üksteisest ja seetõttu saame kasutada tuntud Newtoni teist seadust:

$$a = \frac{F}{m}$$

Galaktikale mõjuva jõu  $F$  leiame omakorda Newtoni gravitatsiooniseadusest:

$$F = -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{Gm}{r^2(t)} \frac{4\pi r^3(t)}{3} \rho(t) = -\frac{4\pi G}{3} m \rho(t) r(t) = -\frac{4\pi G}{3} m r(t) \frac{\rho(t_0)}{R^3(t)}$$

ehk saame galaktikale mõjuva jõu  $F$  avaldiseks:

$$F = -\frac{4\pi G}{3} m R(t) r_0 \frac{\rho(t_0)}{R^3(t)}$$

Newtoni teise seaduse viime järgmisele diferentsiaalkujule:

$$F = ma = m\ddot{r} = m r_0 \ddot{R}$$

ja sellest tulenevalt saame galaktikale mõjuva jõu diferentsiaalvõrrandi:

$$m r_0 \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} m r_0 \frac{\rho(t_0)}{R^2(t)}$$

ehk

$$R^2 \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \rho(t_0)$$

Kaks täppi tähendab teoreetilises füüsikas teist tuletist aja järgi:

$$\ddot{R} = \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dR}{dt} \right) = \frac{dv}{dt}$$

ja kiirenduse  $a$  võime omakorda avaldada kujul:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \frac{dR}{dR} = \frac{dR}{dt} \frac{dv}{dR} = v \frac{dv}{dR}$$

Galaktika liikumisvõrrandi saame eelnevate seoste põhjal järgmiselt:

$$R^2 v \frac{dv}{dR} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0$$

Viimases võrrandis viime raadiuse  $R$  funktsioonid teisele poole võrdusmärgi:

$$v dv = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{dR}{R^2}$$

ja integreerime, tulemuseks saamegi võrrandi:

$$v^2 = (\dot{R})^2 = +\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{R} + k$$

mis kirjeldab kogu Universumi kosmoloogilist paisumist ehk saime „väidetavalt“ tuletada kosmoloogia põhivõrrandi. Näiteks kui me kõrvutame viimast võrrandit eespool tuletatud Friedmanni võrrandiga, siis me näeme seda, et viimase võrrandi integreerimiskonstandi  $+k$  väärtus peab olema järgmine:

$$v^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{R} = +k = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$+k = -\frac{c^2}{2}$$

Antud juhul puudub viimases võrrandis oleva kiiruse  $c^2$  ees konstant  $k$ , mis määrab Friedmanni võrrandis Universumi ruumi kõveruse. Selle põhjuse seletame ära hiljem. Kuid eelnevalt tuletatud Milne'i mudel on tegelikult füüsikaliselt kõlbmatu ehk kosmoloogia põhivõrrandit ei ole võimalik tuletada Newtoni mehaanikast. Selle põhjuseks on näiteks see, et Milne'i mudelist

$$v^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{R} + k$$

ehk

$$v^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{R} = +k = 0$$

mis peaks väljendama mehaanilist energia jäävuse seadust, ei ole tegelikult võimalik matemaatiliselt tuletada energia jäävuse seaduse võrrandit:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

Seda pole matemaatiliselt võimalik tuletada ja just seetõttu on Milne'i mudel tegelikult füüsikaliselt kõlbmatu. Milne'i mudeli tuletamisel kasutati järgmist Universumi ainetiheduse muutumise valemit:

$$\rho(t) = \rho(t_0) \frac{r^3(t_0)}{r^3(t)} = \frac{\rho(t_0)r^3(t_0)}{R^3(t)r^3(t_0)} = \frac{\rho(t_0)}{R^3(t)}$$

mis tegelikult ongi põhjuseks lõpptulemuse mittekokkulangemisele energia jäävuse seadusega.

#### 1.2.4.6 Energia jäävuse seadus

Energia jäävuse seadus on matemaatiliselt tuletatav aja homogeensusest. Lühidalt seisneb see näiteks järgnevas. Oletame seda, et meil on mingisugune füüsikaline süsteem, mis koosneb n-arvust kehast. Kehade füüsikalised suurused ajahetkel t on kohavektorid

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$$

seisumassid

$$m_{10}, m_{20}, \dots, m_{n0}$$

kiirused

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$$

impulsid

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$$

ja impulsimomendid

$$\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots, \vec{L}_n$$

Järgnevalt vaatleme süsteemi mõnel teisel ajahetkel, mõnest teisest ruumpunktist ja mõnest teisest suunast, kuid kõik muu jätame samasuguseks. Kõiki neid „asju“ käsitleme siin edaspidi skalaarsel kujul. Kui aga antud süsteemiga midagi siiski juhtuks, siis kehade füüsikalised olekud ( s.t. suurused ) muutuvad. Kuid selleks tehti tööd ja see töö summeerub iga süsteemi kuuluva keha tööga A. Kui süsteemiga peaks midagi juhtuma, siis avaldubki see matemaatiliselt järgmiselt:

$$dA = dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n = F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + \dots + F_n ds_n$$

Kui aga süsteemiga ei juhtu mitte midagi, siis seda näitab järgmine avaldis:

$$dA = F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + \dots + F_n ds_n = 0$$

Nüüd järgnevalt vaatleme samasugust süsteemi mõnel teisel ajahetkel:

$$t' = t + dt.$$

kuid kõik muu jätame samasuguseks. Kuna kõik ajahetked on samaväärsed, siis antud süsteemiga ei juhtu mitte midagi. Arvestades võrdust  $dA = 0$ , jõu definitsiooni füüsikast ja liitfunktsiooni tuletuste reegleid matemaatikast, siis saame matemaatiliselt järgmiselt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_{10}}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv_1}{dt} ds_1 + \frac{m_{20}}{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv_2}{dt} ds_2 + \dots + \frac{m_{n0}}{\left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv_n}{dt} ds_n = \\ &= \frac{m_{10}}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds_1}{dt} dv_1 + \frac{m_{20}}{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds_2}{dt} dv_2 + \dots + \frac{m_{n0}}{\left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds_n}{dt} dv_n = \\ &= \frac{m_{10} v_1 dv_1}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_{20} v_2 dv_2}{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{m_{n0} v_n dv_n}{\left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \end{aligned}$$

$$= d \left[ \frac{m_{10}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right] + d \left[ \frac{m_{20}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \right] + \dots + d \left[ \frac{m_{n0}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_n^2}{c^2}}} \right] =$$

$$= dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n = d(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = dA$$

Eelnevast on näha seda, et  $dA = 0$  ehk  $dE = 0$ , mis aga tähendab energia jäävuse seadust:

$$\int dE = E = \text{const.}$$

See tähendab seda, et energia jäävuse seadus tuleneb ajahetkede samaväärsusest ehk aja homogeensusest. ( Lorents 1998, 257-263 )

#### 1.2.4.7 Kosmoloogia põhivõrrand

Universumi paisumiskiirus ajas suureneb, mitte ei vähene. Selline seaduspärasus ei tule välja Robertson-Walkeri meetrikast mistahes Universumi ruumi kõveruse korral ja seetõttu võib järeldada seda, et Robertson-Walkeri meetrikatest tulenev Universumi geomeetriline kõverus ei ole määravaks Universumi paisumise kinemaatikale, seda eriti kui tahetakse kirjeldada Universumi kiirenevat paisumist ehk tume energiat.

Järgnevalt hakkame nägema seda, et Universumi ruumi kõverusest ei sõltu Universumi paisumiskiiruse kinemaatika, vaid see sõltub mehaanilisest energia jäävuse seadusest ja salapärase kordaja  $y$  muutumisest ajas. See tähendab seda, et kogu järgnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs, mis tuleneb eelnevast tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist, näitab meile üsna selgelt seda, et Universumi paisumiskiiruse muutumine ajas ei sõltu tegelikult Universumi ruumi kõverusest nagu seda Robertson-Walkeri meetrikad meile näidata püüavad.

Universumi paisumiskiiruse kinemaatika sõltub mehaanilisest energia jäävuse seadusest. Energia jäävuse seadus tuleneb aja homogeensusest. Tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  füüsilisest süsteemist järeldub, et tavaruumis  $K$  eksisteerib aeg ja ruum, kuid hyperruumis  $K'$  ehk väljaspool aegruumi ei eksisteeri enam aega ega ruumi. Kuna aeg ja ruum on tavaruumis  $K$  olemas ( selle liikumise tõttu hyperruumi  $K'$  suhtes ), siis kehtib selles ka energia jäävuse seadus. Erinevad jäävuseseadused tulenevad just aja ja ruumi erinevatest omadustest, mis omakorda aga eeldavad aja ja ruumi eksisteerimist. Väljaspool aegruumi ehk hyperruumis  $K'$  ei eksisteeri aega ega ruumi.

Eelnevalt oli näha, et energia jäävuse seadus on matemaatiliselt tuletatav aja homogeensusest. Kuna aeg on tavaruumis  $K$  olemas ( selle „liikumise“ tõttu hyperruumi  $K'$  suhtes ), siis kehtib selles ka energia jäävuse seadus. Seetõttu hakkame järgnevalt nägema seda, et kogu järgnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs näitab, et energia jäävuse seaduse tulenevust aja homogeensusest on võimalik näidata ka eelnevast tuletatud ajas rändamise üldvõrrandi pika analüüsi kaudu, mille korral on võimalik sellest tuletada kosmoloogia põhivõrrandi, mis tegelikult ongi oma olemuselt energia jäävuse seadus.

Näiteks eelnevast tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

on võimalik teha järgmised matemaatilised teisendused. Juhul kui  $ct = 0$ , saame järgmise võrrandi

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c.$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled  $t'$ -ga:

$$\frac{vt'}{t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{ct'}{t'}$$

ja sellest tulenevalt saame lõpuks järgmise väga olulise võrrandi:

$$v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

ehk visuaalselt paremini esitatuna:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Kuna aja dilatatsiooni võrrand, mis on tuletatav samuti ajas rändamise üldvõrrandist, on kujul

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja seetõttu saame kinemaatilise teguri avaldada järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}.$$

Ajas rändamise üldvõrrandist tuletatud valemi

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

saame seega viia järgmisele matemaatilisele kujule:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{ct}{t'}$$

ehk

$$v = c \frac{t}{t'}$$

Viime  $t'$  teisele poole

$$vt' = ct$$

ja teisendame viimast võrrandit kujule:

$$v \Delta t = ct,$$

milles  $\Delta t = t'$ .

Kuna tavaruum K liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ , siis peaks teoreetiliselt Universum paisuma samuti kiirusega  $c$ . Kuid tegelikkuses on Universumi paisumiskiirus valguse kiirusest  $c$  palju kordi väiksem. Ainus võimalus kuidas sellist näilist dilemmat ratsionaalselt seletada on see, et kiiruste erinevus on tingitud aja ja ruumi teisenemisest üle kogu Universumi. Näiteks eelnevalt tuletatud võrrandis

$$v\Delta t = ct$$

on näha üsna selgelt, et kiiruste erinevuse võib tingida asjaolu, et aeg on teisenenud:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{c}{v} = y$$

milles  $y$  on tuntud kinemaatiline tegur erirelatiivsusteooriast:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

või üldrelatiivsusteooriast

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

Kuna eespool tuletatud kiiruste teisenemise relativistlikus valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

näitab erinevate kiiruste suhet kinemaatiline tegur  $y$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{v}$$

siis aja dilatatsiooni valemi järgi

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

näitabki  $y$ -faktor aja teisenemist:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = y$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et tavaruum K „liigub“ hyperruumi  $K'$  suhtes konstantse kiirusega  $c$ , mis põhjustab aja teisenemise ehk  $y$  väärtuse vähenemist. Kuid samas  $y$  vähenemine tingib



omakorda Universumi paisumiskiiruse suurenemist paisuva Universumi sees olevale vaatlejale.

Eelnevalt tuletatud võrrandist

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on võimalik matemaatiliselt tuletada kosmoloogia põhivõrrand ehk Friedmanni võrrand ja ka keha seisuenergia valem  $E = mc^2$ . Näiteks keha m kineetiline energia E avaldub valemiga:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Kui kiirused on väikesed võrreldes valguse kiirusega vaakumis, siis saab kasutada ligikaudseid valemeid:

$$\frac{1}{y} \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2$$

Kinemaatilise teguri y avaldist:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

võib esitada ka järgmiselt

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

milles  $\beta^2$  avaldub nõnda:

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}.$$

Kõike eelnevat arvestades võib kinemaatilise teguri y asendada ligikaudse valemiga:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{4} \frac{v^4}{c^4}},$$

sest  $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ . Kuna liige

$$-\frac{1}{4} \frac{v^4}{c^4}$$

on väga väike, siis saame viimase avaldise kirjutada nõnda:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Sellest tulenevalt saame y avaldada järgmiselt:

$$y \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

või

$$\frac{1}{y} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

ja sooritada järgmised matemaatilised teisendused:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c \frac{1}{\gamma} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Kui me korrutame võrrandi mõlemad pooled  $mc$ -ga, siis saame järgmise „tehete analüüsi“:

$$v \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ehk

$$mcv \approx mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

milles kaotame ära sulud:

$$mcv \approx mc^2 - \frac{mv^2}{2}$$

ja avaldame kineetilise energia:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv$$

Viimase tuletatud võrrandi

$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)' = (mc^2 - mcv)$$

füüsikaline sisu seisneb järgmises analüüsis. Näiteks kui keha  $m$  liikumiskiirus on tavaruumi  $K$  suhtes null ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes on keha kineetiline energia võrdne relatiivsusteooriast tuntud seisue energiaga ehk

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2.$$

Kui aga keha liikumiskiirus on tavaruumi suhtes võrdne valguse kiirusega  $c$  ehk  $v = c$ , siis hyperruumi suhtes on keha kineetiline energia null ehk

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mc^2 = 0.$$

Kogu eelneval juhul on  $\frac{mv^2}{2}$  keha kineetiline energia hyperruumi suhtes ja seetõttu etendab see avaldis ainult matemaatilise definitsioonina ehk

$$\frac{mc^2}{2} \neq mc^2,$$

vaid

$$E'_k = mc^2 - mcv$$

ehk

$$E'_k = E_k.$$

See tähendab seda, et keha  $m$  kineetiline energia  $E'_k$  hyperruumi suhtes

$$E'_k = \frac{mv'^2}{2}$$

sõltub sellest, milline on keha liikumiskiirus  $v$  tavaruumi  $K$  suhtes:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv = mc(c - v)$$

ehk

$$\frac{mv^2}{2} = mc(c - v)$$

ehk

$$E'_k = mc(c - v).$$

Kuid samas keha kogu energia avaldises

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

on võrrandi liige  $\frac{mv^2}{2}$  ainult tavaruumi suhtes vaadatuna. Selles on näha, et kui keha liikumiskiirus  $v$  on tavaruumi suhtes null ehk  $v = 0$  (ja seega  $\frac{mv^2}{2} = 0$ ), siis keha kineetiline energia  $E$  hyperruumi suhtes on  $E = mc^2$ , mida me nimetame keha „seisuenergiaks“.

Eelnevalt tuletatud võrrandis

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv$$

viime liikme  $-mcv$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{mv^2}{2} + mcv = mc^2$$

Arvestame järgnevalt seda, et kui liikmes  $+mcv$  on  $v = 0$ , siis saame võrrandiks

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

ja sellest seosest tulenevalt on  $v^2 = -c^2$ :

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Viimane seos  $v^2 = -c^2$  tuleneb ametlikust erirelatiivsusteooria geomeetriast, milles neljamõõtmelise impulsi ruut  $p_\mu p_\mu$  on defineeritav koos seisuenergiaga järgmiselt:

$$-m_0^2 c^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{m_0^2 (v^2 - c^2)}{1 - \beta^2} = p_\mu p_\mu ,$$

milles olev kordaja liige

$$\frac{v^2 - c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v_\mu v_\mu = v^2 = -c^2 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = -c^2$$

on ajasarnane vektor ja see on konstant.  $v_\mu v_\mu$  on siin aga neljamõõtmelise kiiruse ruut, mis näitab tegelikult seda, et kõik kehad Universumis liiguvad valguse kiirusega  $c$ . Sellest tulenevalt on (neljamõõtmeline kiirus)vektor  $v_\mu$  avaldatav aga järgmiselt

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} ,$$

milles olev jagatise liige

$$\tau = t\sqrt{1 - \beta^2}$$

on liikuva keha omaaeg ja seega saame kiirusvektori lõplikuks seoseks:

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{t\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Vastavalt neljamõõtmelise kiirusvektori matemaatilisele definitsioonile tuleb impulsi  $p$  kuju

$$p = m_0 v$$

teistsuguste tähistustega järgmiselt

$$p_\mu = m_0 v_\mu$$

Eelnevalt tuletatud võrrandis

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv$$

viisime liikme  $-mcv$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{mv^2}{2} + mcv = mc^2$$

ja kui see võrrandi liige võrdub nulliga:

$$mcv = 0$$

ehk kiirus on null  $v = 0$ , siis saime järgmise väga tähtsa avaldise:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

Kuid nüüd näitame seda, et viimane avaldis on tegelikult samaväärne järgmise valemiga:

$$\frac{mv^2}{2} = mcv$$

kui viimases valemis on võrrandi liikmes  $mcv$  kiirus  $v = c$ . Kui aga  $v = 0$ , siis saame kineetilise energia, mis võrdub nulliga:

$$\frac{mv^2}{2} = 0$$

Mehaanilise energia jäävuse seaduse kohaselt peab keha potentsiaalne energia olema maksimaalne, kui tema „liikumisenergia“ ehk kineetiline energia võrdub nulliga:

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{R}$$

Sellest tulenevalt saame järgmise seose:

$$-\frac{GMm}{R} = mcv$$

milles  $v = 0$ . Kogu eelnevat mõttekäiku põhjendame kohe järgmise füüsikalise analüüsiga. Näiteks kui võrrandi liikmes  $mcv$  on  $v = 0$ , siis see tähendab füüsikaliselt seda, et tavaruumi K suhtes on keha m paigal, kuid hyperruumi K' suhtes liigub keha m kiirusega c. Seetõttu on keha m kineetiline energia  $\frac{mv^2}{2} = E_k$  võrdne  $E = mc^2$  ja seda siis hyperruumi K' suhtes. Antud juhul on siin tegemist kineetilise energia definitsiooniga:  $E_k$ . Kuna seoses  $mcv$  on  $v = 0$ , mis tähendab seda, et keha m on tavaruumi K suhtes paigal ehk keha kineetiline energia on tavaruumi K suhtes null, siis seega tavaruumi K suhtes olev keha m paigalseisu ehk potentsiaalne energia on võrdne gravitatsioonilise potentsiaalse energiaga järgmiselt:

$$mcv = -\frac{GMm}{R}$$

ja see potentsiaalne energia ei võrdu võrrandis enam nulliga. Kõiki eelnevaid seoseid arvestades saamegi järgmise väga olulise võrrandi:

$$\frac{mv^2}{2} + mcv = mc^2$$

ehk

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{mc^2}{2}$$

milles

$$+mcv = mc^2 = \frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{R}$$

ja

$$mc^2 = \frac{mv^2}{2} = -\frac{mc^2}{2}$$

Massid m taanduvad kõik maha:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimane tuletatud seos väljendab tegelikult otseselt mehaanilise energia jäävuse seadust:

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

milles

$$E = E_k + E_p = \frac{v^2}{2} + \left(-\frac{GM}{R}\right) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \text{const} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimases seoses olev konstant  $-\frac{c^2}{2}$  ei tule matemaatiliselt välja klassikalises mehaanikas tuntud energia jäävuse seadusest. Sellise energia jäävuse seaduse kuju on võimalik tuletada ainult relativistliku mehaanika teel nagu me seda siin eelnevalt tegime. Hiljem me näeme seda, et viimases võrrandis olev konstandist liige  $-\frac{c^2}{2}$  võib võrduda ka nulliga:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

millest omakorda saame mehaanilise energia jäävuse seaduse klassikalisel kujul:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

Saadud viimane võrrand

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

sobib hästi kirjeldama Universumi kosmoloogilist paisumist. Näiteks viimases võrrandis olev kiirus  $v$  võib olla Universumi paisumiskiirus ehk tuntud Hubble'i seadus  $v = HR$ :

$$\frac{H^2}{2} = \frac{GM}{R^3}$$

Robertson-Walkeri meetrikast on teada seda, et Hubble'i konstant  $H$  võrdub:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ja seetõttu saame viimase võrrandi kujule

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$

ehk

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{GM}{R^3}$$

Viime liikme  $a^2$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = \frac{GM}{R^3} a^2$$

Massi  $M$  võime avaldada tiheduse kaudu:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$$

ja seega saame võrrandi kujuks järgmiselt:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho a^2$$

Viime võrrandi kõik liikmed ühele poole võrdusmärgi ja saame:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = 0$$

Kuna viimane võrrand on saadud eespool tuletatud võrrandist:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

mis tegelikult nulliga ei võrdu:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

siis seega saame järgmiselt:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

Viimane võrrand on peaaegu identne Robertson-Walkeri meetrikatest saadud Friedmanni võrrandiga:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

milles  $k = 1, 0, -1$ . See tähendab seda, et kui viimases võrrandis on  $k$  väärtuseks  $+1$  ehk tegemist oleks Universumi positiivse kõveruse ruumiga, siis saamegi eelnevalt tuletatud võrrandiga täiesti identse seose:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et eelnevalt tuletatud võrrand on Robertson-Walkeri meetrika järgi tegemist positiivse kõveruse ruumiga ja seega kõik teised Universumi ruumi kõverused ( s.t. tasane või negatiivne kõverus ) on välistatud. Tegelikult me hakkame järgnevalt nägema seda, et ka positiivsest kõverusest ruumist ei sõltu Universumi paisumiskiiruse kinemaatika, vaid see sõltub mehaanilisest energia jäävuse seadusest ja salapärase kordaja  $y$  muutumisest ajas.

#### 1.2.4.8 de Sitteri Universum

Kui meil on tegemist “vaakumenergia-dominantse Universumiga”, siis sellisel juhul peab kehtima seos:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

See tähendab seda, et Universumi paisumiskiirus ehk mastaabiteguri muutumise kiirus on võrdeline Universumi mastaabiteguri:  $\dot{a} \sim a$ .

Enne Universumi tumeenergia avastamist arvati seda, et Universumi paisumine aegleneb aine-energia gravitatsioonilise tõmbumise tõttu:  $\ddot{a} < 0$ . Kiirgusdominant-ses universumis kehtiks selline seos:  $a \sim \sqrt{t}$  ja  $\dot{a} \sim t^{-\frac{1}{2}}$ , kuid aine-dominantses universumis:  $a \sim t^{\frac{2}{3}}$  ja  $\dot{a} \sim t^{-\frac{1}{3}}$ . Nendes tähistab  $a$  Universumi mastaabi-

tegurit.

See viib “eksponentsiaalsele paisumisele”:

$$a(t) = a(t_1) * e^{\frac{t-t_1}{\Delta\tau}}$$

milles

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{3}{\Lambda c^2}} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}}$$

Kuna Robertson-Walkeri meetrikas avaldub Hubble’i konstant  $H$  ka niimoodi:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{R}}{R}$$

siis võime eksponentsiaalse võrrandi kirjutada kujule:

$$R(t) = R(t_1) * e^{\frac{t-t_1}{\Delta\tau}}$$

Sellist Universumit nimetatakse “de Sitteri universumiks”. Selles on näha, et mida suurem on Universum, seda kiiremini see paisub. Mida suurem on vaakumi negatiivne rõhk ja  $\rho_\Lambda$ , seda kiiremini paisub Universum, kuna  $\rho_\Lambda$  on konstant. Viimane seos ei ole tegelikult päris täpne, kuna Hubble’i konstandi  $H$  ja Universumi vanuse  $t$  vahelist seost võib esitada ka järgmiselt:

$$\begin{aligned} H = \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho a^2} * \frac{1}{\sqrt{2ca_m t}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} a^2 * \frac{3}{32\pi G t^2} * \frac{1}{2ca_m t}} = \\ &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} * 2ca_m t * \frac{3}{32\pi G t^2} * \frac{1}{2ca_m t}} = \sqrt{\frac{1}{4t^2}} = \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

Seetõttu võime kirjutada:

$$H^2 = \frac{1}{4t^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Järgnevalt analüüsime Universumi vanuse ja tiheduse seost:

$$\frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda = \frac{8\pi G}{3} \frac{M}{V} = \frac{8\pi G}{3} M \frac{3}{4\pi R^3} = \frac{2GM}{R^3}$$

ehk

$$\frac{1}{4t^2} = \frac{2GM}{R^3}$$

Saadud seoses on näha kineetilise energia ja potentsiaalse energia avaldisi:

$$\frac{1}{4} \frac{R^2}{t^2} = \frac{1}{4} v^2 = \frac{2GM}{R}$$

Kuid antud juhul peame arvestama valguse kiiruse ruuduga:



$$\frac{2GM}{R} = c^2$$

Selle kasutamist põhjendame natuke hiljem. Selline käik annab meile järgmise avaldise:

$$\frac{v^2}{4} = c^2$$

Korrutame viimase avaldise mõlemad pooled massiga m:

$$\frac{mv^2}{4} = mc^2$$

ja teisendame vastavalt:

$$\frac{mv^2}{2} = 2mc^2 = mc^2 + mc^2$$

Saadud avaldise:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 + mc^2$$

võime seose  $v^2 = -c^2$  tõttu kirjutada kujule:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mv^2$$

ehk

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mc^2$$

Selline tulemus kattub täielikult eespool saadud avaldisega, mis näitab selgelt, et ajas rändamise üldvõrrandist on võimalik tuletada kosmoloogia põhivõrrand ehk Friedmanni võrrand. Kuid edasiseks analüüsiks viime võrrandis:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 + mc^2$$

ühe liikme teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{mv^2}{2} - mc^2 = mc^2 = E$$

Tulemuseks saime sellise võrrandi:

$$E = \frac{mv^2}{2} - mc^2$$

mis kattub peaaegu erirelatiivsusteoorias tuntud füüsikalise keha koguenergia avaldisega:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mc^2$$

Ainus vahe seisneb märgis, kuna ühes avaldises esineb lahutus ja teises liitmine. Seetõttu peame antud juhul arvestama ainult sellega, et kui  $v = 0$ , siis saame:

$$E = -mc^2$$

ja kui me seda võrrandit võtame ruutu ja seejärel ruutjuure, siis saame positiivse lõpptulemuse:

$$E = mc^2$$

Saadud lõpptulemus kattub erirelatiivsusteooriast tuntud keha seisuenergia võrrandiga, mis viitab kindlalt sellele, et Universumi paisumisel ja keha seisuenergial on omavahel mingisugune seos.

Kuid siinkohal peame põhjendama eespool kasutatud võtet:

$$\frac{2GM}{R} = c^2$$

Tegemist on põhimõtteliselt Schwarzschildi raadiuse  $R$  avaldisega, kuid põhjendame seda järgmise analüüsiga. Näiteks võtame eespool esitatud seosest:

$$H^2 = \frac{1}{4t^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

sellise võrduse:

$$\frac{1}{4t^2} = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Teisendame viimast avaldist järgmiselt:

$$\frac{3}{4\Lambda} = c^2 t^2 = l^2$$

ja arvestame hiljem saadava seosega:

$$\frac{3}{\Lambda} = -R^2$$

Tulemuseks saame:

$$-\frac{R^2}{4} = c^2 t^2$$

ehk

$$-\frac{1}{4} \frac{R^2}{t^2} = c^2$$

milles ongi näha valguse kiiruse ruutu:

$$-\frac{v^2}{4} = c^2$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ :

$$-\frac{mv^2}{4} = mc^2$$

ja teisendame vastavalt:

$$-\frac{mv^2}{2} = 2mc^2 = mc^2 + mc^2$$

Saadud avaldises:

$$-\frac{mv^2}{2} = mc^2 + mc^2$$

kaotame ära miinus-märgi. Selleks tõstame mõlemad pooled ruutu ja seejärel võtame ruutjuure:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 + mc^2$$

Viimases saame jälle rakendada seost:  $v^2 = -c^2$ , mille tulemusena kirjutame võrrandi kujule:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mv^2$$

See kattub täielikult eespool saadud avaldisega:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mc^2$$

Ka sellise analüüsi tulemusena jõudsimme avaldiseni, mis tuletatakse muidu ajas rändamise üldvõrrandist. Kuid edasiseks analüüsiks viime võrrandis:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 + mc^2$$

ühe liikme teisele poole võrdusmärgi:

$$E = \frac{mv^2}{2} - mc^2$$

Kui  $v = 0$ , siis lõpptulemus kattub täielikult eespool saadud avaldistega:

$$E = -mc^2$$

ehk

$$E = mc^2$$

mis näitab kogu eelneva analüüsi õigsust ja kehtivust.

#### 1.2.4.9 Universumi paisumise kiirus

Kuid enne, kui me läheme kosmoloogia põhivõrrandi sügava analüüsi juurde, peame tõestama eelnevaid mõtteanalüüse. See tähendab, et kogu eelnev arutluskäik on tõestatav järgmise matemaatilise analüüsiga, mis näitab eelnevalt näidatud tuletuste õigsust.

Esiteks edasiseks analüüsiks teeme alguses nii, et eespool tuletatud kosmoloogia põhivõrrandis

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

võrduks  $H$  nulliga:

$$-\frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Kirjutame massi  $M$  asemele Universumi aine ja energia tiheduse:

$$\frac{G4\pi R^3}{R^3 3} \rho = \frac{c^2}{2}$$

ja teostame mõned lihtsad matemaatilised teisendused, tulemuseks saame:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = c^2$$

Viimasest seosest saame avaldada Universumi tiheduse võrrandi:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3c^2}{8\pi G}$$

Jätame selle meelde ja edasiseks analüüsiks paneme hoopis konstandi  $c$  kosmoloogia põhivõrrandis:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

võrduma nulliga, tulemuseks saame:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = 0$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

milles Hubble'i seadus on  $v = HR$  ja  $M$  on Universumi tihedus. Sellest tulenevalt saame võrrandi:

$$\frac{H^2 R^2}{2} = \frac{4\pi G R^3}{3R} \rho_0$$

milles me näeme seda, et konstant  $8\pi G$  võrdub:

$$\frac{H^2 R^2 3R}{R^3 \rho_0} = 8\pi G = \frac{H^2}{\rho_0} 3$$

ehk

$$8\pi G = \frac{c^2 3}{\rho}$$

Kuna Universumi paisumise alghetkel oli selle aine-energia tihedus ülisuur, siis sellisel suhteliselt väga lühikesel kosmoloogilisel ajaperioodil oli määravaks ka Universumi rõhk. Universumi rõhk  $p$  oli esimest korda esitatud Friedmanni esimeses võrrandis:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

Järgnevalt analüüsiks arvestame ainult võrrandi teist poolt:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \rho = -\frac{4\pi G a}{3} \frac{3p}{c^2} = -\frac{4\pi G a}{c^2} p$$

milles  $p$  ongi Universumi rõhk. Viimasest võrrandist saame ka Hubble'i konstandi  $H$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2} = -\frac{4\pi G}{c^2} p$$

ehk

$$-\frac{H^2}{2} = -\frac{4\pi G}{c^2} p$$

mis näitabki seda, et Universumi paisumine sõltus ka Universumi aine-energia rõhust  $p$ . Korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$-\frac{2H^2}{2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p$$

kuna eespool saime tuletada võrduse:

$$8\pi G = \frac{H^2}{\rho} 3$$

Kui me nüüd avaldamegi niimoodi  $8\pi G$ , siis saame sellise seose:

$$-\frac{2H^2}{2} = -\frac{H^2 3}{\rho c^2}p$$

mis kattub Friedmanni võrrandis oleva Universumi rõhu  $p$  ja tiheduse  $\rho$  omavahelise seosega:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

Kuid lisaks eelnevale võime eespool tuletatud võrrandis:

$$-\frac{2H^2}{2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p$$

kasutada ka sellist võrdust:

$$8\pi G = \frac{c^2}{\rho} 3$$

milles  $H = c$ . Kui viime  $c^2$  teisele poole võrdusmärgi, siis saame seose:

$$\frac{8\pi G}{c^2} = \frac{3}{\rho}$$

Friedmanni võrrandis oli Universumi rõhk  $p$  ja tihedus  $\rho$  omavahel seotud järgmiselt:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

mildest omakorda saame  $c^2$  võrduse:

$$\frac{p 3}{\rho} = c^2$$

Arvestades viimaseid lihtsaid seoseid, saame tuletada järgmise tuntud võrrandi:

$$-\frac{2H^2}{2} = -H^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p = -\frac{3}{\rho}p = -c^2$$

ehk

$$-H^2 = -c^2$$

milles on näha seda, et  $H = c$ . Selline kokkulangevus ei saa olla juhuslik. Universumi rõhu võrrandi füüsikaline ja matemaatiline analüüs näitab seda, et kosmoloogias taanduvad kõik põhivõrrandid

sellele, et Universum paisubki tegelikult valguse kiirusega  $c$ .

Näiteks kui eespool tuletatud kosmoloogia võrrandis

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

võrdub konstant nulliga

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = 0$$

ja viime ühe liikme teisele poole võrdusmärki nii, et mõlemad võrrandi pooled oleksid negatiivsed

$$-\frac{1}{2}(\dot{a})^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho a^2$$

siis saame järgmise võrduse, mis antud juhul on esitatud postulaadina:

$$-\frac{1}{2}(\dot{a})^2 \frac{1}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a = \ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$$

ehk

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2} \frac{(\dot{a})^2}{a}$$

Viimane seos on kosmoloogias tuntud Friedmanni võrrandina juhul, kui Universumi rõhk on null ehk  $p = 0$ . Kuid seda hakkame tõestama alles hiljem. Robertson-Walkeri meetrikast on Hubble'i konstant  $H$  esitatav järgmiselt:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

milles

$$\dot{a} = Ha$$

Sellest tulenevalt saame viimase võrrandi kujuks

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2}H^2 a$$

ehk

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H^2 = -\frac{H^2}{2}$$

Kui me võtame Hubble'i konstandist  $H$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ühekordse tuletise aja järgi, siis saame

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}\dot{a}}{a^2} = \frac{\ddot{a}a}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

ehk

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

Kuna viimases võrduses olev liige on esitatav eelnevalt saadud seose põhjal

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2}$$

siis saame järgmise väga olulise võrrandi:

$$\dot{H} = -\frac{H^2}{2} - H^2$$

Järgnevalt arvestame seda, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ :

$$H = v = c$$

ja seega saame

$$\dot{c} = -\frac{c^2}{2} - c^2$$

Kuna konstandist  $c$  tuleb on null

$$0 = -\frac{c^2}{2} - c^2$$

ja kui me korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ , siis saame

$$0 = -\frac{mc^2}{2} - mc^2$$

Viime võrrandi liikme  $-mc^2$  teisele poole võrdusmärgi

$$mc^2 = -\frac{mc^2}{2}$$

ja arvestame erirelatiivsusteooriast tulenevat seost

$$-c^2 = v^2$$

ning lõpuks saamegi võrrandi

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

Kuna kineetilise energia klassikaline valem on avaldatav järgmiselt:

$$\frac{mv^2}{2} = E$$

siis saame esitada seisuenergia võrrandi:

$$E = mc^2$$

mida võib mõista kineetilise energia definitsioonina. See tähendab seda, et Universum paisub ajas tegelikult valguse kiirusega ja seetõttu on kõikidel kehal Universumis kineetiline energia, mis antud juhul avaldubki seisuenergia valemiga. Sellest tulenevalt on kõikidel eksisteerivatel kehal Universumis ka impulss  $p$ :

$$\frac{E}{c} = mc$$

ehk

$$mc = p$$

milles  $v = c$ . Ka see näitab, et kõik kehad Universumis liiguvad tegelikult valguse kiirusega, kuna Universum paisub kiirusega  $c$  ja koos sellega liiguvad ka kõik kehad valguse kiirusega  $c$ . Viimane

saadud võrrand

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

on tegelikult samaväärne võrrandiga

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - 0$$

ehk

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv$$

kui keha  $m$  kiirus võrdub tavaruumi  $K$  suhtes nulliga:  $mcv = 0$  ehk  $v = 0$ . Kuna saimegi uuesti tagasi võrrandile, millest kosmoloogia põhivõrrand on ajas rändamise teoorias tuletatud, siis seega on kogu eelnev arutluskäik ja mõtteanalüüs tõestatud.

Siinkohal on huvitav märkida seda, et seisuenergia võrrand tuletatakse mõnedes muudes erirelatiivsusteooria kirjanduse allikates klassikalisest kineetilise energia  $E$  avaldisest:

$$E = \frac{mv^2}{2} = mk$$

ehk

$$E_{kin} = m_{kin}k$$

Kuna keha mass kasvab võrdeliselt kinemaatilise teguriga  $y$  ehk liikuva keha mass suureneb  $y$  korda, võrreldes seisva massiga, siis kineetilise massi avaldiseks saame:

$$m_{kin} = m - m_0 = ym_0 - m_0 = m_0(y - 1)$$

milles

$$m = ym_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0$$

Kineetilise energia valemi saame seega viia kujule:

$$E_{kin} = m_0(y - 1)k$$

Väikeste kiiruste korral kasutatakse  $y$  jaoks ligikaudset valemit:

$$y = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

ja sellest tulenevalt saame klassikalise kineetilise energia valemi:

$$E_{kin} \approx m_0 \frac{v^2}{2c^2} k$$

ning seisuenergia võrrandi

$$E_{kin} = m_{kin}k$$

kui  $k = c^2$ .

Erirelatiivsusteoorias tuletatud seisuenergia võrrand kirjeldab sellist energiat, mis on oma olemuselt aine eksisteerimise energia Universumis. Tähelepanuväärne asjaolu on selle juures see, et see võrrand on põhimõtteliselt tuletatav ka otse klassikalisest mehaanikast. Näiteks mehaanilise energia jäävuse seadusest:



$$\frac{mv^2}{2} = E_k = \frac{GMm}{R} = U$$

saamegi kohe seisuenergia  $E$  avaldise:

$$mv^2 = \frac{2GMm}{R}$$

kui keha kiirus  $v$  oleks võrdne valguse kiirusega  $c$ :

$$E = mc^2 = \frac{2GMm}{R} = 2U = 2E_k$$

Viimases võrrandis me näeme seda, et seisuenergia on võrdne kahekordse gravitatsioonipotentsiaaliga. Kui aga arvestada kosmoloogias tuletatud võrrandiga:

$$\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

siis saame järgmised huvitavad seosed:

$$E = mc^2 = \frac{GMm}{R} = U = E_k$$

Selliste seoste juures tasub märkida seda, et gravitatsiooniväli ei ole energiaväli ja seetõttu võib seos:

$$E = U = \varphi$$

väljendada hoopis energiavälja potentsiaali ( näiteks elektrivälja potentsiaali ). Seisuenergia avaldis on matemaatiliselt tuletatav ka Newtoni teisest seadusest:

$$F = ma = mv \frac{1}{t}$$

Näiteks kui me paneme Newtoni teise seaduse töö  $A$  definitsiooni kirjeldavasse valemisse:

$$A = E = Fx$$

siis saamegi seisuenergia avaldise

$$E = mv \frac{x}{t} = mv^2$$

kui keha kiirus  $v$  oleks samuti võrdne valguse kiirusega  $c$ :

$$E = mc^2$$

Kuigi seisuenergia võrrandi range matemaatiline tuletamine sooritatakse eelkõige relativistlikus mehaanikas, siis sellest hoolimata on seisuenergia võrrand põhimõtteliselt avaldunud mingil määral ka Newtoni mehaanikast.

### 1.2.4.10 Friedmanni võrrandite lahendid

Järgnevalt uurime ja esitame edasiseks analüüsiks eelnevalt tuletatud Friedmanni võrrandite lahendeid Universumi tasase ruumi korral. Universumi tasast ruumi kirjeldab järgmine Robertson-Walkeri meetrika:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \{ (d\chi)^2 + K[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] \}$$

milles  $K = \chi^2$  ehk Universumi ruum on tasane. Selle muutumispiirkonnad on  $\chi \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Robertson-Walkeri meetrika võib esitada ka järgmisel kujul:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] \right\}$$

Kuna Universumi ruum on tasane ehk  $k = 0$ , siis saame viimase võrrandi kujule

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \{ dr^2 + r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] \}$$

milles suurus  $r$  on koordinaadisüsteemiga kaasasliikuv radiaalkoordinaat. Friedman'i võrrandite lahendid parameetrilisel kujul juhul  $p = 0$  tasase ruumi korral ( $k = 0$ ) on aga järgmised:

$$t = \frac{a_m}{12c} \eta^3, \quad a = \frac{a_m}{4} \eta^2, \quad H = \frac{8c}{a_m} \eta^{-3},$$

milles

$$\eta = 0 \leq \eta \leq \infty.$$

Järgnevalt uurime ja analüüsime Hubble'i konstandi  $H$  muutumist ajas ehk Universumi paisumiskiirust ajas. Näiteks võtame sellest järgmise piirväärtuse:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} H = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{8c}{a_m} \eta^{-3} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{8}{a_m} \frac{c}{\eta^3} = \frac{8}{a_m} \frac{c}{0} = \infty$$

Viimane piirväärtuse arvutus näitab, et Universumi paisumise algmomendil ehk  $t = 0$  oli Universumi paisumiskiirus lõpmata suur ehk  $H(t) \rightarrow \infty$ . See on aga vastuolus astronoomiliste vaatlustega. Kuid võtame Hubble'i konstandist  $H$  järgmise piirväärtuse:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} H = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{8c}{a_m} \eta^{-3} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{8}{a_m} \frac{c}{\eta^3} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\infty c}{\infty} = c$$

Viimane piirväärtus on saadud seetõttu, et  $a_m$  on null, sest see näitab Universumi ruumi kõverust ja tasase ruumi korral on selle väärtus null:

$$\frac{8}{a_m} = \frac{8}{0} = \infty$$

Lõpmatus kuubis võrdub ikka lõpmatusega:

$$\infty^3 = \infty$$

ja lõpmatuste jagatis võrdub ühega

$$\frac{\infty}{\infty} = 1$$

sest nende lahutamine võrdub nulliga:

$$\infty - \infty = 0$$

$c$  on valguse kiirus vaakumis ja integreerimiskonstant  $a_m$  näitab seda, et kui kõver on ruum ( antud juhul on see null ehk tasane:  $a_m = 0$  ). Viimane piirväärtus näitab meile seda, et lõpmata kauges tulevikus ehk  $t \rightarrow \infty$  on Universumi paisumiskiirus vähenenud kiiruseni  $c$ . Hubble'i konstandi  $H$

$$H = \frac{8c}{a_m} \eta^{-3}$$

võime kirjutada järgmisele kujule

$$H = y c$$

milles olev kordaja  $y$  on

$$y = \left( \frac{8}{a_m} \frac{1}{\eta^3} \right)$$

Selle kordaja  $y$  muutumiskiirkond on antud juhul

$$y = 1 \leq y \leq \infty$$

ja seetõttu on Hubble'i konstandi  $H$  muutumise seaduspärasus ajas

$$H = y c$$

vastuolus empiiriliste vaatlusandmetega, sest Universumi paisumiskiirus ajas suureneb, mitte ei vähene. Tuleb märkida seda, et eeltoodud seaduspärasus tulenes Robertson-Walkeri meetrikast Universumi tasase ruumi korral. Õigem oleks aga järgmine muutumiseseadus

$$H = \frac{c}{y}$$

milles oleva kordaja  $y$  muutumiskiirkond on samuti

$$y = 1 \leq y \leq \infty$$

ja see on juba heas kooskõlas astronoomiliste vaatlusandmetega, sest Universumi paisumiskiirus ajas suureneb, mitte ei vähene. Selline seaduspärasus ei tule välja Robertson-Walkeri meetrikast mistahes Universumi ruumi kõveruse korral ja seetõttu võib järeldada seda, et Robertson-Walkeri meetrikatest tulenev Universumi geomeetriline kõverus ei ole määravaks Universumi paisumise kinemaatikale, seda eriti kui tahetakse kirjeldada Universumi kiirenevat paisumist ehk tume energiat.

Hubble'i konstant  $H$

$$H = \frac{c}{y}$$

näitab Universumi paisumiskiirust  $v$

$$v = \frac{c}{y}$$

ja siin ongi näha seda, et Universumi paisumiskiirus sõltub tegelikult aja teisenemisest üle kogu Universumi:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{c}{v} = y$$

milles  $\gamma$  on tuntud kinemaatiline tegur erirelatiivsusteooriast:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

või üldrelatiivsusteooriast:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

See tähendab seda, et kui kinemaatiline tegur  $\gamma$  näitab erinevate kiiruste suhet

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{v}$$

siis erirelatiivsusteooriast tuntud aja dilatatsiooni valemi järgi

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

näitabki  $\gamma$ -faktor aja teisenemist:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et tavaruum  $K$  „liigub“ hyperruumi  $K'$  suhtes konstantse kiirusega  $c$ , mis põhjustab aja teisenemise ehk  $\gamma$  väärtuse vähenemist. Kuid samas  $\gamma$  vähenemine tingib omakorda Universumi paisumiskiiruse suurenemist paisuva Universumi sees olevale vaatlejale.  $\gamma$  muutumine näitab Universumi kosmoloogia ajalist arengut.  $\gamma$  suurus näitab seda, et mitu korda on aeg ja ruum teisenenud Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale või mitu korda on aeg ja ruum teisenenud Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale.  $\gamma$  ei ole konstant. Selle väärtus muutub ajas väiksemaks, mille tulemusena Universumi paisumiskiirus Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale ajas suureneb.

#### 1.2.4.11 Kosmoloogiline konstant

Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverus, mida kirjeldab matemaatiliselt Albert Einsteini diferentsiaalvõrrand:

$$G_{\mu\nu} \left( g_{\rho\delta}(x) \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Seda võrrandit analüüsime üldrelatiivsusteooria osas palju pikemalt ja seetõttu me seda siin tegema

ei hakka. Kuid viimast võrrandit esitas Albert Einstein alguses tegelikult koos “kosmoloogilise konstandiga”  $\Lambda$ :

$$G_{\mu\nu} (g_{\rho\delta}(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda$$

kuna ta soovis kirjeldada staatilist ehk mittepaisuvat Universumit. Universumi aegruumi kirjeldavad Robertson-Walkeri meetrikad:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dl_k^2$$

milles võib esineda positiivse, tasase või negatiivse kõverusega ruum:

$$dl_k^2 = \begin{cases} d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & k = +1 \\ d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & k = 0 \\ d\chi^2 + sh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & k = -1 \end{cases}$$

Energia-impulss tensor avaldub üldisel kujul järgmiselt:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v^i \\ \rho c v^j & \rho v^i v^j + p \delta^{ij} \end{pmatrix}$$

kuid ainega kaasaliikuvast koordinaatsüsteemis on selle kuju:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Kui Albert Einsteini gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrandis oleksid Robertson-Walkeri meetrikad, siis saaksime tuletada Friedmanni võrrandid koos kosmoloogilise konstandiga  $\Lambda$ :

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda)$$

ja

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left[ (p_M + p_\Lambda) + \frac{1}{3} (\rho_{AE} + \rho_\Lambda) c^2 \right]$$

milles esinevad kosmoloogilisest konstandist tingitud energiatihedus

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

ja “negatiivne rõhk”:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 < 0$$

Kosmoloogilise konstandi korral viib positiivne energiatihedus negatiivse rõhuni.

Friedmanni võrrandites:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda)$$

ja

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left[ (p_M + p_\Lambda) + \frac{1}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda) c^2 \right]$$

esinevad gravitatsioonilisele külgetõmbele alluva aine-energia tihedus  $\rho_M$  ja rõhk  $p_M$  ning kosmoloogilisest konstandist tingitud energiatihedus  $\rho_\Lambda$  ja rõhk  $p_\Lambda$ . Kuna “negatiivne rõhk” avaldub

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$$

ja praegusel momendil on aine rõhk Universumis võrdne nulliga:

$$p = 0$$

siis saame Friedmanni teisest võrrandist järgmise avaldise:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_M - 2\rho_\Lambda)$$

Kuna algselt sooviti kirjeldada staatilist Universumit:

$$\dot{a} = 0$$

$$\ddot{a} = 0$$

siis järeldub viimasest võrrandist:

$$\rho_M = 2\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G}$$

Kui me nüüd paneme saadud avaldise Friedmanni esimesse võrrandisse:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_\Lambda)$$

siis saame tulemuseks:

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_\Lambda) = \frac{8\pi G}{\rho_\Lambda} = \Lambda c^2$$

Matemaatiliselt väljendub see pikemalt järgmises:

$$\begin{aligned} \frac{kc^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} + \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} \frac{1}{2} \right) = 2 \frac{\Lambda c^2}{3} + 2 \frac{\Lambda c^2}{3} \frac{1}{2} = 2 \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} = \\ &= 2 \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} = 3 \frac{\Lambda c^2}{3} = \Lambda c^2 \end{aligned}$$

Kuna kosmoloogiline konstant on reeglina positiivne:

$$\Lambda > 0$$

siis peab ka Universumi ruum olema positiivse kõverusega:

$$k = +1$$

Universumi mastaabitegur ( s.t. raadius ) a ja kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  on omavahel seotud:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$$

See tähendab seda, et kosmoloogiline konstant määrab ära staatilise Universumi korral aine-energia tiheduse ja Universumi raadiuse ehk selle suuruse.

Sellise tõukejõu olemasolu, mille ilmumine avaldub alles kehade vahekauguste suurenemisel, on kosmoloogilistes arvutustes varem tõlgendatud „tume energiana“. Kuid sellist „tume energia“ olemust on tõlgendatud eelkõige just vaakumi energiana, mis loobki sellise tuntud tõukejõu. Näiteks arvutatakse see välja järgmiselt. Kasutades Poissoni võrrandit, saab kirja panna gravitatsioonilise potentsiaali kujul:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) = 4\pi G p (1 + 3\omega)$$

milles rõhk näitab samuti gravitatsioonijõu allikat ja tihedus  $\rho$  ning rõhk  $p$  avalduvad vastavalt

$$\rho = \rho_A + \rho_\Lambda$$

$$p = p_A + p_\Lambda$$

kus  $p$  on rõhk ja  $\rho$  on tihedus ning vastavalt nende  $A$  indeksid näitavad tavalise aine, energia ja tumeaine kogutihedust (kogurõhku). Võrrand kirjeldab gravitatsioonile alluvat ainet. Kui me aga võtame

$$p_A = 0$$

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$$

milles

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

siis saame esimesest võrrandist järgmise avaldise

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_M - \Lambda c^2$$

Eeldusel, et „vaakumi energia“ on väga suur

$$\Lambda c^2 \gg 4\pi G \rho_A$$

saame

$$\Phi_\Lambda = -\frac{\Lambda c^2}{6} r^2$$

ja seega massile mõjub jõud

$$\vec{g}_r = -\vec{\nabla} \Phi_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3} \vec{r}.$$

Viimasest võrrandist ilmnebki tõukejõud, mis suureneb kehadevahelise kauguse suurenemisega. See tähendab seda, et vaakumi energia põhjustab tõukejõu, mis hakkab eriti hästi ilmnema just väga väga suures ruumi mastaabis.

Kuid järgnevalt analüüsime kosmoloogilist konstanti sisaldavat Friedmanni võrrandit lähemalt:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda)$$

ehk

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{AE} + \rho_{\Lambda})$$

Selleks kirjutame sulud lahti:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{AE} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda}$$

ja kuna kosmoloogilist konstanti sisaldav aine-energia tihedus avaldub:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

siis saame Friedmanni võrrandi lõplikuks kujuks järgmiselt:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{AE} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Teostame viimases võrrandis mõned matemaatilised teisendused:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3}\rho_{AE} = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

ja jagame võrrandi mõlemad pooled järgmise avaldisega:

$$\frac{a^2}{2}$$

Tulemuseks saame sellise avaldise:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6}\rho_{AE}a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6}a^2$$

Kuna Friedmanni esimeses võrrandis:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6}\rho_{AE}a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6}a^2$$

võrduvad mõlemad pooled võrdselt üksteisega, siis seega peaks kehtima ka selline võrdus:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = -\frac{kc^2}{2}$$

ehk

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{kc^2}{a^2}$$

Robertson-Walkeri meetrika järgi avaldub selles Hubble'i konstant H:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = -\frac{kc^2}{a^2}$$

mille tulemusena saame:

$$H^2 a^2 = -c^2$$

Saadud seoses puudub konstant k, sest sellega ( s.t. Robertson-Walkeri ruumi kõverusega ) me ei



arvesta. Kuna Hubble'i konstant  $H$  avaldub Robertson-Walkeri meetrikas:

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a}$$

siis seega saame lõpuks Hubble'i seaduse:

$$H^2 R^2 = -c^2$$

mille korral paisub Universum valguse kiirusega  $c$ :

$$v^2 = -c^2$$

Viimane seos sarnaneb erirelatiivsusteoorias tuletatava võrdusega:

$$\frac{v^2 - c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v_\mu v_\mu = v^2 = -c^2 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = -c^2$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et Hubble'i seaduse järgi  $v = HR$  võrdub lõpmatuses Universumi paisumiskiirus  $v$  (mitte  $H$ ) valguse kiirusega  $c$  ja selletõttu on Universumi aegruum teisenenud lõpmatuseni. Kusjuures me arvestame ainult positiivse valguse kiirusega  $c$ .

Kuna negatiivset kiirust  $v^2 = -c^2$  füüsikaliselt ei eksisteeri, siis seega tõstes viimase avaldise ruutu ja seejärel võttes ruutjuure, saame lõpuks ikkagi positiivse kiiruse:  $v^2 = c^2$  ehk  $v = c$ , mis vastab juba füüsikalisele reaalsusele.

Väga väga suures ruumimastaabis (näiteks isegi suuremas ruumimõõtkavas kui galaktikate superparved) läheneb Universumi paisumiskiirus  $v$  valguse kiirusele vaakumis. Kui valemis  $v_r = cz$  on  $z > 1$ , siis galaktikate eemaldumiskiirus  $v_r$  üksteisest on suurem valguse kiirusest vaakumis. Sellisel juhul kasutatakse relatiivsusteooriat, et leida lainepikkuse muutust ehk spektrihoone nihet valguse kiirusele lähedaste suhteliste kiiruste korral. Näiteks laine sagedus väheneb ehk lainepikkus suureneb, kui valgusallikas meist ehk vaatlejast eemaldub:

$$\frac{v}{c} = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1}$$

ja

$$z = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} - 1$$

Selles sõltub punanihe  $z$  eemaldumiskiirusest  $v$  relativistlikul kujul ehk  $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} > 1$  korral, mis on eespool olevas kosmoloogia osas pikemalt tuletatud ja analüüsitud.

Siinkohal peab märkima seda, et kui Universumi paisumiskiirus  $v$  Hubble'i seaduses:

$$v = HR$$

võrdub täpselt valguse kiirusega  $c$ :

$$c = HR$$

siis seega peab Universumi ruumala olema lõpmata suur, kuna ainult lõpmatutes saab Universumi paisumiskiirus  $v$  võrduda täpselt valguse kiirusega  $c$ . Lõpmatu Universumi ruumala korral on näiteks galaktikaid lõpmata palju.

Kui Friedmanni esimesest võrrandist:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

kehtib selline võrdus:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = +\frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

siis sellest tulenevalt saame järgmise seose:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = +\Lambda \frac{c^2}{3}$$

Kuna kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  on seotud raadiuse  $R$  ruuduga ( mida me tõestame veidi hiljem ):

$$-1 = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

ehk

$$-\frac{1}{R^2} = +\frac{\Lambda}{3}$$

siis saame Hubble'i konstandi  $H$  ruudu võrrandist sellise lahenduse:

$$H^2 = -\frac{c^2}{R^2}$$

ehk

$$H^2 R^2 = v^2 = -c^2$$

mis näitab meile seda, et lõpmatutes võrdub Universumi paisumiskiirus  $v$  valguse kiirusega  $c$ .

Kuna Friedmanni esimesest võrrandist:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

tõestatakse selline võrdus ( küll veidi hiljem ):

$$-\frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2 = +\frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

ja eelnevalt nägime, et kehtib ka seos:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = +\frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

siis järelikult peab kehtima ka selline võrrand:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = -\frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2$$

Viimast seost on väga lihtne tõestada. Näiteks teisendame seda matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{\dot{a}^2}{2a^2} = \frac{H^2}{2} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{E}{Vc^2} = -\frac{GE}{R^3c^2} = -\frac{GM}{R^3}$$

Arvestades eespool saadud seoseid, saame tulemuseks jällegi valguse kiiruse  $c$  ruudu:

$$H^2 R^2 = v^2 = -\frac{2GM}{R} = -c^2$$

ehk

$$H^2 R^2 = v^2 = -c^2$$

mis näitab meile seda, et lõpmatuses võrdub Universumi paisumiskiirus  $v$  valguse kiirusega  $c$ .

Kui eespool tuletatud kosmoloogia põhivõrrandis

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

kehtib võrdus:

$$\frac{1}{2} (\dot{a})^2 = -\frac{4\pi G}{3} \rho a^2$$

siis saaksime ka sellise võrduse, mis antud juhul on esitatud „postulaadina“:

$$\frac{1}{2} (\dot{a})^2 \frac{1}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho a = \ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$$

ehk

$$\ddot{a} = \frac{1}{2} \frac{(\dot{a})^2}{a}$$

Viimane seos on kosmoloogias tuntud Friedmanni võrrandina juhul, kui Universumi rõhk on null ehk  $p = 0$ . Kuid seda hakkame tõestama alles hiljem. Robertson-Walkeri meetrikast on Hubble'i konstant  $H$  esitatav järgmiselt:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

milles

$$\dot{a} = Ha$$

Sellest tulenevalt saame viimase võrrandi kujuks

$$\ddot{a} = \frac{1}{2} H^2 a$$

ehk

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} H^2 = \frac{H^2}{2}$$

Kui me võtame Hubble'i konstandist  $H$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ühekordse tuletise aja järgi, siis saame

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}\dot{a}}{a^2} = \frac{\ddot{a}a}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

ehk

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

Kuna viimases võrduses olev liige on esitatav eelnevalt saadud seose põhjal

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{H^2}{2}$$

siis saame järgmise väga olulise võrrandi:

$$\dot{H} = \frac{H^2}{2} - H^2$$

Järgnevalt arvestame seda, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ :

$$H = v = c$$

ja seega saame

$$\dot{c} = \frac{c^2}{2} - c^2$$

Eespool esitatud Universumi rõhu  $p$  võrrandi füüsikaline ja matemaatiline analüüs näitas, et kosmoloogias taanduvad kõik põhivõrrandid sellele, et Universum paisubki tegelikult valguse kiirusega  $c$ :

$$-\frac{2H^2}{2} = -H^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p = -\frac{3}{\rho}p = -c^2$$

ehk

$$-H^2 = -c^2$$

milles on näha seda, et  $H = c$ . Selline kokkulangevus ei saanud olla juhuslik ja seda me nüüd tegelikult näemegi, kui me rakendame  $H = c$  võrdust.

Kuna konstandist  $c$  tuleb on null

$$0 = \frac{c^2}{2} - c^2$$

ja kui me korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ , siis saame

$$0 = \frac{mc^2}{2} - mc^2$$

Viime võrrandi liikme  $-mc^2$  teisele poole võrdusmärgi

$$mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

ja arvestame erirelatiivsusteooriast tulenevat seost

$$c^2 = v^2$$

ning lõpuks saamegi võrrandi

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

Kuna kineetilise energia klassikaline valem on avaldatav järgmiselt:

$$\frac{mv^2}{2} = E$$

siis saame esitada seisueenergia võrrandi:

$$E = mc^2$$

mida võib mõista kineetilise energia „definiitsioonina“. See tähendab seda, et Universum paisub ajas tegelikult valguse kiirusega ja seetõttu on kõikidel kehal Universumis kineetiline energia, mis antud juhul avaldubki seisueenergia valemiga.

Võiks ju arvata, et energia  $E = mc^2$  tuleneb sellest, et kõik „seisumassiga“ kehad Universumis „liiguvad“ valguse suhtes kiirusega  $c$ , kuna valgus ise liigub vaakumis kiirusega  $c$ . Liikumine on ju suhteline ja valguse kiirus on absoluutne. Kuid tegelikult see nii siiski ei ole, kuna Universum paisub ajas tegelikult valguse kiirusega ja seetõttu on kõikidel kehal Universumis kineetiline energia, mis antud juhul avaldubki seisueenergia valemiga.

Kuna Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ , mille tõttu on kõikidel kehal Universumis energia  $E = mc^2$ , siis seega ei saa Universumi kosmoloogiline paisumine peatuda. Universumi paisumise peatumine põhjustaks Universumi materია kohese lakkamise, mis oleks ilmselgelt vastuolus energia jäävuse seadusega. See tähendab ka aja peatumise võimatust Universumis tervikuna ehkki lokaalselt on see võimalik (näiteks mustade aukude tsentrites).

Eelnevad võrrandid vihjavad kineetilise energia valemitele. Viimaste võrduste tõttu peaks võrrandis:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

kehtima ka selline võrdus:

$$-\frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2 = \frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

mis täidab siis potentsiaalse energia rolli. Sellest tulenevalt võrdub kosmoloogiline konstant järgmiselt:

$$-\frac{8\pi G}{c^2} \rho = \Lambda$$

Siinkohal tasub märkida seda, et kosmoloogilise konstandi  $\Lambda$  korral:

$$-\frac{8\pi G}{c^2} \rho = \Lambda$$

ei olegi tihedus seotud niivõrd energiaga:

$$-\frac{8\pi G}{c^4} \frac{E}{V} = \Lambda$$

vaid tihedus on pigem seotud aegruumi kõverusega ehk gravitatsiooniga:

$$-\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \frac{1}{V} = \frac{G_{\mu\nu}}{V} = \Lambda$$

milles energiat  $E$  kirjeldab energia-impulss tensor  $T_{\mu\nu}$  ja Albert Einsteini tensor  $G_{\mu\nu}$  on seotud aegruumi kõverusega järgmiselt:

$$G_{\mu\nu} = \Lambda * V = -\frac{2GM}{c^2 R} * 4\pi R = \left(\frac{t^2}{t'^2} - 1\right) 4\pi R$$

Aegruumi kõverus on antud juhul esitatud gravitatsioonilise aja dilatatsiooni näitel.

Kuna massi tihedus avaldub seosena:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M3}{4\pi R^3}$$

siis saame kosmoloogilise konstandi  $\Lambda$  avaldise kirjutada kujule:

$$-\frac{2G}{c^2} \frac{M3}{R^3} = \Lambda$$

Kui me nüüd teisendame viimast võrrandit järgmiselt:

$$-\frac{2GM}{Rc^2} = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

siis me näeme seda, et saame sellise seose:

$$-\frac{2GM}{Rc^2} = -\frac{R}{R} = -\frac{c^2}{c^2} = -1 = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

ehk

$$-1 = \Lambda \frac{R^2}{3}$$

Kuna eespool saime Universumi paisumiskiiruseks  $v^2 = c^2$ , siis seega peame siin arvestama ainult sellise seosega  $\frac{c^2}{c^2} = 1$ , mitte  $\frac{v^2}{c^2} \neq 1$ . Kuid saadud matemaatiline avaldis:

$$-\frac{c^2}{c^2} = -1 = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

on tähelepanuväärne sellepolest, et kui see ei võrduks  $-1$ -ga:

$$-\frac{v^2}{c^2} = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

ehk

$$\frac{v^2}{c^2} = -\Lambda \frac{R^2}{3}$$

siis saame rakendada Hubble'i seadust:

$$v^2 = H^2 R^2$$

mille tulemusena avaldub Hubble'i konstandi  $H$  ruudu avaldis:

$$\frac{H^2 R^2}{c^2} = -\Lambda \frac{R^2}{3}$$

ehk

$$H^2 = -\Lambda \frac{c^2}{3}$$

Saadud võrrandit on võimalik tõlgendada kahte erinevat moodi. Esiteks kui me nüüd järgnevalt rakendame eespool tuletatud seost:

$$-1 = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

ehk

$$\frac{1}{R^2} = -\frac{\Lambda}{3}$$

siis saame tulemuseks:

$$H^2 = \frac{c^2}{R^2}$$

ehk

$$H^2 R^2 = v^2 = c^2$$

mis ütleb meile seda, et lõpmatuses võrdub Universumi paisumiskiirus  $v$  valguse kiirusega  $c$ . Antud juhul saime positiivse valguse kiiruse, mis on füüsikaline ehk reaalne. Kuid eespool tuletatud võrrandit:

$$\frac{H^2}{c^2} = -\frac{\Lambda}{3}$$

on võimalik tõlgendada ka teisiti. Näiteks teisendame matemaatiliselt viimast avaldist järgmiselt:

$$-\frac{3}{\Lambda} = \frac{c^2}{H^2}$$

ehk

$$\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{H}$$

Sellisel juhul on näha “kiiruste jagatist”, mis on seotud kosmoloogilise konstandiga  $\Lambda$ . Kiiruste jagatis esines ka eespool tuletatud relativistlikus valemis:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ehk

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{v}$$

milles on näha omakorda aja dilatatsiooni nähtust:

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk  $\gamma$ -faktorit:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

Sellest tulenevalt võime kirjutada järgmiselt:

$$\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{H} = \gamma = \frac{\Delta t}{t}$$

milles on näha, et kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  on seotud just  $\gamma$ -faktoriga. See tähendab nüüd seda, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ , kuid me tajume seda kiirust palju väiksemana, kuna aeg on üle kogu Universumi teisenenud ehk aeglenenud  $\gamma$ -korda:

$$H = \frac{c}{\gamma}$$

Ainult selline arusaam saab seletada eespool tuletatud energia võrdust:

$$E = \frac{mv^2}{2} = mc^2$$

mille korral saime  $H = c$ . Sellisel juhul on kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  seotud aja dilatatsioonist tuntud  $\gamma$ -faktoriga:

$$-\frac{3}{\gamma^2} = \Lambda$$

kuid kosmoloogilise konstandi  $\Lambda$  ja raadiuse  $R$  seose korral:

$$-\frac{3}{R^2} = \Lambda$$

on tegemist tavalise Hubble'i seadusega, mille korral paisub meie Universum valguse kiirusega  $c$  lõpmata suures ruumimastaabis ( raadiuse  $R$  suurenemise tõttu ). Seetõttu ei saa kaks viimast avaldist olla omavahel võrdsed:  $\gamma \neq R$ .

Siinkohal on huvitav märkida seda, et Hubble'i seadusest:

$$HR = v$$

on võimalik samuti "tuletada" Universumi  $\gamma$ -faktori võrrand:

$$R = \frac{v}{H} = \frac{c}{H}$$

ehk

$$\gamma = \frac{c}{H}$$



milles  $R$  näitab antud juhul Universumi raadiust/suurust.

Kui Hubble'i konstandi  $H$  ja  $y$ -faktori seose võrrandis:

$$\sqrt{-\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{H} = y = \frac{\Delta t}{t} = \frac{t'}{t}$$

võrdub  $y$  lõpmatusena ehk aeg on aeglenenud/teisenenud üle kogu Universumi lõpmatuseni:

$$y = \infty$$

siis Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdub nulliga:

$$H = 0$$

ja kosmoloogiline konstant võrdub samuti nulliga:

$$\Lambda = 0$$

Kuid praegusel kosmoloogilisel ajaperioodil on  $y$ -faktori väärtus järgmine:

$$y = \frac{t'}{t} = \frac{3 * 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)}{2,3979 * 10^{-18} \left(\frac{m}{s}\right)} = 1,25109 * 10^{26} \approx 1,25 * 10^{26}$$

kuna Hubble'i konstant  $H$  ei võrdu täielikult nulliga:

$$\frac{v}{R} = H = 2,3979 * 10^{-18} \left(\frac{m}{s}\right)$$

ja valguse kiiruse väärtus on mõõdetud:

$$c = 3 * 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)$$

Seetõttu ei saa kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  tegelikult võrduda nulliga. Kuid edasiseks analüüsiks võime kosmoloogilise konstandi  $\Lambda$  lugeda siiski nulliks, kuna selle asemel võime arvestada ainult aja teisenemisega, mis hõlmab korraka kogu Universumit.

Kuid kui me eespool tuletatud võrrandis:

$$-\frac{2GM}{Rc^2} = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

teostame sellised matemaatilised teisendused:

$$\frac{GM}{R} = -\Lambda \frac{R^2 c^2}{6}$$

siis me saame gravitatsioonilise potentsiaali  $U$  võrrandi:

$$U = -\Lambda \frac{c^2 R^2}{6}$$

mis on täpselt identne Poissoni võrrandist tuletatava gravitatsioonilise potentsiaaliga:

$$\Phi_{\lambda} = -\frac{\Lambda c^2}{6} r^2$$

Poissoni võrrandi analüüsi esitasime juba eespool, kuid praegu me näeme seda, et võrrandis:

$$U = -\Lambda \frac{c^2 R^2}{6}$$

ehk

$$U = -\Lambda \frac{R^2 c^2}{3 \cdot 2}$$

esineb eespool tuletatud võrdus:

$$-1 = \Lambda \frac{R^2}{3}$$

ehk

$$1 = -\Lambda \frac{R^2}{3}$$

See annab meile gravitatsioonilise potentsiaali “väärtuseks”:

$$U = \frac{c^2}{2}$$

mis on teatavasti kõige suurem võimalik potentsiaal kogu Universumis. Näiteks avaldub suurim võimalik potentsiaal  $U$  just gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemis:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2U}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \infty$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}}$$

mis on kõvera aegruumi füüsikaliseks aluseks. Selles on näha, et aeg teiseneb ehk “kõverdub” lõpmatuseni. Kui me nüüd aja dilatatsiooni valemit:

$$\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} = \frac{t}{t'}$$

teisendame järgmiselt:

$$-\frac{2GM}{c^2 R} = \frac{t^2}{t'^2} - 1$$

siis me näeme, et saadud avaldis kattub eespool tuletatud võrrandiga:

$$-\frac{2GM}{c^2 R} = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

mis sisaldab kosmoloogilist konstanti  $\Lambda$ . Seetõttu võime kirjutada:

$$\frac{t^2}{t'^2} - 1 = +\Lambda \frac{R^2}{3}$$

ehk

$$\frac{t^2}{t'^2} = +\Lambda \frac{R^2}{3} + 1$$

Kuna eespool saime ka sellise seose:

$$1 = -\Lambda \frac{R^2}{3}$$

siis seega võime kasutada sulgusid:

$$\frac{t^2}{t'^2} = \Lambda \frac{R^2}{3} - \Lambda \frac{R^2}{3} = \Lambda \frac{R^2}{3} (1 - 1)$$

ehk

$$\frac{t^2}{t'^2} = \Lambda \frac{R^2}{3} (1 - 1)$$

Viime sulud võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{t^2}{t'^2(1-1)} = \Lambda \frac{R^2}{3}$$

ja sama võime teha ka raadiusega  $R$ :

$$\frac{t^2 3}{t'^2(1-1)R^2} = \Lambda$$

või kosmoloogilise konstandiga  $\Lambda$ :

$$\frac{t^2 3}{t'^2(1-1)\Lambda} = R^2$$

ehk

$$\sqrt{\frac{t^2 3}{t'^2(1-1)\Lambda}} = R$$

Kuna aja dilatatsioon  $t'$  võrdus lõpmatusega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{c}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

siis seega saame kosmoloogilise konstandi  $\Lambda$  väärtuseks nulli:

$$\frac{t^2 3}{t'^2(1-1)R^2} = \frac{t^2}{t'^2} \frac{3}{(1-1)R^2} = \frac{t^2}{\infty} \frac{3}{(1-1)R^2} = 0 * \frac{3}{0 * R^2} = \frac{0}{0} = 0 = \Lambda$$

või raadiuse  $R$  väärtuseks nulli:

$$\sqrt{\frac{t^2 3}{t'^2(1-1)\Lambda}} = \sqrt{\frac{t^2}{t'^2} \frac{3}{(1-1)\Lambda}} = \sqrt{\frac{t^2}{\infty} \frac{3}{(1-1)\Lambda}} = \sqrt{0 * \frac{3}{0 * \Lambda}} = \sqrt{\frac{0}{0}} = \sqrt{0} = 0 = R$$

ehk

$$\begin{cases} \Lambda = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

Siinkohal tuleb kindlasti mainida seda, et kosmoloogiline konstant ei võrdu tegelikult nulliga:  $\Lambda \neq 0$ . Eelneva matemaatilise analüüsiga me taandasime selle antud süsteemist välja ehk panime ( kunstlikult ) võrduma nulliga, kuna see lihtsustab edasist füüsikalist ja matemaatilist analüüsi Universumi kosmoloogilisest paisumisest. Kosmoloogiline konstant tegelikult ei võrdu nulliga ja nüüd me teame, et see ( s.t. tume energia ) on seotud pigem Universumi aegruumiga, mitte niivõrd vaakumi energiaga. Edasiseks analüüsiks võtame selle teadmise lihtsalt arvesse.

Kuna kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  võrdub nulliga, siis selle järgi saaksime Universumi mastaabiteguri ( s.t. raadiuse ) a väärtuseks lõpmatuse  $\infty$ :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = \infty$$

mis näitab seda, et meie Universum on tegelikult lõpmata suur. Selle reaalsel võimalikkust ja matemaatilis-füüsikalist analüüsi esitame hiljem. Kuid praegu peame ära märkima selle, et Friedmanni esimene võrrand:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

tuleb kujul:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho_{AE} a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

kuna kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  võrdub nulliga. See tähendab nüüd seda, et kogu järgnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs toimub viimase Friedmanni võrrandi kujuga, milles puudub kosmoloogiline konstant  $\Lambda$ .

Kuna Universumi rõhk ja kosmoloogiline konstant võrduvad mõlemad nulliga, siis saame ka Friedmanni teist võrrandit:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left[ (\rho_M + p_M) + \frac{1}{3} (\rho_\Lambda + p_\Lambda) c^2 \right]$$

teisendada kujule:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left[ \frac{1}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda) c^2 \right]$$

ehk

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left[ \frac{1}{3} (\rho_M) c^2 \right]$$

Kui saadud võrrandis

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_M$$

viime a liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_M a$$

siis me näeme, et selline seos kattub eespool kasutatava Friedmanni teise võrrandi kujuga:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

milles Universumi rõhk võrdub nulliga:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3}\rho$$

Eespool me tõestasime, et Friedmanni esimest võrrandit:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6}\rho_{AE}a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

milles puudub kosmoloogiline konstant ja konstant k:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

võib matemaatilise ja füüsikalise analüüsi lihtsamaks läbiviimiseks teisendada kujule:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = \frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Kusjuures, kui me hakkame uurima/analüüsima Hubble'i konstandi H muutumist ajas ehk Universumi paisumiskiirust H ajas ( mitte ruumis ), mis on tingitud aja ja ruumi teisenemisest ehk kõverdumisest üle kogu Universumi, siis kasutame sellist seost:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Kui aga hakkame uurima/analüüsima Hubble'i seaduse  $v = HR$  muutumist ruumis ehk Universumi paisumiskiirust v ruumis ( mitte ajas ), siis kasutame sellist seost:

$$\frac{H^2 R^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

Näiteks kui antud võrrandis:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

võrdub R lõpmatusega ehk tegemist on Universumi lõpmata suure ruumimastaabiga:

$$R = \infty$$

siis saame Universumi paisumiskiiruseks täpselt valguse kiiruse c:

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$v^2 = -c^2$$

mis on heas kooskõlas eespool olevate arusaamadega. Kui aga vaatame Universumi lõpmata väikest ruumimastaapi:

$$R = 0$$

siis Hubble'i seaduse järgi

$$v = HR$$

saaksime Universumi paisumiskiiruseks nulli:  $v = 0$ . Kui aga analüüsime võrrandit:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

milles  $R = 0$ , siis tulemuseks saame füüsikaliselt ja matemaatiliselt ebareaalne seose:

$$\frac{v^2}{2} - \infty \neq -\frac{c^2}{2}$$

Näiteks kui Hubble'i seaduses  $v = HR$  võrduks Universumi raadius lõpmatusega  $R = \infty$ , siis saaksime Universumi paisumiskiiruseks lõpmata suure väärtuse  $v = \infty$ , mis oleks samuti ebareaalne tulemus. Kõige suurem kiirus looduses saab olla ainult valguse kiirus  $c$ .

Selliste ebareaalsete seoste vältimiseks arvestame antud võrrandis:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

gravitatsioonilise potentsiaalse  $U$  avaldisega:

$$\frac{v^2}{2} - U = -\frac{c^2}{2}$$

Sellise analüüsi sisu seisneb selles, et lõpmata väikest ruumimastaapi ei ole tegelikult olemas, kuna väikseim pikkus ruumis saab olla ainult Plancki pikkus. Plancki pikkusega ruumimastaabil ilmneb aegruumi lõpmatu kõverus ja aegruumi lõpmata kõverusele vastab kõige suurem võimalik potentsiaal  $U$  Universumis, mida me esitasime ka eespool. Seetõttu võime kirjutada järgmiselt:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{c^2}{2} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2} = 0$$

milles on näha, et kõige väiksemas võimalikus ruumimastaabis võrdub Universumi paisumiskiirus nulliga:  $v = 0$ .

### 1.2.4.12 Friedmanni võrrandi analüüs

Ajas rändamise üldvõrrandist tuletatud võrrand

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

on tänapäeva kosmoloogia põhivõrrand, mida nimetatakse Friedmanni võrrandiks. Eelnevalt on näha seda, et kehtib seos

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

milles  $v = HR$  ja massitihedus  $M$  oli:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

Järgnevalt hakkame väga põhjalikult analüüsima seost:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

ja näitame seda, et kuidas on see seotud Universumi kosmoloogilise arenguga. See tähendab seda, et kogu järgnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs näitab meile üsna selgelt seda, et Universumi paisumiskiiruse muutumine ajas ei sõltu tegelikult Universumi ruumi kõverusest nagu seda Robertson-Walkeri meetrikad meile näidata püüavad. Seda see kordaja  $k$  puudumine viimases võrrandis tegelikult tähendabki. Näiteks kui Universumi ruumala on lõpmatult suur ( lõpmata kauges tulevikus ), mis avaldub viimases võrrandis  $R = \infty$ , siis saame järgnevalt:

$$\frac{H^2}{2} - 0 = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{H^2}{2} = -\frac{c^2}{2}$$

milles peab kehtima võrdus:  $H^2 = -c^2$  ehk  $v^2 = -c^2$ . See on täiesti kooskõlas eelnevalt esitatud võrrandiga

$$v^2 = v_\mu v_\mu = \frac{v^2 - c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -c^2 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = -c^2$$

mida defineeritakse ajasarnaseks vektoriks ja see on konstant.  $v_\mu v_\mu$  on siin aga neljamõõtmelise kiiruse ruut, mis näitab seda, et Universum paisub valguse kiirusega  $c$ . See tähendab füüsiliselt seda, et kui Universumi ruumala on lõpmatult suur, siis tema paisumiskiirus  $H$  võrdub valguse kiirusega  $c$ . See tähendab, et Universumi paisumiskiirus läheneb aja jooksul valguse kiirusele  $c$ . Kui aga Universumi ruumala on null ehk tegemist on Universumi algsingulaarsusega, mis väljendub võrrandis  $R = 0$ , siis saame järgmiselt:

$$\frac{H^2}{2} - \infty \neq -\frac{c^2}{2}$$

Viimane saadud seos on matemaatiliselt kõlbmatu, sest lõpmatus ei võrdu kuidagi teisel pool võrdusmärgi oleva konstandiga  $c$ . Kui me aga viime selle lõpmatuse teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{H^2}{2} = -\frac{c^2}{2} + \infty$$

siis saame Universumi lõpmatult suure paisumiskiiruse:  $H = \infty$ :

$$\infty = -\frac{c^2}{2} + \infty$$

Ka selline matemaatiline lahend on täiesti kõlbmatu, sest kui me viime ühe lõpmatu uuesti tagasi teisele poole võrdusmärgi, siis saame järgmiselt:

$$\infty - \infty \neq -\frac{c^2}{2}$$

Viimasest seosest me näeme, et  $\infty - \infty = 0$  ja see ei võrdu kuidagi teisel pool võrdusmärgi oleva konstandiga  $c$ . See tähendab füüsikaliselt seda, et Universumi ruumala ei saanud paisumise alghetkel lõpmatult väike olla ehk null:  $R \neq 0$ . Huvitaval kombel on matemaatikas rohkem võimalusi kui teoreetilises füüsikas. Näiteks on matemaatiliselt võimalik näidata, et võrrandi

$$\infty - \infty = -\frac{c^2}{2}$$

mõlemad pooled võivad võrduda nulliga, kui me teostame järgmised matemaatilised teisendused:

$$\infty(1 - 1) = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$1 - 1 = -\frac{c^2}{2} \frac{1}{\infty}$$

Viimase võrrandi mõlemad pooled võrduvad tõepoolest nulliga:

$$0 = 0$$

See aga ei ole füüsikaliselt kõlblik, vaid näitab lihtsalt seda, et matemaatika on teoreetilisest füüsikast võimaluste rohkem. Täpselt samasugustele järeldustele jõuame ka siis kui võrrandis

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

on hoopis Universumi paisumiskiirus  $H$  lõpmatu väärtusega:

$$\infty - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Kui aga teeme oletuse, et Universumi paisumiskiirus oli null ehk  $H = 0$ , mitte aga Universumi ruumala, siis seega saame järgmise väga huvitava seose:



$$0 - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimane saadud seos on sellepärast väga huvitav, kuna selles olev  $R$

$$\frac{GM}{R^3} = \frac{c^2}{2}$$

võrdub kuupjuurega Schwarzschildi raadiusest:

$$\sqrt[3]{\frac{2GM}{c^2}} = R_s \neq 0$$

Kuna see raadius ( ehk Universumi kujuteldav raadius ) ei saa olla null, siis füüsikaliselt tähendab see seda, et Universumi nähtav paisumine algas mingil ajahetkel, mil Universumil oli juba mingid mõõtmised olemas, mitte ei võrdu see nulliga. Kindlalt võib öelda seda, et Universumi paisumise alghetkel oli tema mõõtmised palju palju kordi väiksemad kui praegusel tume energia domineerimise ajastul:

$$R_s \ll R$$

See tähendab seda, et Universumi paisumise alghetkel oli Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdne nulliga ehk  $H = 0$ , kuid mitte Universumi ruumala ehk  $R$ . Ainult selline lahend rahuldab meie poolt analüüsitud kosmoloogilist võrrandit. Viimane seos:

$$0 - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$-\frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

väljendab tegelikult otseselt mehaanilise energia jäävuse seadust:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

milles Hubble'i seadus on  $v = HR$ . Kui selles Hubble'i seaduses on  $H = c$ , siis saamegi  $v = cR$ . Kasutades energia jäävuse seaduse definitsiooni klassikalisest mehaanikast

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

saamegi järgnevalt:

$$\frac{c^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = E = E_k + E_p = \frac{c^2}{2} + \left(-\frac{GM}{R^3}\right) = 0$$

Viimane seos näitab füüsikaliselt seda, et kui potentsiaalne ja kineetiline energia on omavahel võrdsed, siis tähendab see paigalseisu. Sellest järeldub, et Universumi kiirenev paisumine on oma füüsikaliselt olemuselt potentsiaalse energia olekust üle minemine kineetilise energia olekule.

Eespool saadud Friedmanni võrrandi lahend tasase ruumi korral

$$H = \frac{8}{a_m} \frac{c}{\eta^3}$$

milles

$$\eta = 0 \leq \eta \leq \infty$$

ei sobi tegelikult kokku Friedmanni võrrandi endaga, mehaanilise energia jäävuse seadusega ega ka astronoomiliste vaatlustega. Võib öelda, et tegemist on lihtsalt matemaatilise järeldusega, mitte füüsikalise järeldusega. Järgnevalt analüüsimegi seda põhjalikumalt. Kuna tegemist on tasase ruumiga ja ruumi kõverust näitab võrrandis  $a_m$ , siis võtame  $a_m = 1$  ja seda põhjendame siis sellega, et üldrelatiivsusteoorias, mis kirjeldabki kõveraid ruume, näitab ruumi kõverust gravitatsioonilise pikkuse kontraktsiooni valem

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

ehk

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{l_0}{l} = y$$

milles

$$\frac{l_0}{l} = y = 1$$

mis tähendab seda, et ruum on tasane, mitte kõver. Sellest tulenevalt saame Hubble'i konstandi  $H$  muutumisseaduseks järgmiselt:

$$H = \frac{8}{\eta^3} c$$

milles

$$\eta = 2 \leq \eta \leq \infty .$$

Viimasest seosest me näemegi seda, et Universumi paisumiskiirus on null ehk  $H = 0$ , kui Universum on paisunud lõpmata suureks ehk  $\eta = \infty$ . Siinkohal peab märkima seda, et tegemist on meil küll tasase Universumi ruumiga ehk  $k = 0$ , kuid teiste kõveruste korral (positiivse või negatiivse kõveruse korral) on kosmoloogilised stsenaariumid sellega üsna sarnased. Universumi paisumiskiirus oleks võrdne valguse kiirusega  $c$  ehk  $H = c$ , kui Universumi mõõtmed ei võrduks päris nulliga ehk  $\eta \neq 0$ , vaid lõpmatusega võrreldes väga väikesed ehk  $\eta = 2$ . Viimases seoses saame teha järgmise asenduse:

$$y = \left( \frac{8}{\eta^3} \right)$$

ja seega saame Hubble'i konstandi  $H$  muutumisseaduseks:

$$H = yc$$

milles kordaja  $y$  muutumispiirkond on:

$$y = 0 \leq y \leq 1$$

Selline lahend ei ole kindlasti õige, sest Universumi paisumiskiirus oli minevikus väiksem kui praegusel ajahetkel ja see tähendab seda, et Universumi paisumiskiirus ajas suureneb, mitte ei vähene. Võib eeldada seda, et kuna mitte miski ei saa liikuda valgusest kiiremini (isegi mitte ruum ise), siis seega Universumi paisumiskiirus läheneb aja jooksul valguse kiirusele  $c$ . Seetõttu oleks õigem, s.t. vaatlusandmetega rohkem kooskõlas järgmine muutumisseadus:

$$H = \frac{c}{y}$$

milles kordaja  $y$  muutumiskiirkond on:

$$y = 1 \leq y \leq \infty$$

Viimane seos rahuldab eelnevalt analüüsitud kosmoloogia põhivõrrandit:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Näiteks kui võrrandis

$$H = \frac{8}{\eta^3} c$$

on Universum paisunud lõpmatult suureks ehk  $\eta = \infty$ , siis selle paisumiskiirus on kahanenud nulliks ehk  $H = 0$  ja seega saame kordajaks  $y = 0$ . Kui aga võrrandis

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

on Universumi mõõtmed paisunud lõpmatult suureks ehk  $R = \infty$ , siis selle paisumiskiirus on lähenenud juba valguse kiiruseni  $c$  ehk  $H = c$ . Selline kosmoloogiline stsenaarium on vaatlusandmetega kooskõllalisem, sest Universumi paisumiskiirus ajas suureneb ja näib, et mitte miski seda ei takista. Kui aga võrrandis

$$H = \frac{8}{\eta^3} c$$

on Universumi mõõtmed väga väikesed võrreldes lõpmatusega ehk  $\eta = 2$ , siis saame Universumi paisumiskiiruseks valguse kiiruse  $c$  ehk  $H = c$  ja seega saame kordajaks  $y = 1$ . Kui aga võrrandis

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

ei ole Universumi mõõtmed samuti päris nullid, vaid väga väga väikesed võrreldes lõpmatusega või praeguse ajahetkega ehk  $R \neq 0$ , siis Universumi paisumiskiirus  $H$  saab olla null ehk  $H = 0$ . Viimase võrrandi korral saab Universumi paisumiskiirus  $H$  olla võrdne valguse kiirusega  $c$  või nulliga, kuid ei saa olla lõpmatult suur. Kogu eelnevast analüüsist on selgesti näha seda, et Hubble'i konstandi  $H$  muutumisseadus

$$H = yc$$

milles kordaja  $y$  muutumiskiirkond on  $y = 0 \dots 1$ , ei sobi astronoomiliste vaatlusandmetega ega isegi mehaanilise energia jäävuse seadusega, sealhulgas ka mitte Friedmanni võrrandi füüsikalise järeldusega. Küll aga sobib päris hästi selline muutumisseadus:

$$H = \frac{c}{y}$$

milles kordaja  $y$  muutumiskiirkond on  $y = 1 \dots \infty$ . Kuna  $H$  on Universumi paisumiskiirus ehk  $v$ , siis me näeme seda, et see on kooskõllas aja teisenemise seaduspärasusega:

$$y = \frac{t'}{t} = \frac{c}{v}$$

mis oli juba eelnevalt matemaatiliselt tuletatud. See tähendab seda, et kordaja  $y$  vähenemise tõttu

suureneb Universumi paisumiskiirus ja selle ruumala. Näiteks kui kordaja  $y$  oleks lõpmatult suur ehk  $y = \infty$ , siis sellisel juhul oli Universumi mõõtmed väga väikesed ehk „lähenedes“ nullile võrreldes lõpmatusega  $R \rightarrow 0$  ja Universumi paisumiskiirus oli null ehk  $H = 0$ . Kui aga kordaja  $y$  on võrdne ühega ehk  $y = 1$ , siis sellisel juhul on Universumi mõõtmed paisunud juba lõpmata suureks ehk  $R = \infty$  ja Universumi paisumiskiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$  ehk  $H = c$ . Selline Hubble'i konstandi  $H$  muutumisseadus rahuldab täielikult eelnevalt tuletatud võrrandit:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

ja on ka astronoomiliste vaatlusandmetega kooskõlas.

### 1.2.4.13 Universumi $y$ -faktor

Aeg teiseneb/muutub korraga üle kogu Universumi. Seda põhjustab Universumi kosmoloogiline paisumine ehk tavaruumi  $K$  liikumine hyperruumi  $K'$  suhtes (vaata eespool esitatud tavaruumi ja hyperruumi füüsikalist süsteemi). Erirelatiivsusteoorias on  $y$ -faktor seotud keha liikumiskiirusega  $v$ :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t$$

mille korral põhjustab keha liikumiskiiruse  $v$  muutumine  $y$ -faktori muutumist. Kuna Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$  ja seda ajas konstantselt, siis seega peab  $y$ -muutumisseadus olema Universumi jaoks eelnevaga võrreldes teistsugune. Seetõttu hakkame teisendama viimast valemit järgmiselt:

$$\frac{t'}{t} = \gamma$$

Kuna kiiruse  $v$  definitsioon avaldub:

$$v = \frac{l}{t}$$

siis saame kirjutada:

$$\frac{l'}{vt'} = \gamma$$

ehk

$$\frac{R}{r} = \gamma$$

Saadud valem kirjeldab seda, et mida suurem on Universum ( $r$ ) algsest suuruselt ( $R$ ), seda enam muutub  $y$ -faktori väärtus. Suurus  $R$  tähistab siin Universumi algsingulaarsust, mille pikkus kattub Plancki pikkusega  $l$ . Saadud valemi järgi võrduks  $y$ -faktor Universumi algsingulaarsuse korral ühega:

$$\frac{R}{R} = \gamma = 1$$

mis oleks ilmselgelt ebareaalne tulemus. Universumi algsingulaarsuse korral peab  $y$ -faktor kindlasti võrduma lõpmatusega, kuna aeg ja ruum olid siis kõverdunud lõpmatuseni. Seetõttu peame eespool tuletatud võrrandit:

$$\frac{R}{r} = y$$

teisendama järgmiselt. Liidame võrrandi mõlemale poolele arvu üks:

$$\frac{R}{r} + 1 = y + 1$$

ja seejärel viime mõned liikmed teisele poole võrdusmärgi:

$$1 - \frac{R}{r} = 1 - y$$

Võtame võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}} = \sqrt{1 - y}$$

ja viime taas võrrandi liikmed teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y}}$$

Tulemuseks oleme saanud sellise  $y$ -faktori muutumisseaduse, mis esineb üldrelatiivsusteoorias:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = y$$

Selle järgi on nüüd ilusti näha, et Universumi algsingulaarsuse korral võrdub  $y$ -faktor lõpmatusega:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = y = \infty$$

mis oleks juba täitsa reaalne tulemus. Hubble'i konstandi  $H$  avaldise järgi:

$$H = \frac{c}{y}$$

võrduks  $y = \infty$  korral Universumi paisumiskiirus “Universumi sees oleva vaatleja suhtes”  $H = 0$ . Kui aga  $y = 0$ , siis saaksime lõpmata suure paisumiskiiruse  $H = \infty$ . Selline lahend eksisteerib ka reaalselt Universumi algsingulaarsuse korral, kuid seda me käsitleme ja tõestame edaspidi palju palju põhjalikumalt. Väga kauges tulevikus, kui  $y = 1$ , siis saame Universumi paisumiskiiruseks  $H = c$ . See näitab, et aja jooksul läheneb Universumi paisumiskiirus  $H$  valguse kiirusele  $c$  ja seda mistahes ruumimastaabis.

Sarnaselt Universumi ruumala suhtega  $\frac{R}{r}$  kehtib täpselt samasugune analüüs ka Universumi vanuse suhtega  $\frac{t'}{t}$ . Näiteks Universumi algsingulaarsuse korral ei saa  $y$ -faktor võrduda ühega:

$$\frac{t'}{t} = y = 1$$

milles  $t'$  on Plancki ajaperiood ja  $t$  on Universumi vanus. Seetõttu sooritame taas eespool oleva analüüsiga võrreldes sarnaseid teisendusi. Näiteks liidame viimase võrrandi mõlemale poolele ühe:

$$\frac{t'}{t} + 1 = y + 1$$

ja viime mõned liikmed teisele poole võrdusmärgi:

$$1 - \frac{t'}{t} = 1 - y$$

ehk

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = \frac{1}{1 - y}$$

Tulemuseks saame sellise  $y$ -faktori muutumisest ( ilma ruutjuureta ):

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = y$$

( ruutjuurega ):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t'}{t}}} = y$$

millega korral me näeme, et kui tegemist on Universumi algsingulaarsusega  $t = t'$ , siis saame  $y = \infty$ , mis on juba tunduvalt reaalsem tulemus. Kui aga Universumi vanus läheneb lõpmatuseni  $t = \infty$ , siis saame  $y = 1$  ja Universum paisub valguse kiirusega  $c$  ruumimastaabist sõltumata.

Kuid siinkohal on oluline märkida, et  $y$ -faktori valemit:

$$\frac{t'}{t} = y$$

saab tuletada ka üldrelatiivsusteooriast tuntud aja dilatatsiooni võrrandist. Näiteks kui me teisendame viimast võrrandit järgmiselt:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{t^2}{t'^2}$$

ehk

$$\frac{1}{y^2} + 1 = \frac{t^2}{t'^2} + 1$$

siis saame tulemuseks avaldise:

$$1 - \frac{1}{y^2} = 1 - \frac{t^2}{t'^2}$$

mis tegelikult võrdubki gravitatsioonilise aja dilatatsiooni vörrandiga:

$$\frac{R}{r} = 1 - \frac{t^2}{t'^2}$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

Selline tulemus näitab üsna veenvalt, et relatiivsusteooria aja ja ruumi teisenemise vörrandid võivad kirjeldada gravitatsiooni ja Universumit tervikuna samaaegselt. See lihtsustab füüsikat kui tervikut, kuna ühed ja samad vörrandid võivad kirjeldada pealtnäha üsna erinevaid füüsikanähtusi.

Näiteks eespool esitatud y-faktori vörrandit:

$$\frac{t'}{t} = y$$

vöime kasutada näiteks Universumi praeguse vanuse t välja arvutamiseks:

$$\frac{t'}{y} = t$$

Näiteks kui me viimases avaldises teisendame y-faktori väärtust järgmiselt:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{1,25 * 10^{26}} = 8 * 10^{-27}$$

ehk

$$\frac{1}{1,25 * 10^{-27}} = 8 * 10^{26} = \frac{1}{y}$$

siis saaksime Universumi praeguseks vanuseks t:

$$\frac{t'}{y} = \frac{1}{y} * t' = t = \frac{5,39 * 10^{-44}}{1,25 * 10^{-27}} = 4,312 * 10^{-17} \text{ sek}$$

ehk

$$t = 4,312 * 10^{-17} \text{ sek}$$

milles t' on Plancki ajaperiood ja t on Universumi praegune vanus. Tulemuseks saime ebareaalse väärtuse, mis ei vasta mitte mingil juhul tegelikkusele. Kuid reaalse tulemuse saamiseks peame arvestama sellega, et eespool me teisendasime y-faktorit järgmiselt:

$$y = 1,25 * 10^{26} \rightarrow y = 1,25 * 10^{-27}$$

ja sellest tulenevalt peame ka Universumi vanust t teisendama järgmiselt:

$$t = 4,312 * 10^{-17} \text{ sek} \rightarrow t = 4,312 * 10^{17} \text{ sek}$$

milles antud juhul muutus ainult väärtuse astendaja positiivseks. Kui me nüüd jagame saadud väärtuse sellise sekundite hulgaga, mis vastab aastase pikkusele ajaperioodile:

$$t = \frac{4,312 * 10^{17}}{31\,536\,000} = 13,673 * 10^9 a$$

siis saamegi Universumi vanuseks peaaegu 13,7 miljardit aastat:

$$t \approx 13,7 * 10^9 a$$

mis on uskumatult täpne kokkulangevus tegeliku Universumi vanusega. Mõned astronoomia valdkonna allikad pakuvad Universumi praeguseks vanuseks ka 13,8 miljardit aastat, kuid see tegelikult väga palju ei erine praegu siin saadud väärtusest.

Näiteks kosmoloogias arvutatakse Universumi vanust  $\tau$  valemiga:

$$\tau = t_H = \left( \frac{1}{H_0} \right)$$

milles Universumi paisumiskiirus  $H_0$  on praegusel kosmoloogilisel ajahetkel mõõdetud ( SI süsteemis ):

$$H_0 = 71 \frac{km/s}{mpc} = 2,3 * 10^{-18} s^{-1}$$

Sellest tulenevalt saadakse Universumi vanuseks  $\tau$  järgmiselt:

$$t_H = \frac{1}{2,3 * 10^{-18} s^{-1}} = 13,8 * 10^9 a$$

ehk 13,8 miljardit aastat.

Kui me aga “ennustaksime” selle järgi Universumi lõplikku eluiga, mille korral  $y = 1$  ehk  $H = c$ :

$$\frac{t'}{y} = \frac{1}{y} * t' = t = \frac{5,39 * 10^{-44}}{1} = 5,39 * 10^{-44} sek$$

milles samuti teisendaksime Universumi vanust  $t$  järgmiselt:

$$t = 5,39 * 10^{-44} sek \rightarrow t = 5,39 * 10^{44} sek$$

siis saaksime sellise tulemuse:

$$t = \frac{5,39 * 10^{44}}{31\,536\,000} = 1,7 * 10^{37} a$$

Tegemist oleks sellise ajaperioodiga  $t$ , mille jooksul jõuab Universumi paisumiskiirus  $H$  saavutada valguse kiiruse  $c$ , mille korral paisub Universum valguse kiirusega  $c$  ruumimastaabist sõltumata. Seetõttu ei saaks Universumi suuremastaabiline materia enam normaalselt eksisteerida, mille tõttu võimegi sellise ajaperioodi lõppu käsitleda Universumi „surmana“.

Kui Universumi vanus on

$$t = 1,7 * 10^{37} a$$

siis Universumi  $y$ -faktor võrdub ühega



$$\frac{R}{r} = \frac{R}{R} = y = 1$$

mille tulemusena võrdub Universumi paisumiskiirus valguse kiirusega vaakumis

$$H = c$$

See tähendab seda, et Universum paisub valguse kiirusega  $H = c$  "ruumimastaabist sõltumata". Sellest tulenevalt suureneb Hubble'i seaduse järgi

$$v = HR$$

ühe meetrine vahemaa ruumis täpselt valguse kiirusega

$$v = HR = c$$

Kuid siinkohal tuleb nüüd märkida seda, et ühest meetrist suuremate vahemaade korral

$$R > 1$$

tuleb kasutada juba relativistlikke valemeid ( näiteks relativistlikku punanihke valemeid ). Aatomite tasemel ehk aatomite ruumimastaabis on Universumi paisumiskiirus  $v$  äärmiselt väike võrreldes valguse kiirusega  $c$ . Seetõttu võib järeldada seda, et Universumi  $y$ -faktori võrduse korral ühega (  $y = 1$  ) ei saa eksisteerida suuremastaabilised materia vormid ( näiteks makromolekulid, suured füüsikalised kehad, kogu elusloodus, planeedid, tähed, galaktikad jne ) Universumi valguse kiiruse paisumise tõttu, kuid aatomite ruumimastaabis saavad ilmselt eksisteerida üksikud molekulid, aatomid ja kõik elementaariosakesed. Selles mõttes ei lakka Universumi eksisteerimine mitte kunagi, vaid jääb niimoodi paisuma igavesti. Sellisel juhul ei ole orgaaniline elu mistahes vormis ja mistahes asukohas Universumis absoluutselt võimalik. Kõik need järeldused on väga väga olulised.

Siinkohal on oluline märkida seda, et eespool tuletatud võrrandid ei toimi enam Universumi algsingulaarsuse korral:

$$\frac{t'}{y} = \frac{1}{y} * t' = t = \frac{5,39 * 10^{-44}}{\infty} = 0$$

ja  $y$ -faktor ei saa võrduda nulliga:

$$\frac{t'}{y} = \frac{1}{y} * t' = t = \frac{5,39 * 10^{-44}}{0} = \infty$$

kuna siis on tulemuseks lihtsalt ebareaalsed väärtused. Kogu eelnev ja tegelikult ka järgnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs toimib ainult sellisel põhimõttel, et arvutustes arvestatakse ainult reaalseid tulemusi, mille korral ebareaalsed tulemused kõrvaldatakse.

Näiteks kui Universum oleks üks sekund vana:

$$\frac{t'}{y} = \frac{1}{y} * t' = t = \frac{5,39 * 10^{-44}}{5,39 * 10^{-44}} = 1 \text{ sek}$$

siis eespool oleva matemaatilise ja füüsikalise analüüsi loogika järgi:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5,39 * 10^{-44}} = 1,855 * 10^{43}$$

saaksime Universumi  $y$ -faktori väärtuseks järgmise suuruse:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5,39 * 10^{43}} = 1,855 * 10^{-44}$$

ehk

$$y = 5,39 * 10^{43}$$

See on palju suurem praegusest  $y$  väärtusest:

$$y = 1,25 * 10^{26}$$

mis viitab sellele, et  $y$  väärtus ajas väheneb, mille tulemusena Universumi paisumiskiirus ajas suureneb. See tähendab seda, et aeg Universumis tervikuna “kiireneb”. Universumi algsingulaarsuse korral ulatub  $y$  väärtus lausa lõpmatuseni. Seetõttu ei saa me Universumi algsingulaarsuse korral kasutada seost:

$$\frac{t'}{t} = \frac{5,39 * 10^{-44}}{5,39 * 10^{-44}} = y = 1$$

kuna see annab  $y$  väärtuseks ühe, mis oleks ebareaalne. Universumi algsingulaarsuse korral kasutame eespool tuletatud valemit:

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = y$$

milles ongi näha, et Universumi algsingulaarsuse korral  $t' = t$  on  $y$  väärtus lõpmatu  $y = \infty$ . Sellisel juhul on Universumi paisumiskiirus  $H$  lõpmata väike ehk võrdne nulliga:

$$H = \frac{c}{y} = 0$$

Kui aga  $y$  väärtus võrduks ühega  $y = 1$ , siis saaksime Universumi vanuseks lõpmata suure väärtuse  $t = \infty$ . Selline tulemus ei oleks enam reaalne ja seetõttu arvestame sellisel juhul eespool saadud Universumi surma daatumiga ja selle analüüsiga:

$$t = 1,7 * 10^{37} a$$

Kui aga Universumi vanus võrduks nulliga  $t = 0$ , siis saaksime  $y$  väärtuseks:

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = \frac{1}{1 - \infty} = \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{-1} * \frac{1}{\infty} = \frac{1}{-1} * 0 = y = 0$$

mis annaks meile lõpmata suure paisumiskiiruse  $H$ :

$$H = \frac{c}{y} = \infty$$

Selline tulemus on tegelikult samuti reaalne, kuid antud juhul seda seletada ei saa. Universumi algsingulaarsuse korral esinebki tegelikult kaks võimalikkust ( s.t.  $H = 0$  ja  $H = \infty$  ), kuid seda tõestame, analüüsime ja põhjendame juba edaspidi palju põhjalikumalt.

Universumi  $\gamma$ -faktori “muutumisseaduse” järgi:

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = \gamma$$

on Universumi (alg)singulaarsuse korral  $t = t'$ :

$$\frac{t'}{t} = \frac{5,39 * 10^{-44}}{5,39 * 10^{-44}} = 1$$

$\gamma$ -faktor võrdne lõpmatusega  $\gamma = \infty$ , mis näitab Universumi aja ( ja tegelikult ka ruumi ) lõpmata suurt teisenemist:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \infty$$

Singulaarsus tähendab teoreetilises matemaatikas funktsiooni katkevust teatud argumendi väärtusel, kuid Universumi singulaarsus seisneb selles, et klassikalise ettekujutise järgi sai Universumi paisumine alguse siis, kui Universumi ruumala oli võrdne Plancki punktiga. Plancki punkti suurusega “ruumala” korral oli Universumi aegruum lõpmatult kõverdunud ja seetõttu võib Universumi paisumist oma olemuselt mõista ka kui aegruumi lõpmatu kõverduse tasanemisena. Aegruumi kõverust käsitleb Albert Einsteini üldrelatiivsusteooria. Näiteks mida väiksem on kera, seda kõveram on selle pind. Sama on ka Universumi aegruumiga. Lõpmatu kõver aegruum tähendab füüsikaliselt aja ja ruumi eksisteerimise lakkamist. Seda sellepärast, et lõpmatus kõveras aegruumis on ( välisvaatleja suhtes ) aeg aeglenenud lõpmatuseni ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus on vähenenud samuti lõpmatuseni. Kuna aeg ja ruum on materia ( aine ja välja ) eksisteerimise põhivormid, siis seega ei eksisteeri aja ja ruumi eksisteerimise lakkamise korral enam ka materiat ehk ainet ega välja. Sellisel juhul esineb kõige eksisteerimise lakkamine. Lõpmatus kõveras aegruumis on materia ( aine ja välja ) tihedus  $\rho$  lõpmatult suur, mis viitab samuti materia eksisteerimise lakkamisele lõpmata kõveras aegruumis.

Kosmoloogia järgi tekkisid aeg ja ruum Universumi algsingulaarsusest ehk Suurest Paugust. Kui aeg tekkis Suures Paugus, siis ei ole võimalik kasutada mõisteid nagu „enne Suurt Pauku“ või küsimust „mis oli enne Suurt Pauku?“. Selles seisneb Suure Paugu teooria paradoks ehk kogu kosmoloogia ratsionaalne sisemine vastuolu. Näiteks ei saa olla nii, et mis oli enne aega ehk mis oli enne Universumi algsingulaarsust?

Universumi lõpmatu vanus lahendab ära Suure Paugu teooria ühe põhiparadoksi, mis on eksitentsiaalse tähtsusega Universumi olemuse mõistmiseks – millest sai Universum alguse ehk mis põhjustas Suure Paugu ekspansiooni. Relativistlikult analüüsides tuleb välja, et mingit algust tegelikult ei olnudki, sest Universum on tegelikult lõpmata vana. See tähendab seda, et Universumi alghetk on tegelikult meist lõpmata kauges minevikus analoogiliselt nii nagu kaks paraleelset sirget lõikuvad omavahel lõpmatuses. Näiteks „lõpmatult kaua aega tagasi“ korral ei saa me enam kasutada mõisteid „enne“ või „varem“.

Kaasaliikva vaatleja aeg on selline aeg, mida tajub vaatleja, kes liigub koos paisuva Universumiga kaasa mingisuguses suvalises galaktikas olles. Kuid sellel, kes asja kõrvalt jälgib,

võib ajaarvamine olla hoopis teistsugune. Antud juhul tundub aeg Universumis voolavat kõrvalt vaatajale palju kiiremini ja see kulgeb aeglenevas tempos. Universumi aeg on koos ruumiga teisenenud  $\gamma$  korda

$$\gamma = \frac{t'}{t}$$

ja seda Universumi algsingulaarsusest alates. Näiteks meie praeguses ajas ( s.t. Universumis eksisteerivale reaalsele vaatlejale ) võis mõne tähe plahvatus ( supernoova ) toimuda umbes miljard aastat tagasi, kuid “tegelikult” ehk Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale võis see toimuda näiteks kõigest 1 millisekund tagasi. See tähendab seda, et ühe millisekundi jooksul möödub Universumis miljard aastat ehk miljard aastat “mahub ära” ühte millisekundisse. Universumi algsingulaarsuse korral oli selline ajavahe võrdne juba lõpmatusega ehk Universumi aeg oli teisenenud lõpmatuseni:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \infty$$

Näiteks Universumis eksisteerivale reaalsele vaatlejale võis Plancki ajaperiood kesta  $5,39 * 10^{-44}$  sekundit, kuid “tegelikult” ehk Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale võis kesta selline ajaperiood kõigest null sekundit, mis on lõpmata väike ajaperiood. Võrreldes lõpmata väikese ajaperioodiga on Plancki aeg põhimõtteliselt juba lõpmata suur ajavahemik.

Eespool olev matemaatiline ja füüsikaline analüüs näitas, et kui tegemist on Universumi algsingulaarsusega:

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = \gamma$$

milles

$$t = t'$$

siis saame lõpmata suure  $\gamma$ -faktori väärtuse  $\gamma = \infty$ , mis näitab lõpmata suurt Universumi aja teisenemist. See tähendab seda, et Plancki ajaperioodile  $t = 5,39 * 10^{-44}$  sek vastab “tegelikkuses” lõpmata väike ajaperiood ehk null sekundit. Kui Universum on näiteks üks sekund vana:

$$\frac{t'}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} * t' = t = \frac{5,39 * 10^{-44}}{5,39 * 10^{-44}} = 1 \text{ sek}$$

siis  $\gamma$ -faktori väärtus võrdub:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{5,39 * 10^{-44}} = 1,855 * 10^{43}$$

mis tähendab seda, et ühe sekundi vanuse Universumi korral oli aeg teisenenud nii palju, et ühele sekundile vastab “tegelikkuses” selline ajaperiood:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{5,39 * 10^{43}} = 1,855 * 10^{-44} \text{ sek}$$

Praeguse kosmoloogilise ajahetke korral:

$$t \approx 13,7 * 10^9 \text{ a}$$

vastab ühele sekundile palju suurem ajaperiood:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{1,25 * 10^{26}} = 8 * 10^{-27} \text{ sek}$$

Kuid Universumi kauges tulevikus:

$$t = \frac{5,39 * 10^{44}}{31\,536\,000} = 1,7 * 10^{37} \text{ a}$$

võrdub y-faktor ühega, mis tähendab seda, et ühele sekundile vastab täpselt üks sekund:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{1} = 1 \text{ sek}$$

Sellisel juhul ei ole Universumi aeg enam teisenenud. Eelnevast analüüsist nähtub, et mida kaugemale Universumi minevikku vaatame, seda enam suuremaks läheb Universumi aja teisenemine. Universumi y-faktor muutub Universumi algsingulaarsuse juures juba lõpmata suureks. Selline asjaolu viitab sellele, et Universumi sünnimoment on tegelikult lõpmata kauges minevikus, millest järeldub omakorda Universumi lõpmatu eluiga. Selle järgi ei olegi Universum tegelikult 13,7 miljardit aastat vana, vaid tema tegelik eluiga ( Universumi aeg ) võib ulatuda lõpmatuseni, mis näitab, et Universum ei saanud tegelikult alguse Suurest Paugust ehk minevikus toimunud ühest ainsast kosmoloogilisest ajahetkest.

Klassikalise aja ja ruumi käsitlese järgi on Universumil algus ja lõpp ehk sünni- ja surmamoment, kuid relativistliku aja ja ruumi käsitlese järgi ei ole Universumil sünni- ega surmamomenti.

Universumi paisumisel esineb kaks aega: aeg, mis seisneb Universumi eluea pikenemises ja aeg, mis avaldub Universumi paisumise kiiruses ( Universumi paisumine ajas kiireneb ). Need kaks aega on omavahel järgmiselt seotud: mida pikem on Universumi eluiga, seda kiiremini paisub Universumi ruumala ( kiirus ju sõltub ajast ). See tähendab seda, et kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemise kiirus ( ehk Hubble konstandi muutumine ajas ) määrab ära Universumi paisumiskiiruse ja selle „kestvus ajas“ Universumi eluea pikkuse. Sellest järeldub tõsiasi, et Universumi paisumiskiirus suureneb „ajas“ ja kogu Universumi eksisteerimise „aja jooksul“ on aeg tegelikult kiirenenud.

Selle paremaks mõistmiseks toome järgnevalt välja ühe mõttelise eksperimendi. Oletame, et meil on kaks vaatlejat, kellest üks asub meie paisuvas Universumis ja teine hüpoteetiline vaatleja asub sellest väljapool. Paisuva Universumi sees olevale vaatlejale tunduvad Universumis toimuvad sündmused kulgevad normaalselt jada, kui välja arvata erinevates taustsüsteemides esinevaid aja kulgemisi, mille erinevusi võivad põhjustada kehade liikumiskiiruste või raskusjõu erinevad vahekorrad. Kuid teisele vaatlejale, kes asub paisuvast Universumist väljapool, tundub aeg Universumis voolavat palju kiiremini ja see kulgeb aeglenevas tempos. Universumi aja kulgemise aeglenemist reedab Universumi sees olevale vaatlejale Universumi paisumiskiiruse suurenemine, mis väljendub juba Hubble konstandi muutumises ajas.

Universumi paisumine toimub kiirenevas tempos ehk üle kogu Universumi esineb üleüldine aja kiirenemine, mida ei saa otseselt tajuda. Näiteks inimene ei taju aja aeglenemist ega ka aja kiirenemist, kui see toimub süsteemis, kus inimene ise parajasti asub. Aja kiirenemine avaldubki Universumi paisumise kiiruses kiirendusena, sest Universumi eluea pikenemine ja Universumi paisumise kiirus ( kiirus sõltub ajast ) on omavahel seotud. Nii saamegi tulemuseks kiireneva Universumi paisumise.

Vastavalt relatiivsusteoorias tundub aja ja ruumi lahutamatus printsiibile peab aja teisenemisega kaasnema ka ruumi teisenemine. See tähendab seda, et aeg ja ruum teisenevad alati koos.

Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale tundub, et Universum tervikuna paisub, kuna selle aine-energia tihedus ajas muutub väiksemaks ehk galaktikate parved eemalduvad üksteisest seda kiiremini, mida kaugemal nad ruumis üksteisest on. Sellejuures kehade enda mõõtmed ajas ei muutu ja Universum võib olla ka lõpmatu ulatusega. See on teaduslik fakt, mida on saadud astronoomilistest vaatlustest. Kuid Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale on asjaolud aga hoopis teistmoodi. Temale näib Universum olevat „palju kordi suurem“, sealhulgas ka kehade enda mõõtmed on palju suuremad ja Universum mitte ei paisu, vaid tõmbub hoopis kokku ( s.t. Universum hoopis kahaneb ). Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale midagi sellist täheldada ei ole. Temale on kehade mõõtmed ajas muutumatud, muutuvad suuremaks ainult kehade vahelised kaugused väga suures ruumimastaabis. Sellest järeldatakse, et Universum tervikuna paisub ehkki selle ruumala võib olla ka lõpmata suur.

Kõike eelnevat on võimalik piltlikult väljendada palju lihtsamalt. Näiteks meile võib tunduda, et Universum on umbes 100 miljardi valgusaastase läbimõõduga ( põhimõtteliselt võib Universum olla ka lõpmatult suur ), kuid tegelikult võib selle läbimõõt olla hoopis 10 astmes 100 miljardit valgusaastat. See tähendab seda, et kogu meie eksisteeriva Universumi ruum ( mis võib praegu olla umbes 100 miljardi valgusaastase läbimõõduga ) on tegelikult kontrakteerunud ehk „kokkutõmbunud“ 10 astmes 100 miljardi valgusaastase läbimõõduga ruumist, mis oleks Universumi tegelikult ruumiliseks ulatuseks praegusel ajahetkel.

Oluline on märkida seda, et kui vaatleja eksisteerib süsteemis, milles esineb ruumi teisenemine, siis ei ole see vaatlejale otseselt tajutav. Ruumi teisenemist on otseselt tajutav ainult siis, kui vaatleja asub sellest süsteemist väljapool ja vaatleb kõrvalt seda süsteemi, milles esineb ruumi teisenemine. Selles mõttes jääb vaatleja „omaruum“ alati ühesuguseks sõltumata sellest, milline on parajasti ruumi teisenemine. Vaatleja „omaruum“ on tegelikult illusioon, mis ei pruugi näidata süsteemis olevale vaatlejale tegelikku ruumi mõõtmeid.

Ajatu Universumis ilmneb Universumi eksisteerimise lakkamine, kuid ajalises Universumis ilmneb Universumi näiline eksisteerimine. Seni oli arvatud, et Suur Pauk “lõi” kogu meie Universumi või et kogu Universum “sai alguse” just Suurest Paugust, kuid tegelikult näitab ajatu Universumi füüsika meile seda, et Universum ei saanud alguse Suurest Paugust ehk ühest ainsast kosmoloogilisest ajahetkest:

1. Füüsikaliste kehade reaalne ajas rändamise võimalus näitab selgelt seda, et aega ( ja seega ilmselt ka ruumi ) ei saa Universumis tegelikult eksisteerida. Näiteks Universumis ei ole aega tegelikult olemas, kuna selles saab liikuda minevikku ja tulevikku.
2. Eelmisest punktist järeldub omakorda, et Universumis ei saa eksisteerida ka „liikumist“, kuna aega tegelikult ei eksisteeri. See tähendab seda, et aja dimensiooni illusionaarne eksisteerimine loobki liikumise illusiooni Universumis, mis ühtib täpselt filmi tekkimise

olemusega kinematograafias. Seda nimetatakse „Universumi kinematograafiliseks efektiks“. Üks illusioon loob teise illusiooni.

Universumil on aja-dimensioonis algus ja lõpp ehk sünni- ja surmamoment, kuid ajatu-dimensioonis ei ole Universumil sünni- ega surmamomenti.

Siinkohal tuleb märkida seda, et kuna Universumi  $\gamma$ -faktoriga seotud arvutused võivad minna palju väiksemaks Plancki ajaperioodist ja Plancki pikkusest, siis sellest tulenevalt arvestatakse füüsikas ainult selliste väärtustega, mis on võrdne või suuremad Plancki skaalast. Näiteks kui mingisuguse füüsikalise nähtuse eksisteerimise ajaperiood on väiksem Plancki ajaperioodist, siis selline nähtus Universumis reaalselt ei avaldu.

Kuid mistahes väikese  $H$  väärtuse korral (väljaarvatud nulli korral) avaldub Universumi kosmoloogiline paisumine sellest hoolimata ja seda suuruse  $R$  tõttu valemis:

$$v = HR$$

kuna Universum ise on lõpmata suur.

Näiteks Universumi paisumiskiirus on praegusel ajal mõõdetud:  $74 \frac{km}{s} * (Mpc)$ , mis avaldub SI süsteemis ehk SI ühikutes järgmiselt:

$$H = \frac{x}{y} = \frac{74\,000 \left(\frac{m}{s}\right)}{3,086 * 10^{22}(m)} = 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ ühe meetri kohta}$$

Selline on Universumi paisumiskiirus „ühe meetri kohta“, milles on galaktikate eemaldumiskiirus

$$x = 74 \frac{km}{s} = 74\,000 \frac{m}{s}$$

vahemaa galaktikate vahelises ruumis

$$y = 1\,Mpc = 3,086 * 10^{16} m * \text{miljon} = 3,086 * 10^{22} m$$

ja valguse kiiruse arvvärtus vaakumi korral

$$c = 300\,000 \frac{km}{s} = 3 * 10^8 \frac{m}{s}$$

Selle järgi saame Universumi paisumiskiiruse „ühe Plancki pikkuse kohta“ järgmiselt:

$$\begin{aligned} H &= 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} (\text{ühe meetri kohta}) * 1,616\,229(38) * 10^{-35} m = \\ &= 3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta} \end{aligned}$$

milles avaldubki Plancki pikkus l:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} m$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et praeguse Universumi vanuse  $t$  korral:

$$t = 13,7 * 10^9 a$$

on Universumi paisumiskiirus  $H$  ühe Plancki pikkuse  $l$  kohta järgmine:

$$H = 3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta}$$

Tulemus ei ole tegelikult füüsikaliselt reaalne, kuna väikseim pikkus ruumis saab olla ainult Plancki pikkus:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} m$$

mis on palju kordi suurem eespool tuletatud vahemaast  $s$ :

$$s = 3,875556 * 10^{-53} m$$

Kuna Universumi paisumiskiirus  $H$  ühe Plancki pikkuse  $l$  kohta oli arvutatav valemist:

$$\begin{aligned} H &= 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ (ühe meetri kohta)} * 1,616\,229(38) * 10^{-35} m = \\ &= 3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta} \end{aligned}$$

siis selle järgi võrdub Plancki pikkus  $l$  järgmiselt:

$$l = \frac{H}{v} = \frac{3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta}}{2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ (ühe meetri kohta)}} = 1,616\,229(38) * 10^{-35} m$$

Viimasest saame omakorda ajaperioodi  $t$  ( sekundites ):

$$t = \frac{1}{2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ (ühe meetri kohta)}} = 4,17031 * 10^{17} s$$

mis tähendab seda, et kui Universumi paisumiskiirus  $H$  on ühe Plancki pikkuse  $l$  kohta:

$$H = 3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta}$$

siis reaalne füüsikaline sisu seisnebki selles, et Plancki pikkusele  $l$  vastav vahemaa ruumis:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} m$$

„kahekordistub“ ajaperioodi  $t$  jooksul:

$$t = 4,17031 * 10^{17} s$$

Saadud ajaperiood  $t$ :

$$t = \frac{4,17031 * 10^{17} s}{31536000 s} = 13,223 * 10^9 a$$

kattub „peaaegu“ praeguse Universumi vanusega  $t$ :

$$t = 13,7 * 10^9 a$$

Kuid sellise paisumiskiiruseni jõudmine võttis Universumil aega umbes 13,7 miljardit aastat:



$$t \rightarrow 0 \dots 13,7 * 10^9 a$$

#### 1.2.4.14 Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandid

Eespool põhjalikult analüüsitud kosmoloogilisest võrrandist

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

on võimalik matemaatiliselt tuletada Universumi lokaalsed evolutsiooni võrrandid, mis on samuti kosmoloogia üheks põhivõrranditeks. Viimane võrrand on oma füüsikaliselt olemuselt energia jäävuse seadus, mis on saadud relativistliku mehaanika teel:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

milles Hubble'i seadus on  $v = HR$ . Kui aga viimase võrrandi konstant võrduks nulliga:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

siis saame mehaanilise energia jäävuse seaduse klassikalisel kujul:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

Saadud viimasest võrrandist

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

ongi võimalik tuletada Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandid. Näiteks viimases võrrandis olev kiirus  $v$  võib olla Universumi paisumiskiirus ehk tuntud Hubble'i seadus  $v = HR$ :

$$\frac{H^2}{2} = \frac{GM}{R^3}$$

Robertson-Walkeri meetrikast on teada seda, et Hubble'i konstant  $H$  võrdub:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ja seetõttu saame viimase võrrandi kujule

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$

ehk

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{GM}{R^3}$$

Viime liikme  $a^2$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = \frac{GM}{R^3} a^2$$

Massi  $M$  võime avaldada tiheduse kaudu:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$$

ja seega saame võrrandi kujuks järgmiselt:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho a^2$$

Viime võrrandi kõik liikmed ühele poole võrdusmärgi ja saame:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = 0$$

Kuna viimane võrrand on saadud eespool tuletatud võrrandist:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

mis tegelikult nulliga ei võrdu:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

siis seega saame järgmiselt:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

Kui me viimases võrrandis mõlemad pooled diferentseerime aja järgi ehk võtame aja järgi tuletise:

$$\frac{d}{dt}$$

ja arvestame järgmist matemaatikas tuntud seost:

$$\frac{d}{dx} ((\sin x)^2) = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x$$

saame tulemuseks:

$$\frac{1}{2} 2 \dot{a} \frac{d}{dt} (\dot{a}) - \frac{4\pi G}{3} \left[ \dot{\rho} a^2 - \rho 2a \frac{d}{dt} a \right] = 0$$

Eelnevalt arvestasime seda, et konstandist tuletis võrdub nulliga. Kuid järgnevalt teostame

järgmised matemaatilised teisendused ja arvestame seda, et täpp tähe peal tähendab aja järgi tuletist:

$$\dot{a}\ddot{a} - \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}a^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a\dot{a} = 0$$

Hiljem me tõestame, et kehtib seos

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a$$

ja kui me korrutame selle seose mõlemad pooled a täpiga, siis saame

$$a\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a^2$$

Viimast seost kasutades tuleb võrrand kujule:

$$-\frac{4\pi G}{3}\rho a\dot{a} - \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}a^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a\dot{a} = 0$$

Kui korrutame viimase saadud võrrandi mõlemad pooled järgmise avaldisega:

$$-\frac{1}{\frac{4\pi G}{3}a^2}$$

siis saamegi lõpuks füüsikalise seose

$$\frac{\rho a\dot{a}}{a^2} + \dot{\rho} + 2\frac{\rho a\dot{a}}{a^2} = 0$$

ehk

$$\dot{\rho} = -3\rho\frac{\dot{a}}{a}$$

mis kirjeldab aine tiheduse muutumist Universumi paisumisel. Viimane seos avaldatakse sageli kujul

$$\dot{\rho} = -3\rho H$$

milles Hubble'i konstant H on esitatav

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

Saadud võrrand on Universumi üks lokaalse evolutsiooni võrrandeid, mis kirjeldab aine tiheduse muutumist Universumi paisumisel. Universumi paisumise tõttu väheneb selle aine M tihedus  $\rho$  ajas t märgatavalt. See tähendab seda, et mida enam Universum aja jooksul paisub, seda vähemaks jääb selles eksisteeriv aine tihedus.

Viimast võrrandit on võimalik matemaatiliselt tuletada ka klassikalisest mehaanikast. Näiteks Universumi tihedus  $\rho$  avaldub järgmise valemiga:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Kui me võtame viimasest avaldisest tuletise aja järgi ehk  $d/dt$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{3}{4\pi} \frac{d}{dt} \left( \frac{M}{R^3} \right) = \frac{3M}{4\pi} \frac{d}{dt} (R^{-3}) = \frac{3M}{4\pi} R^{-4} (-3) \frac{dR}{dt}$$

saame Universumi tiheduse jaoks järgmise tulemuse

$$\frac{d\rho}{dt} = -3 \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}$$

Kuna teepikkuse jagatist ajaga defineeritakse füüsikas kiirusena

$$\frac{dR}{dt} = v$$

siis leiamegi lõpuks Universumi tiheduse muutumise seose koos Hubble'i konstandiga  $H$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho(t) \frac{v}{R} = -3\rho H(t)$$

ehk lühidalt võib selle välja kirjutada nii:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho H$$

Kuna tegemist on meil tegelikult esimest järku diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3H dt$$

siis leides selle võrrandi lahendi saame järgmise avaldise:

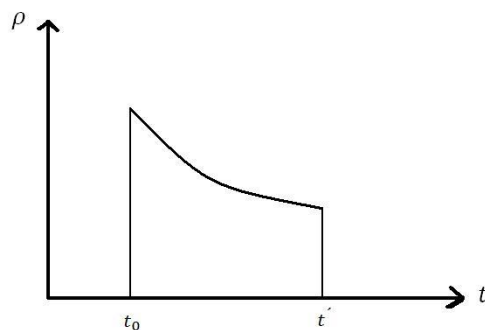
$$\rho = \rho_0 e^{-3 \int_{t_0}^{t'} H(t) dt}$$

Oletame, et  $H(t) = H = \text{constant}$  mingisuguse lühikese ajaperioodi jooksul

$$t \in [t_0, t'],$$

siis seega saame viimase seose, mis kirjeldab matemaatiliselt Universumi paisumisest tingitud aine tiheduse  $\rho$  muutumist ajas, kirja panna järgmiselt:

$$\rho \approx \rho_0 e^{-3H(t'-t_0)}$$



*Joonis 9 Universumi tihedus väheneb selle paisumisel.*

Järgnevalt näitame seda, et kuidas eelnevalt tuletatud võrrandist

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

on võimalik tuletada üks teine väga oluline Friedmanni võrrand ja ka Universumi lokaalse evolutsiooni võrrand. Näiteks kui meie viimases võrrandis võrdub konstant nulliga

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = 0$$

ja viime ühe liikme teisele poole võrdusmärgi nii, et mõlemad võrrandi pooled oleksid negatiivsed

$$-\frac{1}{2}(\dot{a})^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho a^2$$

siis saame järgmise võrduse, mis antud juhul on esitatud postulaadina:

$$-\frac{1}{2}(\dot{a})^2 \frac{1}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a = \ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$$

ehk

$$\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G a}{3}\rho$$

Viimane seos ongi tuntud Friedmanni võrrandina juhul, kui Universumi rõhk on null ehk  $p = 0$ . Saadud seos on oluline ka Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandi tuletamisel. Viimase võrrandi kehtivust tõestame järgmise matemaatilise analüüsi teel. Selleks avaldame massi tiheduse asemel massi  $M$ :

$$\ddot{a} = -\frac{GM}{R^3}a$$

ja viime võrrandi liikmed  $a$  ja  $R$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\ddot{a} \frac{R}{a} = -\frac{GM}{R^2}$$

Robertson-Walkeri meetrikas defineeritakse liiget  $a(t)$  Universumi mastaabitegurina Hubble'i seaduses  $v = HR$ :

$$R = r = a(t)\chi$$

millest omakorda saame

$$\frac{R}{a} = \chi$$

Viimane võrrand tuleb seega kujule:

$$\ddot{a}\chi = \frac{d^2 a\chi}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

milles

$$R = r = a(t)\chi$$

Lõpptulemuseks saame võrrandi

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

mis on füüsikaliselt olemuselt Newtoni teine seadus gravitatsioonijõu  $F$  korral:

$$a = -\frac{F}{m}$$

Negatiivne jõud on tingitud sellest, et gravitatsioonijõud  $F$  osutab vastupanu Universumi kosmoloogilisele paisumisele. Kui aga viimase võrrandi ehk

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

mõlemad pooled korrutame liikmega

$$\frac{dR}{dt}$$

ja integreerime aja järgi, siis saame tulemuseks võrrandi

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E = \text{const}$$

mis on energia jäävuse seadus klassikalisel kujul. Võrrandis on  $E$  integreerimiskonstant. Kogu eelnev matemaatiline analüüs näitas, et saadud seos

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \rho$$

on tegelikult tulenev võrrandist

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

ja seetõttu võib viimase võrrandi kirjutada kujule:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 + \ddot{a} a = -\frac{c^2}{2}$$

Vastavalt Robertson-Walkeri meetrikale võib Hubble'i konstandi  $H$  avaldada järgmiselt

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

Kui me võtame sellest ühekordse tuletise aja järgi, siis saame

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a} a - \dot{a} \dot{a}}{a^2} = \frac{\ddot{a} a}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

ehk

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

Eelnevalt tuletasime ja ka tõestasime ühe Friedmanni võrrandi

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

milles rõhk on null ehk  $p = 0$ :

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \rho$$

Viimasest võrrandist saamegi seose

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho$$

ja sellest tulenevalt saame järgmise Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandi:

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3} \rho - H^2$$

ning seda sellepärast, et kehtib võrdus:

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3} \rho - H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

Täpp Hubble'i konstandi  $H$ -i peal tähendab ühekordset aja järgi tuletist:

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho$$

Kuna viimases võrrandis on mass  $M$  avaldatud tiheduse kaudu järgmiselt:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$$

siis võrrandi tegelik kuju on

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{GM}{R^3}$$

Viime liikme  $-H^2$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi

$$\frac{dH}{dt} + H^2 = -\frac{GM}{R^3}$$

ja niisamuti ka  $R$ -i:

$$R \left( \frac{dH}{dt} + H^2 \right) = -\frac{GM}{R^2}$$

Tulemuseks saame järgmist:

$$R \frac{dH}{dt} + H^2 R = -\frac{GM}{R^2}$$

Kuna liikme  $H^2 R$  saame lahti kirjutada järgmiselt:

$$H^2 R = H(HR) = HV = H \frac{dR}{dt}$$

siis seega saamegi lõpptulemuseks järgmise võrrandi:

$$R \frac{dH}{dt} + H \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(HR) = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

ehk

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

Saadud viimane võrrand on Newtoni teine seadus gravitatsioonijõu  $F$  korral:

$$a = -\frac{GM}{R^2}$$

mis klassikalises mehaanikas on avaldatuna:

$$a = -\frac{F}{m}$$

Negatiivne jõud on tingitud sellest, et gravitatsioonijõud  $F$  avaldab vastupanu Universumi paisumisele.

#### 1.2.4.15 Aeg ja ruum kosmoloogias

Eespool tuletasime matemaatiliselt tuntud Robertson-Walkeri meetrika, mis peab kirjeldama Universumi kosmoloogilist paisumist:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + K(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

Võrrandis oleva  $K$  kordaja väärtusel võib olla kolm erinevat võimalust:

$$K = \begin{cases} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi \end{cases}$$

See tuleneb sellest, et Universumi ruum võib olla negatiivse või positiivse kõverusega või hoopiski tasane. Robertson-Walkeri meetrilist võrrandit:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [a^2(t)d\chi^2 + a^2(t)K(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

esitame järgnevas analüüsiks teistsugusel kujul. Selleks aga teostame järgmised matemaatilised teisendused. Näiteks kosmoloogiline mastaabitegur  $a$  on Robertson-Walkeri meetrikas seotud järgmiselt:

$$R = r = a(t)\chi$$

Viimane seos avaldub diferentsiaalvõrrandina:

$$dr = a(t)d\chi$$

mille ruut on:

$$dr^2 = a^2(t)d\chi^2$$

Sellest tulenevalt kirjutame Robertson-Walkeri meetrika kuju järgmiselt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

milles oleva  $r$ -i ruudu väärtus võib olla samuti kolme erineva variatsiooniga:



$$r^2 = \begin{cases} a^2(t)\sin^2\chi \\ a^2(t)\chi^2 \\ a^2(t)\sinh^2\chi \end{cases}$$

Lahti kirjutatuna on meetriline võrrand esitatav aga järgmiselt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2]$$

Kuna sfäärilised koordinaadid on seotud Cartesius`e ristkoordinaadistikuga:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

siis sellest tulenevalt avaldame Robertson-Walkeri meetrika järgnevalt analüüsiks esialgu kahe- mõõtmelisel kujul:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$$

milles ruumi kahemõõtmelisis väljendub:

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dx^2 + dy^2$$

Lisame viimasesse tuletatud meetrilisse võrrandisse kordaja a ruudu:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$$

Kordaja a ruut on kosmoloogiline mastaabitegur, mis sõltub ainult ajast. Järgnevalt teostame järgmised matemaatilised teisendused. Näiteks paisuva kera ( s.t. antud juhul paisuva ringi ) raadiuse r saame avaldada siinusena:

$$r = \sin\theta$$

millega diferentsiaal võrdub:

$$dr = \cos\theta d\theta = \sqrt{1 - r^2} d\theta$$

Nendest matemaatilistest teisendustest saame tuletada järgmise väga olulise võrrandi:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

milles nurgamuutuja ruut võrdub:

$$d\theta^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2} = \frac{1 - r^2}{1 - r^2} d\theta^2$$

ja seda sellepärast, et dr avaldub:

$$dr = \sqrt{1 - r^2} d\theta$$

Eelnevaid seoseid arvestades saamegi Robertson-Walkeri meetriliseks kujuks:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left( \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$$

mis kolmemõõtmelises ruumis avaldub järgmiselt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$

Siinkohal tuleb tähelepanu pöörata sellele, et viimases võrrandis puudub kordaja  $K$ , millel on kolm erinevat väärtust ja sellest tulenevalt määrab ära Universumi ruumi geomeetrilise kuju.  $K$  kordaja puudumise füüsikaline tähendus seisnebki antud juhul selles, et Universumi kosmoloogilise paisumise kinemaatika ei sõltu tegelikult Universumi ruumi geomeetrisest kujust. Viimase võrrandi ja tegeliku Robertson-Walkeri meetrilise võrrandi

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

ehk

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$

ainus erinevus seisnebki selles, et puudub kordaja  $K$ . Täpselt sama oli ka eespool tuletatud Friedmanni võrrandi ja kosmoloogia põhivõrrandi erinevusega, mille korral sisaldas Friedmanni võrrand  $k$  kordajat:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{kc^2}{2}$$

kuid samas saime eespool tuletada kosmoloogia põhivõrrandi, mis tegelikult ei sisalda  $k$  kordajat:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Täpsemalt öeldes võime Robertson-Walkeri kõvera aegeumi asemel arvestada  $y$ -faktorist tuleneva aegeumi kõverusega. Sellisel juhul kirjeldab Robertson-Walkeri meetrika sellist aja ja ruumi kõverust, mille korral on need teisenenud üle kogu Universumi. Meetrilistes võrrandites ei pea siis enam arvestama  $k$ -kordajaga, selle asemel arvestame  $y$ -faktoriga. Näitame seda kohe järgnevalt.

Tuntud Robertson-Walkeri meetriline võrrand oli tuletatud järgnevast meetrikast:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2) = c^2 dt^2 - a^2(dx^2 + dy^2)$$

milles  $a$  ruudus oli kosmoloogiline mastaabikordaja, mis sõltus ainult ajast. See võrrand oli esialgu esitatud lihtsuse mõttes kahemõõtmelisel kujul:

$$dx^2 + dy^2 = dl^2$$

Kuna Universumi kosmoloogilise paisumise kinemaatika ei sõltu tegelikult Universumi ruumi geomeetrisest kujust, siis seega me peame Robertson-Walkeri meetrikast tuletama teistsugused matemaatilised ja füüsikalised järeldused. Seda on võimalik teha ja järgnevalt näitamegi selle võimalikkust järgneva matemaatilise ja füüsikalise analüüsi teel. Näiteks kosmoloogilise mastaabikordaja  $a$  ruudus:

$$-a^2(dx^2 + dy^2) = -a^2 dl^2$$

asendame  $y$  ruudu kordajaga:

$$-y^2(dx^2 + dy^2) = -y^2 dl^2$$

mis samuti sõltub ainult ajast. Sellest tulenevalt saame järgmise võrduse:

$$-a^2 = -y^2 = -\frac{c^2}{v^2} = -\frac{c^2}{H^2}$$

milles  $c$  on valguse kiirus vaakumis ja  $H$  on Hubble'i konstant ehk Universumi paisumiskiirus. Kordaja  $y$  füüsikaline sisu on juba eespool täpselt kirjeldatud ja seetõttu ei hakka me seda siin enam kordama.

Robertson-Walkeri meetrikast on teada radiaalne kaugus kahe punkti vahel:

$$R = r = a(t)\chi$$

mis sõltub kosmoloogilisest mastaabitegurist  $a$ :

$$\frac{R}{\chi} = a = y = \frac{c}{H}$$

Antud juhul asendasime selle Universumi  $y$ -faktoriga, milles me näeme Hubble'i seadust  $HR$ :

$$\frac{HR}{\chi} = c$$

Selline tulemus annab meile ikkagi Universumi  $y$ -faktori muutumisseaduse:

$$Hy = c$$

ehk

$$y = \frac{c}{H}$$

mis näitab seda, et Universumi kosmoloogiline areng sõltub  $y$ -faktorist tulenevast aegruumi füüsikast, mitte Robertson-Walkeri aegruumi kõverusest.

Siit järeldub, et  $\dot{a}$  võrdub valguse kiirusega  $c$ :

$$Ha = \dot{a} = c$$

Kuna Hubble'i konstant  $H$  avaldub nõnda:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{R}}{R}$$

milles täpp tähendab tuletist aja järgi:

$$\dot{R} = \frac{d}{dt}R = dv$$

siis tulemuseks saame ikkagi Hubble'i seaduse:

$$HR = v = c$$

Kui radiaalkaugus  $R$  võrdub Universumi  $y$ -faktoriga:

$$R = a(t)\chi = y = \frac{c}{H}$$

siis saame tulemuseks samuti Hubble'i seaduse:

$$HR = c$$

Robertson-Walkeri meetrilise võrrandi kujuks saame:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - y^2(dx^2 + dy^2)$$

Viimases võrrandis on näha seda, et teiseneb ainult ruum, kuid aeg sealhulgas mitte. Kuna erirelatiivsusteooriast on teada, et aeg ja ruum on üksteisest lahutamatult seotud ja seega peavad aeg ja ruum teisenema alati koos, siis seetõttu peaks Robertson-Walkeri meetriline kuju olema järgmine:

$$ds^2 = c^2 \tau^2 = c^2 \frac{dt^2}{y^2} - y^2 dl^2$$

Viimases võrrandis teisevad aeg ja ruum koos ehk tegemist on aja ja ruumi „koos-teisenemisega“. Selle võrrandi tuletust põhjendame kohe järgneva analüüsi kaudu ja näitame ka seda, et kuidas on see seotud Universumi kosmoloogilise paisumisega. Näiteks üldrelatiivsusteoorias kirjeldab Schwarzschildi meetrika aja ja ruumi koos-teisenemist gravitatsioonivälja tsentri poole liikudes. See on üks aja ja ruumi lahutamatu printsiibi väljundeid nii nagu on seda ka näiteks valguse kiiruse konstantsuse printsiip vaakumis. Gravitatsioonivälja kirjeldab aja ja ruumi intervalli meetriline võrrand, mis seisneb selles, et aeg ja ruum teisevad ehk kõverduvad gravitatsioonivälja tsentri poole liikudes:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dl^2$$

ehk

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

milles R

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

on tuntud Schwarzschildi raadius. Tegemist on tegelikult aegruumi intervalli meetrikaga ja seetõttu võime ds-i avaldada järgmiselt:

$$ds^2 = c^2 \tau^2$$

Meetrilises võrrandis olev kordaja y

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = y$$

näitabki aja või ruumi kõverdust ehk teisenemist. Sellest tulenevalt saame y ruudu avaldada

$$y^2 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}}$$

ja seega saame y jagatise väärtuseks

$$\left(1 - \frac{R}{r}\right) = \frac{1}{y^2}$$

Aegruumi intervalli meetriline võrrand on esitatud sfäärilistes koordinaatides, kuid selle võib esitada ka mittedfäärilistes koordinaatides:

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Viimaseid matemaatilisi teisendusi arvestades saame meetrilise võrrandi kirjutada järgmisele kujule:

$$ds^2 = c^2\tau^2 = c^2 \frac{dt^2}{y^2} - y^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 \frac{dt^2}{y^2} - y^2 dl^2$$

ehk

$$c^2\tau^2 = c^2 \frac{dt^2}{y^2} - y^2 dl^2$$

Viimane tuletatud võrrand on üldisem valem, mis võib kirjeldada peale gravitatsioonivälja ka veel midagi muud. See võrrand sisaldab aja ja ruumi „koos-teisenemist“. Järgnevas analüüsiks oletame, et viimane võrrand kirjeldab Universumi kosmoloogilist paisumist. Sellest tulenevalt tähendab ruumi teisenemine ruumi kontraktsiooni vastandnähtust ehk seega ruumi laienemist ehk paisumist. Meetriline võrrand näitab, et ruumi teisenemisega peab teisenema ka aeg. See tuleneb aja ja ruumi üldisest lahutamatus printsiibist, mida näitab meile valguse kiiruse konstantsuse printsiip vaakumis. Aeg ja ruum on seotud kiirusega ning seetõttu saame y asemele panna järgmise avaldise:

$$y = \frac{c}{v} = \frac{c}{H}$$

milles v on Universumi paisumiskiirus H:

$$v = H$$

Kordaja y on tulenev eespool tuletatud võrrandist:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Näiteks viime võrrandis oleva ruutjuure ja kiiruse v teisele poole võrdusmärgi, tulemuseks saame:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{v}$$

Tõstame viimase võrrandi ruutu:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{c^2}{v^2} = y^2$$

ja võrrandi sulgudes oleva  $v^2$  asemele saame kirjutada gravitatsioonivälja paakiiruse, mis omakorda annab meile tuntud Schwarzschildi raadiuse R:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)}$$

Seetõttu saamegi  $y^2$  kordajaks ka järgmiselt:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} = \frac{c^2}{v^2} = y^2$$

Viimase  $y$  avaldise füüsikaline sisu on juba eespool kirjeldatud ja seetõttu ei hakka me seda siin enam kordama, vaid piirdume järgneva matemaatilise analüüsiga. Tuletatud meetrilisest võrrandist saame aja teisenemise avaldise:

$$c^2 \tau^2 = c^2 \frac{dt^2}{y^2}$$

ehk kiiruse  $c$  välja taandumise korral:

$$\tau^2 = \frac{dt^2}{y^2}$$

Saadud võrrand on vägagi sarnane erirelatiivsusteooriast tuntud aja teisenemise valemiga. Sarnaselt aja teisenemise võrrandiga, saame meetrilisest võrrandist avaldada ka ruumi teisenemise valemi:

$$c^2 \tau^2 = -y^2 dl^2$$

Siinkohal tuleb kindlasti tähelepanu pöörata sellele, et ruumi teisenemise võrrandis esineb miinus märk. Selle füüsikaline sisu või tähtsus tuleb välja järgmise analüüsi teel. Näiteks  $y$  ruudu kirjutame järgnevalt lahti:

$$c^2 \tau^2 = -\frac{c^2}{v^2} dl^2$$

Ka selles võrrandis taandub kiirus  $c$  välja:

$$\tau^2 = -\frac{dl^2}{v^2}$$

Kiirus  $v$  aga oli Universumi paisumiskiirus  $H$ , mis sõltus ajast, mitte aga ruumist:

$$v^2 \tau^2 = H^2 \tau^2 = -dl^2$$

Viimasest seosest saamegi Universumi paisumiskiiruse  $H$  avaldada järgmise valemiga:

$$v^2 = H^2 = -\frac{dl^2}{\tau^2}$$

Tegemist oleks nagu klassikalisest mehaanikast tuntud kiiruse  $v$  definitsiooniga, kui ruudud ära võtta. Üldisest meetrilisest võrrandist avaldasime eelnevalt aja teisenemise võrrandi:

$$\tau^2 = \frac{dt^2}{y^2}$$

Kuna aja ja ruumi teisenemise võrrandid tulenevad mõlemad ühest ja samast meetrilisest võrrandist, siis seega avaldame  $H^2$  võrrandis aja  $\tau$  järgmiselt:

$$H^2 = -y^2 \frac{dl^2}{dt^2}$$

Kuna  $y$  ruut avaldub järgmiselt

$$y^2 = \frac{c^2}{v^2}$$

ja kiiruse  $v$  definitsioon avaldub valemiga

$$\frac{dl^2}{dt^2} = v^2$$

siis seega saame  $H^2$  väärtuse välja kirjutada järgmiselt:

$$H^2 = -\frac{c^2}{v^2} v^2 = -c^2$$

ehk

$$H^2 = -c^2$$

See tähendab seda, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ :

$$H = c$$

kuid aeg ja ruum on kogu Universumi ulatuses teisenenud nii, et meile (s.t. Universumi „sees“ olevale reaalsele vaatlejale) näib, et Universum paisub valguse kiirusest palju aeglasema kiirusega. Kiiruse  $v$  ruudu avaldis

$$v^2 = -c^2$$

tuleb välja ka erirelatiivsusteooriast, mis näitab, et kõik kehad Universumis liiguvad tegelikult valguse kiirusega  $c$ . See tulenebki just sellest, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $H$ :

$$v = H$$

Viimane seos  $v^2 = -c^2$  tuleneb ametlikult erirelatiivsusteooria geomeetriast, milles neljamõõtmelise impulsi ruut  $p_\mu p_\mu$  on defineeritav koos seisue energiaga järgmiselt:

$$-m_0^2 c^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{m_0^2 (v^2 - c^2)}{1 - \beta^2} = p_\mu p_\mu ,$$

milles olev kordaja liige

$$\frac{v^2 - c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v_\mu v_\mu = v^2 = -c^2 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = -c^2$$

on ajasarnane vektor ja see on konstant.  $v_\mu v_\mu$  on siin aga neljamõõtmelise kiiruse ruut, mis näitab tegelikult seda, et kõik kehad Universumis liiguvad valguse kiirusega  $c$ . Sellest tulenevalt on (neljamõõtmeline kiirus)vektor  $v_\mu$  avaldatav aga järgmiselt

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} ,$$

milles olev jagatise liige

$$\tau = t\sqrt{1 - \beta^2}$$

on liikuva keha omaaeg ja seega saame kiirusvektori lõplikuks seoseks:

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{t\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Vastavalt neljamõõtmelise kiirusvektori matemaatilisele definitsioonile tuleb impulsi  $p$  kuju

$$p = m_0 v$$

teistsuguste tähistustega järgmiselt

$$p_\mu = m_0 v_\mu$$

Lõppkokkuvõttes võib öelda, et aja ja ruumi teooria seletab üheaegselt ära selle, et miks meile nähtav Universum ei paisu valguse kiirusega  $c$  ja miks Universumi paisumiskiirus „ajas“ suureneb:

1. Mida enam ajas tagasi vaadata, seda suurem on kordaja  $y$  väärtus. Universumi paisumise alghetkel oli  $y$  väärtus lausa lõpmatult suur:  $y = \infty$ .
2. Universumi sees olevale vaatlejale on Universumi vanuseks 13,7 miljardit aastat. See tähendab ka seda, et meie suhtes oli 13,7 miljardit aastat tagasi  $y$  väärtus lõpmata suur ehk mida lähemale 13,7 miljardi aasta tagusele ajale, seda suurem on  $y$  väärtus.
3. Mida suurem on Universumi ruumala ja mida väiksem on  $y$  väärtus, seda kiiremini Universum paisub. See tähendab ka seda, et mida enam ajas tagasi vaadata, seda aeglasemini Universum paisus. Järelikult Universumi paisumise alghetkel, mil kogu Universumi ruumala oli praegusest palju väiksem ja kordaja  $y$  väärtus lõpmatult suur, oli Universumi paisumiskiirus lõpmata väike.
4. Mida suurem on Universumi kogu ruumala, seda väiksem on kordaja  $y$  väärtus. See tähendab seda, et Universumi paisumiskiirus suureneb. Seda seaduspärasust me mõistame „tume energiana“.
5. Universumi ruumala on lõpmata kauges tulevikus lõpmatult suur ja  $y$  väärtus läheneb ühele. See tähendab seda, et Universumi paisumiskiirus läheneb väga kauges tulevikus valguse kiirusele  $c$ . Seega tulevikus ja isegi praegusel ajahetkel domineerib Universumis tume energia.
6. Universum paisub igavesti, kuid tume energia kauges tulevikus lõpmata suureks siiski ei muutu. Kuid sellest hoolimata põhjustab see kogu teada oleva aine „rebenemise“, mille korral kogu aine Universumis kistakse lahti – kõik galaktikad, tähed, planeedid, isegi aatomid ja nende tuumad ning osakesed „lagunevad“. Seda kosmoloogilist perioodi nimetatakse Universumi Suureks Rebenemiseks. Selline kosmiline tuleviku stsenaarium on matemaatiliselt kindel. See võib põhjustada isegi Universumi enda eksisteerimise lakkamise, kuid see juhtub alles sadade miljardite aastate pärast.
7. Maailmas pole olemas mitte ühtegi vaatuslikku kinnitust ega veenvat füüsikalist põhjust sellele, et miks peaks tume energia mingil põhjusel kunagi lakkama.
8. Tume energia ehk Universumi paisumiskiiruse suurenemine avaldub Hubble´ seaduses Hubble´ konstandi  $H$  muutumises aja jooksul. Hubble´ konstant  $H$  muutub ajas, kuid mitte ruumis. See muutumine toimub kasvamise suunas.



#### 1.2.4.16 Universumi paisumise avaldumine gravitatsiooniväljades

Kui vaatleja eksisteerib süsteemis, milles esinevad aja ja ruumi teisenemised, siis ei ole see vaatlejale otseselt tajutav. Aja ja ruumi teisenemist on otseselt tajutav ainult siis, kui vaatleja asub sellest süsteemist väljapool ja vaatleb kõrvalt seda süsteemi, milles esinevad aja ja ruumi teisenemised. Selles mõttes jääb vaatleja „oma-aegruum“ alati ühesuguseks sõltumata sellest, millised on parajasti aja ja ruumi teisenemised. Vaatleja „oma-aegruum“ on tegelikult illusioon, mis ei pruugi näidata süsteemis olevale vaatlejale tegelikku aja ja ruumi „mõõtmeid“.

Universumi y-faktori suurus näitab seda, et mitu korda on aeg ja ruum teisenenud Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale või mitu korda on aeg ja ruum teisenenud Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale. Selle väärtus muutub ajas väiksemaks, mille tulemusena Universumi paisumiskiirus Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale ajas suureneb.

Kuna vaatleja eksisteerib süsteemis, milles esinevad aja ja ruumi teisenemised, mille korral ei ole need vaatlejale otseselt tajutavad, siis seega kuidas Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale saab paista Universumi paisumiskiiruse suurenemine ajas või üldse Universum paisuda? Selle küsimuse vastus seisneb järgmises matemaatilises ja füüsikalises analüüsis, mis muidu on esitatud eespool ja eri- ning üldrelatiivsusteooria osades. See on vajalik selleks, et jõuda lõpuks füüsikalise mõistmiseni Universumi paisumise kinemaatikas, mis avaldub Universumis gravitatsiooniväljades ja ka Plancki pinna olemasolu tõttu Universumis.

Ajas rändamise üldvõrrandist on võimalik tuletada terve rida väga tähtsaid fundamentaal-füüsikalisi- ja matemaatilisi seoseid ja järeldusi. Võib ka nii öelda, et tegemist on ühe põhivõrrandiga, mille järeldused on heas kooskõlas ajas rändamise teooria aluspõhimõtetega. Neid järeldusi on relatiivsusteooria ja kvantmehaanika osades põhjalikumalt uuritud ja analüüsitud. Näiteks eespool tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

on võimalik tuletada aja dilatatsiooni valem, mis on täiesti identne erirelatiivsusteooriast tuntud aja teisenemise valemiga. Näiteks kui eelnevalt välja toodud üldvõrrandis on  $vt' = 0$  ehk

$$ct = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

siis saame matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'$$

ehk

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t,$$

milles jagatise liiget

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

nimetatakse erirelatiivsusteoorias  $\gamma$ -faktoriks ehk kinemaatiliseks teguriks, mis näitab aja aeglustumist välisvaatleja suhtes. Selle füüsikalise olemuse mõistmiseks on vajalik tuletada veel üks võrrand, mis näitab matemaatiliselt aja dilatatsiooni nähtuse tulenemist eelnevalt tuletatud hyperruumi ja tavaruumi füüsikalisest süsteemist. Selleks teeme eelnevalt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandis

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c$$

järgmised matemaatilised teisendused. Juhul kui  $ct = 0$ , saame võrrandi

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c.$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled  $t'$ -ga:

$$\frac{vt'}{t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{ct'}{t'}$$

ja sellest tulenevalt saame lõpuks järgmise väga olulise avaldise, mida erirelatiivsusteoorias pole võimalik matemaatiliselt tuletada:

$$v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

ehk visuaalselt paremini esitatuna:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Tähistame  $v$ -d  $v'$ -ga:

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Viimase võrrandi füüsikaline sisu seisneb järgmises analüüsis. Eelnevalt on teada, et meie tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$  ja sellest tulenevalt peab Universum paisuma valguse kiirusega. Sellest ongi näha seda, et kui keha  $m$  liikumiskiirus on tavaruumi suhtes  $c$  ehk  $v = c$  (näiteks valguse liikumiskiirus meie tajutavas aegruumis), siis hyperruumi suhtes on keha paigal ehk  $v' = 0$ . Kui aga keha liikumiskiirus on tavaruumi suhtes null (keha on paigal) ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi suhtes on keha liikumiskiirus võrdne  $c$ -ga ehk  $v' = c$ . See tähendab ka seda, et kõik kehad Universumis liiguvad valguse kiirusega  $c$ . Valgus ise on tegelikult paigal. Kuna aja dilatatsiooni võrrand, mis on tuletatav samuti ajas rändamise üldvõrrandist, on kujul

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja seetõttu saame kinemaatilise teguri ruutjuure avaldise avaldada järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

Ajas rändamise üldvõrrandist tuletatud valemi

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

saame seega viia järgmisele matemaatilisele kujule:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{ct}{t'}$$

ehk

$$v = c \frac{t}{t'}$$

Viime  $t'$  teisele poole

$$vt' = ct$$

ja teisendame viimast võrrandit kujule:

$$v \Delta t = ct,$$

milles  $\Delta t = t'$ . Viimasest tuletatud väga olulisest võrrandist, mis viib lõpuks kvantmehaanika füüsikalise mõistmiseni

$$v \Delta t = ct$$

on selgelt näha seda, et keha  $m$  liikumiskiirus  $v$  sõltub aja kulgemisest (näiteks mida rohkem aeg teiseneb välisvaatleja suhtes, seda väiksema omaajaga jõuab keha liikuda ühest ruumipunktist teise) või keha liikumiskiirus ise tingib aja kulgemise iseloomu (näiteks mida kiiremini liigub keha, seda enam teiseneb aeg):

$$v = \frac{ct}{\Delta t}$$

Teepikkus  $ct$  võib olla valguse teepikkus tavaruumi  $K$  suhtes või seisumassiga keha teepikkus hyperruumi  $K'$  suhtes:

$$v = \frac{s}{\Delta t},$$

milles  $s = ct$ . Järgnevalt analüüsime aja teisenemise

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tulenevust hyperruumi  $K'$  ja tavaruumi  $K$  füüsikalisest süsteemist. Näiteks kui keha massiga  $m$  liigub tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$  (see võib olla näiteks valguse liikumine vaakumis

), siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal ehk  $v' = 0$ . Eelnevalt tuletatud valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

on sellisel juhul  $v = c$ :

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}$$

ja saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks

$$v' = 0.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui keha liigub vaakumis kiirusega  $c$  mistahes vaatleja suhtes, siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal (s.t. „absoluutselt paigal“). Kuna keha  $m$  liigub sellisel juhul tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$ , siis aeg on tavaruumi  $K$  suhtes teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja seetõttu saame hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0.$$

See tähendab seda, et kui keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes liikumiskiiruseks  $c$  ehk  $v = c$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

Kui aga keha  $m$  on hyperruumi  $K'$  suhtes paigal ehk  $v' = 0$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes on aeg teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$v' = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui mingi keha liigub vaakumis kiirusega  $c$ , siis see on konstantne kiirus mistahes vaatleja jaoks, kes vaakumis parajasti eksisteerivad. See tuleneb otseselt sellest, et mida lähemale jõuame keha liikumiskiirusele  $c$ , seda aeglasemini kulgeb aeg välisvaatleja suhtes. Kiirusel  $c$  liikudes läheb ajavahe  $\Delta t$  lõpmata suureks ehk

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja see tähendab seda, et välisvaatleja suhtes kulgeb aeg lõpmata aeglaselt, kuid keha enda suhtes (nõ. keha „omaajas“) kulgeb aeg lõpmata kiiresti. See tähendab seda, et keha jõuab omaajas tavaruumis  $K$  (näiteks vaakumis) mistahes ruumipunkti hetkega ehk lõpmata suure kiirusega:  $v \rightarrow \infty$ . Kuid hyperruumi  $K'$  suhtes on keha „absoluutselt“ paigal ja seetõttu ei ole hyperruumi  $K'$

suhtes ka aja teisenemist ehk:

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t.$$

See tähendab seda, et hyperruumi K` suhtes on keha kiirus „omaajas“ lõpmata väike. Kui keha massiga m on tavaruumi K suhtes aga hoopis paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi K´ suhtes liigub see kiirusega  $v' = c$ . Näiteks kui me kiiruse teisenemise valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on kiirus v võrdne nulliga ehk

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}$$

siis saamegi hyperruumi K´ suhtes kiiruseks c:

$$v' = c.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et absoluutselt kõik kehad Universumis, millel on seisumass  $m_0$  ja seega seisuenergia  $E_0 = m_0 c^2$ , liiguvad valguse kiirusega c hyperruumi K´ suhtes, kuid samas võivad need meie tavaruumis K olla paigal. Ka valguse suhtes liiguvad kõik kehad kiirusega c. Kuna keha m on tavaruumi K suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis tavaruumi K suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t$$

ja seetõttu saamegi hyperruumi K´ suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

See tähendab seda, et kui keha m on tavaruumi K suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi K´ suhtes on aeg teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{s}{\infty} = 0.$$

Kui keha m liigub hyperruumi K´ suhtes kiirusega c ehk  $v' = c$ , siis tavaruumi K suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$v' = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

See tähendab seda, et kui valguse korral oli nii, et liikudes vaakumis ehk tavaruumis K kiirusega c ja seetõttu omaajas jõudis valgus hetkega mistahes ruumpunkti tavaruumis, siis siin antud juhul on olukord aga vastupidine. Näiteks seisumassiga kehad liiguvad hyperruumi K´ suhtes kiirusega c ja

sellest tulenevalt on hyperruumi ja tavaruumi ajavahe lõpmata suur. See tähendab seda, et hyperruumi  $K'$  poolt vaadatuna kulgeb aeg tavaruumis ehk kogu meie Universumis tervikuna lõpmata kiiresti, kuid tavaruumis olles kulgeb aeg vaatleja jaoks tavapärasel tempos ja aja kulgemine ei näi mitte kunagi katkevat ehk selle eksisteerimine näib olevat igavikuline. Kuna kõik kehad liiguvad hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ , siis seega hõlmab „omaaeg“ hyperruumi suhtes vaadatuna üle kogu Universumi ehk kogu tavaruumi  $K$ . Selles mõttes kõik kehad Universumis, millel on seisumass ja seisueenergia ning mis liiguvad hyperruumi suhtes kiirusega  $c$ , liiguvad hyperruumi poolt vaadatuna ( ehk n.ö. hyperruumi omaajas ) lõpmata suure kiirusega ehk  $v \rightarrow \infty$ , sest aeg kulgeb lõpmata suure kiirusega.

Selle paremaks mõistmiseks toome järgnevalt välja ühe mõttelise eksperimendi. Näiteks kogu meie paisuv Universum on nagu üks hiigel suur taustsüsteem, milles esineb üleüldine ehk globaalne aja ja ruumi teisenemine. Selles hiigel suures taustsüsteemis ( mis on Universumi suurune ) eksisteerivad lõputu hulk väiksemaid taustsüsteeme nagu näiteks liikuvad ehk inertsiaalsed taustsüsteemid ( milles avalduvad erirelatiivsusteooria seaduspärasused ) ja mitteinertsiaalsed taustsüsteemid ehk gravitatsiooniväljad ( milles avalduvad üldrelatiivsusteooria seaduspärasused ). Oletame, et meil on kaks vaatlejat, kellest üks asub meie paisuvas Universumis ja teine hüpoteetiline vaatleja asub sellest väljapool. Paisuva Universumi sees olevale vaatlejale tunduvad Universumis toimuvad sündmused kulgevad normaalset jadapidi, kui välja arvata erinevates taustsüsteemides esinevaid aja kulgemisi, mille erinevusi võivad põhjustada kehade liikumiskiiruste või raskusjõu erinevad vahekorrad. Kuid teisele vaatlejale, kes asub paisuvast Universumist väljapool, tundub aeg Universumis kulgevat lõpmata kiiresti.

Kogu eelnev matemaatiline analüüs näitas üsna veenvalt, et kui tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes, siis järelikult keha jõudmiseks hyperruumi ehk  $K'$ -i peab keha liikumiskiirus tavaruumis  $K$  ( milles eksisteerib aeg ja ruum ) suurenema. Kuna  $K'$ -s ehk hyperruumis aega ei eksisteeri ( s.t. aeg on lõpmatuseni aeglenenud ehk aeg on peatunud ), siis seega lähenedes hyperruumile ( ehk keha liikumiskiiruse suurenemisel tavaruumis  $K$  ) aegleneb aeg. Kuid aja aeglennemine keha liikumiskiiruse kasvades on teada ainult erirelatiivsusteooriast: näiteks mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Keha liikumiskiiruse lähenemist valguse kiirusele vaakumis võib antud kontekstis tõlgendada keha liikumiskiiruse kasvuna tavaruumis  $K$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes hakkab keha paigale jääma. Järelikult  $K$  liigub  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$ .

Niisamuti ka gravitatsiooniväli seisneb aja dilatatsioonis ja ruumi kontraktsioonis. See tähendab seda, et gravitatsiooni tsentrite lähenedes aeg aegleneb ja ruumipunktide vahelised kaugused vähenevad ( ruum kontrakteerub ) välisvaatleja suhtes. Keha mass mõjutab aja kulgemist ja 3-mõõtmelise eukleidiilise ruumi meetrikat. Meetrika uurib kahe ruumipunkti vahelist kaugust ds. Gravitatsiooni tsentris on aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni. See tähendab, et aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast teatud kaugusel  $R$  gravitatsiooni tsentrist.

Mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Kui keha  $m$  liigub tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$ , siis nähtub tavaruumi  $K$  liikumine hyperruumi  $K'$  suhtes. Gravitatsiooni tsentrite lähenedes aeg samuti aegleneb ja ruumipunktide vahelised kaugused vähenevad ( ruum kontrakteerub ) välisvaatleja suhtes. Gravitatsiooni tsentris ehk Schwarzschildi pinnal on aegruumi kõverus lõpmatult suur ja paokiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$ . Sellest järeldub selgelt, et tavaruumi  $K$  liikumine hyperruumi  $K'$  suhtes peab avalduma ( s.t. nähtuma ) ka gravitatsiooniväljas ehk tsentraalsümmeetrilises aegruumi kõveruses nii, et kolmemõõtmeline ruum eemaldub ( s.t. „liigub“ ) aegruumi kõveruse tsentrist eemale. Analüüsime seda järgnevalt matemaatiliselt.

Tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ . Keha  $m$  liikumiskiiruse lähenemisel  $c$ -le teiseneb aeg tavaruumis  $K$  välisvaatleja suhtes. Seda kirjeldavas aja dilatatsiooni võrrandis

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

olev ruutjuure jagatise liige

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

on „teatud tingimustes“ võrdne gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrandiga:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

Gravitatsioonivälja ehk aegruumi kõveruse korral saame kasutada sfäärilisi koordinaate ehk meil on tegemist tsentraalsümmeetrilise keskkonnaga, mis ajas üldiselt ei muutu. See tähendab füüsikaliselt seda, et suhte  $\frac{v^2}{c^2}$  ( mille korral  $v = 0$  ehk keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal, kuid hyperruumi  $K'$  suhtes liigub see kiirusega  $c$  ) vastab gravitatsioonivälja ehk aegruumi kõveruse korral mingi ruumikoordinaat ehk antud juhul mingi kindel kaugus  $r$  gravitatsiooni tsentrist ( s.t. Schwarzschildi pinnast ):

$$\frac{v^2}{c^2} = r.$$

Selline „null punkt“ asub tavaliselt gravitatsiooni tsentrist lõpmatuses. Täpselt sama on ka suhtega  $\frac{c^2}{c^2}$  ( mille korral  $v = c$  ehk keha  $m$  on hyperruumi  $K'$  suhtes paigal, kuid tavaruumi  $K$  suhtes liigub see kiirusega  $c$  ) ehk sellele vastab mingi kindel kaugus  $R$  gravitatsiooni tsentrist:

$$\frac{c^2}{c^2} = R.$$

See „punkt“ asub täpselt gravitatsioonivälja ehk tsentraalsümmeetrilise aegruumi kõveruse Schwarzschildi pinnal, millel paokiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$ . Selline analüüs näitab üsna selgelt seda, et kui  $v = 0$  ( s.t. keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal ) ja  $r = \infty$  ( s.t. aegruum on tasane lõpmata kaugel gravitatsiooni tsentrist ), siis kehtib järgmine võrdus

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} = \frac{t}{t'}$$

Selline võrdus kehtib ka siis kui  $v = c$  ( s.t. keha  $m$  liigub tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk nähtub tavaruumi  $K$  liikumine hyperruumi  $K'$  suhtes ) ja  $r = R$  ( s.t. gravitatsiooni tsentris ehk Schwarzschildi pinnal on aegruumi kõverus lõpmatult suur ja paokiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$  ). Sellest järeldub selgelt, et tavaruumi  $K$  liikumine hyperruumi  $K'$  suhtes peab avalduma ( nähtuma ) ka gravitatsiooniväljas ehk tsentraalsümmeetrilises aegruumi kõveruses nii, et kolmemõõtmeline ruum eemaldub ( s.t. „liigub“ ) aegruumi kõveruse tsentrist eemale. Kuna gravitatsioonitsentreid on Universumis loendamatu palju, siis põhjustab see masside üksteisest eemaldumise üle kogu Universumi, mida me füüsikaliselt mõistame ruumi paisumisena ehk Universumi ruumala suurenemisena.

Universumi paisumine on ajas rändamise teooria üheks põhialuseks oleva väite kinnitus, et erinevatel ( kosmoloogilistel ) ajahetkedel on samas ka erinevad ruumipunktid. Selline mõtteviis viibki tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  füüsikalise süsteemi mõistmiseni, mille seaduspärasus avaldubki looduses Universumi paisumisena. Näiteks kui Universum paisub ( Universumi ruumala suureneb ajas ), siis erinevatel ajahetkedel on Universumi ruumala ( seega ka ruumipunktide

koordinaadid ) erinev. Universumi paisumist kujutatakse sageli ette just kera või õhupalli paisumisena. Siis on väga selgesti näha seda, et kera sfäärilised koordinaadid ( ehk ruumipunktide koordinaadid ) ja kera raadius on erinevatel ajahetkedel erinevad.

Kuna tavaruum K liigub hyperruumi K´ suhtes kiirusega c, siis peaks teoreetiliselt Universum paisuma samuti kiirusega c. Kuid tegelikkuses on Universumi paisumiskiirus valguse kiirusest c palju kordi väiksem. Ainus võimalus kuidas sellist näilist dilemmat ratsionaalselt seletada on see, et kiiruste erinevus on tingitud aja ja ruumi teisenemisest üle kogu Universumi. Seda on võimalik ka matemaatiliselt tuletada. Näiteks eelnevalt tuletatud võrrandis

$$v\Delta t = ct$$

on näha üsna selgelt, et kiiruste erinevuse võib tingida asjaolu, et aeg on teisenenud:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{c}{v} = y$$

milles y on tuntud kinemaatiline tegur erirelatiivsusteooriast:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

või üldrelatiivsusteooriast

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

Kuna eespool tuletatud kiiruste teisenemise relativistlikus valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

näitab erinevate kiiruste suhet kinemaatiline tegur y

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{v}$$

siis aja dilatatsiooni valemi järgi

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

näitabki y-faktor aja teisenemist:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = y$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et tavaruum K „liigub“ hyperruumi K´ suhtes konstantse kiirusega c, mis põhjustab aja teisenemise ehk y väärtuse vähenemist. Kuid samas y vähenemine tingib omakorda Universumi paisumiskiiruse suurenemist paisuva Universumi sees olevale vaatlejale.

y muutumine näitab Universumi kosmoloogia ajalist arengut. y suurus näitab seda, et mitu korda



on aeg ja ruum teisenenud Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale või mitu korda on aeg ja ruum teisenenud Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale.  $y$  ei ole konstant. Selle väärtus muutub ajas väiksemaks, mille tulemusena Universumi paisumiskiirus Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale ajas suureneb. See tähendab ka seda, et mida enam ajas tagasi vaadata, seda suurem oli  $y$  väärtus ja sellest tulenevalt oli Universumi paisumiskiirus väiksem (s.t. aeglasem). Sellest järeldub, et Universumi paisumise alghetkel oli  $y$  väärtus lõpmata suur ehk  $y = \infty$  ja seega oli Universumi paisumiskiirus lõpmatult väike.  $y$  väärtus muutub ajas väiksemaks ja selle tulemusena suureneb Universumi paisumiskiirus ajas. „Kauges“ tulevikus muutub  $y$  väärtus väga väikeseks võrreldes lõpmatusega ehk läheneb ühele, mille tulemusena läheneb Universumi paisumiskiirus valguse kiirusele  $c$ . Universumi paisumiskiirus läheneb sellisel juhul kiirusele  $c$ .

Universumi tegelik paisumiskiirus on võrdne valguse kiirusega vaakumis. Kuid Universumi näiline paisumiskiirus on praegusel hetkel  $74 \text{ km/s} \cdot (\text{Mpc})$ . Selline kiirus on SI süsteemis (s.t. ühikutes) aga järgmine:

$$\frac{x}{y} = \frac{74\,000 \left(\frac{m}{s}\right)}{3,086 \cdot 10^{22}(m)} = 2,3(979) \cdot 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ ühe meetri kohta,}$$

milles galaktikate eemaldumiskiirus on  $x = 74 \text{ km/s} = 74\,000 \text{ m/s}$ , vahemaa ruumis on  $y = 1 \text{ Mpc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m} \cdot \text{miljon} = 3,086 \cdot 10^{22} \text{ m}$  ja valguse kiiruse arväärtus vaakumi korral on  $c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Kuna Universumi paisumiskiirus on palju kordi väiksem valguse kiirusest ehk Universumi aeg ja ruum on teisenenud, siis seega peame leidma  $y$  (s.t. gamma) väärtuse, mis näitab meile seda, et mitu korda on Universumi paisumise kiirus aeglasem tegelikust paisumiskiirusest ehk mitu korda on aeg ja ruum Universumis teisenenud ( $y$  on kordaja, millel ei ole ühikut):

$$y = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)}{2,3979 \cdot 10^{-18} \left(\frac{m}{s}\right)} = 1,25109 \cdot 10^{26} \approx 1,25 \cdot 10^{26}$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et kui meie „igapäevaselt tajutavas aegruumis“ ehk tavaruumis  $K$  on möödunud näiteks üks sekund:

$$t' = 1 \text{ sek}$$

siis tegelikult (s.t. Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale ehk hyperruumi  $K'$  suhtes vaadatuna) on möödunud „kõigest“

$$t = \frac{t'}{y} = 8 \cdot 10^{-27} \text{ sek}$$

Viimases võrduses on  $t'$  nö. näiline aeg (s.t. Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale kulgev aeg) ja  $t$  on tegelik aeg (s.t. Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale kulgev aeg). Sellest järeldub, et kui aeg on Universumis tegelikult möödunud üks sekund, siis näiliselt on möödunud:

$$t' = ty = y \approx 1,25 \cdot 10^{26} \text{ sek} \approx 3,963 \cdot 10^{18} \text{ a} \approx 4 \text{ miljardit miljardit aastat}$$

milles  $t = 1 \text{ sek}$ . Eelnevalt on arvestatud, et ühes aastas on  $31\,536\,000$  sekundit, kui ei ole tegemist liigaastaga.

Järgnevalt näitame seda, et kuidas gravitatsiooniline aja dilatatsioon ehk seega gravitatsioonijõud ja Universumi ruumi paisumine on omavahel füüsikaliselt seotud. See näitab kõige otsesemalt seost masside poolt tekitatud aegruumi kõveruse ja ruumi kosmoloogilise paisumise vahel. Järgnev matemaatiline analüüs on sellest, kuidas on aegruumi kõverus (s.t. Newtoni gravitatsiooniseadus)

seotud paisuva ruumiga ilma tensormatemaatikat ja Riemanni geomeetriat kasutamata. Näiteks Albert Einsteini üldrelatiivsusteoorias asendatakse aja dilatatsiooni võrrandis olevas ruutjuure avaldises

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

$v^2$  Newtoni gravitatsiooniteoorias tuntud teise kosmilise kiirusega

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

ehk

$$v^2 = \frac{2GM}{r}.$$

$\frac{GM}{r}$  on gravitatsioonipotentsiaal ja  $\frac{v^2}{2}$  on liikuva keha kineetiline energia:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}.$$

Sellest tulenevalt saadakse järgmised matemaatilised teisendused:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r}},$$

milles

$$\frac{2GM}{c^2} = R$$

on Schwarzschildi raadiuse avaldis ja  $r$  on kaugus planeedi tsentrast. Teine kosmiline kiirus on keha kiirus, mis võimaldab mingisuguse planeedi mõjusfäärist jäädavalt lahkuda. Seda nimetatakse ka paokiiruseks ja näiteks musta augu pinnal ehk aegruumi kõveruse Schwarzschildi pinnal on see võrdne valguse kiirusega  $c$ . Järgnevalt näitame matemaatiliselt palju rangemalt seda, et kuidas gravitatsiooniline aja dilatatsioon on seotud gravitatsioonijõuga ehk näitame taevakeha teise kosmilise kiiruse tulenevust gravitatsioonilisest aja dilatatsioonist. See näitab otsest seost aegruumi kõveruse ja Schwarzschildi pinna vahel. Järgnev matemaatiline analüüs on esitatud samuti ilma tensormatemaatikat ja Riemanni geomeetriat kasutamata. Selleks teeme gravitatsioonilises aja dilatatsiooni valemis mõned järgmised teisendused:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} = \frac{t}{t'}$$

Viimase võrrandi mõlemad pooled tõstame ruutu:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{t^2}{t'^2}$$

Kuna Newtoni II seaduse järgi

$$a = \frac{F}{m}$$

on raskuskiirendus a võrdne raskusjõuga

$$a = g = \frac{GM}{r^2}$$

siis seega peab raskuskiirendus a olema võrdeline ka ajasuhtega, mis tuli eelnevalt välja gravitatsiooni-  
dilatatsioonist:

$$a = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right).$$

Esiteks diferentseerime sulus oleva avaldise r-i järgi:

$$\frac{\partial \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

milles olevat liiget

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2}$$

tuntakse Schwarzschildi raadiusena. Pärast sellist diferentseerimist me näeme, et raskuskiirendus a on seotud Schwarzschildi raadiusega järgmiselt:

$$a = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

Diferentsiaalmatemaatikast on teada, et

$$\frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{ds} \approx 1$$

ja kiirendus a on tegelikult teise astme tuletis aja järgi

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{dt^2}{ds^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} = a$$

ehk

$$v = \frac{dr}{ds} \quad \text{ja} \quad a = \frac{d^2 r}{ds^2}$$

Seetõttu võime raskuskiirenduse a avaldada diferentsiaalavaldisega:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

Aegruumi intervalli ds-i asemele võime kirjutada omaaja ja valguse kiiruse c korrutise

$$ds = cd\tau$$

sest aegruumi intervalli meetrilises võrrandis on need omavahel seotud järgmiselt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Seda võime märkida ka raskuskiirenduse ehk antud juhul Newtoni II seaduse avaldises gravitat-

siooni korral:

$$\frac{d^2 r}{c^2 d\tau^2} = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

ehk

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{2GM}{r^2}$$

ehk

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{GM}{r^2}$$

Kuna kiirendus  $a$  avaldub diferentsiaalseosena:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = a$$

siis seega saame järgmise seose, milles kiirenduse jagatis kahega võrdub raskusjõuga:

$$\frac{a}{2} = \frac{GM}{r^2}$$

Vastavalt üldrelatiivsusteooria üldisele ekvivalentsuse printsiibile võib raskusjõudu asendada inertsjõuga ehk me võime kiirendust käsitleda kesktõmbekiirendusena:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

ja sellest tulenevalt saame järgmise seose:

$$\frac{v^2}{2r} = \frac{GM}{r^2}$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

Kui me viimases avaldises korrutame mõlemad pooled massiga  $M$

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

siis me näeme seost, mida nimetatakse klassikalises mehaanikas energia jäävuse seaduseks, mille ühel pool on kineetiline energia ja teisel pool on gravitatsiooniline potentsiaalne energia ehk lihtsalt gravitatsioonipotentsiaal:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

Viimasest võrrandist taanduvad massid  $m$  välja ja seega saame järgmise seose

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

ehk 2-he viimisel võrrandi teisele poole

$$v^2 = \frac{2GM}{R}$$

Universumi paisumiskiirus  $v$  ehk  $H$  on valemi

$$y = \frac{c}{v}$$

järgi avaldatav kiiruse  $c$  ja  $y$ -faktori kaudu järgmiselt:

$$v = \frac{c}{y} = H$$

Viime sellise kiiruse avaldise eelmisesse võrrandisse

$$v^2 = \frac{c^2}{y^2} = \frac{2GM}{R}$$

ja saamegi Universumi paisumiskiiruse ja gravitatsioonivälja omavahelise füüsikalise seose:

$$H^2 = \frac{2GM}{R}$$

Analüüsime ja põhjendame viimast seost järgmiselt. Kui viimases võrrandis on  $y = 1$ , siis Universumi paisumiskiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$ , mis on ühtlasi ka gravitatsioonitsentris eksisteeriva Schwarzschildi pinna paokiiruseks:

$$v^2 = c^2 = \frac{2GM}{R}$$

ehk

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Tuleb märkida ka veel seda, et Schwarzschildi pinnal on aegruum kõverdunud lõpmatuseni, näiteks gravitatsiooniline aja dilatatsioon läheneb sellisel juhul lõpmatusele:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \infty$$

Kui aga  $y = \infty$ , siis Universumi paisumiskiirus on võrdne nulliga:

$$v^2 = c^2 = \frac{2GM}{R} = 0$$

Sellisel juhul avaldub Universumi paisumine mistahes gravitatsioonitsentrist lõpmata kaugel:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \infty$$

ja lõpmata kaugel gravitatsioonitsentrist on aegruumi kõverus null ehk aegruum on täiesti tasane, näiteks gravitatsiooniline aja dilatatsioon võrdub lõpmatuses ( $r = \infty$ ) ühega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = 1$$

#### 1.2.4.16.1 Plancki pinna roll

Kuna tavaruum K liigub hyperruumi K'-i suhtes kiirusega c ehk Universum paisub valguse kiirusega c, siis seega peame arvestama Plancki pikkuse l ja Plancki aja t jagatisega ehk „Plancki kiirusest v“ tulenevate järeldustega:

$$v^2 = \frac{l^2}{t^2} = \frac{Ghc^5}{c^3 Gh} = c^2$$

ehk

$$c = \frac{l}{t}$$

See tähendab seda, et Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse“ skaalast alates:

$$1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

ja seetõttu oleks õigem eeldada, et tavaruumi K liikumine hyperruumi K' suhtes peab avalduma (s.t. nähtuma) ka Plancki pinna korral nii, et kolmemõõtmeline ruum eemaldub (s.t. „liigub“) Plancki pinnast eemale. Kuna Plancki pind „täidab“ ühtlaselt kogu Universumi aegruumi, siis põhjustab see ruumi paisumist ehk Universumi ruumala suurenemist ajas.

Mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Kui keha m liigub tavaruumi K suhtes kiirusega c, siis nähtub tavaruumi K liikumine hyperruumi K' suhtes. Lähenedes Plancki pinnale aegleneb samuti aeg ja ruumipunktide vahelised kaugused vähenevad (ruum kontrakteerub) välisvaatleja suhtes. Plancki pinnal on aegruumi kõverus lõpmatult suur. Sellest järeldub selgelt, et tavaruumi K liikumine hyperruumi K' suhtes peab avalduma (s.t. nähtuma) ka Plancki pinna korral nii, et kolmemõõtmeline ruum eemaldub (s.t. „liigub“) Plancki pinnast eemale.

Schwarzschildi raadius R näitab kerakujulise aegruumi lõkspinna ehk Schwarzschildi pinna suurust, millel on aegruum kõverdunud lõpmatuseni ehk aja ja ruumi füüsikaline eksisteerimine on lakanud:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast niisamuti ka Plancki pikkuse l mõõtkavas:

$$4\pi R = 1,73415 * 10^{-35} \text{ m}$$

ehk

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616 * 10^{-35} \text{ m}$$

See tähendab seda, et Plancki pikkusest l väiksematel mõõtkavadel ei ole Universumil enam füüsikalist eksistentsi. Niimoodi moodustab Plancki pikkus l väikseima võimaliku ruumi mõõtkava, mis hõlmab ühtlaselt kogu Universumi kolmemõõtmelist ruumi. Seda nimetame „Plancki pinnaks S“. See tähendab, et mida väiksemasse ruumi mõõtkavasse jõuda, seda lähemale jõuame Plancki pinnani S.

Plancki pikkuse l ja Plancki aja t jagatis annab meile valguse kiiruse c ehk „Plancki kiiruse v“:

$$v^2 = \frac{l^2}{t^2} = \frac{Ghc^5}{c^3 Gh} = c^2$$

ehk

$$c = \frac{l}{t}$$

Plancki aja ja Plancki pikkuse olemasolu ehk selle tulenev aegruumi füüsikast näitab, et hyperruumi dimensioon „eksisteerib“ väljaspool aegruumi, mida on võimalik mõista Plancki aja ja Plancki pikkuse „järgse“ dimensioonina. See tähendab seda, et hyperruum „algab“ sealt, kust lõpeb meie tajutav aegruum. Meie tajutavat aegruumi „piirabki“ Plancki aeg ja Plancki pikkus.

Hyperruumi dimensioon on meie igapäevaselt tajutavast aegruumist ehk tavaruumist väljaspool alates Plancki ajast ja Plancki pikkusest. Tavaruum ise on meile tajutav kuni Plancki ajani ja Plancki pikkuseni.

#### 1.2.4.17 Hubble'i seadus

1923. aastal tõestas G. D. Birkhoff teoreemi, mille kohaselt saab galaktika A liikumist arvutada Newtoni mehaanika abil, sest sfääri raadius  $R$  ei ole liiga suur ehk kui käsitleda väikeseid piirkondi Universumis (näiteks lineaarmõõtmega ca  $10^8$  valgusaastat), siis on sfääri sees oleva materia gravitatsiooniväli mõõdukas.

Vaatleme sfääri raadiusega  $R$ , milles on galaktikad ja seega sfääris asuva kosmilise aine mass on  $M$ . Olgu meil sfääri pinnal galaktika A, millele mõjub gravitatsioonijõud  $F$ . Vastavalt kosmoloogilisele printsiibile on gravitatsioonijõud nii suur nagu asuks kogu mass  $M$  sfääri tsentris. Hubble'i seaduse järgi muutub ajas sfääri sees ja selle pinnal oleva massi tihedus, kuid mass ise ajas ei muutu. Galaktika A liikumist ei mõjuta massid, mis jäävad väljapoole sfääri. Kogu edasine analüüs eeldab, et kehtib kosmoloogiline printsiip, Hubble'i seadus ehk Universumi paisumine, Newtoni II seadus ehk klassikaline mehaanika ja Newtoni gravitatsiooniseadus.

Eespool olevast gravitatsioonilisest aja dilatatsiooni võrrandist tuletatud energia jäävuse seadusest

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

on võimalik matemaatiliselt tuletada Newtoni II seadus gravitatsioonijõu korral:

$$a = g = \frac{GM}{r^2}$$

Esiteks gravitatsioonipotentsiaal  $\phi$  on tegelikult tuletatav Newtoni gravitatsioonijõust  $F$ , kui me Newtoni gravitatsiooniseadust integreerime raadiuse  $r$ -i järgi järgmiselt:

$$\frac{GMm}{r} = \int_r^{+\infty} \frac{GMm}{r^2} d\vec{r} = U$$

milles  $F$  ongi Newtoni ülemaailmne gravitatsiooniseadus:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Teiseks on kineetiline energia  $E$  võrdeline tehtud tööga:

$$Fs = ma = mg = m \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds} = mv \frac{dv}{ds}$$

ehk

$$Fs = mv \frac{dv}{ds}$$

Viimasest seosest ongi näha seda, et töö  $A$  avaldise diferentseerimisel saame kineetilise energia valemi järgmiselt:

$$dA = Fsds = mv dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Integreerides viimast avaldist:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} s d\vec{s}$$

saamegi kineetilise energia matemaatilise avaldise:

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{mv^2}{2}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2}{2}$$

Niimoodi võrrandi kahte poolt eraldi diferentseerides ja integreerides ( nagu diferentsiaal- ja integraalarvutuses asi käib ) jõuamegi lõpuks kaudselt või otseselt Newtoni II seaduse vormini:

$$a = \frac{F}{m}$$

ehk gravitatsiooni korral

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{GM}{r^2}$$

Mõnikord omistatakse Newtoni II seadusele ka selline kuju, mille korral on mass lihtsalt korrutatud kiirendusega:

$$F = ma$$

ja see on täiesti identne Newtoni gravitatsioonijõuga  $F$ :

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Galaktika  $A$  kiirendust kirjeldavas võrrandis

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -G \frac{M}{R^2}$$

ongi esimene pool Newtoni II seaduse avaldis ja võrrandi teine pool Newtoni gravitatsiooniseaduse



avaldis.  $G$  on Newtoni gravitatsioonikonstant. Universumi paisumine ehk Hubble'i seadus  $v = HR$  annab meile galaktika A kiirenduseks järgmise valemi:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(HR) = R \frac{dH}{dt} + H \frac{dR}{dt}$$

milles Hubble'i seadus on

$$\frac{dR}{dt} = V = HR$$

ja seega saame kiirenduseks

$$\frac{d^2R}{dt^2} = R \frac{dH}{dt} + H^2 R$$

Sellest tulenevalt saame galaktika A kiirenduse lõplikuks valemiks järgmise avaldise:

$$R \frac{dH}{dt} + H^2 R = -G \frac{M}{R^2}$$

Viimases võrrandis olevat massi  $M$  on võimalik asendada massitiheduse avaldisega:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$$

ja seega saame teostada järgmised matemaatilised teisendused:

$$\frac{dH}{dt} = \left(-H^2 R - \frac{GM}{R^2}\right) \frac{1}{R} = \left(-H^2 R - \frac{G4\pi R^3}{3R^2} \rho\right) \frac{1}{R} = \frac{R}{R} \left(-H^2 - \frac{G4\pi \rho}{3}\right) = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho$$

Viimane diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho$$

seob omavahel Hubble'i konstandi  $H$  ja kosmilise aine (keskmise) tiheduse  $\rho$ . Universumi lokaalset evolutsiooni kirjeldavadki need kaks põhivõrrandit:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho \\ \frac{d\rho}{dt} = -3\rho H \end{cases}$$

Nendest võrranditest on näha, et Universumi keskmine ainetihedus ja Hubble'i konstant sõltuvad ajast. Need võrrandid kehtivad mistahes Universumi lokaalses piirkonnas ja seejuures ei ole oluline Universumi vaadeldava piirkonna mass ega vaatleja asukoht Universumis.

Eelnevalt tuletatud galaktika A kiirenduse võrrandis

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -G \frac{M}{R^2}$$

korrutame mõlemad pooled suurusega  $\frac{dR}{dt}$  ja integreerime aja järgi. See annab meile järgmise juba varem tuletatud avaldise:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E = \text{const},$$

milles  $E$  on integreerimiskonstant. Viimane saadud võrrand on sfääri pinnal oleva galaktika A energia jäävuse seadus. Näiteks võrrandi esimesel poolel olev esimene liidetav on galaktika kineetiline energia ja teine liidetav on tema potentsiaalne energia ( kuna tegemist on gravitatsioonilise tõmbumisega, siis on „-“, märk ). Konstant  $E$  on galaktika kogu mehaaniline energia, mis ei sõltu ajast ehk see ajas ei muutu. Praegusel ajamomendil  $t_0$  saame  $E$  määrata vaatlusandmete põhjal järgmiselt:

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2_{t=t_0} - \frac{GM}{R_0} = -\frac{4\pi G R_0^2}{3} \left( \rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G} \right),$$

milles  $R_0$  on sfääri raadius,  $\rho_0$  on kosmilise aine keskmine tihedus,  $H_0$  on Hubble'i konstant vaatlusmomendil  $t_0$  ja avaldis

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0} = V(t_0) = H_0 R_0$$

on tuntud Hubble'i seadus. Galaktika A kogueenergia  $E$  on seega avaldatav kujul:

$$E = -\frac{4\pi G R_0^2}{3} \left( \rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G} \right).$$

Sellest tulenevalt saame eespool tuletatud galaktika A energia jäävuse seadusest

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E = \text{const}$$

ja massitiheduse avaldise rakendamisest

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$$

järgmise olulise võrrandi:

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \left( \frac{8\pi G}{3} R^3 \rho_0 \frac{1}{R} \right) - \left[ \frac{8\pi G}{3} R^2 \left( \rho_0 - \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \right) \right].$$

Kui viimases tuletatud võrrandis

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \left( \frac{8\pi G}{3} R^3 \rho_0 \frac{1}{R} \right) - \frac{8\pi G}{3} R^2 \left( \rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G} \right)$$

kehtib võrdus

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

ehk

$$\rho(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

ja Hubble'i seadus on kujul

$$\frac{dR}{dt} = HR$$

siis seega saame järgmise väga olulise avaldise:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} R^3 \frac{3H_0^2}{8\pi G} \frac{1}{R} - 0$$

ehk

$$H^2(t) = \frac{2GM}{R^3} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t),$$

milles tihedus on avaldatav

$$\rho(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}.$$

Viimane seos näitab seda, et kui mingil ajamomendil  $t_0$  kehtib võrdus

$$\rho(t_0) = \frac{3H^2(t_0)}{8\pi G},$$

siis on see ka mistahes teisel ajamomendil ( $t \neq t_0$ ):

$$H^2(t) = \frac{2GM}{R^3} = \frac{8\pi G}{3} \frac{3H^2(t)}{8\pi G} = H^2(t).$$

Eelnevalt tuletatud väga olulises seoses

$$H^2(t) = \frac{2GM}{R^3} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t),$$

on selgelt näha meie poolt varem tuletatud Universumi paisumiskiiruse ja gravitatsioonivälja omavahelist füüsikalist seost:

$$v^2 = \frac{2GM}{R}$$

Näiteks Universumi paisumiskiirus  $v$  ehk sellisel juhul  $H$  on valemi

$$y = \frac{c}{v}$$

järgi avaldatav kiiruse  $c$  ja  $y$ -faktori kaudu järgmiselt:

$$v = \frac{c}{y} = H$$

Seetõttu saamegi võrrandi

$$v^2 = \frac{c^2}{y^2} = \frac{2GM}{R}$$

mis kirjeldab Universumi paisumiskiiruse ja gravitatsioonivälja omavahelist füüsikalist seost:

$$H^2 = \frac{2GM}{R}$$

Kui aga kiiruse  $v$  asemel oleks Hubble'i seadus ehk  $v = HR$ , mitte aga lihtsalt Hubble'i konstant  $H$ , siis saame viimase seose viia järgmisele kujule:

$$v^2 = H^2 R^2 = \frac{2GM}{R}$$

ehk raadiuse  $R$  viimisel teisele poole

$$H^2 = \frac{2GM}{R^3}$$

Tuletatud kosmoloogia võrrandite

$$H^2 = \frac{2GM}{R}$$

ja

$$H^2 = \frac{2GM}{R^3}$$

ainus füüsikaline erinevus seisneb selles, et kui esimene võrrand kirjeldab Universumi paisumiskiirust ainult ajas ( $H$ ), siis teine võrrand kirjeldab Universumi paisumiskiirust peale ajas ka veel ruumis ( $HR$ ), sest Hubble'i seadus ju ütleb selgelt, et mida kaugemal on ruumiliselt üksteisest galaktikad, seda kiiremini need ka üksteisest eemalduvad. Näiteks kui võrrandi

$$v^2 = \frac{c^2}{y^2} = \frac{2GM}{R}$$

ehk

$$H^2 = \frac{2GM}{R}$$

järgi on  $y = 1$ , siis Universumi paisumiskiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$ , mis on ühtlasi ka gravitatsioonitsentris eksisteeriva Schwarzschildi pinna paokiiruseks:

$$v^2 = c^2 = \frac{2GM}{R}$$

ehk

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

See tähendab seda, et Universumi paisumine „läheneb“ pika aja jooksul gravitatsioonitsentritele kogu Universumis ehk gravitatsiooniline tõmbejõud asendub aja jooksul täielikult tõukejõuga. Gravitatsioonitsentris eksisteerival Schwarzschildi pinnal on aegruum kõverdunud lõpmatuseni, näiteks gravitatsiooniline aja dilatatsioon läheneb sellisel juhul lõpmatusele:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

Kui aga  $y = \infty$ , siis Universumi paisumiskiirus  $v$  on võrdne nulliga:

$$v^2 = c^2 = \frac{2GM}{R} = 0$$

Sellisel juhul avaldub Universumi paisumine mistahes gravitatsioonitsentrist lõpmata kaugel:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \infty$$

ja lõpmata kaugel gravitatsioonitsentrist on aegruumi kõverus null ehk aegruum on täiesti tasane, näiteks gravitatsiooniline aja dilatatsioon võrdub lõpmatuses ( $r = \infty$ ) ühega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = 1$$

Kui eelnevalt tuletatud kosmoloogia üldvõrrandis

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho$$

on tihedus  $\rho(t)$  avaldatav järgmiselt:

$$\rho(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G},$$

siis seega saame matemaatiliste teisenduste kaudu järgmise diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \frac{3H^2(t)}{8\pi G} = -H^2 - \frac{H^2(t)}{2} = H^2 \left( -1 - \frac{1}{2} \right) = H^2 \left( -\frac{3}{2} \right)$$

ehk

$$\frac{dH}{H^2} = -\frac{3}{2} dt.$$

Viimasest diferentsiaalavaldisest teeme järgmise lihtsa matemaatilise teisenduse:

$$\frac{H}{t} = -\frac{H^2 3}{2}$$

milles

$$H = \frac{2}{3t} \quad \text{või} \quad t = \frac{2}{3H}$$

Antud juhul ei kasutatud integreerimise võtteid. Selline väga lihtne matemaatiline teisendus näitab, et viimasest võrrandist

$$H(t) = \frac{2}{3}t$$

saame Universumi paisumise ajaperioodi

$$t_0 = \frac{2}{3H(t_0)}.$$

Viimane seos näitabki meile Hubble'i konstandi  $H$  sõltuvust ajast ja seega saame välja arvutada Universumi paisumise algmomendi ( $t_0$ ), kui me tuvastame Hubble'i konstandi  $H$  väärtust praegusel ajahetkel. Kui selleks on

$$H(t_0) \approx 50 \frac{km}{s * Mpc},$$

siis saame Universumi paisumise ajaperioodiks  $t_0 = 13 \cdot 10^9$  aastat, kuid seda eeldusel, et kehtib võrdus:

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Füüsikaliselt tähendab see aga järgmist. Näiteks oletame seda, et galaktikad on eemaldunud üksteisest pidevalt konstantse kiirusega  $v$ . See tähendab seda, et aja  $t$  jooksul on galaktikate vahekaugus  $d = vt$ , millest  $t = d/v$  on Universumi hinnatav vanus ehk Universumi paisumise ajaperiood. Vastavalt Hubble'i seaduse järgi  $v = Hd$  ja Hubble'i konstandi parameetri järgi ( 20 km/s miljoni valgusaasta kohta ), saame hinnata Universumi vanust veelgi lihtsama seose kaudu:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{Hd} = \frac{1}{H} = \frac{10^6(ly)}{20(\frac{km}{s})} = \frac{10^6 * 9,5 * 10^{12}(km)}{20(\frac{km}{s})} \approx 1,5 * 10^{10} (a).$$

Sellise seose järgi on Universum paisunud umbes 15 miljardit aastat, mis on ka Universumi ligikaudseks vanuseks ( 13,7 on ligikaudu ka 15 ). Hubble seadusest tuletatud Universumi eluiga ehk vanus on klassikalise füüsika mõtteviisi järgi rehkendamine, mis tegelikult ei ole päris õige. Siin peab mõtlema nii, mis on omane relatiivsusteooriale. See tähendab seda, et 13,7 miljardit aastat vana Universum paistab Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale, kuid Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale paistab Universum olevat näiteks üks sekund vana. Universumi väliseks vaatlejaks võibki olla ajarändur, kes liigub ajas minevikku, sest ajas saab liikuda ainult „ajast väljas olles“ ehk „väljaspool Universumit“.

### 1.2.5 Universumi paisumine Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale

Universumi kosmoloogilise paisumise füüsikaliseks mudeliks on enamasti kera ( näiteks õhupalli ) paisumine ruumis. Kuid tegelikult on Universumi paisumine ja kera paisumine füüsikalises mõttes üksteisest täiesti erinevad nähtused. Nende kahe vahel esinevad nii sarnaseid kui ka täiesti erinevaid jooni:

1. Kera paisumisel on olemas tsenter, kuid Universumi paisumisel ( tegelikult ka paisuva kera pinnal ) ei eksisteeri tsentrit ega mingisugust eelistatud suunda. Universumi paisumisel puudub paisumiskese. See tähendab seda, et kogu Universumi ruum paisub kõikjal ühe korraga nii nagu paisuva kera pinnal olevad punktid eemalduvad üksteisest korraga kogu pinna ulatuses. Kuna Universumil ei ole tsentrit ega paisumiskeset, siis „piltlikult“ võib öelda nii, et Universumi tsenter asub kõikjal ehk see „täidab“ kogu meie Universumi ruumi, mille tulemusena paisub kogu Universumi ruum kõikjal ühekorraga. Võib ka nii öelda, et Universumi tsentrit võime tegelikult ise ära määrata, mingite oluliste kosmoloogiliste või astrofüüsikaliste mõõtmiste jaoks. Näiteks paljudes tähekaartides asub tsentris meie kodu galaktika, mille järgi tehakse kindlaks paljude teiste galaktikate omavahelised kaugused ja asukohad kosmoses.

Et Universumi paisumise mudel sobituks „ideaalselt“ tegeliku Universumi paisumisega, teeme mudelis mõned uuendused ja täpsustused. Olgu meil punkt K,

mis on küll kera tsentriks, kuid ei ole ruumi ( milles kera eksisteerib ) ristkoordinaadistiku alguspunktiks. Kui kera tsenter on ruumi ristkoordinaadistiku alguskohaks, siis seega on ka punkt K ruumi ristkoordinaadistiku alguspunktiks. Kuid meil on siiski kera, mis asub ruumis ( ehk ruumi ristkoordinaadistikus ). Punkt K ei ühti ruumi ristkoordinaadistiku alguspunktiga, sest siis oleks K ruumikoordinaadid nullid. Kera suhtes on punkti K koordinaadid nullid. Kuid ruumi ristkoordinaadistiku suhtes ( milles kera eksisteerib ) on punkti K koordinaadid aga

$$K_0( x,y,z ).$$

Punkt K on kera paisumiskese. Ja see tähendab, et kera tsenter ühtib kera paisumiskesega. Oletame, et punkt K „täidab kogu ruumi“. Seega peab neid olema lõpmatult palju. Iga üks neist on oma kera tsenter ja keraid on sama palju kui punkte. Matemaatiliselt kirjeldab seda järgmine avaldis:

$$K_0 + K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n = V = \sum_{i=0}^n K_i, n = \infty$$

ehk lahti kirjutatuna

$$(x_0, y_0, z_0) + (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) + \dots + (x_n, y_n, z_n) = V = \sum_{i=0}^n K_i, \quad n = \infty.$$

Niimoodi saimegi sellise mudeli, mille korral paisub kogu Universumi ruum ühe korraga. Pole olemas paisumiskeset ega mingisugust eelistatud suunda. Kogu Universumi ruum V koosneks nagu lõpmata paljudest paisumistsentritest:

$$V = \sum_{i=0}^n K_i$$

2. Kera paisub juba varem eksisteerivasse ruumi, kuid Universum ei paisu juba varem eksisteerivasse ruumi, sest seda pole olemas. Universum ei paisu ruumis, küll aga kera. Universumi paisumine on täielikult meetriline, mis tähendab seda, et mistahes ruumipunktide omavahelised kaugused ajas suurenevad. Kitsamas tähenduses seisneb see selles, et kahe ruumipunkti vaheline kaugus (  $ds$  ) suureneb ajas (  $dt$  ). See protsess on ajas pidev.
3. Kera ( või õhupalli ) paisumise korral on kera raadiuse suurenemise kiirus ja kera pinnal oleva kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemise kiirus omavahel võrdsed. Kuid mida kaugemal on üksteisest paisuva kera pinnal olevad punktid, seda suuremad on nende eemaldumiskiirused. Nii on ka Universumi paisumisega – mida kaugemal on üksteisest galaktikate parved, seda kiiremini need üksteisest eemalduvad. Seda kirjeldab meile tuntud Hubble valem:  $v = HR$ , milles H on Hubble konstant, mille väärtus on praegu 74 (km/s)/Mpc. See tähendab seda, et kui kahe ruumipunkti vaheline kaugus on 1 Mpc ehk 3,2 miljonit valgusaastat, siis need eemalduvad üksteisest kiirusega 74 km/s. Kui aga nende vahekaugus on 10 Mpc ehk 32 miljonit valgusaastat, siis nende eemaldumiskiirus on juba 740 km/s. Kuid selline rehkendamine ei näita Universumi tegelikku paisumiskiirust ehkki see suureneb lineaarselt siis, kui vaadelda Universumi üha suuremat ruumimõõtkava. Seda on võimalik mõista ka nii, et mida suurem on Universum ajas või mida suuremat

ruumimastaapi Universumis vaadelda, seda enam on näha Universumi paisumist ehk seda kiiremini ruumipunktid üksteisest eemalduvad. Kuid tegelikku Universumi paisumiskiirust näitab ainult Hubble konstant  $H$ , mis muutub ajas, kuid ruumis ei muutu. Teada on seda, et Universumi paisumiskiirus ( ehk Hubble konstant ) muutub ajas suuremaks, mis tähendab, et see kiireneb ajas.

Vabalt langedes musta augu gravitatsiooni ehk aegruumi kõveruse tsentri poole suureneb keha liikumiskiirus lineaarselt. Sellisel juhul muutub keha liikumiskiirus aja ühiku kohta, kuid Hubble seaduse järgi muutub galaktikate parve ( kui füüsikalise keha ) liikumiskiirus ruumi ühiku kohta. Sarnane efekt esineb ka pöörleva jäiga keha korral. Näiteks mida lähemale pöörleva ketta tsentrile, seda suurem on selle joonkiirus. Samas on nurkkiirus kõikjal konstantne, mis määrab ära pöörleva keha pöörlemiskiiruse. Niisamuti ka kesktõmbekiirendus suureneb pöörleva ketta tsentrile lähenedes. Selline klassikalises mehaanikas tuntud efekt avaldub ka reaalse Universumi paisumise korral.

Maa raskuskiirendus  $g$  ei muutu, kui liikuda risti Maa raadiusega. Kuid  $g$  muutub liikudes mööda Maa raadiust. Paisuva kera kahemõõtmelise pinna kolmemõõtmeline versioon on meie paisuva Universumi ruumi geomeetria, mida ei ole võimalik ettekujutada. Sellest tulenevalt on Hubble konstant ehk Universumi kahe ruumipunkti vahelise kauguse eemaldumiskiirus ühe ruumi ühiku kohta kõikjal Universumis konstantne ( sest näiteks 1 meeter on igal pool Universumis 1 meeter, kui jätta lihtsuse huvides arvestamata ruumi kõveruse masside poolt ), kuid kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemise korral ( näiteks 1 meetri asemel on nüüd vahekauguseks 2 meetrit ) on nende eemaldumiskiirused juba märgatavalt erinevad. Selles mõttes muutub Hubble'i konstant ka ruumis.

4. Kera paisumise korral liiguvad kera pinnal olevad punktid üksteisest eemale. Need punktid ise ei liigu, vaid need liiguvad kera paisumise tõttu. Nii on ka Universumis eksisteerivate kehadega. Näiteks galaktikate parved ise ei liigu, vaid need liiguvad üksteisest eemale Universumi paisumise tõttu ( s.t. Universumi paisumisega kaasa ).
5. Kera paisumise korral ei ole kera pinnal olemas äärt, kuid sellegipoolest on kera pinna kogu pindala ehk selle suurus lõpliku väärtusega ( s.t. mitte lõpmatult suur ). Mistahes kera pinnal olevast punktist liikudes pidevalt otse edasi mööda kera pinda jõuame tagasi täpselt samasse punkti. Universumi paisuva ruumiga nii ei ole. Tume energia olemasolu näitab, et Universumi ruum on väga suures mastaabis tasane ja seega on Universumi ruumala lõpmatult suur. Seetõttu ei ole Universumil äärt ( mis tuleneb ka Universumi tsentri puudumisest ). Universumi paisuv kolmemõõtmeline ruum ei ole tegelikult paisuva kolmemõõtmelise kera kahemõõtmelise pinna kolmemõõtmeline versioon.

Kera pinnal ei ole algust ega lõppu ( ehk sellel ei ole olemas ääri ) ja seetõttu on see selles mõttes lõpmatu ulatusega. Kuid sellest hoolimata on kera pinnal lõplik suurus, mitte lõpmatult suur. Kogu Universumi ruumala suureneb ajas, kuid sellegipoolest saab Universum olla lõpmatult suur. Kera pind on kinnise ruumi näide. Sileda ehk tasase ( s.t. lahtise ) ruumi näiteks on tasapind, millel liikudes mingis suvalises suunas võime liikuda lõpmatuseni. Selline ruum on lõpmatu. Kera pind on kinnine pind. Paisuva kera pinda tuleb vaadelda kui muutkonda. Keral on olemas positiivne Gaussi kõverus.



6. Kera paisumise ( näiteks õhupalli ) korral suurenevad ka kera pinnal olevad punktid, mitte ainult nende vahekaugused. Kuid Universumi paisumisega nii ei ole. Universumi paisumise korral suurenevad ainult kehade vahelised kaugused, mitte kehade enda mõõtmed.
7. Kera saab paisumise jooksul ka pöörelda ( ümber oma kujuteldava telje ) ja/või tiirelda ruumis mingi teise keha ümber. Neid pöörlevaid nähtusi Universumi paisumise korral ei esine, sest Universumil puudub paisumiskese.
8. Kuna Universumil ei ole olemas äärt, siis seega ei ole Universumil ka kuju. Näiteks kera on kerakujuline, kuid kera pinnal ehk sfääril puudub kuju. Universumi visuaalset või geomeetrilist kuju pole võimalik matemaatiliselt välja arvutada.
9. Kera paisumise korral eemalduvad kera pinnal olevad punktid üksteisest seda kiiremini, mida kaugemal need teineteisest on. See ei sõltu vaatleja asukohast kera pinnal ehk mistahes paisuva kera pinnal oleva punkti suhtes eemalduvad kõik punktid kera pinnal üksteisest seda kiiremini, mida kaugemal need üksteisest on. Täpselt nii on ka Universumi paisumise korral. Näiteks mistahes galaktika parves olles näeme me kõikide teiste galaktikate parvede eemaldumist üksteisest ( s.t. Universumi paisumist ) ehk galaktikate punanihet näeksime ükskõik millises teises galaktikas. See tähendab seda, et galaktikate parvede üksteise eemaldumise nähtus ei sõltu vaatleja asukohast Universumi ruumis, mistõttu on Universumi paisumine universaalne ehk absoluutne nähtus kõikide kehade suhtes kogu Universumis.
10. Kosmoloogiline printsiip ütleb meile seda, et Universum on homogeenne ja isotroopne, aga seda ainult ruumi mõistes, mitte ajas. Universum on keskmiselt igalpool ühesugune ( s.t. ruumis ). Isotroopse ja homogeense Universumi idee pärineb Giordano Brunolt ( 1548 – 1600 ). Selle vaate järgi peaks suurtes ruumimastaapides paistma Universum samasugusena iga vaatleja jaoks ( sõltumata vaatleja asukohast Universumis ) ja seda ühel ning samal ajal. Universumi isotroopsus tähendab seda, et sellel puuduvad eelissuunad, kuid homogeensus seisneb Universumi eelispunktide puudumises. Seda on hakatud aja jooksul nimetama kosmoloogiliseks printsiibiks. Kõik tänapäeva kosmoloogias tõsiselt võetavad Universumi mudelid peavad olema kooskõlas selle niinimetatud kosmoloogilise printsiibiga.
11. Väikeses Universumi ruumipiirkonnas kehtib erirelatiivsusteooria.

Kera paisumise mudel ja reaalne Universumi paisumine on omavahel võrreldes väga erinevad füüsikalised nähtused, mille vahel analoogia otsimine ja leidmine võib viia sageli eksiteele. Kuid antud juhul on tegemist Universumi paisumise näilise füüsikalise mudeliga, mis tähendab seda, et antud Universumi paisumise mudel ( selle ruumiline osa ) vastab täpselt 100 % näilisele Universumi paisumise füüsikalisele olemusele. See mudel on oma füüsikaliselt olemuselt absoluutselt näiline.

### 1.2.6 Universumi paisumine Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale

Universumi paisumise füüsikaline olemus seisneb ruumi kontraktsioonis ehk antud juhul kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemises. Niisamuti ka gravitatsiooni ( ehk aegruumi kõveruse )

tsentrist eemaldumise korral suurenevad ruumipunktide vahelised kaugused. Selle nähtuse vastandiks on gravitatsiooniline pikkuse kontraktsioon, mille korral vähenevad ruumipunktide vahelised kaugused gravitatsiooni tsentrile lähenedes. Sellest võib järeldada seda, et mõlemal juhul ( s.t. nii Universumi paisumise kui ka aegruumi kõveruse korral ) on tegemist ühe ja sama füüsikalise olemusega, sest kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemine on oma olemuselt kolmemõõtmelise ruumi eksisteerimise tekkimine ja selle vastandiks on ruumi eksisteerimise lakkamine. Näiteks kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemine esineb nii Universumi paisumise kui ka gravitatsiooni ( ehk aegruumi kõveruse ) tsentrist eemaldumise korral. Niisamuti ka kahe ruumipunkti vahelise kauguse vähenemine esineb Universumi paisumise korral ( näiteks mida enam ajas tagasi vaadata, seda enam väiksem oli Universumi ruumala ) ja seda esineb ka siis, kui läheneda aegruumi kõveruse ehk gravitatsiooni tsentrile.

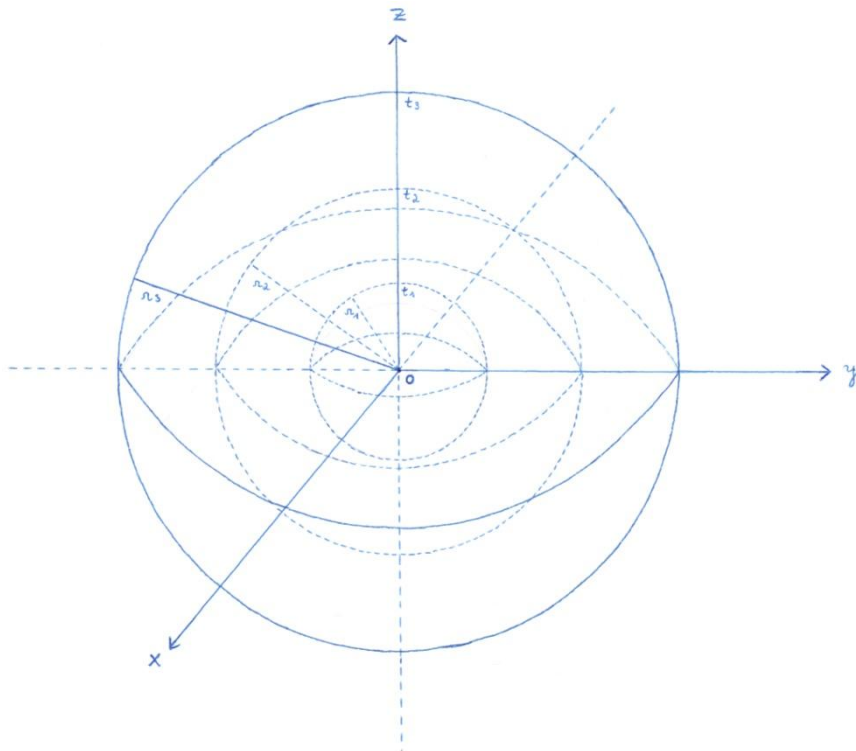
Eri- ja üldrelatiivsusteoorias kehtib aja ja ruumi lahutamatu printsiip, mille korral ei saa aeg ja ruum eksisteerida üksteisest eraldi. Füüsikaliselt väljendub see selles, et ruumi teisenemise korral ( s.t. ruumipunktide omavaheliste kauguste vähenemise või suurenemise korral ) peab ka aeg teisenema ( s.t. kas ajahetkede omavahelised kaugused vähenevad või pikenevad ). Ka aeg ei saa teiseneda ilma ruumi teisenemiseta. Kuna Universumi paisumine avaldub ruumipunktide omavaheliste kauguste suurenemises, siis seega peab koos sellega ka aeg teisenema. See tähendab, et ajahetkede omavahelised kaugused ei saa enam omada siin klassikalist tähendust. Aeg ja ruum on relatiivsusteoorias relativistlikud nähtused, mille seaduspärasused peavad kehtima ka Universumi paisumise korral.

Kahe ruumipunkti vahelise kauguse vähenemise korral pikenevad ajahetkede vahemikud, mida me tajume aja aeglenemisena ehk dilatatsioonina. Näiteks mida enam lähemale jõuab keha liikumiskiirus valguse kiirusele vaakumis ja mida lähemale gravitatsiooni tsentrile, seda enam pikenevad aja vahemikud ehk toimub aja aeglenemine. Järelikult peaks kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemise korral ajavahemikud vähenema, mida me tajuksime aja kiirenemisena. Näiteks mida enam lähemale jõuab rongi liikumiskiirus valguse kiirusele vaakumis, seda enam aegleneb aeg välisvaatleja suhtes, kes jälgib rongi sees toimuvaid sündmusi kõrvalt, kuid rongi sees olevale vaatlejale tundub rongist väljas olev aeg kiirenevat. Aja kulgemise kiirenemine on aja dilatatsiooni vastandnähtus, kuid mõlemad ei saa eksisteerida eraldi või omaette. Kui Universumi paisumine avaldub ruumipunktide omavaheliste kauguste suurenemises, siis seega peaks muutuma ka aeg, mille korral vähenevad ajahetkede vahemikud, mida me tajuksime aja kiirenemisena. Lühidalt võib seda mõista järgnevalt:

*Hubble seadus ütleb, et mida kaugemal on üksteisest ruumipunktid ( ehk mida suuremat Universumi ruumimastaapi vaadelda ), seda kiiremini need üksteisest eemalduvad ( ehk seda kiirem on Universumi paisumine ). Kuna aeg ja ruum on relatiivsusteooria järgi üksteisest lahutamatu seotud, siis järelikult peavad ka erinevates ajahetkedes olevad ruumipunktid eemalduma üksteisest kiirenevalt ehk mida pikemat aja vahemikku vaadelda, seda kiirem on Universumi paisumine. See aga tähendab Universumi reaalselt kiirenevat paisumist, mis väljendub juba Hubble konstandi muutumises ajas.*

Universumi paisumisel esineb kaks aega: aeg, mis seisneb Universumi eluea pikenemises ja aeg, mis avaldub Universumi paisumise kiiruses ( Universumi paisumine ajas kiireneb ). Need kaks aega on omavahel järgmiselt seotud: mida pikem on Universumi eluiga, seda kiiremini paisub Universumi ruumala ( kiirus ju sõltub ajast ). See tähendab seda, et kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemise kiirus ( ehk Hubble konstandi muutumine ajas ) määrab ära Universumi paisumiskiiruse ja selle „kestvus ajas“ Universumi eluea pikkuse. Sellest järeldub tõsiasi, et Universumi paisumiskiirus suureneb „ajas“ ja kogu Universumi eksisteerimise „aja jooksul“ on aeg tegelikult kiirenenud. Selle paremaks mõistmiseks toome järgnevalt välja ühe mõttelise eksperimendi. Oletame, et meil on kaks vaatlejat, kellest üks asub meie paisuvas Universumis ja teine hüpoteetiline vaatleja asub sellest väljapool. Paisuva Universumi sees olevale vaatlejale tunduvad Universumis toimuvad sündmused kulgevad normaalset jada, kui välja arvata erinevates

taustsüsteemides esinevaid aja kulgemisi, mille erinevusi võivad põhjustada kehade liikumiskiiruste või raskusjõu erinevad vahekorrad. Kuid teisele vaatlejale, kes asub paisuvast Universumist väljapool, tundub aeg Universumis voolavat palju kiiremini ja see kulgeb aeglenevas tempos. Universumi aja kulgemise aeglenemist reedab Universumi sees olevale vaatlejale Universumi paisumiskiiruse suurenemine, mis väljendub juba Hubble konstandi muutumises ajas.

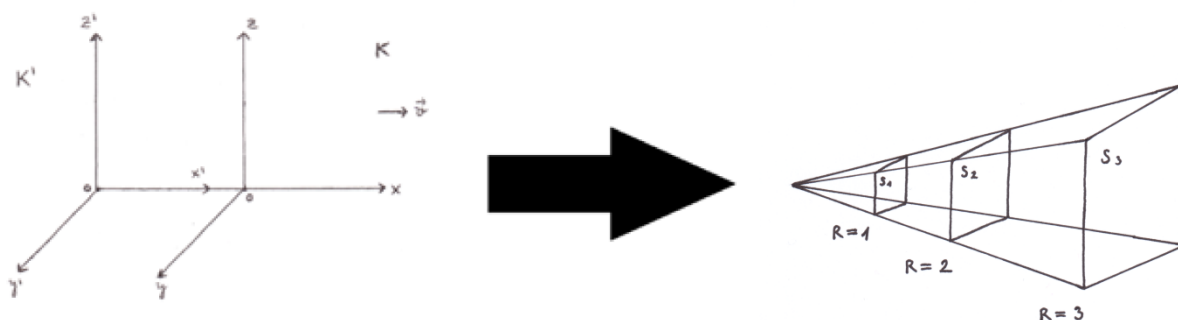


*Joonis 18 Universum ei paisu ruumis ehk see ei paisu juba varem eksisteerivasse ruumi nii nagu oli paisuva kera korral. Täpselt sama on tegelikult ka ajaga, sest füüsikas kehtib aja ja ruumi lahutamatu printsiip. See tähendab, et Universum ei paisu ajas, vaid aeg tekib koos ruumi paisumisega ( ehk ruumi tekkimisega ), mis väljendub ajahetkede vahemike vähenemises. Kuid kera saab paisuda ajas kas ühtlaselt või mitteühtlaselt.*

Kaasaliikva vaatleja aeg on selline aeg, mida tajub vaatleja, kes liigub koos paisuva Universumiga kaasa mingisuguses suvalises galaktikas olles. Kuid sellel, kes asja kõrvalt jälgib, võib aja-arvamine olla hoopis teistsugune. Antud juhul tundub aeg Universumis voolavat kõrvalt vaatajale palju kiiremini ja see kulgeb aeglenevas tempos. Universumi aeg on koos ruumiga teisenenud paisumise alghetkest alates. Näiteks meie ajas ( s.t. Universumis eksisteerivale reaalsele vaatlejale ) võis mõne tähe plahvatus ( ehk supernoova ) toimuda umbes miljard aastat tagasi, kuid tegelikult võis see toimuda kõigest 1 millisekund tagasi. See tähendab seda, et Universum ei olegi tegelikult 13,7 või 15 miljardit aastat vana, vaid tema tegelik eluiga võib ulatuda lõpmatusse.

Universumi paisumine toimub kiirenevas tempos ehk üle kogu Universumi esineb üleüldine aja kiirenemine, mida ei saa otseselt tajuda. Näiteks inimene ei taju aja aeglenemist ega ka aja kiirenemist, kui see toimub süsteemis, kus inimene ise parajasti asub. Aja kiirenemine avaldubki Universumi paisumise kiiruses kiirendusena, sest Universumi eluea pikenemine ja Universumi paisumise kiirus ( kiirus sõltub ajast ) on omavahel seotud. Nii saamegi tulemuseks kiireneva Universumi paisumise.

Relatiivsusteooriast järeldub, et tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes konstantselt valguse kiirusega  $c$ . Kuna tavaruumi ja hyperruumi omavaheline süsteem avaldub reaalsuses Universumi kosmoloogilise paisumisena, siis seega peaks Universum paisuma konstantselt valguse kiirusega. Kuid tegelikkuses paisub Universum sellise kiirusega, mida näitab meile Hubble konstant  $H$ . Niimoodi jääbki ekslik mulje, et Universum ei paisu valguse kiirusega. Kuid tegelikult see nii ei ole. Universum ei paisu ruumis ega ajas, vaid ruum ja aeg „tekivad“ pidevalt ( alates Universumi paisumise alghetkest ). See tähendab seda, et Universumi paisumine on oma olemuselt meetriline, mida me mõistame relatiivsusteoorias kirjeldatud aja ja ruumi teisenemistena. Vastavalt aja ja ruumi lahutamatusse printsiibile kaasneb ruumi teisenemisega ka aja teisenemine. Sellest järeldub, et Universumi aeg ( ehk eluiga ja koos sellega ka Universumi paisumiskiirus ) ei ole absoluutne, vaid on suhteline ehk relatiivne. Näiteks Universumis olevale vaatlejale tundub aeg Universumis „voolavat“ normaalselt jada pidi, kuid Universumist väljaspool olevale vaatlejale tundub aeg Universumis kulgevat palju kiiremini, mille kulg aegleneb. Siit järeldubki selline tõsiasi, et Universum paisub tegelikult konstantselt valguse kiirusega  $c$ , kuid Universumis olev reaalne vaatleja seda otseselt tajuda ei saa, sest Universumi paisumisega ( s.t. valguse kiirusega ) kaasneb aja teisenemine Universumis. Näiteks mida suurem on Universum, seda lühemad on aja vahemikud. Nii on see olnud Universumi paisumise alghetkest alates. Piltlikult öeldes elame me kõik aegluubis ( mille kulg kiireneb ) ja seetõttu me näemegi valguse kiirusest palju aeglasemat Universumi paisumist. Kuid tegelikult paisub Universum konstantselt valguse kiirusega  $c$ .

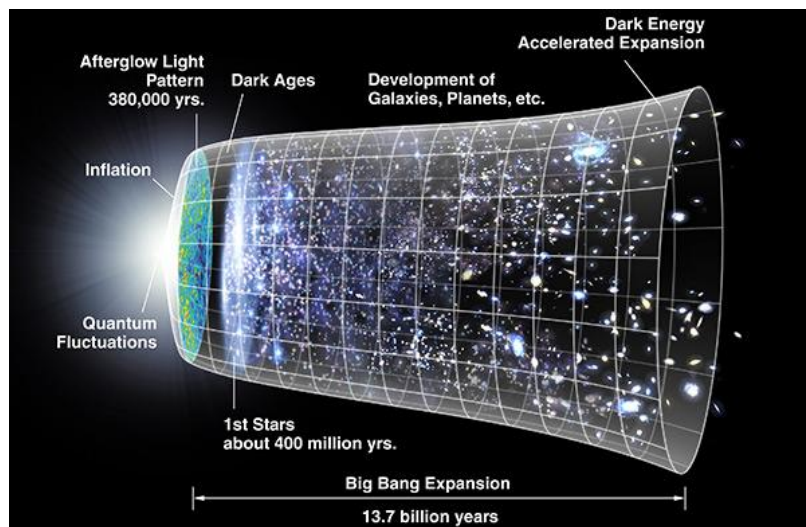


*Joonis 19 Erirelatiivsusteooriast ilmneb, et tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$ -i suhtes valguse kiirusega  $c$ , mis omakorda viitab sellele, et ka Universum peaks paisuma jääva valguse kiirusega. Tavaruumi liikumisel hyperruumi suhtes ei ole ajas rändamise teooria järgi algust ega lõppu ehk ei eksisteeri sellel fundamentaalsel liikumisel mittemingisugust algpõhjust. See tuleneb aja ja ruumi omavahelise seose sügavast olemusest, mis on pikemalt kirjeldatud ajas rändamise teooria edasiarendustes. Kuid kõik see viitab rangelt sellele, et Universum paisub ajas konstantselt valguse kiirusega  $c$  ja sellel ei ole algust ega lõppu.*

Kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemise kiirus ( ehk Hubble konstandi muutumine ajas ) määrab ära Universumi paisumiskiiruse ja selle „kestvus ajas“ Universumi eluea pikkuse. Näiteks oletame seda, et galaktikad on eemaldunud üksteisest pidevalt konstantse kiirusega  $v$ . See tähendab seda, et aja  $t$  jooksul on galaktikate vahekaugus  $d = vt$ , millest  $t = d/v$  on Universumi hinnatav vanus. Vastavalt Hubble'i seaduse järgi  $v = Hd$  ja Hubble'i konstandi parameetri järgi ( 20 km/s miljoni valgusaasta kohta ), saame hinnata Universumi vanust järgmise seose kaudu:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{Hd} = \frac{1}{H} = \frac{10^6(ly)}{20(\frac{km}{s})} = \frac{10^6 * 9,5 * 10^{12}(km)}{20(\frac{km}{s})} \approx 1,5 * 10^{10} (a).$$

Sellise seose järgi on Universum paisunud umbes 15 miljardit aastat, mis on ka Universumi ligikaudseks vanuseks ( 13,7 on ligikaudu ka 15 ). Hubble seadusest tuletatud Universumi eluiga ehk vanus on klassikalise füüsika mõtteviisi järgi rehkendamine, mis tegelikult ei ole päris õige. Siin peab mõtlema nii, mis on omane relatiivsusteooriale. See tähendab seda, et 13,7 miljardit aastat vana Universum paistab Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale, kuid Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale paistab Universum olevat lõpmata vana. Universumi väliseks vaatlejaks võibki olla ajarändur, kes liigub ajas minevikku, sest ajas saab liikuda ainult „ajast väljas olles“ ehk „väljaspool Universumit“.



Joonis 1 Universumi ajaline areng Universumi sees oleva reaalse vaatleja suhtes.

[http://astrosociety.org/wp-content/uploads/2012/10/1-CMB\\_Timeline300\\_no\\_WMAP.jpg](http://astrosociety.org/wp-content/uploads/2012/10/1-CMB_Timeline300_no_WMAP.jpg)

Tavaruum K liigub hyperruumi K' suhtes valguse kiirusega c ehk 300 000 km/s. See tähendab seda, et kui meie aegruumis ( s.t. tavaruumis K ) on möödunud üks sekund, siis hyperruumis oleks läbitud selle aja jooksul ligikaudu 300 000 kilomeetrine vahemaa. See tähendab ka seda, et kui me rändaksime ajas minevikku või tulevikku ühe sekundi, siis me peaksime liikuma hyperruumis ligikaudu 300 000 kilomeetrise vahemaa. See kehtib juhul, kui Universumi paisumiskiirus on võrdne valguse kiirusega vaakumis. Kuid Universumi tegelik paisumiskiirus on praegusel ajal 74 km/s \* (Mpc). Selline kiirus on SI süsteemis ( s.t. ühikutes ) aga järgmine:

$$\frac{x}{y} = \frac{74\,000 \left(\frac{m}{s}\right)}{3,086 * 10^{22}(m)} = 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ ühe meetri kohta,}$$

milles galaktikate eemaldumiskiirus on  $x = 74 \text{ km/s} = 74\,000 \text{ m/s}$ , vahemaa ruumis on  $y = 1 \text{ Mpc} = 3,086 * 10^{16} \text{ m} * \text{miljon} = 3,086 * 10^{22} \text{ m}$  ja valguse kiiruse arväärtus vaakumi korral on  $c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 * 10^8 \text{ m/s}$ . Kuna Universumi paisumiskiirus on palju kordi väiksem valguse kiirusest ehk aeg Universumis kulgeb tegelikult palju palju kiiremini kui see meile paistab

$$t' = yt,$$

siis seega peame leidma  $\gamma$  ( s.t. gamma ) väärtuse:

$$\gamma = \frac{t'}{t}$$

mis näitab meile seda, et mitu korda on Universumi paisumise kiirus aeglasem tegelikust paisumiskiirusest ehk mitu korda on aja kulg Universumis aeglenenud või kiirenenud (  $\gamma$  on kordaja, millel ei ole ühikut ):

$$\gamma = \frac{t'}{t} = \frac{3 * 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)}{2,3979 * 10^{-18} \left(\frac{m}{s}\right)} = 1,25109 * 10^{26} \approx 1,25 * 10^{26}$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et kui meie „igapäevaselt tajutavas aegruumis“ ehk tavaruumis K on möödunud näiteks üks sekund:

$$t' = 1 \text{ sek}$$

siis tegelikult ( s.t. Universumist väljaspool olevale hüpoteetilisele vaatlejale ehk hyperruumi K` suhtes vaadatuna ) on möödunud „kõigest“

$$t = \frac{t'}{\gamma} = 8 * 10^{-27} \text{ sek}$$

Viimases võrduses on  $t'$  nö. näiline aeg ( s.t. Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale kulgev aeg ) ja  $t$  on tegelik aeg ( s.t. Universumist väljaspool olevale hüpoteetilisele vaatlejale kulgev aeg ). Sellest järeldub, et kui aeg on Universumis tegelikult möödunud üks sekund, siis näiliselt on möödunud:

$$t' = t\gamma = \gamma \approx 1,25 * 10^{26} \text{ sek} \approx 3,963 * 10^{18} \text{ a} \approx 4 \text{ miljardit miljardit aastat}$$

milles  $t = 1$  sek. Eelnevalt on arvestatud, et ühes aastas on 31 536 000 sekundit, kui ei ole tegemist liigaastaga.

Kordaja  $\gamma$  muutub ajas väiksemaks, mille tulemusena Universumi paisumise kiirus ajas suureneb ehk läheneb valguse kiirusele  $c$ .  $10^{26}$  võib tunduda inimese jaoks väga suure numbrina, kuid kosmoloogilises kontekstis on see tegelikult üsna keskpärane suurus. Näiteks Universumi paisumise alghetkel oli aja vahe ( s.t. Universumis eksisteeriva näiva ja tegeliku aja kulgemise vahe ) lõpmatult suur. Seetõttu on lõpmatusega võrreldes  $10^{26}$  üsna väike number.

Meie aegruumis on kosmoloogiline aeg teisenenud ( ehk eksisteerib tume energia, mida peab arvutustes arvestama ), kuid väljaspool aegruumi ei ole enam aeg teisenenud ( tegelikult pole enam üldse ka aega ) ja sellest tulenevalt ei pea arvestama aja kosmoloogilist relatiivsust ja seega tume energiat.

Lõpetuseks võib öelda, et Universum paisub ( ehk siis mudelina ettekujutades kera raadius suureneb ) valguse kiirusega  $c$  ja seda muutumatult. Eirelatiivsusteooria õpetab seda, et mida kiiremini keha liigub ( ehk mida lähemale valguse kiirusele vaakumis ), seda enam aeg aegleneb ja keha pikkus lüheneb välisvaatleja suhtes. Sarnane efekt esineb tegelikult ka Universumi paisumise korral, kuid teatud erinevustega. See tähendab seda, et esineb liikumine ( Universumi paisumise näol ), mille kiirus on ajas konstantne ja seetõttu Universumi ruumala suureneb ( ehk ruumpunktide vahelised kaugused ( väga suures ruumimastaabis ) suurenevad ) ja aeg Universumis kiireneb ( Universumi eluiga pikeneb ).

## 1.2.7 Universumi paisumise algus ja lõpp

### 1.2.7.1 Universumi Suur Pauk ja algsingulaarsus

Küsimus, miks kehad liiguvad, taandub lõpuks kosmoloogiasse ehk meie maailmaruumi tekkesse ( Suure Paugu teooria ) ning mateeria algsesse liikumisse.

Vastavalt Suure Paugu teooriale peab kosmoses levima foonkiirgus. Selline kosmiline reliktkiirgus avastatigi A. Penziase ja R. Wilsoni poolt 1964. aastal. Reliktkiirguse avastamisega oli Suure Paugu teooria leidnud eksperimentaalse ( s.t. empiirilise ) kinnituse. Suure Paugu teooria järgi sai meie Universum alguse ühte punkti kokku surutud mateeriast, mis plahvatas. Selle järgi pidi mateeria tihedus olema Universumi alghetkel selline, mida me ei oska praegu ettekujutada. Praegu loetakse aine suurimaks võimalikuks tiheduseks aatomituuma tihedust.

Universum on kunagi olnud soojusliikumises. Universumi ruumi paisudes väheneb aja jooksul sellele vastava kiirguse temperatuur, mida näitabki praegu mõõdetav foonkiirguse olemasolu.

Universumit täitev foonkiirguse ehk reliktfooni spekter määrab ära Universumi temperatuuri, milleks on praegu 2,7 K. Kosmilise foonkiirguse spektri intensiivsuse maksimum on lainepikkusel  $\lambda = 1,07$  mm ja Wieneri valemi järgi on selle temperatuur 2,7 K ehk  $-270^{\circ}\text{C}$ .

Mikrolaineline kosmiline taustkiirgus pärineb väga varajasest ja kuumast Universumist. Kogu Universumit täitnud kiirgus ja ülikõrge temperatuuriga ning tihe plasma olid omavahel soojuslikus tasakaalus vahetult pärast inflatsioonilise Universumi staadiumit. Aine ja kiirgus jahtusid Universumi paisudes ning kiirguse lainepikkus aja jooksul suurenes. Universumi jahtudes eraldus lõpuks kiirgus ainekse.

Suure Paugu paradoks seisneb tema tekkimises – mis põhjustas Suure Paugu ekspansiooni. Teooria järgi tekkisid aeg ja ruum Suure Pauguga. Kui aeg tekkis Suures Paugus, siis ei ole võimalik kasutada mõisteid nagu „enne Suurt Pauku“ või küsimust „mis oli enne Suurt Pauku?“. Selles seisnebki Suure Paugu teooria paradoks ehk ratsionaalne sisemine vastuolu. Näiteks ei saa olla nii, et mis oli enne aega?

Universumi lõpmatu vanus lahendab ära Suure Paugu teooria ühe põhiparadoksi, mis on eksponentsiaalse tähtsusega Universumi olemuse mõistmiseks – millest sai Universum alguse ehk mis põhjustas Suure Paugu ekspansiooni. Relativistlikult analüüsides tuleb välja, et mingit algust tegelikult ei olnudki, sest Universum on tegelikult lõpmata vana. See tähendab seda, et Universumi alghetk on tegelikult meist lõpmata kauges minevikus analoogiliselt nii nagu kaks paraleelset sirget lõikuvad omavahel lõpmatutes. Näiteks „lõpmatult kaua aega tagasi“ korral ei saa me enam kasutada mõisteid „enne“ või „varem“.

Kaasaliikuva vaatleja aeg on selline aeg, mida tajub vaatleja, kes liigub koos paisuva Universumiga kaasa mingisuguses suvalises galaktikas olles. Kuid sellel, kes asja kõrvalt jälgib, võib aja-arvamine olla hoopis teistsugune. Universumis voolabki aeg kõrvalt vaatajale palju kiiremini ja see kulgeb aeglenevas tempos. Universumi aeg on koos ruumiga teisenenud

$$y = \frac{t'}{t}$$

algsingulaarsusest alates. Näiteks meie ajas ( s.t. Universumi sees eksisteerivale reaalsele vaatlejale ) võis mõne tähe plahvatus ( ehk supernoova ) toimuda umbes miljard aastat tagasi, kuid tegelikult võis see toimuda näiteks kõigest 1 millisekund tagasi. See tähendab seda, et Universum ei olegi tegelikult 13,7 või 15 miljardit aastat vana, vaid tema tegelik eluiga võib ulatuda lõpmatusele.

Singulaarsus tähendab teoreetilises matemaatikas funktsiooni katkevust teatud argumendi väärtusel. Kuid Universumi singulaarsus seisneb selles, et klassikalise ettekujutise järgi sai Universumi paisumine ( ehk Universumi ruumala suurenemine ajas ) alguse siis, kui Universumi ruumala oli lõpmatult väike. Lõpmatult väikese Universumi ruumala korral oli Universumi aegruum lõpmatult kõverdunud ja seetõttu võib Universumi paisumist oma olemuselt mõista kui aegruumi lõpmatu kõverduse tasanemisenä. Aegruumi kõverust käsitleb Albert Einsteini üldrelatiivsusteooria. Näiteks mida väiksem on kera, seda kõveram on selle pind. Sama on ka Universumi aegruumiga. Lõpmatu kõver aegruum tähendab füüsikaliselt aja ja ruumi eksisteerimise lakkamist. Seda sellepärast, et lõpmatus kõveras aegruumis on ( välisvaatleja suhtes ) aeg aeglenenud lõpmatusele ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus on vähenenud samuti lõpmatusele. Kuna aeg ja ruum on materia ( aine ja välja ) eksisteerimise põhivormid, siis seega ei eksisteeri aja ja ruumi eksisteerimise lakkamise korral enam ka materiat ehk ainet ega välja. Sellisel juhul esineb kõige eksisteerimise lakkamine. Lõpmatus kõveras aegruumis on materia ( aine ja välja ) tihedus  $\rho$  lõpmatult suur, mis viitab samuti materia eksisteerimise lakkamisele lõpmata kõveras aegruumis.

### 1.2.7.2 *Universumi horisont ja inflatsioon*

Universumi horisondiks nimetatakse vahemaad, mille valguskiir on läbinud Universumi tekkest saadik. Sellest kaugemal pole Universum enam vaadeldav. Valguse kiirus vaakumis on konstantne mistahes vaatleja suhtes. Maksimaalne kaugus, kuhu on Universum veel vaadeldav, on:

$$c\tau_0 = \frac{c}{H_0} \approx 4000 \text{ Mpc}$$

See on kaugus, kust on valgus meieni jõudnud. Me ei näe kogu Universumit, vaid ainult vahemaad iseendast kuni horisondini – ehk maailmapilt lõpeb seal, kus eemaldumiskiirus läheneb valguse kiirusele vaakumis:

$$lH_0 \rightarrow c = 3 * 10^8 \frac{m}{s}$$

Sellisel juhul kasvab galaktikate punanihe relativistlike valemite korral lõpmata suureks, mis jätab omakorda mulje sellest, et Universum on tohutult suur ja suhteliselt tühi. Kogu Universumit on näha ainult siis, kui Hubble´aeg on lõpmata suur:

$$\tau = \frac{1}{H_0} = \infty$$

Kaugemal kui  $c\tau_0$  asuvad tähed ei ole nende valgus meieni veel jõudnud.  $\tau_0$  on Universumi vanus. Universumi horisont „laieneb“ või „paisub“ valguse kiirusega  $c$ . Horisondi kaugus  $R_H(t)$  suureneb Universumi vananedes võrdeliselt Universumi vanusega  $t$ :



$$R_H(t) = ct$$

Universumi hinnatav vanus on:

$$\tau = t_H = \left( \frac{1}{H_0} \right)$$

Kuna Universumi paisumiskiirus  $H$  on praegusel kosmoloogilisel ajahetkel mõõdetud ( SI süsteemis ):

$$H_0 = 71 \frac{km/s}{mpc} = 2,3 * 10^{-18} s^{-1}$$

siis sellest tulenevalt saame Universumi vanuseks järgmiselt:

$$t_H = \frac{1}{2,3 * 10^{-18} s^{-1}} = 13,8 * 10^9 a$$

ehk 13,8 miljardit aastat. Universumi horisont kasvab ajas kiiremini kui Universum paisub. Sündmused, mis toimuvad horisondist kaugemal, ei avalda meile mingit mõju ja ei ole avaldanud seda ka minevikus. Horisondi paisumine on kiirem kui Universumi paisumine. See tähendab, et Universumi horisondi poolt hõlmatava ruumipiirkonna mõõtmised kasvavad ajas kiiremini kui Universum paisub.

Universumi horisondi poolt hõlmatav mass ajas suureneb. See tähendab seda, et horisondi sisse jääv mass  $M$  sõltub Universumi vanusest  $t$  ehk horisondi sissejäävate galaktikate arv ajas kasvab. Sellest asjaolust järeldatakse, et mida varasemat aega vaatleme, seda enam muutub Universumi kui terviku kõverus vähem oluliseks.

Universumi horisondi olemasolu tekitab küsimuse, et miks on meie Universum homogeenne ja isotroopne ehk kuidas saab kehtida kosmoloogiline printsiip? See tähendab seda, et kui vaadeldavas Universumi osas on palju piirkondi, mis ei ole mitte kunagi olnud omavahel põhjuslikult seotud, siis kuidas saab meie Universum olla homogeenne ja isotroopne? Seda nimetatakse Universumi kosmoloogilise printsiibi paradoksiks. Kosmoloogilise printsiibi paikapidavust kinnitavad astronoomilised vaatlused. Ajas rändamise teooria järgi paisub meie Universum tegelikult valguse kiirusega  $c$  ja sellest tulenevalt on kõikidel kehtel Universumis seisuenergia  $E = mc^2$ , mille füüsikaline ja matemaatiline tuletus ja analüüs oli esitatud juba eespool. Selline asjaolu võibki seletada kosmoloogilise printsiibi paradoksi.

Kosmoloogilise printsiibi paradoksi on võimalik väljendada ka teisiti, mis sisuliselt on täpselt samasuguse põhimõttega. Näiteks kuidas sai meie Universum paisuda praeguse paisumiskiiruse juures 13,7 miljardi aasta jooksul nii suureks, nagu me seda praegu ettekujutame? Näiteks kui Universum on 13,7 miljardit aastat vana ja kui Universum on kogu selle aja jooksul paisunud praeguse kiirusega, ei tohiks Universum olla praegu suurem kui liivatera. Universumi paisumiskiirus on palju kordi väiksem kui valguse kiirus vaakumis ehk horisondi suurenemise kiirus ja seega oleks pidanud Universumi horisont juba ammu olema sama suur kui meie Universum. Aga ei ole.

Kuid viimast on võimalik veel omakorda tõlgendada teisiti. Näiteks miks Universumi paisumiskiirus ei ühti valguse kiirusega vaakumis ehk Universumi horisondi kasvamise kiirusega? Miks Universum ei paisu valguse kiirusega? See on täpselt sama küsimus, mis tavaruumi ja hyperruumi süsteemi korral. Relatiivsusteooriast järeldub, et tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes konstantselt valguse kiirusega  $c$ . Kuna tavaruumi ja hyperruumi omavaheline süsteem avaldub reaalsuses Universumi kosmoloogilise paisumisena, siis seega peaks Universum paisuma konstantselt valguse kiirusega. Kuid tegelikkuses paisub Universum sellise kiirusega, mida näitab meile Hubble konstant  $H$ . Kui Universum paisuks valguse kiirusega  $c$ , siis kosmoloogilise printsiibi paradoksi ei esineks.

Kosmoloogilise printsiibi paradoksi üheks lahenduseks peetakse praegu Universumi inflatsioonilist mudelit, mille korral toimus väga varajases Universumi staadiumis palju kiirem paisumine kui horisoni paisumine. Sellisel juhul võivad hilisemas Universumi ajajärgus ehk kõik praegu vaadeldavad objektid olla pärit ühest horisoni sisse jäävast piirkonnast, mis eksisteeris Universumi paisumise inflatsioonilises staadiumis.

Universumi inflatsiooniline mudel oli alguses vastuolus ajas rändamise teooria alusprintsiipidega. See oli sellepärast nii, et kuna tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ , siis peab ka Universum paisuma valguse kiirusega  $c$ . Universumi inflatsioon aga tähendas valguse kiirusest suuremat paisumiskiirust ja seega ei saanud see nii olla. Niisamuti ka ei teatud seda, mis on inflatsiooni tekkepõhjuseks. Universumi inflatsiooniline mudel oli üks võimalikest lahendustest kosmoloogilise printsiibi paradoksile, mis oli seotud eelkõige Universumi ruumiga. Kuid nüüd on olemas veel üks lahend, mis on seotud Universumi ajaga ja mis viib kaudselt ikkagi Universumi paisumise inflatsioonilise mudelini. Universumi paisumise inflatsioon ei ole tegelikult vastuolus valguse kiiruse konstantsusega vaakumis, sest aineosakeste suhteline kiirus inflatsioonilise Universumi erinevates ruumipunktides ei ületanud mitte kunagi valguse kiirust  $c$ .

Küsimus ei ole tegelikult selles, et mis põhjustas Universumi inflatsioonilise paisumise, vaid selles, et mis põhjustas selle peatumist. Selles on põhiküsimus.

### 1.2.7.3 Matemaatiline analüüs

#### 1.2.7.3.1 Sissejuhatus

Traditsioonilises kosmoloogias kirjeldavad Universumi paisumise algust ja lõppu matemaatilised lahendid, mis tuletatakse tuntud Friedman'i võrranditest:

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

ja

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

ehk

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3}\rho$$

Nendes näitab Universumi ruumi kõverust  $k = 1, 0, -1$  ja Universumi rõhk võetakse tavaliselt nulliks  $p = 0$ . Positiivse kõveruse ruumi korral  $k = 1$  on Friedman'i võrrandite lahendid esitatavad parameetrilisel kujul järgmiselt:

$$t = \frac{a_m}{2c}(\eta - \sin \eta)$$

$$a(t) = (1 - \cos \eta)$$

$$H = \frac{2c}{a_m} \frac{\sin \eta}{(1 - \cos \eta)^2}$$

$$0 \leq \eta < 2\pi$$

milles integreerimiskonstant  $a_m$  näitab ruumi kõverust. Parameetri  $\eta$  suurenedes kasvab aeg  $t$  monotoonselt. Näiteks kui parameeter  $\eta$  võrdub nulliga  $\eta = 0$ , siis on tegemist Universumi „sünnimomendiga“  $t = 0$ :

$$t(0) = 0, a(0) = 0, H(0) = \infty$$

Universumi koguruumala  $V$  võrdub sellisel juhul nulliga

$$V_{Univ} = 2\pi^2 a^3(0) = 0$$

ja Universumi paisumiskiirus ehk Hubble'i konstant  $H$  võrdub lõpmatusega. Parameetri  $\eta = \pi$  korral võrdub kosmoloogiline ajamoment

$$t(\pi) = \frac{a_m \pi}{2c}$$

mastaabifaktor  $a(\pi) = a_m$ , Hubble'i konstant  $H(\pi) = 0$  ja Universumi ruumala  $V_{Univ} = 2\pi^2 a_m^3$ . Sellisel juhul on Universumi paisumiskiirus  $H$  vähenenud nullini ja pärast seda hakkab Universumi ruumala kokku tõmbuma. Sellest tulenevalt on kosmoloogiliseks ajamomendiks

$$t(\pi) = \frac{a_m \pi}{2c}$$

kogu Universumi ruumala  $V$  maksimaalne võimalik väärtus  $2\pi^2 a_m^3$ . Parameetri  $\eta = 2\pi$  korral võrdub Universumi vanus

$$t(2\pi) = \frac{a_m \pi}{c}$$

mastaabikordaja  $a(2\pi) = 0$ , Hubble'i konstant  $H(2\pi) = -\infty$  ja Universumi ruumala

$$V_{Univ} = 2\pi^2 a_m^3(2\pi) = 0$$

Sellisel juhul on kosmoloogiliseks ajamomendiks

$$t(2\pi) = \frac{a_m \pi}{c}$$

kogu Universumi ruumala  $V$  kokku tõmbunud punktiks ja mida väiksem on Universumi ruumala, seda kiiremini see ka kokku tõmbub. Kuid negatiivse kõveruse ruumi korral  $k = -1$  on Friedman'i võrrandite lahendid esitatavad parameetrilisel kujul järgmiselt:

$$t = \frac{a_m}{2c} (sh\eta - \eta)$$

$$a(t) = \frac{a_m}{2} (ch\eta - 1)$$

$$H(t) = \frac{2c}{a_m} \frac{sh\eta}{(ch\eta - 1)^2}$$

$$0 \leq \eta < \infty$$

Parameetri  $\eta$  lähenemisel nullile  $\eta \rightarrow 0$  saadakse järgmised lahendid:

$$t \rightarrow 0, a(t) \rightarrow 0, H(t) \rightarrow \infty$$

mis tähendab seda, et Universumi algmomendil  $t = 0$  oli Universumi paisumiskiirus lõpmata suur. Negatiivse kõverusega ruumi korral on Universumi koguruumala lõpmata suur ehkki  $t \rightarrow 0$  korral on Universumil olemas algsingulaarsus. See tuleneb sellest, et Universumi mastaabi funktsioon  $a(t)$  läheneb nullile:

$$V(\chi_0) = 4\pi a^3 \left[ \frac{1}{4} sh(2\chi_0) - \frac{\chi_0}{2} \right]$$

milles Universumi ruumilist mastaapi näitabki  $R = a\chi_0$ . Parameetri  $\eta \rightarrow \infty$  korral on lahendid aga järgmised:

$$t \rightarrow \infty, a(t) \rightarrow \infty, H(t) \rightarrow 0$$

mis tähendab seda, et Universum paisub aeglustuvalt igavesti. Tasase ruumi  $k = 0$  mudeli korral saadakse lahendid, mis on esitatavad järgmiste parameetriliste võrrandite kujul:

$$t = \frac{a_m}{12c} \eta^3$$

$$a(t) = \frac{a_m}{4} \eta^2$$

$$H = \frac{8c}{a_m} \eta^{-3}$$

$$0 \leq \eta < \infty$$

Kuid nende lahendid kattuvad üldjoontes negatiivse kõveruse ruumi mudeliga.

### 1.2.7.3.2 Friedmanni mudelite lahendid

Kõik eelnevalt esitatud Friedman'i võrrandite lahendid ja nende omadused on tähelepanuväärsed selles mõttes, et kõikide esitatud mudelite korral on Universumi algused täpselt samasugused, kuid tuleviku stsenaariumid ei saa olla õiged, kuna need ei kattu astronoomiliste vaatlusandmetega. Universumi paisumiskiirus ajas suureneb, mitte ei vähene. Järgnevalt näitamegi füüsikalise ja matemaatilise analüüsiga seda, et Universumi algus ongi täpselt nii nagu seda näitavad kõik Friedman'i mudelite lahendid, kuid Universumi tuleviku stsenaarium erineb kõikidest kolmest

Friedman'i mudelitest ehkki seda on võimalik samuti Friedman'i võrranditest otseselt tuletada.

Järgnevalt hakkame väga põhjalikult analüüsima eespool tuletatud kosmoloogia põhivõrrandit:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

ja näitame seda, et kuidas on see seotud Universumi kosmoloogilise paisumise alguse ja lõpuga. See tähendab seda, et kogu järgnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs näitab meile üsna selgelt seda, et Universumi paisumise algus ja lõpp on määratud aja ja ruumi teisenemisest üle kogu Universumi.

Eespool me tõdesime, et kosmoloogia põhivõrrand ehk Friedman'i võrrand on otseselt tuletatav seosest:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{mc^2}{2}$$

milles massid  $m$  taanduvad välja:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimases võrrandis olev konstandist liige  $-\frac{c^2}{2}$  võib võrduda ka nulliga:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

mildest omakorda saame mehaanilise energia jäävuse seaduse klassikalisel kujul:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

Selline võrrand sobibki hästi kirjeldama Universumi kosmoloogilist paisumist. Näiteks viimases võrrandis olev kiirus  $v$  võib olla Universumi paisumiskiirus ehk tuntud Hubble'i seadus  $v = HR$ :

$$\frac{H^2}{2} = \frac{GM}{R^3}$$

Robertson-Walkeri meetrikast on teada seda, et Hubble'i konstant  $H$  võrdub:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ja seetõttu saame viimase võrrandi kujule

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$

ehk

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{GM}{R^3}$$

Viime liikme  $\frac{\dot{a}^2}{a^2}$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = \frac{GM}{R^3} a^2$$

Massi  $M$  võime avaldada tiheduse kaudu:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$$

ja seega saame võrrandi kujuks järgmiselt:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho a^2$$

Viime võrrandi kõik liikmed ühele poole võrdusmärgi ja saame:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = 0$$

Kuna viimane võrrand on saadud eespool tuletatud võrrandist:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

mis tegelikult nulliga ei võrdu:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

siis seega saame järgmiselt:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

Viimane võrrand on peaaegu identne Robertson-Walkeri meetrikatest saadud Friedmanni võrrandiga:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

milles  $k = 1, 0, -1$ . See tähendab seda, et kui viimases võrrandis on  $k$  väärtuseks  $+1$  ehk tegemist oleks Universumi positiivse kõveruse ruumiga, siis saamegi eelnevalt tuletatud võrrandiga täiesti identse seose:

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et eelnevalt tuletatud võrrand on Robertson-Walkeri meetrika järgi tegemist positiivse kõveruse ruumiga ja seega kõik teised Universumi ruumi kõverused ( s.t. tasane ja negatiivne kõverus ) on välistatud. Tegelikult hakkame kohe järgnevalt tõestama, et ka positiivsest kõverusest ruumist ei sõltu Universumi paisumiskiiruse kinemaatika, vaid see sõltub mehaanilisest energia jäävuse seadusest ja salapärase kordaja  $y$  muutumisest ajas.

Universumi kosmoloogilist paisumist kirjeldav Friedmanni võrrand

$$\frac{1}{2} (\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

esitatakse sageli ka kujul:

$$\left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho = -\frac{kc^2}{R^2}$$

mis on võimalik matemaatiliselt tuletada ka eespool esitatud põhivõrrandist. Näiteks Robertson-

Walkeri meetrikas tähistab  $R$  kosmoloogilist mastaabikordajat, mis ajas muutub Universumi paisumise tõttu:

$$R = a(t)\chi$$

Aja järgi tuletis  $R$ -st on:

$$\dot{R} = \dot{a}(t)\chi$$

Sellest tulenevalt saadaksegi Hubble'i konstandi  $H$  kujuks:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2$$

Kosmoloogia põhivõrrand tuleb seega kujul:

$$\left(H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho\right)R^2 = -kc^2$$

Kirjutame viimases võrrandis olevad sulud lahti:

$$H^2R^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 = -kc^2$$

ja jagame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$\frac{H^2R^2}{2} - \frac{4}{3}\pi G\rho R^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

Järgnevalt analüüsime saadud võrrandi esimest poolt nõndaviisi:

$$\frac{H^2R^2}{2} - \frac{4\pi GR^3}{3R}\rho = 0$$

Viimase võrrandi kaks liiget paneme omavahel võrduma:

$$\frac{H^2R^2}{2} = \frac{4\pi GR^3}{3R}\rho$$

milles me näeme seda, et raadiused  $R$  taanduvad ilusti välja:

$$\frac{H^2}{2} = \frac{4\pi G}{3}\rho$$

Viime viimase võrrandi kõik liikmed taas ühele poole:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{4\pi G}{3}\rho = 0$$

ja paneme võrduma eespool olevas põhivõrrandis esitatud liikmega:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{4\pi G}{3}\rho = -\frac{kc^2}{2}$$

Kuna eespool tuletatud kosmoloogia põhivõrrandis puudus kordaja  $k$  liige, siis võime ka siin selle ära jätta

$$\frac{H^2}{2} - \frac{4\pi G}{3}\rho = -\frac{c^2}{2}$$

Saadud viimane võrrand võrdubki eespool tuletatud kosmoloogia põhivõrrandiga:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

mida nimetatakse ka Friedmanni võrrandiks, mis antud juhul on esitatud ilma  $k$  kordajata.

Viimases esitatud võrrandis me näeme seda, et kui Universumi ruumala on lõpmatult suur ( lõpmata kauges tulevikus ), mis avaldub võrrandis  $R = \infty$ , siis saame järgnevalt:

$$\frac{H^2}{2} - 0 = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{H^2}{2} = -\frac{c^2}{2}$$

milles peab kehtima võrdus:  $H^2 = -c^2$  ehk Universum paisub valguse kiirusega  $v^2 = -c^2$ . See tähendab füüsikaliselt seda, et kui Universumi ruumala on lõpmatult suur, siis tema paisumiskiirus  $H$  võrdub valguse kiirusega  $c$ . See tähendab, et Universumi paisumiskiirus läheneb aja jooksul valguse kiirusele  $c$ . Kui aga Universumi ruumala on null ehk tegemist on Universumi algsingulaarsusega, mis väljendub võrrandis  $R = 0$ , siis saame järgmiselt:

$$\frac{H^2}{2} - \infty \neq -\frac{c^2}{2}$$

Viimane saadud seos on matemaatiliselt kõlbmatu, sest lõpmatus ei võrdu kuidagi teisel pool võrdusmärgi oleva konstandiga  $c$ . Kui me aga viime selle lõpmatuse teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{H^2}{2} = -\frac{c^2}{2} + \infty$$

siis saame Universumi lõpmatult suure paisumiskiiruse:  $H = \infty$ :

$$\infty = -\frac{c^2}{2} + \infty$$

Ka selline matemaatiline lahend on täiesti kõlbmatu, sest kui me viime ühe lõpmatu uuesti tagasi teisele poole võrdusmärgi, siis saame järgmiselt:

$$\infty - \infty \neq -\frac{c^2}{2}$$

Viimasest seosest me näeme, et  $\infty - \infty = 0$  ja see ei võrdu kuidagi teisel pool võrdusmärgi oleva konstandiga  $c$ . See tähendab füüsikaliselt seda, et Universumi ruumala ei saanud paisumise alghetkel lõpmatult väike olla ehk null:  $R \neq 0$ . Kui aga teeme oletuse, et Universumi paisumiskiirus oli null ehk  $H = 0$ , mitte aga Universumi ruumala, siis seega saame järgmise väga huvitava seose:



$$0 - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimane saadud seos on sellepärast väga huvitav, kuna selles olev  $R$

$$\frac{GM}{R^3} = \frac{c^2}{2}$$

võrdub kuupjuurega Schwarzschildi raadiusest:

$$\sqrt[3]{\frac{2GM}{c^2}} = R_s \neq 0$$

Kuna see raadius ( ehk Universumi kujuteldav raadius ) ei saa olla null, siis füüsikaliselt tähendab see seda, et Universumi nähtav paisumine algas mingil ajahetkel, mil Universumil oli juba mingid mõõtmed olemas, mitte ei võrdunud see nulliga. Kindlalt võib öelda seda, et Universumi paisumise alghetkel oli tema mõõtmed palju palju kordi väiksemad kui praegusel tume energia domineerimise ajastul:

$$R_s \ll R$$

See tähendab seda, et Universumi paisumise alghetkel oli Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdne nulliga ehk  $H = 0$ , kuid mitte Universumi ruumala ehk  $R$ . Ainult selline lahend rahuldab meie poolt analüüsitud kosmoloogilist võrrandit.

Universumi paisumiskiirus oli minevikus väiksem kui praegusel ajahetkel ja see tähendab seda, et Universumi paisumiskiirus ajas suureneb, mitte ei vähene. Võib eeldada seda, et kuna mitte miski ei saa liikuda valgusest kiiremini ( isegi mitte ruum ise ), siis seega Universumi paisumiskiirus läheneb aja jooksul valguse kiiruseni  $c$ . Seetõttu oleks õige, s.t. vaatlusandmetega kooskõlas järgmine muutumisseadus:

$$H = \frac{c}{y}$$

milles kordaja  $y$  muutumiskiirgus on:

$$y = 1 \leq y \leq \infty$$

Viimane seos rahuldab eelnevalt analüüsitud kosmoloogia põhivõrrandit:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Näiteks kui viimases võrrandis on Universumi mõõtmed paisunud lõpmatult suureks ehk  $R = \infty$ , siis selle paisumiskiirus on lähenenud juba valguse kiiruseni  $c$  ehk  $H = c$ . Selline kosmoloogiline stsenaarium on vaatlusandmetega kooskõlas, sest Universumi paisumiskiirus ajas suureneb ja näib, et mitte miski seda ei takista. Kui aga viimases võrrandis ei ole Universumi mõõtmed päris nullid, vaid väga väga väikesed võrreldes lõpmatusega või praeguse ajahetkega ehk  $R \neq 0$ , siis Universumi paisumiskiirus  $H$  saab olla null ehk  $H = 0$ . Viimase võrrandi korral saab Universumi paisumiskiirus  $H$  olla võrdne valguse kiirusega  $c$  või nulliga, kuid ei saa olla lõpmatult suur.

Universumi paisumiskiiruse ehk Hubble'i konstandi  $H$  muutumisseadus väljendub:

$$H = \frac{c}{y}$$

milles kordaja  $y$  muutumiskiirgus on  $y = 1 \dots \infty$ . Kuna  $H$  on Universumi paisumiskiirus ehk  $v$ , siis

me näeme seda, et see on kooskõlas aja teisenemise seaduspärasusega:

$$\gamma = \frac{t'}{t} = \frac{c}{v}$$

mis oli juba eelnevalt matemaatiliselt tuletatud. See tähendab seda, et kordaja  $\gamma$  vähenemise tõttu suureneb Universumi paisumiskiirus ja selle ruumala. Näiteks kui kordaja  $\gamma$  oleks lõpmatult suur ehk  $\gamma = \infty$ , siis sellisel juhul oli Universumi mõõtmed väga väikesed ehk „lähenedes“ nullile võrreldes lõpmatusega  $R \rightarrow 0$  ja Universumi paisumiskiirus oli null ehk  $H = 0$ . Kui aga kordaja  $\gamma$  on võrdne ühega ehk  $\gamma = 1$ , siis sellisel juhul on Universumi mõõtmed paisunud juba lõpmata suureks ehk  $R = \infty$  ja Universumi paisumiskiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$  ehk  $H = c$ . Selline Hubble'i konstandi  $H$  muutumisseadus rahuldab täielikult eespool tuletatud võrrandit:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

ja on ka astronoomiliste vaatlusandmetega kooskõlas.

Universumi paisumiskiirus  $v = H$  on näiliselt valguse kiirusest  $c$  palju kordi väiksem, mis on tingitud näiteks aja ( ja ka ruumi ) teisenemisest üle kogu Universumi:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{c}{v} = \gamma$$

milles  $\gamma$  on tuntud ka kinemaatilise tegurina erirelatiivsusteooriast:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Kuna eespool matemaatiliselt tuletatud kiiruste teisenemise relativistlikus valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

näitabki erinevate kiiruste suhet kinemaatiline tegur  $\gamma$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{v}$$

siis aja dilatatsiooni valemi järgi

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

näitabki  $\gamma$ -faktor aja teisenemist:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et tavaruum  $K$  „liigub“ hyperruumi  $K'$  suhtes konstantse kiirusega  $c$ , mis põhjustab aja teisenemise ehk  $\gamma$  väärtuse vähenemist. Kuid samas  $\gamma$  vähenemine tingib

omakorda Universumi paisumiskiiruse suurenemist paisuva Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale.

Aja teisenemise valemis

$$\frac{t'}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

olevat ruutjuure liiget

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on Universumi paisumise korral võimalik analüüsida sfääriliste koordinaatide kujul:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}}.$$

Kuna Universumi paisumise mudeliks on enamasti kera tsentraalsümmeetriline paisumine, siis kasutame sfäärilisi koordinaate ehk meil on järgnevalt tegemist tsentraalsümmeetrilise ruumikeskkonnaga, mis ajas muutub. See tähendab füüsikaliselt seda, et suhte  $\frac{v^2}{c^2}$  ( mille korral  $v = 0$  ) vastab mingisugune ruumikoordinaat ehk antud juhul mingi kindel kaugus  $r$  tsentraalsümmeetrilise ruumikeskkonna ( ehk kera ) tsentrist:

$$\frac{v^2}{c^2} = r.$$

Null punkt asub kera tsentrist tegelikult lõpmatuses. Täpselt sama on ka suhtega  $\frac{c^2}{c^2}$  ( mille korral  $v = c$  ) ehk sellele vastab samuti mingi kindel kaugus  $R$  kera tsentrist:

$$\frac{c^2}{c^2} = R.$$

See punkt asub kera tsentri vahetus läheduses, mitte täpselt kera tsentris. Eelnevast analüüsist saame teha järgmised lihtsad seosed:

$$v^2 = rc^2$$

$$c^2 = Rc^2.$$

Sellest tulenevalt saame teha järgmised lihtsad matemaatilised teisendused:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{rc^2}{Rc^2}} = \sqrt{1 - \frac{r}{R}}.$$

Kuna ruutjuure alla ei saa jääda negatiivset arvu ehk

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \neq \sqrt{1 - \frac{r}{R}},$$

siis selleks tuleb teha puhtalt matemaatiline „pöördeisendus“:

$$\sqrt{1 - \frac{r}{R}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{R}{r}} .$$

Lõpuks me näemegi seda, et:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} .$$

milles

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{R}{r} .$$

Saadud ruutjuure avaldis

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

on matemaatiliselt ja füüsikaliselt identne gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrandis oleva ruutjuure avaldisega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} .$$

Albert Einsteini üldrelatiivsusteoorias tuletatakse ruutjuure avaldis järgmiselt. Avaldises

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

asendatakse  $v^2$  Newtoni gravitatsiooniteoorias tuntud teise kosmilise kiirusega

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

ehk

$$v^2 = \frac{2GM}{r} .$$

$\frac{GM}{r}$  on gravitatsioonipotentsiaal ja  $\frac{v^2}{2}$  on liikuva keha kineetiline energia:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} .$$

Sellest tulenevalt saadakse järgmised matemaatilised teisendused:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r}},$$

milles

$$\frac{2GM}{c^2} = R$$

on Schwarzschildi raadiuse avaldis ja  $r$  on kaugus planeedi tsentrist. Teine kosmiline kiirus on keha kiirus, mis võimaldab mingisuguse planeedi mõjusfäärist jäädavalt lahkuda. Seda nimetatakse ka paokiiruseks ja näiteks musta augu pinnal on see võrdne valguse kiirusega  $c$ .

Järgnevalt hakkame väga põhjalikult analüüsima eespool tuletatud seost:

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}}$$

milles  $R$  avaldub

$$R = \sqrt[3]{\frac{2GM}{c^2}}$$

ja näitame seda, et kuidas on see seotud Universumi kosmoloogilise paisumise alguse ja lõpuga. Näiteks kui Universumi ruumala on lõpmatult suur ( lõpmata kauges tulevikus ), mis avaldub viimases esitatud võrrandis  $r = \infty$ , siis saame järgnevalt:

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{\infty}} = 1$$

ehk

$$y = 1$$

milles peab kehtima võrdus:  $v^2 = c^2 = H^2$  ehk Universum paisub valguse kiirusega  $c$ . See tähendab füüsikaliselt seda, et kui Universumi ruumala on lõpmatult suur lõpmata kauges tulevikus, siis tema paisumiskiirus  $H$  võrdub valguse kiirusega  $c$ . See tähendab, et Universumi paisumiskiirus läheneb lõpmata pika aja jooksul valguse kiirusele  $c$ . Kui aga Universumi ruumala on null ehk tegemist on Universumi paisumise kujuteldava algsingulaarsusega ( s.t. paisuva aegruumi „punktsingulaarsusega“ ), mis väljendub viimases võrrandis  $r = 0$ , siis saame järgmiselt:

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2} = \infty \neq \frac{1}{1 - \frac{R}{0}} = 0$$

milles  $v = 0$ . Viimane saadud seos on matemaatiliselt ja füüsikaliselt kõlbmatu, sest lõpmatus ei võrdu kuidagi teisel pool võrdusmärgi oleva nulliga. Kui aga  $v = \infty$ , siis sellisel juhul

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2} = 0 = \frac{1}{1 - \frac{R}{0}} = 0$$

Ka selline lahend on füüsikaliselt kõlbmatu, sest minevikus oli Universumi paisumiskiirus  $H$  väiksem kui praegusel ajahetkel. See tähendab füüsikaliselt seda, et Universumi ruumala ei saanud paisumise alghetkel olla lõpmatult väike ehk null:  $r \neq 0$ . See tähendab, et kui Universumi paisumiskiirus oli paisumise alghetkel null ehk  $v = H = 0$ , siis Universumi mõõtmed ei saanud olla

lõpmata väikesed:

$$y^2 = \left(\frac{\dot{t}}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2} = \infty = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = \infty$$

ehk  $y = \infty$ . Viimane saadud seos näitab selgelt seda, et  $r = R = R$ :

$$y^2 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{R}} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Kuna see raadius  $r$  ( mis näitab Universumi kujuteldavat ruumala ) ei saa olla null, siis füüsikaliselt tähendab see seda, et Universumi nähtav paisumine algas sellisel alghetkel, mil Universumil olid juba mingid mõõtmised olemas, mitte ei võrdu see nulliga. Kindlalt võib öelda seda, et Universumi paisumise alghetkel oli tema mõõtmised palju palju kordi väiksemad kui praegusel tume energia domineerimise ajastul:

$$R \ll r$$

See tähendab seda, et Universumi kosmoloogilise paisumise alghetkel oli Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdne nulliga ehk  $v = H = 0$ , kuid mitte Universumi ruumala  $r$ . Selline lahend tuleneb otseselt sellest, et aeg ja ruum on teisenenud üle kogu Universumi. Näiteks kui aeg ja ruum ei oleks teisenenud üle kogu Universumi ehk tegemist oleks Universumi tavalise eukleidilise ( s.t. mitte-teisenenud ) (aeg)ruumiga, mis võrrandis väljenduks  $R = 0$ :

$$y^2 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{0}{r}} = \frac{1}{1} = 1$$

siis Universumi kosmoloogiline paisumine oleks saanud alguse aegruumi punktist lõpmata kauges minevikus, mitte aga 13,7 miljardit aastat tagasi. Kui Universumi paisumise alghetk oleks sellisel juhul lõpmata kauges minevikus, siis Universumi mõõtmised peaksid olema lõpmata suured ehk viimast võrrandit rahuldab ka see, kui  $r = \infty$ :

$$y^2 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

Näiteks matemaatikast teame, et omavahel kaks paralleelset sirget lõikuvad üksteisega lõpmatutes ja Universumi paisumise korral tähendab see seda, et kui Universumi paisumise alghetk oleks lõpmata kauges minevikus, siis Universumi paisumise „pindsingulaarsus“ muutuks sellisel juhul nulliks ehk „punktsingulaarsuseks“  $R \rightarrow 0$  ja Universumi mõõtmised oleksid lõpmata suured ehk  $r \rightarrow \infty$ :

$$y^2 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{0}{\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

Kuid aja ja ruumi teisenemise korral üle kogu Universumi ei saanud Universumi kosmoloogiline paisumine alguse aegruumi punktist ( s.t. „punktsingulaarsusest“ ), vaid teatud Universumi mõõtmete olemasolu korral ( ehk „pindsingulaarsusest“ ). Sellest tulenevalt võis pindsingulaarsus ise tekkida punktsingulaarsusest hetkega ehk lõpmata väikese ajaperioodi jooksul. Sellist nähtust mõistetakse tänapäeva kosmoloogias Universumi „inflatsioonilise paisumisena“. Seda näitab tegelikult ka võrrandi matemaatiline ja füüsikaline täpisanalüüs:

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}}$$

Näiteks kui viimases võrrandis võrduvad Universumi mõõtmed nulliga ehk Universumi mõõtmed on lõpmata väikesed

$$r = 10^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

siis Universumi paisumiskiirus peab võrduma lõpmatusega  $\infty$  ehk  $v = H = \infty$ :

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{\infty} = 0 = \frac{1}{1 - \frac{R}{0}} = 0$$

milles

$$\frac{1}{1 - \frac{R}{0}} = \frac{1}{1 - \infty} = \frac{1}{-\infty} = -0 = 0$$

ehk

$$\frac{1}{-\infty} = \frac{1}{(-1)\infty} = \frac{1}{-1} \frac{1}{\infty} = \frac{0}{-1} = 0$$

Tegemist on äärmiselt erilise ja väga erandliku füüsikalise olukorraga, mille korral on  $y$  väärtus null ja  $r$  on väiksem kui  $R$ , mis tavafüüsika järgi olla ei saa. Näiteks kordaja  $y$  muutumispiirkond on füüsikas üldiselt ühest lõpmatuseni ja  $r$  saab olla  $R$ -st suurem või sellega võrdne. Kui aga Universumi mõõtmed pole enam lõpmata väikesed ehk omavad teatud väärtust  $r = R$ , siis Universumi paisumiskiirus on sellisel juhul null ehk  $v = H = 0$ :

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{0} = \infty = \frac{1}{1 - \frac{R}{R}} = \infty$$

Füüsikaliselt tähendab eelnev analüüs seda, et kui Universumi mõõtmed olid lõpmata väikesed ehk tegemist oli Universumi punktsingulaarsusega

$$r = \frac{1}{\infty} = 0$$

siis Universum paisus lõpmata suure kiirusega

$$H = \infty$$

Kuid Universumi pindsingulaarsuse korral võrdus Universumi paisumiskiirus nulliga. Sellest järeldub see, et Universumi pindsingulaarsus tekkis punktsingulaarsusest lõpmata väikese ajaperioodi jooksul ehk sisuliselt tekkis aeg ja ruum hetkega ( s.t. 0 sekundiga ) ja seda me mõistame kosmoloogias Universumi inflatsioonilise paisumisena.

Oluline on siinkohal märkida seda, et Universumi inflatsioonilise paisumise kiirus oli lõpmata suur ehk Universumi aeg ja ruum tekkisid sisuliselt ühe hetkega. Lõpmata suure kiiruse all mõistetakse füüsikas teleportatsioonina. Relatiivsusteooria füüsikaga see vastuolus ei ole, kuna üle valguse kiiruse  $c$  ongi tegemist juba teleportatsiooniga ehk selliste kiirustega, mille arväärtused lähenevad lõpmatusele. See tähendab seda, et üle valguse kiiruse  $c$  on võimalik ainult

teleportatsiooni nähtus.

Eelnevast analüüsist järeldub ka selline tõlgendus, et meie Universum paisus punktisingularsusest pindsingularsuseks, mille mõõtmed võivad olla tegelikult hoopis lõpmata suured:

$$y^2 = \left(\frac{t}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{0} = \infty = \frac{1}{1 - \frac{R}{R}} = \infty$$

ehk

$$y^2 = \frac{c^2}{0} = \infty = \frac{1}{1 - \frac{\infty}{\infty}} = \infty$$

milles

$$\frac{1}{1 - \frac{\infty}{\infty}} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

ehk  $R = \infty$ . See tähendab seda, et Universum paisus lõpmata väikesest ruumalast ehk aegruumi punktist lõpmata suureks ja seda lõpmata väikese ajaperioodi jooksul. Näiteks kui kera paisuks lõpmata suure kiirusega, siis see tähendaks seda, et kera paisuks hetkega ehk 0 sekundiga lõpmata suureks. Kuna Universumi punktisingularsuse korral  $r = 0$  oli Universumi paisumiskiirus lõpmata suur ehk  $H = \infty$ :

$$y^2 = \left(\frac{t}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{\infty} = 0 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{\infty}{0}} = 0$$

siis on põhjust järeldada seda, et meie Universumi ruumala on tegelikult lõpmata suur  $R = \infty$  ehk seega galaktikaid ( ja aatomeid ) on Universumis tegelikult lõpmatult palju. Sellest tulenevalt tekib küsimus, et kuidas füüsikaliselt tõlgendada Universumi paisumist ehk Universumi ruumala suurenemist ajas, kui Universumi ruumala on tegelikult lõpmata suur:

$$y^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{1 - \frac{\infty}{\infty}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{R}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}}$$

milles R avaldub

$$R = \sqrt[3]{\frac{2GM}{c^2}}$$

M on Universumi aine ja energia tihedus. Lahendus seisneb selles, et Universumi ruumala on küll lõpmatult suur ehk galaktikaid on Universumis lõputu hulk, kuid aine ja energia tihedus on Universumis erinevatel kosmoloogilistel aegadel erinev. Selle järgi tekkis kogu Universumi aine ja energia vahetult pärast Universumi inflatsioonilist paisumist või selle inflatsiooni „ajal“, kuid kindlasti mitte enne inflatsiooni. Universumi inflatsiooniline paisumine ise „kestis“ 0 sekundit ja enne seda inflatsiooni ei eksisteerinud aega ega ruumi. Sellest tulenevalt ei saanud ainet ega energiat tekkida enne inflatsiooni.

Näiteks kui viimases  $y^2$  võrrandis on Universumi mõõtmed paisunud lõpmatult suureks ehk  $r = \infty$ , siis selle paisumiskiirus on lähenenud juba valguse kiiruseni  $c$  ehk  $v = H = c$ . Nüüd tähendab see tegelikult seda, et  $r = \infty$  korral on Universumi aine ja energia tihedus lõpmata väike, näiteks kõik galaktikad või aineosakesed Universumis on üksteisest lõpmata kaugel lõpmata kauges tulevikus.

Kui aga viimases võrrandis ei ole Universumi mõõtmed päris nullid, vaid väga väga väikesed võrreldes lõpmatusega või praeguse kosmoloogilise ajahetkega ehk  $r \neq 0$  (vaid  $r = R$ ), siis



Universumi paisumiskiirus  $H$  on sellisel juhul null ehk  $H = 0$ . See aga tähendab tegelikult omakorda seda, et ainet ja energiat on Universumis küll lõpmata palju ( näiteks aineosakesi ) ja sellest tulenevalt on Universumi ruumala lõpmata suur, kuid lõpmatu hulk ainet ( näiteks lõputu hulk galaktikaid ) ei ole võimalik kokku suruda ühte aegruumi punkti. See tähendab seda, et Universumi aine ja energia tihedus oli küll lõpmata suur ehk kõikide Universumi aineosakeste vahekaugused võrduksid nulliga, kuid Universumi ruumala ise ei olnud lõpmata väike, vaid samuti ikkagi lõpmata suur, sest aineosakesi on kogu Universumis lõputu hulk. Näiteks kõige suurem aine ja energia tihedus on praegusel ajal aatomituuma tihedus.

Universumi paisumiskiirus  $H$  saab olla võrdne nulliga, valguse kiirusega  $c$  või nende kahe vahepeal, kuid ei saa olla lõpmata suur ( välja arvatud ainult Universumi inflatsioonilise paisumise korral, mis „kestis“ ainult 0 sekundit ).

Eelneva matemaatilise ja füüsikalise analüüsi põhjal võib järeldada seda, et Universumi paisumise algsingulaarsust ehk punktisingulaarsust kirjeldab antud juhul kolm parameetrit. Näiteks Universumi mõõtmed olid punktisingulaarsuse korral lõpmata väikesed:

$$r = \frac{1}{\infty} = 0$$

Kuna Universumi mõõtmed olid lõpmata väikesed, siis võib eeldada või oletada seda, et Universumi algsingulaarsust on võimalik kirjeldada mingisuguste kvantmehaaniliste seaduspärasustega. Sellise „kvantkosmoloogia“ õpetuse järele pole tegelikult vajadust, kuna Universum paisus algsingulaarsuse korral lõpmata suure kiirusega:

$$H = \infty$$

See tähendab seda, et Universum „eksisteeris“ algsingulaarsuse „olekuna“ lõpmata väikese ajaperioodi jooksul

$$t = \frac{1}{\infty} = 0$$

ja seetõttu ei avaldanud kvantmehaanilised seaduspärasused mitte mingit mõju. Seega vajadus kvantkosmoloogia õpetuse järele antud kontekstis tegelikult puudub. Kuna Universumi paisumiskiirus võrdus lõpmatusega, siis peab Universumi ruumala olema praegusel ajahetkel lõpmatult suure ulatusega ( ehk galaktikaid peaks Universumis olema lõpmata hulk ). Universumi algsingulaarsuse korral võrdus Universumi aine-energia tihedus nulliga:

$$\rho = \frac{1}{\infty} = 0$$

mis ei ole tegelikult väga vastuoluline. Seda seetõttu, et Universumi algsingulaarsuse korral ei olnud materiat „veel“ olemas, niisamuti ka aega ega ruumi polnud olemas. Selle mudeli järgi „tekkis“ kogu Universumi materia pärast Universumi inflatsioonilist paisumist ( mis kestis lõpmata väikese ajaperioodi jooksul ) või kuidagi selle „käigus“.

Siinkohal peab märkima seda, et kuna Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse“ skaalast alates:

$$1,616\,229(38) \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

siis õigem oleks eeldada, et reaalne Universum ei saanud tegelikult alguse lõpmata väikesest ruumalast ehk punktist, vaid hoopis läbimõõdust, mis vastab Plancki pikkusele  $10^{-35}$  m. Plancki pikkuse läbimõõduga Universumisse ei mahuks absoluutselt mitte ükski teadaolev osake. Samasugune põhimõte kehtib tegelikult ka Universumi vanuse kohta, mille korral Universumi eksisteerimise aeg ei hakka „käima“ 0 sekundist, vaid hoopis ajahetkest, mis vastab „Plancki ajale“  $t$ :

$$t = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

See tähendab seda, et Universumi ruumala vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} \text{ m}$$

ja eksisteerimise aeg vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} \text{ s}$$

ei ole füüsikaliselt absoluutselt mõtet, küll aga omab matemaatilist mõtet. See viib järelduseni, et Universum paisus  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga „ruumalalt“ lõpmata suureks kõigest 0 sekundiga ja Universumi eksisteerimise aeg ehk „Universumi kell hakkas käima“ alates  $10^{-44}$  sekundist, mitte aga 0 sekundist. Seetõttu peab võrrandid Universumi algsingulaarsuse jaoks olema eelnevaga võrreldes teistsugused. Sellest lähtuvalt hakkame  $y$ -muutumisvõrrandi valemite teisendamise järgmiselt:

$$\frac{t'}{t} = y$$

Kuna kiiruse  $v$  definitsioon avaldub:

$$v = \frac{l}{t}$$

siis saame kirjutada:

$$\frac{l'}{vt'} = y$$

ehk

$$\frac{R}{r} = y$$

Saadud valem kirjeldab seda, et mida suurem on Universum ( $r$ ) algsest suurusel ( $R$ ), seda enam muutub  $y$ -faktori väärtus. Suurus  $R$  tähistab siin Universumi algsingulaarsust, mille pikkus kattub Plancki pikkusega  $l$ . Saadud valemi järgi võrduks  $y$ -faktor Universumi algsingulaarsuse korral ühega:

$$\frac{R}{R} = y = 1$$

mis oleks ilmselgelt ebareaalne tulemus. Universumi algsingulaarsuse korral peab  $y$ -faktor kindlasti võrduma lõpmatusena, kuna aeg ja ruum olid siis kõverdunud lõpmatuseni. Seetõttu peame eespool tuletatud võrrandi:

$$\frac{R}{r} = y$$

teisendama järgmiselt. Liidame võrrandi mõlemale poolele arvu üks:

$$\frac{R}{r} + 1 = y + 1$$

ja seejärel viime mõned liikmed teisele poole võrdusmärgi:

$$1 - \frac{R}{r} = 1 - y$$

Võtame võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}} = \sqrt{1 - y}$$

ja viime taas võrrandi liikmed teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y}}$$

Tulemuseks oleme saanud sellise y-faktori muutumisseaduse, mis esineb üldrelatiivsusteoorias:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = y$$

Selle järgi on nüüd ilusti näha, et Universumi algsingulaarsuse korral võrdub y-faktor lõpmatusega:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = y = \infty$$

mis oleks juba täitsa reaalne tulemus. Sarnaselt Universumi ruumala suhtega  $\frac{R}{r}$  kehtib täpselt samasugune analüüs ka Universumi vanuse suhtega  $\frac{t'}{t}$ . Näiteks Universumi algsingulaarsuse korral ei saa y-faktor võrduda ühega:

$$\frac{t'}{t} = y = 1$$

milles  $t'$  on Plancki ajaperiood ja  $t$  on Universumi vanus. Seetõttu sooritame taas eespool oleva analüüsiga võrreldes sarnaseid teisendusi. Näiteks liidame viimase võrrandi mõlemale poolele ühe:

$$\frac{t'}{t} + 1 = y + 1$$

ja viime mõned liikmed teisele poole võrdusmärgi:

$$1 - \frac{t'}{t} = 1 - y$$

ehk

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = \frac{1}{1 - y}$$

Tulemuseks saame sellise y-faktori muutumisseaduse:

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = y$$

millega korral me näeme, et kui tegemist on Universumi algsingulaarsusega  $t = t'$ , siis saame  $y =$

$\infty$ , mis on juba tunduvalt reaalsem tulemus.

### 1.2.7.3.3 Universumi aine ja energia tihedus

Tekib küsimus, et kui Universumi ruumala  $V$  on tegelikult lõpmatult suur ja seega galaktikaid  $M$  on Universumis lõputu hulk, siis kuidas saab Universumi aine ja energia tihedus  $\rho$  ajas muutuda:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1 = \text{const}$$

ehk

$$M = \rho V$$

Sellisel juhul peaks Universumi tihedus olema ajas pidevalt konstantne. Antud juhul on meil tegemist vastupidise olukorraga, mille korral on Universumi ruumala ja selles sisalduv mass ajas konstantsed ehk mõlemad lõpmata suured, kuid Universumi tihedus on sellegipoolest ajas muutuv. Lahendus seisneb selles, et esitatud tiheduse võrrand on oma olemuselt klassikalisel mehaanikasse kuuluv valem, mille järgi on kehade vaheline ruum eukleidiline ehk tasane, mille kõverus on null. Kuid kosmoloogias peame arvestama sellega, et masside vahel esineb gravitatsioon ehk kehade vaheline ruum on tegelikult kõver, mitte enam tasane. Eespool me tõdesime, et Universumi paisumine avaldub ainult gravitatsioonis. Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverdus ja gravitatsioonivälja tsentris on aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni. Universumi paisumine avaldubki selles, et aegruumi lõpmatu kõverus muutub aja jooksul täiesti tasaseks ehk gravitatsioon lakkab eksisteerimast ( s.t. tõmbejõud asendub tõukejõuga ). See võtab lõpmatult kaua aega ja see põhjustab Universumi paisumist ehk Universumi ruumala näilist suurenemist ajas ehkki tegelikult on Universumi ruumala lõpmatult suur.

Tavaruumis ehk Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale tundub, et Universum tervikuna paisub, kuna selle aine-energia tihedus ajas muutub väiksemaks ehk galaktikate parved eemalduvad üksteisest seda kiiremini, mida kaugemal nad ruumis üksteisest on. Sellejuures kehade enda mõõtmed ajas ei muutu ja Universum ehk tavaruum võib olla ka lõpmatu ulatusega. See on teaduslik fakt, mida on saadud astronoomilistest vaatlustest. Kuid Universumist väljapool olevale hüpoteetilisele vaatlejale on asjaolud aga hoopis teistmoodi. Temale näib Universum olevat „palju kordi suurem“, sealhulgas ka kehade enda mõõtmed on palju suuremad ja Universum mitte ei paisu, vaid tõmbub hoopis kokku ( s.t. Universum hoopis kahaneb ). Tavaruumis ehk Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale midagi sellist täheldada ei ole. Temale on kehade mõõtmed ajas muutumatud, muutuvad suuremaks ainult kehade vahelised kaugused väga suures ruumimastaabis. Sellest järeldatakse, et Universum tervikuna paisub ehkki selle ruumala võib olla ka lõpmata suur.

Oluline on märkida seda, et kui vaatleja eksisteerib süsteemis, milles esineb ruumi teisenemine, siis ei ole see vaatlejale otseselt tajutav. Ruumi teisenemist on otseselt tajutav ainult siis, kui vaatleja asub sellest süsteemist väljapool ja vaatleb kõrvalt seda süsteemi, milles esineb ruumi teisenemine. Selles mõttes jääb vaatleja „omaruum“ alati ühesuguseks sõltumata sellest, milline on parajasti ruumi teisenemine. Vaatleja „omaruum“ on tegelikult illusioon, mis ei pruugi näidata süsteemis olevale vaatlejale tegelikku ruumi mõõtmeid.

Universumi ruumala on tegelikult lõpmata suur mistahes kosmoloogilisel ajahetkel pärast inflatsioonilist paisumist, kuid selle aine ja energia tihedus muutub ajas väiksemaks. Seda on võimalik ka tõestada. Järgnevalt näitamegi füüsikalise ja matemaatilise analüüsi teel selle võimalikkust, mis seisneb võrrandite süsteemi tuletamisel ja selle analüüsil:

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0 \\ r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3 \end{cases}$$

Viimast on võimalik tuletada kosmoloogia põhivõrrandist, mida me kohe järgnevalt hakkamegi teostama. Näiteks eespool me jõudsime järeldusele, et Hubble'i konstandid  $H$  võivad olla omavahel seotud järgmiselt:

$$\dot{H} = \frac{H^2}{2} - H^2$$

Sellest seosest me tuletasime seisueenergia valemi  $E = mc^2$ , mis näitas veenvalt, et Universum paisub “tegelikult” valguse kiirusega  $c$ . Kuna tuletis konstandist võrdub nulliga:

$$0 = \frac{H^2}{2} - H^2$$

siis saame:

$$H^2 = \frac{H^2}{2}$$

Robertson-Walkeri meetrikas avaldub Hubble'i konstant  $H$  järgmiselt:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2}$$

ja sellest tulenevalt saame:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{H^2}{2}$$

Kuna Universum paisub “tegelikult” valguse kiirusega  $c$ , siis võime kirjutada (arvestades erirelatiivsusteoorias olevaid kiiruste seoseid):

$$H^2 = v^2 = -c^2$$

ehk

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{c^2}{2}$$

Kui me nüüd võrdleme saadud seost Friedmanni võrrandis oleva viimase liikmega:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

ehk

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho a^2 - \frac{\Lambda c^2}{6} a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

siis me näeme, et erinevus seisneb ainult konstandis  $k$ . See tegelikult näitab, et Universumi kosmoloogiline paisumine ei sõltu Robertson-Walkeri meetrikast tuntud Universumi aegruumi kõverusega. Kuid edasiseks analüüsiks me ju võime seda võrrandis kajastada, mis hiljem tegelikult välja taandub:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{kc^2}{2}$$

Viimase võrrandi teisendamisel:

$$\frac{2}{a^2} = -\frac{kc^2}{\dot{a}^2}$$

saame avaldise:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{\dot{a}^2}$$

ehk

$$1 - \frac{\rho}{\rho_{kr}} = -\frac{kc^2}{\dot{a}^2}$$

mis tuletatakse ka n.ö. “päris kosmoloogias”. Saadud avaldis näitab, et kui Universumi aine-energia tihedus ja kriitiline tihedus omavahel võrduvad, siis saame tulemuseks ümmarguse nulli, mille korral peab  $k = 0$ . Kui aga tulemus ei võrdu nulliga, vaid on hoopis positiivne või negatiivne, siis  $k$  ei võrdu nulliga. Sellisel juhul on  $k = 1$  või  $k = -1$ .

Viimase võrrandi kehtivust on võimalik tõestada järgmiselt. Näiteks saadud võrrandis:

$$1 - \frac{\rho}{\rho_{kr}} = \frac{2}{a^2}$$

esineb Universumi kriitilise tiheduse matemaatiline definitsioon:

$$\rho_{kr} = \rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

Siinkohal peab märkima seda, et Universumi kriitilise tiheduse võrrand:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

tuletatakse tavalisest energia jäävuse seaduse avaldisest:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{8\pi G}{3} \frac{M}{V} = \frac{8\pi G}{3} \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{2GM}{R^3}$$

milles esineb Universumi kosmoloogilist paisumist kirjeldav Hubble'i seadus  $v$ :

$$H^2 R^2 = v^2 = \frac{2GM}{R}$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

Selle järgi saame võrrandi kujuks:

$$1 - \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho = \frac{2}{a^2}$$

Järgnevalt teisendame antud seost niimoodi:

$$\frac{a^2}{2} - \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho \frac{a^2}{2} = 1$$

Kui me korrutame võrrandi mõlemad pooled liikmega  $H^2$ :

$$\frac{H^2 a^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho a^2 = H^2$$

siis me saamegi tuntud Friedmanni võrrandi kuju:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

milles küll puudub kosmoloogilist konstanti  $\Lambda$  sisaldav osa ( see tegelikult polegi väga oluline ):

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{8\pi G}{6} \rho a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{\Lambda c^2}{6} a^2$$

Saadud tulemus tõestab eelneva matemaatilise ja füüsikalise analüüsi õigsust.

Universumi kriitiline tihedus on ajas muutuv, kuid praegusel ajal hinnatakse selle väärtuseks:

$$\rho_{c,0} = (0,97 \pm 0,08) * 10^{-29} \frac{g}{cm^3}$$

Praegused Universumi vaatlused näitavad seda, et nn barüonilise aine ja kiirguse osakaal kokku on umbes:

$$\Omega_B \approx 0,005$$

Barüonilist ainet leidub tähtedevahelises gaasis ning see osaleb tähtede-planeetide moodustumisel. Tumeaine osakaal Universumis on umbes:

$$\Omega_{T A,0} \approx 0,245 \pm 0,025$$

Kui  $k = 0$ , siis  $\Omega(t) = 1$ . Kui aga  $k \neq 0$ , siis väheneb  $\dot{a}$ , mistõttu  $|1 - \Omega(t)|$  suureneb. Kosmoloogias peetakse suurust  $\Omega(t) = 1$  "mittestabiilseks tasakaalupunktiks". Praeguste hinnangute järgi on  $\Omega$  lähedane ühele, kuid kauges minevikus pidi see ühele veelgi lähemal olema. Näiteks 300 000 aastat pärast Universumi Suurt Pauku  $t > t_{AE}$  ehk:

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$$

oli kosmoloogilise punanihke suurusjärg aine-energia eraldumise hetkel:

$$z \sim 10^4$$

Sellest järeldatakse järgmist:

$$\frac{1 - \Omega(t_{AE})}{1 - \Omega(t_0)} = \left[ \frac{\dot{a}(t_{AE})}{\dot{a}(t_0)} \right]^{-2} = \left[ \frac{a_{AE}}{a_0} \right] = (1 + z_{AE})^{-1} = O(10^{-4})$$

Suurusjärg  $O(10^{-11})$  saadakse kosmoloogias Universumi kiirgusdominantse ajastu alguseks, millest järeldatakse, et Universum on peaaegu tasane. Universumi paisumise inflatsiooniteooriates

hinnatakse Universumi taset järgmiselt:

$$\frac{1 - \Omega(t_2)}{1 - \Omega(t_1)} = \left[ \frac{\dot{a}(t_2)}{\dot{a}(t_1)} \right]^2 = e^{-\frac{2(t_2-t_1)}{\Delta\tau}} \sim O(10^{-60})$$

Selle järgi on Universum inflatsioonilise paisumise “lõpuks” väga suure täpsusega tasane:

$$\Omega(t_2) \approx 1$$

Ainedominantses Universumis suureneb  $\Omega$  ja 1-he erinevus, kuid see väheneb vaakumidominantses universumis. Sellest järeldatakse:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{kr}} \approx 0,75$$

Universumi taustkiirguse analüüsi järgi on  $\Omega$  väärtus mõõdetud järgmiselt:

$$\Omega = 1,03 \pm 0,03$$

Kosmoloogias seostatakse Hubble'i konstant  $\Omega$ -ga:

$$H(t) = H_0 \left( \frac{\Omega_{kiirg,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{aine,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Kuid saadud tiheduse avaldist:

$$1 - \frac{\rho}{\rho_{kr}} = -\frac{kc^2}{\dot{a}^2}$$

on võimalik matemaatiliselt teisendada järgmisele kujule. Selleks kasutame Friedmanni võrrandist:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3} \rho = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

sellist võrdust, mis oli juba eespool esitatud:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Muudame seda võrdust järgmiselt:

$$\frac{3}{a^2 \Lambda} = \frac{c^2}{\dot{a}^2}$$

ja paneme selle seose Universumi tiheduse võrrandisse:

$$1 - \frac{\rho}{\rho_{kr}} = -\frac{kc^2}{\dot{a}^2} = -k \frac{3}{a^2 \Lambda}$$

Kuna kosmoloogiline konstant avaldus:

$$\Lambda = -\frac{3}{R^2}$$

siis võime kirjutada:

$$1 - \frac{\rho}{\rho_{kr}} = k \frac{R^2}{a^2}$$



Edasiseks analüüsiks arvestame Hubble'i konstandi seosega Robertson-Walkeri meetrikast:

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\dot{R}^2}{R^2}$$

kuid konstandi  $k$  võime jätta üldse arvestamata, kuna Universumi paisumine ei sõltu tegelikult Robertson-Walkeri meetrikast tuntud Universumi aegruumi kõverusega. Seda me tõestasime juba eespool. Tulemuseks saame järgmiselt:

$$1 - \frac{\rho}{\rho_{kr}} = \frac{R^2}{r^2}$$

ehk

$$\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_{kr}}} = \frac{R}{r}$$

Viimase võrrandi võime välja kirjutada ka niimoodi ( mis tegelikult oleks õigem kuju ):

$$1 - \frac{R^2}{r^2} = \frac{\rho}{\rho_{kr}}$$

ehk

$$\rho = \frac{\rho}{1 - \frac{R^2}{r^2}}$$

Saadud Universumi tiheduse muutumise võrrandit saame teisendada järgmiselt:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R^2}{r^2}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{(vt)^2}{(vt)^2}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{v^2 t^2}{v^2 t^2}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{v^2}{v^2}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{r}}$$

Sellist avaldist:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{r}}$$

ei olnud võimalik tuletada matemaatiliselt:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{R^2}{R^2} = \frac{R * R}{R * R} = \frac{R}{R} \rightarrow \frac{R}{r}$$

milles

$$\frac{R}{R} \neq \frac{R}{r}$$

ehk

$$\frac{R^2}{r^2} \neq \frac{R}{r}$$

Selline tuletus oli võimalik ainult füüsikalise analüüsi teel. Saadud võrrandit on võimalik tuletada ka teistmoodi, mida me veidi hiljem esitamegi. Selline võrrand on aluseks kogu edasiseks analüüsiks. See näitab Universumi tiheduse  $\rho$  seost Universumi ruumalaga  $r$ , mis on ajas muutuvad. Antud juhul ei pea enam arvestama Universumi kriitilise tiheduse definitsiooniga, sellest ka alaindeksite puudumine Universumi tiheduse võrrandis.

Kuid nüüd näitame seda, et viimast avaldist on võimalik tuletada otse kosmoloogia põhivõrrandist, mida me kohe järgnevalt hakkamegi teostama. Esiteks edasiseks analüüsiks teeme alguses nii,

et eespool tuletatud kosmoloogia põhivõrrandis

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

võrduks H nulliga:

$$-\frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

Kirjutame massi M asemele Universumi aine ja energia tiheduse:

$$\frac{G4\pi R^3}{R^3 3} \rho = \frac{c^2}{2}$$

ja teostame mõned lihtsad matemaatilised teisendused, tulemuseks saame:

$$\frac{8\pi G}{3} \rho = c^2$$

Viimasest seosest saame avaldada Universumi tiheduse võrrandi:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3c^2}{8\pi G}$$

Jätame selle meelde ja edasiseks analüüsiks paneme hoopis konstandi c kosmoloogia põhivõrrandis:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = -\frac{c^2}{2}$$

võrduma nulliga, tulemuseks saame:

$$\frac{H^2}{2} - \frac{GM}{R^3} = 0$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

milles Hubble'i seadus on  $v = HR$  ja M on Universumi tihedus. Sellest tulenevalt saame võrrandi:

$$\frac{H^2 R^2}{2} = \frac{4\pi G R^3}{3R} \rho_0$$

milles me näeme seda, et konstant  $8\pi G$  võrdub:

$$\frac{H^2 R^2 3R}{R^3 \rho_0} = 8\pi G = \frac{H^2}{\rho_0} 3$$

ehk

$$8\pi G = \frac{H^2 3}{\rho_0}$$

Kuna eespool saime  $8\pi G$  võrduse järgmiselt:

$$\frac{3c^2}{\rho} = 8\pi G$$

siis sellest tulenevalt saame väga olulise võrduse:

$$\frac{3c^2}{\rho} = \frac{H^2 3}{\rho_0}$$

milles on näha seda, et Universumi aine ja energia tihedus  $\rho$  sõltub  $y$  kordajast:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{c^2}{H^2} = y^2$$

ehk

$$\rho = y^2 \rho_0$$

Kuna kordaja  $y^2$  avaldub:

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}}$$

siis seega võime Universumi tiheduse  $\rho$  võrrandi välja kirjutada järgmiselt:

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0$$

Saadud viimase võrrandi analüüs kattub eespool kosmoloogia põhivõrrandist tuletatud Universumi lokaalsete piirkondade evolutsiooni ühe võrrandiga:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3Hdt$$

Näiteks kui viimases võrrandis võrdub Universumi tihedus  $\rho$  nulliga, siis Universumi paisumiskiirus  $H$  on lõpmatu. Sellisel juhul on tegemist Universumi punktsingulaarsusega. Kui aga  $\rho = \infty$ , siis Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdub nulliga ja sellisel juhul on meil tegemist Universumi pingsingulaarsusega. Kui aga  $\rho = \text{dp}$ , siis Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdub mingisuguse konstandiga. Eespool olevast analüüsist teame, et selleks konstandiks on valguse kiirus  $c$ . Kordaja  $y^2$  avaldises:

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}}$$

oleva raadiuste suhte  $\frac{R}{r}$  on võimalik avaldada ka tiheduste suhtena  $\frac{\rho_0}{\rho}$ . Selleks avaldame esiteks raadiuse  $R$  kera ruumala  $V_0$  kaudu:

$$V_0 = \frac{4\pi R^3}{3}$$

ehk

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}$$

Niisamuti ka raadius  $r$  avaldub kera ruumala  $V$  kaudu:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Sellest tulenevalt saame raadiuste suhte  $\frac{R}{r}$  matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{3V_0}{4\pi}}{\frac{3V}{4\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{12\pi V_0}{12\pi V}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \sqrt[3]{V_0}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \sqrt[3]{V}} = \frac{\sqrt[3]{V_0}}{\sqrt[3]{V}} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{V}}$$

Kuna ruumala  $V$  on tihedusega  $\rho$  seotud järgmiselt:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

ehk

$$V = \frac{M}{\rho}$$

siis saamegi raadiuste suhte  $\frac{R}{r}$  asemele kirjutada tiheduste suhte seose:

$$\frac{R}{r} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{V}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{M}{\rho}}{\frac{M}{\rho_0}}} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

Seega kordaja  $y^2$  avaldub järgmiselt:

$$y^2 = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}}$$

Sellest tulenevalt saame Universumi aine ja energia tiheduse  $\rho$  võrrandi

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0$$

ümber teisendada järgmiselt. Esiteks võrrandis oleva

$$1 - \frac{R}{r} = \frac{\rho_0}{\rho}$$

raadiuste suhte asemele võime kirjutada tiheduste suhte seose:

$$\frac{R}{r} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

millest omakorda saame:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{R^3}{r^3}$$

Sellest tulenevalt saame Universumi tiheduse võrrandist tuletada järgmise väga olulise võrrandi:

$$r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3$$

Kindlasti on oluline märkida siinkohal seda, et viimast võrrandit on osaliselt võimalik matemaatilisel tuletada ka teisiti. Näiteks kui me  $y^2$  kordaja võrrandis

$$y^2 = \left(\frac{t}{t}\right)^2 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}}$$

viime ühega jagatise ja kordaja  $y^2$  teisele poole võrdusmärgi, siis saame

$$\frac{1}{y^2} = 1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

Järgnevalt arvestame sellega, et kordaja  $y^2$  avaldub ka seosena

$$y^2 = \frac{c^2}{v^2}$$

ning kui me teostame mõningaid lihtsamaid matemaatilisi teisendusi, siis saame järgnevalt

$$\sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}} = 1 - \frac{1}{y^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

ehk

$$\sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

Arvestades eespool tuletatud seoseid

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{R}{r} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

saamegi matemaatilisel tuletada võrrandi

$$r = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R$$

mis erineb eelmisest ainult selle poolest, et raadiused ei ole seekord kuubis. Kuid sellegipoolest jääb füüsikaline sisu mõlemal võrrandil samasuguseks. Koos viimase saadud võrrandi  $r^3$  ja Universumi tiheduse  $\rho$  võrrandiga:

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0$$

saamegi võrrandite süsteemi

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0 \\ r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3 \end{cases}$$

mis tegelikult kirjeldabki just sellist juhtu, mille korral Universumi ruumala on lõpmata suur, kuid sellegipoolest muutub selle aine ja energia tihedus ajas väiksemaks. Selle analüüs seisneb lühidalt järgnevas. Näiteks eelnevalt tuletatud võrrandite süsteemis olevat kaks võrrandit on omavahel füüsikaliselt identsed, kuid ainult  $y^2$  kordaja väärtused on erinevad. Näiteks kui Universumi tiheduse  $\rho$  võrrandis

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0$$

on Universumi ruumala lõpmata väike ehk tegemist on punktsingulaarsusega  $r = 0$ , siis Universumi tihedus  $\rho$  on samuti null. See on loogiline, kuna punktsingulaarsuse korral pole enam olemas aega ega ruumi ja seega ka materiat. Kuid Universumi pindsingulaarsuse korral  $r = R$  võrdub Universumi tihedus lõpmatusega  $\rho = \infty$ , mille korral on ka Universumi kosmoloogiline aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni. Kui Universum on paisunud lõpmata suureks ehk  $r = \infty$ , siis Universumi tihedus avaldub võrdusena  $\rho = \rho_0$ . Täpselt sama kehtib ka järgmise võrrandi puhul:

$$r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3$$

Näiteks kui viimases võrrandis on Universumi tihedus  $\rho$  null, siis saame Universumi ruumalaks samuti nulli ehk  $r^3 = 0$ . Kui aga võrrandis kehtib võrdus  $\rho = \rho_0$ , siis on Universum paisunud lõpmata suureks ehk  $r^3 = \infty$ . See analüüs tõestab, et viimane võrrand on Universumi tiheduse võrrandiga füüsikaliselt tõepoolest identsed. Kuid ainus erinevus seisneb kordaja  $y^2$  väärtuses. Näiteks kui Universumi tiheduse  $\rho$  valemis:

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0$$

on  $r = R$  ehk tegemist on Universumi pindsingulaarsusega, siis kordaja  $y^2$  väärtus on lõpmatu ehk  $y = \infty$ :

$$\frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y^2 = \frac{c^2}{H^2} = \infty$$

See tähendab seda, et kui kordaja  $y^2$  võrdub lõpmatusega, siis on tegemist Universumi pindsingulaarsusega ja Universumi paisumiskiirus  $H$  on sellisel juhul null. Küsimus on selles, et millega võrdub siis  $r = R$ ? Selle teada saamiseks peamegi pöörduma võrrandite süsteemi teise võrrandi poole:

$$r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3$$

Viimase võrrandi  $y^2$  kordaja peab sellisel juhul samuti võrduma lõpmatusega:

$$\frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y^2 = \frac{c^2}{H^2} = \infty$$

See tähendab seda, et  $\rho = \rho_0$  korral saame  $r^3 = R^3 = \infty$  ehk Universumi ruumala on lõpmata suur. Sellisel korral on Universumi pindsingulaarsus lõpmata suur, aine ja energia tihedus samuti lõpmata suur  $\rho = \rho_0 = \infty$  ning Universumi paisumiskiirus võrdus nulliga ehk  $H = 0$ . Kui aga tiheduse võrrandis

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0$$

on Universum paisunud lõpmata suureks ehk  $r = \infty$ , siis saame  $y^2$  kordajaks ühe ehk  $y = 1$ . See tähendab seda, et kui kordaja  $y^2$  on üks, siis on Universum paisunud pindsingulaarsusest „lõpmata suureks“ ja Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdub valguse kiirusega  $c$ . Küsimus on nüüd selles, et millega võrdub siis  $\rho = \rho_0$ ? Selle teada saamiseks peamegi pöörduma taas teise võrrandi poole:

$$r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3$$

Viimase võrrandi  $y^2$  kordaja peab samuti võrduma ühega. Sellisel juhul on ainuvõimalik see, et Universumi tihedus võrdub nulliga ehk  $\rho = \rho_0 = 0$ , siis saamegi  $y^2$  väärtuseks ühe. Universumi tiheduse võrrandist saime omakorda, et  $r^3 = R^3 = \infty$  ehk Universumi ruumala on lõpmata suur. Lõppkokkuvõttes tähendab see seda, et Universum on paisunud pindsingulaarsusest lõpmata suureks lõpmata kauges tulevikus, mis avaldub Universumi aine ja energia tiheduse puudumises ehk  $\rho = \rho_0 = 0$  ning Universumi paisumiskiirus võrdub valguse kiirusega vaakumis ehk  $H = c$ .

Kuna Universumi paisumise alghetkel oli selle aine-energia tihedus ülisuur, siis sellisel suhteliselt väga lühikesel kosmoloogilisel ajaperioodil oli määravaks ka Universumi rõhk. Universumi rõhk  $p$  oli esimest korda esitatud Friedmanni esimeses võrrandis:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

Järgnevas analüüsiks arvestame ainult võrrandi teist poolt:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \rho = -\frac{4\pi G a}{3} \frac{3p}{c^2} = -\frac{4\pi G a}{c^2} p$$

milles  $p$  ongi Universumi rõhk. Viimasest võrrandist saame ka Hubble'i konstandi  $H$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2} = -\frac{4\pi G}{c^2} p$$

ehk

$$-\frac{H^2}{2} = -\frac{4\pi G}{c^2} p$$

mis näitabki seda, et Universumi paisumine sõltus ka Universumi aine-energia rõhust. Korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$-\frac{2H^2}{2} = -\frac{8\pi G}{c^2} p$$

kuna eespool saime tuletada võrduse:

$$8\pi G = \frac{c^2}{\rho} 3$$

Kui viime  $c^2$  teisele poole võrdusmärgi, siis saame seose:

$$\frac{8\pi G}{c^2} = \frac{3}{\rho}$$

Friedmanni võrrandis oli Universumi rõhk  $p$  ja tihedus  $\rho$  omavahel seotud järgmiselt:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

millest omakorda saame  $c^2$  võrduse:

$$\frac{p3}{\rho} = c^2$$

Arvestades viimaseid lihtsaid seoseid, saame tuletada järgmise tuntud võrrandi:

$$-\frac{2H^2}{2} = -H^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} p = -\frac{3}{\rho} p = -c^2$$

ehk

$$-H^2 = -c^2$$

milles on näha seda, et  $H = c$ . Universumi rõhu võrrandi füüsikaline ja matemaatiline analüüs näitab seda, et kosmoloogias taanduvad kõik põhivõrrandid sellele, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ .

Ajalooliselt on huvitav märkida seda, et sellise tõukejõu olemasolu, mille ilmnemine avaldub alles kehade vahekauguste suurenemisel, on kosmoloogilistes arvutustes varem tõlgendatud „tume energiana“. Kuid sellist „tume energia“ olemust on tõlgendatud eelkõige just vaakumi energiana, mis loobki sellise tuntud tõukejõu. Näiteks arvutatakse see välja järgmiselt. Kasutades Poissoni võrrandit, saab kirja panna gravitatsioonilise potentsiaali kujul:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) = 4\pi G \rho (1 + 3\omega),$$

milles rõhk näitab samuti gravitatsioonijõu allikat ja tihedus  $\rho$  ning rõhk  $p$  avalduvad vastavalt

$$\rho = \rho_A + \rho_\Lambda$$

$$p = p_A + p_\Lambda$$

kus  $p$  on rõhk ja  $\rho$  on tihedus ning vastavalt nende  $A$  indeksid näitavad tavalise aine, energia ja tumeaine kogutihedust (kogurõhku). Võrrand kirjeldab gravitatsioonile alluvat ainet. Kui me aga võtame

$$p_A = 0$$

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$$

milles

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$



siis saame esimesest võrrandist järgmise avaldise

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_M - \Lambda c^2$$

Eeldusel, et „vaakumi energia“ on väga suur

$$\Lambda c^2 \gg 4\pi G \rho_A$$

saame

$$\Phi_\lambda = -\frac{\Lambda c^2}{6} r^2$$

ja seega massile mõjub jõud

$$\vec{g}_r = -\vec{\nabla} \Phi_\lambda = \frac{\Lambda c^2}{3} \vec{r}.$$

Viimasest võrrandist ilmnebki tõukejõud, mis suureneb kehadevahelise kauguse suurenemisega. See tähendab seda, et vaakumi energia põhjustab tõukejõu, mis hakkab eriti hästi ilmnema just väga väga suures ruumi mastaabis. Matemaatiliselt ja füüsikaliselt erineb selline tõlgendus väga palju eespool kirjeldatud Universumi tume energia olemusest, mille korral teisenevad aeg ja ruum üle kogu Universumi.

#### 1.2.7.3.4 Universumi punkt- ja pindsingulaarsus

Eelnevalt saadud Universumi tiheduse võrrand:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{r}}$$

näitab Universumi aine-energia tiheduse ja ruumala suhet. Näiteks kui Universumi ruumala võrdub nulliga:  $r = 0$ , siis Universumi aine-energia tihedus võrdub samuti nulliga:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{0}} = \frac{\rho_0}{1 - \infty} = \frac{\rho_0}{-\infty} = \frac{\rho_0}{-1} \frac{1}{\infty} = \frac{\rho_0}{-1} * 0 = 0$$

Sellisel juhul on tegemist Universumi punktisingulaarsusega ehk algsingulaarsusega, mille korral puuduvad Universumil aja ja ruumi mõõtmised. Seetõttu ei eksisteeri ka materiat, kuna aegruum ja materia on omavahel lahutamatult seotud nagu seda on aeg ja ruum ise. Universumi  $y$ -faktori muutumisseadusest:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{t'^2}{t^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y^2 = \frac{c^2}{H^2} = 0$$

saame Universumi paisumiskiiruseks lõpmata suure väärtuse  $H = \infty$  ja seda Universumi

punktsingulaarsuse korral.

Sellisel juhul aega ja ruumi ning ka materiat tegelikult ei eksisteerinudki. Kuid Universumi paisumiskiirus  $H$  oli lõpmata suur:

$$H = v = \infty$$

mida on võimalik füüsiliselt tõlgendada ka Universumi „inflatsioonilise paisumisenä“, mille tagajärjel paisus Universum lõpmata suureks kõigest 0 sekundiga.

Universumi mõõtmised olid punktsingulaarsuse korral lõpmata väikesed. Kuna Universumi mõõtmised olid lõpmata väikesed, siis võib eeldada või oletada seda, et Universumi algsingulaarsust on võimalik kirjeldada mingisuguste kvantmehaaniliste seaduspärasustega. Sellise „kvantkosmoloogia“ õpetuse järele pole tegelikult vajadust, kuna Universum paisus algsingulaarsuse korral lõpmata suure kiirusega. See tähendab seda, et Universum „eksisteeris“ algsingulaarsuse „olekuna“ lõpmata väikese ajaperioodi jooksul ja seetõttu ei avaldanud kvantmehaanilised seaduspärasused mitte mingit mõju. Seega vajadus kvantkosmoloogia õpetuse järele antud kontekstis tegelikult puudub. Kuna Universumi paisumiskiirus võrdus lõpmatusega, siis peab Universumi ruumala olema praegusel ajahetkel lõpmatult suure ulatusega ( ehk galaktikaid peaks Universumis olema lõpmata hulk ). Universumi algsingulaarsuse korral võrdus Universumi aine-energia tihedus nulliga, mis ei ole tegelikult väga vastuoluline. Seda seetõttu, et Universumi algsingulaarsuse korral ei olnud materiat „veel“ olemas, niisamuti ka aega ega ruumi polnud olemas. Selle mudeli järgi „tekkis“ kogu Universumi materia pärast Universumi inflatsioonilist paisumist ( mis kestis lõpmata väikese ajaperioodi jooksul ) või kuidagi selle „käigus“.

Kuna Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse  $l$ “ skaalast alates:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

siis õigem oleks eeldada, et reaalne Universum ei saanud tegelikult alguse lõpmata väikesest ruumalast ehk punktist, vaid hoopis läbimõõdust, mis vastab Plancki pikkusele  $10^{-35}$  m. Plancki pikkuse läbimõõduga Universumisse ei mahuks absoluutselt mitte ükski teadaolev osake. Samasugune põhimõtte kehtib tegelikult ka Universumi vanuse kohta, mille korral Universumi eksisteerimise aeg ei hakka „käima“ 0 sekundist, vaid hoopis ajahetkest, mis vastab „Plancki ajale“  $t$ :

$$t = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

See tähendab seda, et Universumi ruumala vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} \text{ m}$$

ja eksisteerimise aeg vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} \text{ s}$$

ei ole füüsiliselt absoluutselt mõtet, küll aga omab matemaatilist mõtet. See viib järelduseni, et Universum paisus  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga „ruumalalt“ lõpmata suureks kõigest 0 sekundiga ja Universumi eksisteerimise aeg ehk „Universumi kell hakkas käima“ alates  $10^{-44}$  sekundist, mitte aga 0 sekundist.

Sellest tulenevalt võib põhimõtteliselt mõista, et näiteks  $10^{-35}$  meetri pikkusega „ruumilõik“ on põhimõtteliselt sama mis 0 meetri pikkusega „ruumilõik“. Need on põhimõtteliselt füüsiliselt samaväärsed. Sama on näiteks ka ajaperioodiga. Näiteks kui mingi protsess võtab aega  $10^{-44}$  sekundit, siis on see põhimõtteliselt samaväärne

0 sekundi kestvuse protsessiga.

Punktil endal ei ole mõõtmeid ehk see on lõpmata väike. Kuid punkti, mille “mõõtmed” võrduvad  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga kera “ruumalaga”, võib põhimõtteliselt nimetada “Plancki punktiks”. See tähendab, et Plancki punkti läbimõõt vastab Plancki pikkusele  $l$ .

Kui Universum on paisunud lõpmata suureks  $r = \infty$ :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{\infty}} = \frac{\rho_0}{1 - 0} = \rho$$

siis millega võrdub Universumi tihedus:  $\rho = ?$  Sellele leiame vastuse eespool tuletatud kosmoloogilise konstandi  $\Lambda$  võrdusest:

$$-\frac{8\pi G}{c^2}\rho = +\Lambda$$

ehk

$$-\frac{8\pi G}{c^2}\rho = +\Lambda = -\frac{3}{R^2}$$

Näiteks kui Universumi ruumala on paisunud lõpmata suureks:  $R = \infty$ , siis Universumi aine-energia tihedus võrdub nulliga:  $\rho = 0$ . Sellisel juhul võrdub Universumi  $y$ -faktor ühega:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{t'^2}{t^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y^2 = \frac{c^2}{H^2} = 1$$

mistõttu paisub Universum valguse kiirusega:  $H = c$ . See tähendab seda, et Universumi paisumiskiirus ajas suureneb ehk läheneb valguse kiirusele  $c$ , kuid Universumi aine-energia tihedus ajas väheneb ehk läheneb nullile. Kuid Universumi pingsingulaarsuse korral võrdub Universumi tihedus lõpmatusega:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{R}{R}} = \frac{\rho_0}{1 - 1} = \frac{1}{0}\rho_0 = \infty$$

Kui suur oli sellisel korral Universumi ruumala:  $r = R = ?$  Sellele leiame vastuse samuti eespool tuletatud Friedmanni võrdusest:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

ehk

$$\Lambda = 3 \frac{H^2}{c^2} = \frac{3}{y^2}$$

Kuna kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  on seotud Universumi ruumalaga  $R$ :

$$-\frac{3}{R^2} = 3 \frac{H^2}{c^2} = \frac{3}{y^2}$$

ja Universumi  $y$ -faktor võrdub lõpmatusega:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{t'^2}{t^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y^2 = \frac{c^2}{H^2} = \infty$$

siis saame Universumi pindsingulaarsuse korral Universumi paisumiskiiruseks nulli  $H = 0$ , Universumi ruumalaks lõpmata suure väärtuse  $R = \infty$  ja tiheduseks samuti lõpmatu  $\rho = \infty$ . Universumi pindsingulaarsus tekkis Universumi punktisngulaarsusest.

Universumi ruumala  $V$  on tegelikult lõpmatult suur ja seega galaktikaid  $M$  on Universumis lõputu hulk, kuid Universumi aine-energia tihedus  $\rho$  saab sellegipoolest ajas muutuda. See tuleneb sellest, et kosmoloogias peame arvestama sellega, et masside vahel esineb gravitatsioon ehk kehade vaheline ruum on tegelikult kõver, mitte enam tasane. Eespool me tõdesime, et Universumi paisumine avaldub gravitatsioonis. Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverdus ja gravitatsioonivälja tsentris on aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni. Universumi paisumine avaldubki selles, et aegruumi lõpmatu kõverus muutub aja jooksul täiesti tasaseks ehk gravitatsioon lakkab eksisteerimast ( s.t. tõmbejõud asendub tõukejõuga ). See võtab väga kaua aega ja see põhjustab Universumi paisumist ehk Universumi ruumala näilist suurenemist ajas ehkki tegelikult on Universumi ruumala lõpmatult suur.

Universumi soojussurma teooria järgi on umbes ca  $10^{100}$  aasta pärast kõik Universumi tähed muutunud mustadeks aukudeks oma termotuumakütuse varude ammendamise tõttu. Mustad augud on omakorda aurustunud ja lagunened on ka kõik „rasked“ elementaarosakesed Universumis. Nende asemele on jäänud selline „gaas“, mis koosneb ainult kergetest osakestest nagu näiteks footonitest, elektronidest, positronidest, neutriinodest jm. See „gaas“ on niivõrd hõre, et see on võrreldav sellega, kui kogu praeguse Universumi horisondi sisse jääv ruumala korrutada  $10^{185}$  korda suuremaks, siis saame sellise ruumala, mille sisse jääb ainult üks osake.

Tekib küsimus, et kui Universum on lõpmata suure ruumalaga, siis kuidas saab aine-energia tihedus olla samuti lõpmata suure väärtusega? Sellele küsimusele leiame vastuse klassikalise tiheduse avaldisest:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{E}{V c^2} = \infty$$

milles esineb erirelatiivsusteooriast tuntud seisenergia võrrand:

$$E = mc^2$$

Seisenergia võrrand on tegelikult tuletatav ka Hubble-i konstantide  $H$  seosest:

$$\dot{H} = \frac{H^2}{2} - H^2$$

Näiteks kui Universum paisub valguse kiirusega:  $H = c$ , siis saadaksegi seisenergia avaldis:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Kuid antud juhul ehk Universumi pindsingulaarsuse korral võrdub Universumi paisumiskiirus nulliga:  $H = 0$  ja seetõttu ilmnebki lõpmata suur matemaatiline väärtus:

$$\frac{E}{c^2} = \frac{E}{0} = M = \infty$$

ehk

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{E}{V c^2} = \frac{E}{V 0} = \infty$$

Juba Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala lõpmata suur:  $R = \infty$ . Viimases tiheduse võrrandis on arvestatud Universumi ruumalaga, mis võrdub lõpmatusega. Kuna lõpmata suurde Universumisse “mahub” ka lõpmata palju energiat-massi, siis saame “tuletada” ka sellise tiheduse seose:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Küsimus on nüüd selles, et milline oli Universumi pindsingulaarsuse korral Universumi aine-energia tihedus ühe kuupmeetri kohta ( mitte enam Universumi ruumala suhtes )?

MÄRKUS: Eespool saime Universumi pindsingulaarsuse korral Universumi aine-energia tiheduseks lõpmata suure väärtuse:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{E}{V c^2} = \frac{E}{V 0} = \frac{\infty}{\infty 0} = \infty$$

kuna viimases võrrandis on Universumi paisumiskiirus  $c = H = 0$  ja Universumi ruumala on lõpmata suur. Kuna Universumi ruumala on lõpmata suur, siis seega massi/energiat on selles lõpmata palju. See annab meile massi tiheduseks:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Küsimus on nüüd selles, et milline oli Universumi pindsingulaarsuse korral Universumi aine-energia tihedus ühe kuupmeetri kohta:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{x}{1m^3}$$

mitte enam Universumi lõpmata suure ruumala suhtes.

Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ oli kogu Universumi ruumala lõpmata suur ( täpselt nii nagu tänapäevalgi ):  $r = \infty$  ja Universumi energia/massi tihedus oli samuti lõpmata suur:  $\rho = \infty$ . See viimane tähendab tegelikult seda, et mistahes Universumi ruumi punktis oli energia lõpliku suurusega  $x$ :  $E = x$ . Energiaväli tekkis seega Universumis koos aja ja ruumiga silmapilkselt ehk 0 sekundiga.

Füüsikaliselt tähendab see seda, et Universumis eksisteerib vaakumi asemel mateeria, antud juhul energiaväli. Selline energiaväli ei ole tsentraalsümmeetriline ehk sellel puudub ruumis allikas. Sellisel juhul täidab energiaväli ühtlaselt kogu Universumi (aeg)ruumi, mille korral ei eksisteeri vaakumit ehk „tühja ruumi“. Mateeria ( energiavälja ) eksisteerimiseks on vaja samuti aega ja ruumi täpselt nii nagu vaakumi eksisteerimiseks on vaja aega ja ruumi. Aja ja ruumi tekkimine põhjustas ürgse energiavälja eksisteerimise ehk aja ja ruumi tekkimisega kaasnes energiavälja kui mateeria eksisteerimine, kuna aine ja väli „võtab“ alati ruumi ja

nende eksisteerimiseks „kulub“ alati mingisugune ajaperiood.

Universumi aegruum ja mateeria on üksteisest lahutamatult seotud. Näiteks klassikalises füüsikas mõistetakse „ruumi“ kui „mateeria mahutit“. Mateeria põhivormideks on aine ja väli, kuid eksisteerimise põhivormideks ongi aeg ja ruum. Näiteks üldrelatiivsusteoorias tuuakse välja selline näide, et kui kõik kehad peaksid Universumist järsku ära kaduma, siis lakkaksid eksisteerimast ka aeg ja ruum. Ruum oleks „mateeria mahutiks“, kuid aeg oleks „mateeria eksisteerimiseks“. Mateeria põhivormideks on küll aine ja väli, kuid kvantväljadeteooria järgi eksisteerivad Universumis tegelikult ainult väljad.

Võib eeldada, et Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ eksisteerisid Plancki energia ja tihedus. See tähendab seda, et need ei võrduvad lõpmatusse nagu seni oli klassikaliselt arvatud. Näiteks Plancki massi väärtus on:

$$m = \sqrt{\frac{hc}{G}} = 2,176435 * 10^{-8} \text{ kg}$$

millest saamegi otsekohe kätte ka Plancki energia E avaldise:

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} = \frac{hc}{G}$$

mille väärtuseks on:

$$E = \sqrt{\frac{hc^5}{G}} \approx 1,956 * 10^9 \text{ J}$$

Universumi suurimat võimalikku temperatuuri ehk Plancki temperatuuri T:

$$E = kT = mc^2$$

saamegi tuletada läbi Plancki massi m ja Boltzmanni konstandi k:

$$T = \frac{mc^2}{k}$$

ehk

$$T^2 = \frac{m^2 c^4}{k^2} = \frac{hc}{G} \frac{c^4}{k^2}$$

mille väärtus on aga järgmine:

$$T = \sqrt{\frac{hc^5}{Gk^2}} \approx 1,416 * 10^{32} \text{ K}$$

Plancki massi ja Plancki pikkuse järgi saame tuletada ka Universumi massitiheduse suurima võimaliku väärtuse:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{m}{l^3} = \frac{c^5}{hG^2} = 5,155 * 10^{96} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

ja läbi selle ka suurima energiatiheduse väärtuse Universumis:

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{mc^2}{l^3} = \frac{c^7}{hG^2} = 4,633 * 10^{113} \frac{J}{m^3}$$

On alust arvata, et sellel „ürgsel energiaväljal“ olid kõik tuntud interaktsioonid Universumis liitunud üheks superjõuks, kuna aegruumi lõkspinnal on näiteks gravitatsioonijõud ja elektrijõud omavahel täiesti võrdsed:

1. Mustade aukude füüsikast tuntud aegruumi lõkspinna füüsikaline olemus kattub täielikult Universumi punkt- ja pindsingulaarsuse füüsikaga.
2. Aegruumi lõkspinnal ei eksisteeri enam aega ega ruumi, täpselt nii nagu Universumi punktsingulaarsuse korralgi, kuna Universumi mõõtmed olid siis lõpmata väikesed.
3. Kuna Universum paisus punktsingulaarsusest pindsingulaarsuseks lõpmata suure kiirusega ehk praktiliselt „silmapilkselt“, siis seega olid Universumi erinevad interaktsioonid liitunud üheks superjõuks ka Universumi pindsingulaarsuse korral.
4. Kuid Universumi pindsingulaarsuse korral eksisteeris Universumis juba ürgne energiaväli, mille korral ei olnud Universumis vaakumit. Sellest järeldub, et ka kõrgetel energiatel ühinevad omavahel erinevad interaktsioonid üheks jõuks.

Näiteks gravitatsioonijõud ja elektrijõud on aegruumi lõkspinnal omavahel täiesti võrdsed, kusjuures gravitatsiooniväli ei ole energiaväli. Aegruumi kõverus põhjustab gravitatsioonijõu olemasolu Universumis. Ülejäänud interaktsioonid on oma olemuselt energiaväljad. Aegruumi lõkspinna raadiust  $R$  kirjeldab tuntud Schwarzschildi raadiuse  $R$  vörrand:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \frac{E}{c^2} = \frac{2GE}{c^4} = \frac{2G}{c^4} E = \frac{2G}{c^4} \frac{q^2}{2C} = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

ehk

$$R = \frac{2G}{c^4} \frac{q^2}{2C}$$

mis esineb näiteks gravitatsioonilises aja dilatatsiooni valemis „aegruumi lõkspinna näitel“:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{t'^2}{t^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{R}} = y^2 = \frac{c^2}{H^2} = \infty$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

Eelviimasest nähtub „Plancki jõu  $F_p$  definitsioon“:

$$F_p = \frac{Gm^2}{r^2} = \frac{Gm^2}{\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2} = \frac{Gm^2 c^4}{G^2 m^2} = \frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} = 1,2 * 10^{44} N$$

Selle järgi on aegruumi lõkspinnal gravitatsioonijõud ja elektrijõud omavahel täiesti võrdsed:

$$F_g = G \frac{m^2}{R_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R_2^2} = F_{el}$$

milles esineb Schwarzschildi raadius:

$$R_1 = \frac{Gm}{c^2}$$

ja „Nordströmi raadius“:

$$R_2 = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Kuna „Plancki jõu“ võrrandis:

$$F_p = \frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2}$$

esineb  $c^4$  ja  $G$ , siis vastavalt seisuenergia ruudu seosele  $E^2 = m^2 c^4$  ja Newtoni gravitatsioonijõule  $F = \frac{Gm^2}{r^2}$  saame võrrandit matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$F_p = \frac{c^4}{G} = \frac{E^2}{m^2} \frac{m^2}{Fr^2}$$

Tulemuseks saamegi elektrijõu ja gravitatsioonijõu täieliku võrduse:

$$F^2 = \frac{E^2}{r^2} = F^2$$

ehk  $F = F$ .

Ürgne energiaväli ei olnud tsentraalsümmeetriline ehk ürgsel energiaväljal puudus ruumis allikas. Energiaväli täitis ühtlaselt kogu Universumi aegruumi, mis oli lõpmata ulatusega ja lõpmata suure energiaga. Sellest tulenevalt oli lõpmata suures Universumis massi/energiat samuti lõpmatult palju. Kogu Universumi aegruumi täitev „potentsiaalne“ energiaväli omas energiat ja massi vastavalt seisuenergia valemile:

$$E = mc^2$$

Seda võib mõista kineetilise energia „definiitsioonina“. See tähendab seda, et Universum paisub ajas tegelikult valguse kiirusega ja seetõttu on kõikidel kehal Universumis kineetiline energia, mis antud juhul avaldubki seisuenergia valemiga. Seetõttu on seisuenergia võrrand tegelikult tuletatav Hubble-i konstantide  $H$  seosest:

$$\dot{H} = \frac{H^2}{2} - H^2$$

Näiteks kui Universum paisub valguse kiirusega:  $H = c$ , siis saadaksegi seisuenergia avaldis:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Kuid see viimane võrrand avaldub ka järgmiselt:



$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

millest omakorda on võimalik tuletada väljapotsentsiaali võrrandi:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Viimane on matemaatiliselt tuletatav ka diferentsiaalvõrrandist:

$$\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 = 0$$

mis kirjeldab välja potentsiaalset energiat  $V$  skalaarse välja lagranžiaani  $L$  võrrandis:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$$

$\mu$  on energiavälja mass või energiavälja osakese mass ja  $\lambda$  on „teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp )“, mis ei ole mõõdetav. Kuna  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ , siis seega on energiavälja potentsiaalil  $\phi$  kaks minimaalset väärtust:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

mida me näeme ka lagranžiaani  $L$  võrrandit kirjeldaval joonisel:

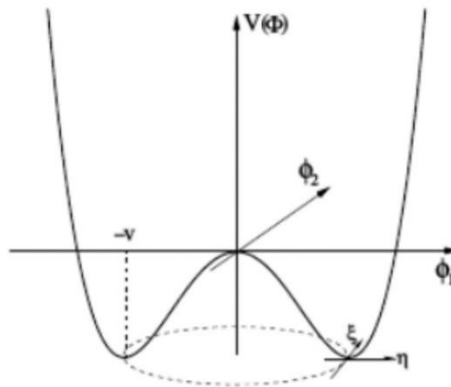


Foto allikas: [https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking\\_fig1\\_330116851](https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking_fig1_330116851)

Jooniselt me näeme, et energiavälja potentsiaalse energia  $V$  maksimaalne väärtus ulatub lõpmatusse, mis langeb väga täpselt kokku Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ eksisteeriva ürgse energiavälja potentsiaalse energiaga, mille väärtus oli samuti lõpmata suur. Vaakumit sellisel „ajal“ ei eksisteerinud.

Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ võrdus Universumi paisumiskiirus nulliga ehk  $H = 0$ . Kuna praegusel ajal domineeriv Universumi paisumise kiirenemine sai tegelikult „alguse“ just pindsingulaarsusest, siis seega Universumi paisumiskiiruse algkiirus oligi  $0 \text{ m/s}$  ( ehk  $H = 0$  ) ja

selline „hetkkiirus“ kestis 0 sekundit. Kiirenduse hetkkiirus kestab 0 sekundit, kuna üks hetk on väikseim ajaperiood. Sellisel juhul omas ürgne energiaväli ainult potentsiaalset energiat. Kui aga Universumi paisumiskiirus ei võrdu enam nulliga:

$$H \neq 0$$

siis seega omas energiaväli sellisel juhul ainult kineetilist energiat:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

mille väärtus oli lõpmata suur. Enne seda oli ürgse energiavälja potentsiaalne energia lõpmata suur. Vaakumit sellisel korral ei eksisteerinud. Ürgse energiavälja potentsiaal  $\phi$  langes nulli ( ehk väikseimasse olekusse ) ja seda just välja potentsiaalse energia muundumise tõttu kineetiliseks energiaks. Kuid Universumit täitva energiavälja koguenergia jääb igaljuhul samasuguseks.

Universumi kosmoloogilise paisumise tõttu tekkis ürgsel energiaväljal potentsiaalse energia asemele nüüd hoopis kineetiline energia. Potentsiaalse energia eksponentsiaalse languse tõttu tekkiski Universumis vaakum ja tänapäeval tuntud Higgsi väli koos kogu meie tajutava materiaalse maailmaga, millesse tegelikult läkski kogu kineetiline energia.

Kusjuures vaakumi eksisteerimiseks on vaja samuti aega ja ruumi täpselt nii nagu energiavälja eksisteerimiseks on vaja aega ja ruumi. Aja ja ruumi tekkimine põhjustas ürgse energiavälja eksisteerimise ehk aja ja ruumi tekkimisega kaasnes energiavälja kui aine eksisteerimine, kuna aine ja väli „võtab“ alati ruumi ja nende eksisteerimiseks „kulub“ alati mingisugune ajaperiood.

Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi paisumiskiirus võrdne nulliga:  $H = 0$ . Kuna Universumi paisumiskiirus ei saa tegelikult võrduda nulliga ehk Universum hakkas kohe uuesti paisuma, siis selline võrdus „muutus“ mitte-võrduseks (  $H \neq 0$  ) „hüppeliselt“ ehk kõigest 0 sekundiga.

Näiteks kui kivi maa pinnalt üles visata, kukub ta varsti tagasi ja maandumisel on kiirus viskamise suunaga vastupidine. Üles viskamisel on kivi liikumine aeglenev, kuid langemisel on see kiirenev. Lennu kõrgeimas punktis kivi hetkeks peatub. Sellisel juhul on kivi liikumiskiirus võrdne nulliga:  $v = 0$ . Kuna kivi liikumiskiirus ei saa tegelikult võrduda nulliga ehk üles visatud kivi ei saa jääda õhku seisma, siis selline võrdus „muutub“ mitte-võrduseks (  $v \neq 0$  ) „hüppeliselt“ ehk kõigest 0 sekundiga.

Kui mingi protsess võtab aega  $10^{-44}$  sekundit, siis on see põhimõtteliselt samaväärne 0 sekundi kestvuse protsessiga.

Sellest võiks järeldada, et ürgse energiavälja potentsiaalne energia  $V$  pidi muutuma kineetiliseks energiaks samuti hüppeliselt ehk kõigest 0 sekundiga. Kuid kuna ürgne energiaväli omab energiat ja massi vastavalt valemile:

$$E = mc^2$$

siis peab see siiski alluma relatiivsusteooria seadustele, mis tähendab seda, et energiavälja potentsiaalne energia ei saanud langeda 0 sekundiga, vaid selleks pidi siiski kuluma mingisugune ajaperiood. See tähendab, et siin peab arvestama kiiruse piiranguga, milleks on meile tuntud valguse kiirus  $c$  vaakumis:

$$c = \frac{l}{t} \approx 3 * 10^8 \text{ m/s}$$

Selle järgi läbib valgus ruumis ühe meetrise vahemaa järgmise ajaperioodi  $t$  jooksul:

$$t = \frac{l}{c} = \frac{1(m)}{3 * 10^8(\frac{m}{s})} = 3,33 * 10^{-9} s \approx 10^{-9} s$$

ehk

$$t \rightarrow 10^{-44} s \dots 10^{-9} s$$

Sellest tulenevalt võib mõista, et ka energiavälja potentsiaalse energia langemine „võtab“ ligikaudu sama palju aega.

Kui Universumi temperatuur oli kõrgem kui  $10^{27}$  K, siis arvatakse, et sellisel juhul eksisteeris universaalne vastastikmõju ( nn „Supergravitatsioon“ ), milles sisaldasid „potentsiaalselt“ kõik tänapäeval teadaolevad interaktsioonid: gravitatsiooniline, tugev, nõrk ja elektromagnetiline interaktsioon. Arvatakse, et sellise temperatuuri juures eraldub gravitatsiooniline vastastikmõju nn Suurest Ühendusest, mille tulemusena oli gravitatsioon vastastikmõjudest olemas esimesena. Suur Ühendus ühendab omavahel tugevat, nõrka ja elektromagnetilist interaktsiooni.

Oletatakse, et gravitatsiooni eraldumine Suurest Ühendväljast toimub temperatuuril:

$$T_{SUT} \sim 10^{29} K$$

ja see vastab ka Higgsi energiale. Näiteks sellele vastav energia on järgmine:

$$E_{SUT} \sim 10^{16} GeV$$

Kuna kvantväljateoorias on pikkusühik ja energia seotud järgmiselt:

$$hc = 1,97 * 10^{-16} GeV * m$$

siis vaakumi energiatihedus tuleb seega:

$$\rho_{\Lambda} c^2 = \frac{E_{SUT}}{(hc)^3} \approx 10^{100} \frac{J}{m^3}$$

Kui Universumi temperatuur oli kõrgem kui  $10^{15}$  K, siis arvatakse, et sellisel juhul tekib Universumis aine ja antiaine asümmeetria ning sellisel temperatuuril laguneb Suur Ühendus elektronõrgaks vastastikmõjuks ja tugevaks ( värvi ) vastastikmõjuks.

Tuletame meelde, et seisuenergia E avaldisest:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

saab tuletada omakorda skalaarbosoni massi m võrrandi:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

mis kirjeldab Higgsi bosonit ehk Higgsi välja osakest. See tähendab seda, et Higgsi väli ( ja koos sellega ka sümmeetria spontaane rikkumine ) on otseselt tuletatavad eespool tuletatud energia E võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

millest omakorda järeldub see, et seisuenergia E võrrandist peab olema võimalik tuletada ka kõik

teised interaktsiooni liigid, mis Universumis üldse eksisteerivad. See tähendab seda, et seisuenergia  $E$  avaldis määrab ära kogu meie materiaalse maailma struktuuri ehk võimalike interaktsioonide paljususe ja erinevuse kogu Universumis.

Kui me defineerisime potentsiaali  $\phi$  reaali- ja imaginaarosade asemele kaks uut välja, mis on mõlemad reaalsed ja mille minimaalne potentsiaal võrdub nulliga ehk vaakumolekuga, siis sellisel juhul kattus üks reaalne väli Higgsi väljaga, kuid teine reaalne väli ongi juba seotud elektromagnetilise, nõrga ja tugeva interaktsiooniga, mis moodustavad kõik korraga kogu meie materiaalse maailma ehituse ja funktsioneerimise.

Eelnevalt me nägime, et seisuenergia avaldis

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

tuleneb otseselt aja ja ruumi eksisteerimisest, mis väljendub Universumi kosmoloogilise paisumisenä. Energia ja mass on seotud materiaga ( s.t. aine ja väljaga ). Seisuenergia  $E$  võrrandist on võimalik tuletada kõik interaktsiooni liigid, mis Universumis üldse eksisteerivad. See tähendab seda, et seisuenergia  $E$  avaldis määrab ära kogu meie materiaalse maailma struktuuri ehk võimalike interaktsioonide paljususe ja erinevuse Universumis. Seisue energiast  $E$  tuletatavad „matemaatilise füüsikalised operatsioonid/süsteemid ( ehk lihtsalt tuletised )“ ja nende variatsioonide piiratud rikkus realiseeruvad kõik Universumis erinevateks interaktsioonideks. See, et milline on kogu meie materiaalne maailm, määrabki ära seisue energiast  $E$  tuletatavad matemaatilise füüsikaliste operatsioonide/süsteemide ehk tuletiste variatsioonid, mille arv on nii teoreetiliselt kui ka tegelikkuses piiratud.

Näiteks seisue energiast avaldisest on võimalik tuletada aatomi tuumapotentsiaali  $U$  võrrand, millest on võimalik omakorda järeldada kõikide Universumis võimalike eksisteerivate interaktsioonide ( vahebosonite ) olemasolu. Tugeva jõu välja potentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{\hbar}}$$

järeldubki Universumis kõik-võimalikud interaktsiooni tüübid ja seda vahebosonite masside näol.

See tähendab seda, et selline võrrand kirjeldab tugeva jõu välja potentsiaali  $U$  ehk  $\phi$ , kuid samas tuletatud potentsiaali  $U$  võrrandist järeldub ka Universumi kõik-võimalikud interaktsiooni liigid ja seda vahebosonite masside näol. Selles mõttes on potentsiaali  $U$  võrrand „kahe-tähenduslik“.

Kõik need interaktsioonid on üksteisest lahutamatult seotud ehk „üks ei saa eksisteerida ilma teiseta“. Saadud potentsiaali võrrandil on olemas täpselt neli lahendit ehk neli ainuvõimalikku tõlgendust.

Erinevate interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arväärtused võivad olla looduse poolt määratud tegelikult juhuslikult ( näiteks valguse kiirus  $c$  vaakumis ehk tavaruumi liikumiskiirus  $c$  hyperruumi suhtes ) või need võivad olla tegelikult mistahes väärtusega. See tähendab seda, et näiteks gravitatsioonikonstant  $G$  PEAB esinema Newtoni poolt kirjeldatud gravitatsioonijõu valemis, kuna gravitatsioonijõu ja elektrijõu erinevuse suurus PEAB olema looduses kooskõlas just seisue energiaga  $E$ :

$$E = mc^2$$

Gravitatsioonijõu ja elektrijõu omavahelise suhte analüüs viitab sellele, et oluline ei ole tegelikult interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arväärtused, vaid erinevate interaktsioonide omavahelist suhet määravad asjaolud. See tähendab füüsikaliselt seda, et näiteks gravitatsioonikonstandi  $G$  ja elektrijõu võrdeteguri  $k$  arväärtused võivad looduse poolt olla

määratud tegelikult suvaliselt, KUID nende kahe erineva interaktsiooni omavahelise suhte määrab ära erirelatiivsusteooriast tuntud seisenergia  $E$  avaldis. Näiteks elektrijõud  $F$  on gravitatsioonijõust suurem

$$F = \frac{c^4}{G}$$

korda just seisenergia  $E$  avaldise tõttu ja see suhe jääb samasuguseks ka siis ( ning sellest tulenevalt ka Universumi eksisteerimine ), kui konstantide arväärtused peaksid olema täiesti teistsugused. Selles seisnebki „juhuse-teooria“ põhiline füüsikaline sisu: erinevate interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arväärtused võivad olla looduse poolt määratud tegelikult juhuslikult ( näiteks valguse kiirus  $c$  vaakumis ehk tavaruumi liikumiskiirus  $c$  hyperruumi suhtes )

$$\sqrt[4]{GF} = c$$

või need võivad olla tegelikult mistahes väärtusega, KUID oluline on siinkohal lihtsalt see, et erinevate interaktsioonide omavaheliseid suhteid ( näiteks kui mitu korda on elektrijõud  $F$  gravitatsioonijõust suurem )

$$F = \frac{c^4}{G}$$

määrab ära seisenergia  $E$  avaldis

$$E = mc^2$$

mis omakorda tuleneb aja ja ruumi füüsikast ehk antud juhul ajas rändamise füüsikateooriast. Universumi mateeria ehk aine ja välja eksisteerimise põhivormideks ongi aeg ja ruum.

#### 1.2.7.3.5 Universumi paisumine ja selle tulevik

Universumi ruumala on lõpmata suur tegelikult kogu meie Universumi eksisteerimise ajaperioodi jooksul ( välja arvatud Universumi punkt- ehk algsingulaarsuse korral ):

$$r = \infty$$

Selle tõttu tekib küsimus, et kuidas saab Universum paisuda ehk Universumi ruumala ajas suureneda, kui see on niikuinii lõpmata suur? Vastus sellele fundamentaalsele küsimusele seisneb järgnevas matemaatilises ja füüsikalises analüüsis. Näiteks Universumi kosmoloogilist paisumist kirjeldab Hubble'i seadus  $v$ :

$$v = HR$$

mille järgi saame Hubble'i konstandi  $H$  „definitsiooniks“:

$$\frac{v}{R} = H$$

Kuna mitte miski ei saa liikuda kiiremini kui valguse kiirus vaakumis  $v = c$ , siis saame võrrandi tegelikuks kujuks:

$$\frac{c}{R} = H$$

Saadud seoses on näha, et kui Universum paisub valguse kiirusega  $v = c$  lõpmata suures ruumimastaabis  $R = \infty$ , siis Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdub nulliga:

$$\frac{c}{\infty} = H = 0$$

See vastab Universumi pindsingulaarsusele, mille korral võrdus Universumi paisumiskiirus nulliga ja Universumi ruumala lõpmatusega. Kui aga Universum paisub valguse kiirusega  $c$  sellises ruumimastaabis, mis vastab ühele meetrile, siis saame Universumi paisumiskiiruseks  $c$ :

$$\frac{c}{1} = H = c$$

ehk

$$v = H = c$$

Sellisel juhul suureneb ühe meetri pikkune vahemaa ruumis valguse kiirusega  $c$ . Kuna Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse“  $l$  skaalast alates:

$$l = 1,616\,229(38) \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

siis õigem oleks eeldada, et Universumi paisumiskiiruse  $H$  suurenemine ajas viib lõpuks selleni, et valguse kiirusega  $c$  suureneb selline vahemaa ruumis, mis vastab Plancki pikkusele  $10^{-35}$  m. Plancki pikkuse läbimõõduga ruumalasse ei mahuks absoluutselt mitte ükski teadaolev osake. Sellisel juhul peame eespool tuletatud võrrandis:

$$\frac{c}{R} = H = c$$

avaldama kiiruse  $v = c$  Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki aja  $t$  jagatisena:

$$v = c = \sqrt{\frac{l^2}{t^2}} = \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{Ghc^5}{c^3 Gh}}$$

Selle järgi saame võrrandi kujuks:

$$\frac{c}{R} = \frac{\sqrt{Ghc^5}}{\sqrt{c^3 Gh}} \frac{1}{R} = H = c$$

ehk

$$\frac{l}{t} \frac{1}{R} = H = c$$

Viimases ongi näha seda, et kui vahemaa ruumis võrdub Plancki pikkusega  $R = l$ , siis saame:

$$\frac{1}{t} = H = c$$

mis tegelikult näitabki, et valguse kiirusega  $c$  suureneb selline vahemaa ruumis, mis vastab just Plancki pikkusele  $l$ .

Siinkohal on tähelepanuväärne asjaolu see, et kosmoloogias võrdub Hubble'i konstant  $H$

järgmiselt:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho a^2} * \frac{1}{\sqrt{2ca_mt}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} a^2 * \frac{3}{32\pi G t^2} * \frac{1}{2ca_mt}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} * 2ca_mt * \frac{3}{32\pi G t^2} * \frac{1}{2ca_mt}} = \sqrt{\frac{1}{4t^2}} = \frac{1}{2t}$$

milles  $t$  on Universumi vanus. Selle järgi me näeme, et erinevad avaldised omavahel suuresti kattuvad:

$$H = \frac{1}{2t} = \frac{1}{t} * 0,5 \approx \frac{1}{t}$$

Kuid eespool tuletatud võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \frac{1}{t} = H = c \\ 1 = ct \end{cases}$$

näitab meile selgelt, et peab kehtima seos:

$$\frac{1}{t} = \frac{ct}{t} = c = H$$

ehk  $c = c$ . Selle järgi võrdub Hubble'i konstant  $H$  valguse kiirusega  $c$ :

$$H = c$$

ehk Universumi paisumiskiirus  $H$  on võrdne valguse kiirusega  $c$  vaakumis. Kuid Universumi tegelik paisumiskiirus on praegusel ajal mõõdetud:  $74 \frac{km}{s} * (Mpc)$ , mis avaldub SI süsteemis ehk SI ühikutes järgmiselt:

$$H = \frac{x}{y} = \frac{74\,000 \left(\frac{m}{s}\right)}{3,086 * 10^{22}(m)} = 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ ühe meetri kohta}$$

Selline on Universumi paisumiskiirus „ühe meetri kohta“, milles on galaktikate eemaldumiskiirus

$$x = 74 \frac{km}{s} = 74\,000 \frac{m}{s}$$

vahemaa galaktikate vahelises ruumis

$$y = 1\,Mpc = 3,086 * 10^{16} m * \text{miljon} = 3,086 * 10^{22} m$$

ja valguse kiiruse arvvärtus vaakumi korral

$$c = 300\,000 \frac{km}{s} = 3 * 10^8 \frac{m}{s}$$

Selle järgi saame Universumi paisumiskiiruse „ühe Plancki pikkuse kohta“ järgmiselt:

$$H = 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} (\text{ühe meetri kohta}) * 1,616\,229(38) * 10^{-35} m =$$

$$= 3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta}$$

milles avaldubki Plancki pikkus l:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} m$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et praeguse Universumi vanuse t korral:

$$t = 13,7 * 10^9 a$$

on Universumi paisumiskiirus H ühe Plancki pikkuse l kohta järgmine:

$$H = 3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta}$$

Tulemus ei ole tegelikult füüsikaliselt reaalne, kuna väikseim pikkus ruumis saab olla ainult Plancki pikkus:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} m$$

mis on palju kordi suurem eespool tuletatud vahemaast s:

$$s = 3,875556 * 10^{-53} m$$

Kuna Universumi paisumiskiirus H ühe Plancki pikkuse l kohta oli arvutatav valemist:

$$\begin{aligned} H &= 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ (ühe meetri kohta)} * 1,616\,229(38) * 10^{-35} m = \\ &= 3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta} \end{aligned}$$

siis selle järgi võrdub Plancki pikkus l järgmiselt:

$$l = \frac{H}{v} = \frac{3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta}}{2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ (ühe meetri kohta)}} = 1,616\,229(38) * 10^{-35} m$$

Viimasest saame omakorda ajaperioodi t ( sekundites ):

$$t = \frac{1}{2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ (ühe meetri kohta)}} = 4,17031 * 10^{17} s$$

mis tähendab seda, et kui Universumi paisumiskiirus H on ühe Plancki pikkuse l kohta:

$$H = 3,875556 * 10^{-53} \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta}$$

siis reaalne füüsikaline sisu seisnebki selles, et Plancki pikkusele l vastav vahemaa ruumis:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} m$$

„kahekordistub“ ajaperioodi t jooksul:

$$t = 4,17031 * 10^{17} s$$

Saadud ajaperiood t:

$$t = \frac{4,17031 * 10^{17} s}{31536000 s} = 13,223 * 10^9 a$$

217



kattub „peaaegu“ praeguse Universumi vanusega t:

$$t = 13,7 * 10^9 a$$

Kuid sellise paisumiskiiruseni jõudmine võttis Universumil aega umbes 13,7 miljardit aastat:

$$t \rightarrow 0 \dots 13,7 * 10^9 a$$

Sellest järeldub, et kui Universumi paisumiskiirus ühe Plancki pikkuse kohta võrduks valguse kiirusega c:

$$H = 3 * 10^8 \frac{m}{s} \text{ ühe Plancki pikkuse kohta}$$

siis sellise paisumiskiiruseni jõudmiseks kuluks aega:

$$t = \frac{c}{v} = \frac{3 * 10^8}{3,875556 * 10^{-53}} = 7,74082 * 10^{60} a$$

ehk

$$t \rightarrow 0 \dots 7,74082 * 10^{60} a$$

See tähendab seda, et Universumi paisumiskiirus H ühe Plancki pikkuse l kohta nullist kuni valguse kiiruseni c (  $0 \rightarrow c$  ) kulub selline ajaperiood t:

$$t \rightarrow 0 \dots 7,74082 * 10^{60} a$$

mis on erakordselt pikk, kuid siiski mitte lõpmata suur ajavahemik. Kuid siinkohal peab kindlasti märkima seda, et kõik eelnevad arvutused on tehtud kahel peamisel füüsikalisel eeldusel, mis on üldiselt ka astronoomiliste vaatlustega kooskõlas:

1. Universumi paisumiskiiruse suurenemine ajas ei lakka tulevikus mingil senitundmatul põhjusel.
2. Universumi paisumiskiiruse suurenemine ajas on „lineaarne“ ehk paisumise kiirenduse arvvaartus aja jooksul oluliselt ei muutu.

Kui Universumi paisumiskiirus H võrdub valguse kiirusega c ühe Plancki pikkuse l kohta, siis Universum paisub valguse kiirusega c „ruumimastaabist sõltumata“ ehk Universumi paisumiskiirus

$$v = H$$

ei sõltu enam siis vahemaade pikkustest ruumis nagu seda oli Hubble'i seaduse v korral:

$$v = HR$$

Universum paisub siis valguse kiirusega c „kõikjal“ ja „korraga“. Selle tulemusena ei saa enam eksisteerida materia ja seetõttu lakkab eksisteerimast ka kogu Universum, kuna aegruum ja materia on üksteisest lahutamatult seotud.

Seega on  $7,74 * 10^{60}$  aasta pikkune ajaperiood tegelikult kogu Universumi „eksisteerimise“ ajaperiood, milles materia eksisteerimise lakkamine võtab ise umbes sadu miljardeid aastaid aega.

Kui me aga ennustaksime Universumi lõplikku eluiga ainult Universumi  $y$ -faktori järgi, mille korral  $y = 1$  ehk  $H = c$ :

$$\frac{t'}{y} = \frac{1}{y} * t' = t = \frac{5,39 * 10^{-44}}{1} = 5,39 * 10^{-44} \text{ sek}$$

milles teisendatakse Universumi vanust  $t$  järgmiselt:

$$t = 5,39 * 10^{-44} \text{ sek} \rightarrow t = 5,39 * 10^{44} \text{ sek}$$

siis saaksime palju väiksema tulemuse:

$$t = \frac{5,39 * 10^{44}}{31\,536\,000} = 1,7 * 10^{37} \text{ a}$$

Tegemist oleks sellise ajaperioodiga  $t$ , mille jooksul jõuab Universumi paisumiskiirus  $H$  saavutada valguse kiiruse  $c$ , mille korral paisub Universum valguse kiirusega  $c$  ruumimastaabist sõltumata. Seetõttu ei saaks Universumi aine enam normaalselt eksisteerida, mille tõttu võimegi sellise ajaperioodi lõppu käsitleda Universumi surmana.

Tähelepanuväärne on siinkohal märkida seda, et kogu Universumi eksisteerimise ajaperiood võib olla isegi „väiksem“ mõne musta augu eksisteerimise ajaperioodist, kuna musta augu aurustumisaeg  $t$  avaldub valemiga:

$$t_{\text{evap}} \approx \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 * 10^{66} \text{ a}$$

See tähendab seda, et mõne ülimalt suure musta augu eluiga võib olla pikem Universumi elueast, kuid seda ainult matemaatiliselt, kuna Universumi lõpuga kaasneb siiski ka kõige muu lõpp (kaasaarvatud ka mistahes musta augu eksisteerimise lakkamine Universumis).

Näiteks Universumi soojussurma teooria järgi on umbes ca  $10^{100}$  aasta pärast kõik Universumi tähed muutunud mustadeks aukudeks oma termotuumakütuse varude ammendamise tõttu. Mustad augud on omakorda aurustunud ja lagunened on ka kõik „rasked“ elementaariosakesed Universumis.

„Aastad“ on antud juhul mõeldud Maa-aastates, milles on 365 päeva ehk 31 536 000 sekundit. Ligikaudu  $8 * 10^{60}$  aasta pärast on kogu meie tajutav Universumi ruumala lõpmata suur:

$$r = \infty$$

„Lõpmata suure Universumi ruumala“ all mõeldakse seda, et mistahes kehade vahekaugused Universumis lähenevad lõpmatusele, mistõttu paistab ka meie Universum lõpmata suur ehkki see on tegelikult niikuinii lõpmata suur.

Universumi ruumala on lõpmata suur tegelikult kogu meie Universumi eksisteerimise ajaperioodi jooksul, välja arvatud Universumi punkt- ehk algsingulaarsuse korral. Universumi energia/massi tihedus võrdub ligikaudu  $8 * 10^{60}$  aasta pärast nulliga:

$$\rho = 0$$

Ligikaudu  $8 * 10^{60}$  aasta pärast võrdub Universumi paisumiskiirus valguse kiirusega  $c$ :

$$H = c$$

Sellest järeldub, et Universumi energia/massi tihedus aja jooksul väheneb ja Universumi paisumiskiirus aja jooksul suureneb ( s.t. Universumi paisumiskiirus läheneb aja jooksul valguse kiirusele  $c$  ja seda mistahes ruumimastaabis ). Kui energia/massi tihedus võrdub nulliga, siis selle füüsikaline sisu võib seisneda järgnevas:

1. Mistahes kehade vahekaugused Universumis lähenevad lõpmatusele.
2. Materiat tegelikult enam ei eksisteerigi.

Universumi soojussurma teooria järgi on umbes ca  $10^{100}$  aasta pärast kõik mustad augud aurustunud ja lagunenud on ka kõik „rasked“ elementaarosakesed Universumis. Nende asemele on jäänud selline „gaas“, mis koosneb ainult kergetest osakestest nagu näiteks footonitest, elektronidest, positronidest, neutriinodest jm. See „gaas“ on niivõrd hõre, et see on võrreldav sellega, kui kogu praeguse Universumi horisondi sisse jääv ruumala korrutada  $10^{185}$  korda suuremaks, siis saame sellise ruumala, mille sisse jääb ainult üks osake. Universumi soojussurma teooriat löid termodünaamika rajajad juba 20. sajandil.

Kuna Universum paisub valguse kiirusega ( $H = c$ ) mistahes ruumimastaabis ehk esineb „ruumi liikumine“ valguse kiirusega  $c$ , siis peab esinema ka aja dilatatsioon:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

ja ruumi kontraktsioon:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$$

mille tõttu Universumi eksisteerimine lakkabki olemast. Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala samuti lõpmata suur, kuid aegruum ise oli üle kogu Universumi *teisenenud* ehk *kõverdunud* lõpmatuseni:

$$y = \infty$$

Ligikaudu  $8 * 10^{60}$  aasta pärast võrdub see aga ühega:

$$y = 1$$

Lõpetuseks võiks siinkohal märkida ka veel seda, et Hubble'i konstant  $H$  on seotud Universumi vanusega  $t$  ka seosega:

$$H = \frac{2}{3t} = \frac{1}{t} * 0,66(6) \approx \frac{1}{t}$$

Sellist võrrandit tuletatakse kosmoloogias Universumi lokaalset evolutsiooni kirjeldavat võrrandit kasutades, mis omakorda tuletatakse tuntud Newtoni II seadusest ( ehk G. D. Birkoff'i teoreemist ):

$$a = \frac{F}{m}$$

ehk

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -G \frac{M}{R^2}$$

Näitame seda lühidalt järgmiselt. Esiteks korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled jagatisega  $\frac{dR}{dt}$  ja integreerime aja järgi. Tulemuseks saame sellise diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E = \text{const}$$

mille esimene liidetav on näiteks galaktika kineetiline energia ja teine liidetav on galaktika potentsiaalne energia. Konstant E on galaktika kogu mehaaniline energia, mis ajas ei muutu. Koguenergiat E saab määrata vaatlusandmete põhjal praegusel ajamomendil  $t_0$ :

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0}^2 - \frac{GM}{R_0} = -\frac{4\pi G R_0^2}{3} \left( \rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G} \right)$$

ehk

$$E = -\frac{4\pi G R_0^2}{3} (\rho_0 - \rho_{k0})$$

Nendes võrrandites on  $R_0$  kujuteldava sfääri raadius,  $\rho_0$  on kosmilise aine keskmine tihedus ja  $H_0$  on Hubble'i konstant. Hubble'i seadus avaldub kujul:

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0} = V(t_0) = H_0 R_0$$

ja „kriitilise tiheduse“ definitsiooniks on:

$$\rho_k(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

mida me järgnevalt käsitleme ainult ajahetkel  $t_0$ :

$$\rho_k(t_0) = \rho_{k0}$$

Sellest tulenevalt saame energia jäävuse seaduse:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E = \text{const}$$

viia järgmisele kujule:

$$\left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} R_0^3 \rho_0 \frac{1}{R} - \frac{8\pi G}{3} R_0^2 (\rho_0 - \rho_{k0})$$

Ainetihedus Universumis on võrdne kriitilise tihedusega:

$$\rho(t_0) = \rho_k(t_0) = \frac{3H^2(t_0)}{8\pi G}$$

ja seda tegelikult ka mistahes ajamomendil  $t$ . Kui me nüüd viimase võrduse paneme eespool tuletatud võrrandisse:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} R_0^3 \rho_0 \frac{1}{R} - \frac{8\pi G}{3} R_0^2 (\rho_0 - \rho_{k0})$$

ja Hubble'i seadus avaldub:  $\frac{dR}{dt} = HR$ , siis saame tulemuseks:

$$H^2(t) = \frac{2GM}{R^3} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t)$$

milles

$$\rho(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

See avaldis näitab, et ainetihedus Universumis on võrdne kriitilise tihedusega mistahes ajamomendil  $t$ . Kui me nüüd viimase tiheduse avaldise paneme Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandisse:

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho$$

siis saame diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dH}{H^2} = -\frac{3}{2} dt$$

Kui Universumi sünnimomenti tähistame:  $t_1 = 0$ , siis saame integreerimise tulemusena:

$$-\frac{1}{H(t)} + \frac{1}{H(0)} = -\frac{3}{2} t$$

ehk

$$H(t) = \frac{2}{3t}$$

kuna  $H(0) = \infty$ . Saadud lõpptulemus ongi Hubble'i konstandi  $H$  sõltuvus ajast  $t$ .

Eelnevalt me nägime, et Hubble'i konstant  $H$  on seotud üsna huvitava avaldisega:

$$H^2(t) = \frac{2GM}{R^3}$$

See on huvitav selletõttu, et kui  $H = c$ , siis ilmneb selles Schwarzschildi raadius  $R_s$ :

$$R^3 = \frac{2GM}{H^2} = \frac{2GM}{c^2} = R_s$$

Viimane võrrand on otseselt tuletatav energia jäävuse seadusest:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

milles esineb omakorda Hubble'i seadus:  $v = HR$ . Universumi kriitiline tihedus:

$$\rho(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

tulenebki sellisest seosest:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = H^2 = \frac{2GM}{R^3}$$

mis näitab massitiheduse klassikalist avaldist:

$$\frac{4\pi R^3}{3}\rho = M$$

ehk

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Eespool tuletatud valemitest:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = H^2 = \frac{2GM}{R^3}$$

ja

$$H(t) = \frac{2}{3t}$$

saame tiheduse väärtuseks:

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2} \approx \frac{8 \cdot 10^5}{t^2} \frac{g \cdot s^2}{cm^3}$$

Saadud võrrand kehtib siis, kui Universumi keskmine tihedus ja kriitiline tihedus on omavahel võrdsed. Valem on õige ka Universumi varajase nooruse korral ( umbes 2 – 3 min pärast Universumi sündi ). Universumi keskmine ainetihedus on pöördvõrdeline Universumi vanuse ruuduga. Seetõttu on tiheduse väärtus umbes praegusel ajahetkel:

$$\rho_{k0} \approx 4,6 \cdot 10^{-30} \frac{g}{cm^3}$$

Kuna ühes grammis aines on  $6,02 \cdot 10^{23}$  tuumaosakest, siis seega on Universumi kriitilise tiheduse korral kuupsentimeetris umbes  $2,7 \cdot 10^{-6}$  tuumaosakest ehk 2,7 osakest kuupmeetris.

Teades eelnevalt Hubble'i konstandi definitsiooni:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

ja Universumi kriitilist tihedust:

$$\rho_0(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

siis saame Friedman'i võrrandit kasutades:

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

ainetiheduse ja kriitilise tiheduse suhte avaldise:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_0(t)} = 1 + \frac{kc^2}{a^2(t)H^2(t)}$$

milles  $k = 1, 0, -1$ . Kuna väikestel kosmoloogilistel ajamomentidel läheneb Hubble'i konstant

lõpmatusele:

$$H(0) = \infty$$

siis saame tiheduste suhteks:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Omega(t) = 1$$

mis tähendab seda, et piisavalt varajases Universumi staadiumis on ainetihedus „peaaegu“ võrdne kriitilise tihedusega.

### 1.3 Kvantkosmoloogia alused ja sissejuhatus kvantväljade teooriasse

Eespool tuletatud Universumi aine ja energia tiheduse  $\rho$  võrrandis

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0$$

võrdus ( Universumi „pindsingulaarsuse“ korral  $r = R$  ) Universumi aine ja energia tihedus lõpmatusega  $\rho = \infty$ , mille korral oli ka Universumi kosmoloogiline aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni. Kui aga Universum on paisunud lõpmata suureks  $r = \infty$ , siis Universumi tihedus avaldub võrrandis võrdusena  $\rho = \rho_0$ . Täpselt samasugune analüüs kehtis ka teise tuletatud võrrandi korral:

$$r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3$$

Näiteks kui viimases võrrandis kehtis võrdus  $\rho = \rho_0$ , siis on Universum paisunud lõpmata suureks ehk  $r^3 = \infty$ . Selline analüüs tõestas, et viimane võrrand on eespool oleva Universumi tiheduse võrrandiga füüsikaliselt täpselt identsed. Kuid ainus erinevus seisnes kordaja  $y^2$  väärtuses. Näiteks kui Universumi tiheduse  $\rho$  võrrandi korral:

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0$$

on tegemist Universumi pindsingulaarsusega  $r = R$ , siis kordaja  $y^2$  väärtus on sellisel juhul lõpmatu  $y = \infty$ :

$$\frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y^2 = \frac{c^2}{H^2} = \infty$$

See tähendab seda, et kui kordaja  $y^2$  võrdub lõpmatusega, siis on tegemist Universumi pindsingulaarsusega ja Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdus sellisel juhul nulliga. Küsimus on selles, et millega võrdub siis Universumi ruumala  $r = R$  Universumi pindsingulaarsuse korral? Selle teada saamiseks pöördusimegi võrrandite süsteemi teise võrrandi poole:

$$r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3$$

Viimase võrrandi  $y^2$  kordaja peab sellisel juhul ehk Universumi pindsingulaarsuse korral võrduma samuti lõpmatussega:

$$\frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y^2 = \frac{c^2}{H^2} = \infty$$

Viimane tähendab seda, et  $\rho = \rho_0$  korral saame  $r^3 = R^3 = \infty$  ehk Universumi ruumala on lõpmata suur. See tähendab seda, et sellise analüüsi järgi on Universumi pindsingulaarsus lõpmata suur, Universumi aine ja energia tihedus samuti lõpmata suur  $\rho = \rho_0 = \infty$  ning Universumi paisumiskiirus võrdus nulliga  $H = 0$ .

Universumi materia põhivormideks on AINE ja VÄLI. Kvantväljade teooria järgi koosneb aine „aineosakestest“ ja väli „väljaosakestest“. Kui Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ oli Universumi ruumala ja massi/energia tihedus mõlemad lõpmata suured, siis ainuvõimalik füüsikaline tõlgendus oleks sellele see, et see võib näidata mingisugust energiavälja olemasolu Universumi pindsingulaarsuse ajal, mille korral ei eksisteerinud praegu tuntavat vaakumit. Energiaväljaga kaasneb ka aine eksisteerimine, kuna aine ja väli ei saa eksisteerida üksteisest lahus ( mõnes mõttes välja arvatud elektromagnetiline korral ).

Kui aine osakeste ehk elementaarosakeste ( mitte aatomite või molekulide ) vahekaugused lähenevad lõpmatusse, siis aine tihedus võrdub nulliga. Kui aga aine osakeste vahekaugused lähenevad nullile, siis aine tihedus läheneb lõpmatussele.

Kui aine osakeste vahekaugused lähenevad nullile, siis aineosakeste vaheline ruumala läheneb nullile. Näiteks praegusel ajal on kõige suurem aine tihedus aatomituumal.

Kuna Universumi ruumala  $V$  on kohe pärast inflatsioonilist paisumist ehk pindsingulaarsuse korral lõpmata suur ja seega selles sisalduv massi/energia kogus on samuti lõpmata suur ( NÄI-TEKS galaktikaid oleks Universumis lõpmata palju ), siis seega on Universumi aine-energia tihedus  $\rho$  igal kosmoloogilisel ajahetkel tegelikult konstantne ( väljaarvatud Universumi alg- ehk punkt-singulaarsuse korral ):

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1 = const$$

See näib olevat kooskõlas üldise massi/energia jäävuse seadusega. Kui aga viimases Universumi tiheduse võrrandis käsitleksime massi/energiat suvalises Universumi asukohas eksisteeriva punkti suhtes, siis saame Universumi aine-energia tiheduseks:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{x}{0} = \infty$$

milles vaadeldav ruumala  $V$  Universumis võrdub nulliga ehk tegemist on Universumi aegruumis eksisteeriva/vaadeldava punktiga:

$$V = 0$$

ja selle punkti suhtes ei võrdu mass/energia enam lõpmatussega:

$$M \neq \infty$$



ega isegi mitte nulliga, vaid mingi kindla arvvaartusega:

$$M = x$$

Näiteks võib mass  $M$  võrduda:

$$M = 10^{-43} \text{ kg}$$

Sellisel juhul ei saa mass  $M$  võrduda lõpmatusega ega nulliga, kuna see pole antud juhul füüsikaliselt reaalne ega usutav. See tähendab seda, et lõpmata suure ruumalaga Universumi suhtes on ka selle mass  $M$  lõpmata suur ( näiteks galaktikaid oleks Universumis lõpmata palju ), kuid Universumi aegruumis eksisteeriva/vaadeldava punkti suhtes ei ole mass/energia enam lõpmata suur ega isegi mitte null. Sellest tulenevalt võrdub massi/energia tihedus lõpmata suure ruumalaga Universumi suhtes ühega, kuid Universumi aegruumis eksisteeriva lõpmata väikese punkti suhtes aga lõpmatusega. Punktil ei ole mõõtmeid ehk see võrdub füüsikalises mõttes lõpmata väikese ruumalaga. Massi/energia tiheduse klassikalise valemi järgi saaksime aegruumi punkti suhtes mistahes massi/energia arvvaartuse korral ( väljaarvatud nulli korral ) tiheduseks ikkagi lõpmata suure väärtuse, mis eespool oleva analüüsi järgi esines vahetult kohe pärast Universumi inflatsioonilist paisumist ehk Universumi pindsingulaarsuse „ajal“.

Lühidalt võib järeldada seda, et eespool tuletatud Universumi ruumala ja tiheduse suhet kirjeldavast võrrandite süsteemist

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0 \\ r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3 \end{cases}$$

tuleneb omakorda Universumi pindsingulaarsust kirjeldav võrrandite süsteem:

$$\begin{cases} r = \infty \\ \rho = \infty \end{cases}$$

milles me näeme väga selgelt seda, et Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala lõpmata suur ja Universumi massi/energia tihedus samuti lõpmata suur. Selline pealtnäha füüsikaliselt ebareaalne tulemus viitab tegelikult väga selgelt mingisuguse energiavälja olemasolule, mis antud juhul eksisteeris Universumi pindsingulaarsuse ajal. Näiteks viimasest võrrandite süsteemist võib välja lugeda selle, et lõpmata suure ruumalaga Universumi korral peab massi/energiat olema samuti lõpmata hulk ja see annab massi/energia tiheduseks lõpmata suure Universumi ruumala suhtes ühe:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1 = \text{const}$$

Kuid samas Universumi aegruumis eksisteeriva punkti suhtes ei saa massi/energiat olla lõpmata hulk ega isegi mitte null ja sellest tulenevalt saame punkti suhtes oleva massi/energia tiheduse lõpmata suure väärtuse:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{x}{0} = \infty$$

Sellest on võimalik otseselt järeldada, et Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ eksisteeris „ürgne energiaväli“, mis täitis ühtlaselt kogu Universumi aegruumi ( mille tõttu praegu tuntavat vaakumit ei eksisteerinud ) ja ei olnud tsentraalsümmeetriline ( nagu seda on näiteks elektriväli ). Seepärast võib „ürgset energia-välja“ mõista ka kui „energia-ruumina“. Tähelepanuväärne „matemaatiline

vastuolu“ on viimase võrrandi juures see, et kui me viime 0 võrrandi

$$\rho = \frac{x}{0} = \infty$$

teisele poole võrdusmärgi, siis  $x$  ei saa kuidagi võrduda nulliga:

$$x \neq 0 * \infty$$

vaid selle asemel peab kehtima seos:

$$0 = 0 * \infty$$

Nulliga korrutamine annab meile tulemuseks alati nulli. Kogu Universumi aegruumi täitev energiaväli omab energiat ja massi vastavalt seisuenergia valemile:

$$E = mc^2$$

See energiaväli ei olnud tsentraalsümmeetriline nii nagu seda on näiteks tsentraalsümmeetriline elektrostaatiline väli. See tähendab, et ürgsel energiaväljal puudus ruumis allikas. Energiaväli täitis kogu Universumi aegruumi, mis oli lõpmatu ulatusega. Sellest tulenevalt oli lõpmata suure Universumi suhtes massi/energiat samuti lõpmata palju. Näiteks elektrivälja kui energiavälja analoogiat kasutades annaks elektrivälja energia  $E$  võrrand meile sellisel juhul järgmise lahendi:

$$E = \frac{\epsilon\epsilon_0 E_T^2}{2} V = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \epsilon r} = \infty$$

milles

$$V = \infty$$

Kuid Universumi aegruumis eksisteeriva punkti suhtes ei ole mass/energia lõpmata suur ega isegi mitte null. Sama on näiteks ka klassikalise elektriväljaga, mille korral näitab väljapotsiaal  $\phi$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = k \frac{q}{r}$$

potentsiaalset energiat mingis kindlas välja punktis. Sellest tulenevalt läheb massi/energia tihedus mistahes välja punktis lõpmata suureks:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{x}{0} = \infty$$

kuna tegemist on klassikalise väljaga.

Klassikalise välja „loob“ kvantväli. Matemaatilises füüsikas kirjeldab klassikalist välja u Euler-Lagrange'i võrrand:

$$\frac{\partial L}{\partial u_A} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}} \right) = 0$$

milles olevat liiget

$$u_{A,\mu} = \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu}$$

defineeritakse „summa konventsioonina“ ja  $L$  on lagranžiaani tihedus, mis on 4-skalaar. Hamiltoni-aani tihedus avaldub võrrandina:

$$H(x) = \sum_A \frac{\partial L(x)}{\partial \dot{u}_A(x)} \dot{u}_A(x) - L(x)$$

Hamiltoni funktsioon ehk hamiltoniaan tähistab füüsikas kogueregiat. Klassikalist välja u kirjeldavas Euler-Lagrange'i võrrandis on defineeritud kanoonilised impulsid:

$$\pi_A(x, t) = \frac{\partial L(x, t)}{\partial u_A(x, t)}$$

energia-impulssstensor:

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \sum_A \frac{\partial L}{\partial u_{A,\nu}} u_{A,\mu}$$

ja energia-impulssvektor:

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x$$

milles energia on omakorda määratud avaldisega:

$$E = \int H d^3x = - \int T_{44} d^3x$$

Väljavõrrand on relativistlikult kovariantne, mis tähendab seda, et see on kujul 4-skalaar =0 või 4-vektor =0.

Kuna mistahes energiaväli omab energiat

$$E = mc^2$$

siis seega peab energiavälja saama kirjeldada ka tuntud energia jäävuse seadusega. Klassikalises mehaanikas ehk Newtoni mehaanikas on mehaanilise energia jäävuse seaduse võrrandi kuju järgmine:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left( -\frac{GMm}{R} \right)$$

ehk

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = E_k - E_p$$

Universumi pindsingulaarsuse ajal oli Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdne nulliga:

$$H = 0$$

Sellest tulenevalt oli kogu Universumit täitval energiaväljal ainult potentsiaalne energia:

$$E = E_k - E_p = 0 - \infty = -\infty$$

mille tõttu kineetiline energia võrdus nulliga. Potentsiaalset energiat märgitaksegi füüsikas tavaliselt negatiivsena ja sellest tulenevalt võrdub energiavälja koguerergia antud juhul negatiivse lõpmatusega. Energia jäävuse seadusega see vastuollu ei lähe, kuna Universumi paisumiskiirus  $H$  võrdus nulliga ainult lõpmata väikese ajaperioodi jooksul:

$$t = \frac{1}{\infty} = 0$$

Seetõttu ei lähe see vastuollu mehaanilise energia jäävuse seadusega. See tähendab füüsikaliselt seda, et Universum hakkas uuesti paisuma „kohe pärast inflatsioonilise paisumise lõppu“:

$$H \neq 0$$

Kui Universumi paisumiskiirus  $H$  on nullist erinev, siis tuleb kogu Universumit täitva energiavälja kineetiliseks energiaks samuti lõpmata suur väärtus:

$$E = E_k - E_p = \infty - 0 = \infty$$

milles potentsiaalne energia võrdub seekord nulliga ja koguenergia võrdub positiivse lõpmatusega. Kineetilise ja potentsiaalse energia lõpmata suured väärtused tulenevad just sellest, et energiaväli täitis kogu Universumi aegruumi, mille ulatus oli lõpmatu ja seega oli lõpmata suure Universumi suhtes energiat/massi samuti lõpmata palju.

Energiavälja potentsiaalne energia:

$$E = E_k - E_p = 0 - \infty = -\infty$$

muutus Universumi paisumise tõttu kineetiliseks energiaks:

$$E = E_k - E_p = \infty - 0 = \infty$$

Sellest tulenevalt võime moodustada võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} E = E_k - E_p = 0 - \infty = -\infty \\ E = E_k - E_p = \infty - 0 = \infty \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} E = 0 - \infty \\ E = \infty - 0 \end{cases}$$

mis kirjeldabki energiatega muutust. Tähelepanuväärne asjaolu on selle juures see, et selline muutus toimus lõpmata väikese ajaperioodi jooksul ehk seega sisuliselt 0 sekundiga

$$t = \frac{1}{\infty} = 0$$

ja seetõttu saame viimasest võrrandite süsteemist omakorda energiavälja kaks võrdväärset olekut, mis avaldub järgmise võrrandite süsteemina:

$$\begin{cases} E = 0 - 0 \\ E = \infty - \infty \end{cases}$$

See tähendab seda, et energiavälja kineetiline ja potentsiaalne energia võivad põhimõtteliselt võrduda korraga nii nulliga kui ka lõpmatusega. Välja koguenergia mõlemal juhul võrduvad nulliga:

$$E = 0$$

mis on kooskõlas mehaanilise energia jäävuse seadusega. Kuna energiaväli tekkis vahetult kohe pärast Universumi inflatsioonilist paisumist ehk sisuliselt „mitte-millegist“, siis seega energiavälja kineetilise energia ja potentsiaalse energia „summa“ ehk koguenergia peakski võrduma nulliga:

$$E = E_k - E_p = 0$$

Eelnevalt „tuletatud“ võrrandite süsteemist ehk energiavälja kahest võrdväärsest olekust

$$\begin{cases} E = 0 - 0 \\ E = \infty - \infty \end{cases}$$

realiseerub tegelikkuses

$$E = \infty - \infty$$

kuna Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ eksisteeris energiaväli, mis omas massi/energiat. Sellest võib omakorda järeldada seda, et „enne“ Universumi pindsingulaarsust oli energiavälja olek järgmine:

$$E = 0 - 0$$

mis tähendab sisuliselt energiavälja mitte-eksisteerimist. See aga vastab Universumi punkt-singulaarsusele, mille korral ei eksisteerinud aegruumi ega energiavälja ( s.t. massi/energiat ) ning Universumi punkt-singulaarsus „paisus“ pindsingulaarsuseks lõpmata väikese ajaperioodi jooksul ehk sisuliselt 0 sekundiga.

Selline analüüs viitab üsna selgelt sellisele reaalsusele, et Universumi punkt-singulaarsuse korral:

$$\begin{cases} r = 0 \\ \rho = 0 \end{cases}$$

mil Universumi ruumala oli lõpmata väike ehk sisuliselt null ja massi/energia tihedus samuti null, oli energiavälja olek

$$E = 0 - 0$$

Viimane näitab sisuliselt energiavälja mitte-eksisteerimist. Kuid Universumi pindsingulaarsuse korral

$$\begin{cases} r = \infty \\ \rho = \infty \end{cases}$$

mil Universumi ruumala on lõpmata suur ja massi/energia tihedus samuti lõpmata suur, on energiavälja olek sellisel juhul

$$E = \infty - \infty$$

See näitab juba energiavälja eksisteerimist. Universum paisus punkt-singulaarsusest pind-singulaarsuseks 0 sekundiga, mis on kooskõlas ka eelnevalt leitud energiavälja kahe erineva olekuvahelise „ajaperioodiga“:

$$\begin{cases} E = 0 - 0 \\ E = \infty - \infty \end{cases}$$

milleks on samuti 0 sekundit.

Eespool esitatud analüüs näitas, et Universumi punkt-singulaarsuse korral

$$\begin{cases} r = 0 \\ \rho = 0 \end{cases}$$

mil Universumi ruumala oli lõpmata väike ja massi/energia tihedus võrdus nulliga, oli Universumi paisumiskiirus lõpmata suur:

$$H = \infty$$

Sellest tulenevalt paisus Universum lõpmata suureks 0 sekundiga ehk Universumi punkt-singulaarsus „eksisteeris“ kõigest 0 sekundit:

$$t = \frac{1}{\infty} = 0$$

ja seetõttu ei saanud olemas olla Universumi kvantfluktuatsioone ega muid kvantkosmoloogilisi

aspekte. Universumi punktisingsulaarsuse korral:

$$\begin{cases} r = 0 \\ \rho = 0 \end{cases}$$

oli energiavälja olek kirjeldatav:

$$E = E_k - E_p = 0 - 0 = 0$$

See tähendab sisuliselt energiavälja mitte-eksisteerimist.

### 1.3.1 Universumi aine ehk aine ja väli

Kuna ürgne energiaväli tekkis vahetult kohe pärast Universumi inflatsioonilist paisumist ehk Universumi pindisingsulaarsuse „ajal“, siis seega peab selle välja kineetiline ja potentsiaalne energia olema seotud kuidagi Universumi kosmoloogilise paisumisega ehk seega Universumi paisumise kinemaatikaga. Energiavälja kui skalaarset välja kirjeldavat lagranžiaani  $L$  võrrandit tuletamegi nüüd järgmise pika matemaatilise analüüsi teel, korrates alguses kosmoloogia osas esitatud tuletusi.

Selleks, et minna matemaatilise analüüsi juurde, tuletame meelde, et ajas rändamise teooria üheks põhialuseks on väide, et erinevad ajahetked on samas ka erinevad ruumipunktid. Selline seaduspärasus avaldub looduses Universumi paisumisena. Näiteks kui Universum paisub (s.t. Universumi ruumala suureneb ajas), siis erinevatel (kosmoloogilistel) ajahetkedel on Universumi ruumala erinev ja seega on erinevad ka Universumi ruumipunktide koordinaadid. Universumi paisumist kujutatakse sageli ette just kera või õhupalli paisumisena. Siis on väga selgesti näha seda, et kera sfäärilised koordinaadid (ehk ruumipunktide koordinaadid) ja kera raadius on erinevatel ajahetkedel erinevad.

Kosmoloogias on Universumi paisumise mudeliks kera paisumine, mis ei pöörle. Sellisel juhul on kolmemõõtmelise kera kahemõõtmeline pind meie kolmemõõtmelise Universumi kolmemõõtmeline versioon. Kera paisub ja mööda kera pinda ehk kera pinnal liigub keha  $m$ . Keha liigub alati risti kera raadiusega. Lihtsuse mõttes liigub keha mööda kera ringjoont, mille pikkus on  $2\pi R$ . Kera paisumine illustreerib Universumi paisumist, kuid keha  $m$  liikumine kera pinnal aga sündmuste ja protsesside kulgemist Universumis. Mitte miski ei saa liikuda valgusest kiiremini. Valguse liikumiskiirus vaakumis ja kera paisumiskiirus on mõlemad võrdsed  $c$ -ga. Mida lähemale jõuab keha liikumiskiirus valguse kiirusele  $c$  ehk kera paisumiskiirusele, seda aeglasemini liigub keha  $m$  paisuva kera pinna suhtes. See illustreerib sündmuste ja protsesside aeglenemist Universumis. Kui kera paisumise kiirus ja keha liikumiskiirus kera pinnal omavahel ühtivad, siis keha  $m$  ei liigu enam üldse ja seega aeg on peatunud. Tuleb veelkord märkida seda, et kera paisub, mitte ei pöörle.

Kuna keha  $m$  liigub alati risti kera raadiusega ja samas ka alati kera paisumisega kaasa, siis keha liikumist paisuva kera pinnal saab kirjeldada Pythagorase teoreemiga järgmiselt:

$$d^2 = l^2 + (vt)^2$$

ehk

$$d = \sqrt{(ct + vt')^2 + (vt')^2}$$

milles  $c$  on kera paisumise kiirus ( mis ühtib valguse kiirusega vaakumis ),  $d$  on keha  $m$  liikumisest ja kera paisumisest tingitud (resultant)teepikkus,  $vt'$  on ainult keha liikumisest tingitud teepikkus,  $ct$  on kera paisumisest tingitud teepikkus,  $l = ct + vt'$  on keha  $m$  teepikkus paisuva kera pinnal arvestades samas ka kera paisumisest tingitud teepikkuse juurdekasvu ehk  $ct$ ,  $t$  ja  $t'$  on erinevad ajahetked ehk vastavalt kera mittepaisuva ja paisuva oleku ajahetked. Mitte miski ei saa liikuda valgusest kiiremini ehk kera paisumisest kiiremini ja seega  $d = ct'$ , mis tähendab seda, et teepikkuse  $d$  pidi keha  $m$  läbima kiirusega  $c$  ( mitte sellest suurema kiirusega ).

Järgnevalt teeme terve rida matemaatilisi teisendusi, et saada lõplik võrrand, mis kirjeldab antud süsteemi matemaatiliselt. Kuna  $d = ct'$ , siis avaldame Pythagorase teoreemist kera paisumise kiiruse  $c$  järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{l^2 + (vt')^2}}{t'} = c,$$

$l$  on keha  $m$  teepikkus paisuva kera pinnal arvestades samas ka kera paisumisest tingitud teepikkuse juurdekasvu ehk  $ct$ :

$$l = ct + vt'$$

ja seega saame viimase võrrandi lahti kirjutada järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{(ct + vt')^2 + (vt')^2}}{t'} = c,$$

Viime  $t'$  võrrandi teisele poole, tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu ja kirjutame lahti ruutvõrrandi avaldise:

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 + (vt')^2 = (ct')^2$$

Viime ühe liikme  $(vt')^2$  teisele poole ja saame

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 = (ct')^2 - (vt')^2 = (c^2 - v^2)t'^2,$$

jagame viimase saadud võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga:

$$\frac{(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2}{c^2} = \frac{(c^2 - v^2)t'^2}{c^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} t'^2 = \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right] t'^2.$$

Kuna kehtib ruutvõrrandi matemaatiline seos

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 = (ct + vt')^2,$$

siis saame viimase võrrandi kujuks järgmise avaldise:

$$(ct + vt')^2 = \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right] t'^2 c^2$$

ehk võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla viies:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c.$$

Viimane avaldis ongi meie otsitav lõplik võrrand, mis kirjeldab antud füüsikalist süsteemi. Tegemist on tegelikult ajas rändamise üldvõrrandiga, millest on võimalik tuletada terve rida väga tähtsaid fundamentaalfüüsikalisi- ja matemaatilisi seoseid ja järeldusi. Võib ka nii öelda, et tegemist on ühe põhivõrrandiga, mille järeldused on heas kooskõlas ajas rändamise teooria aluspõhimõtetega. Neid järeldusi on relatiivsusteooria ja kvantmehaanika osas põhjalikumalt uuritud ja analüüsitud.

Eelnevalt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

on võimalik teha järgmised matemaatilised teisendused. Juhul kui  $ct = 0$ , saame järgmise võrrandi

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c.$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled  $t'$ -ga:

$$\frac{vt'}{t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{ct'}{t'}$$

ja sellest tulenevalt saame lõpuks järgmise väga olulise võrrandi:

$$v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

ehk visuaalselt paremini esitatuna:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Viimasest võrrandist on võimalik matemaatiliselt tuletada kosmoloogia põhivõrrand ehk Friedmanni võrrand ja ka keha seisueenergia valem  $E = mc^2$ . Näiteks keha  $m$  kineetiline energia  $E$  avaldub valemiga:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Kui kiirused on väikesed võrreldes valguse kiirusega vaakumis, siis saab kasutada ligikaudseid valemeid:

$$\frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2$$

Kinemaatilise teguri  $\gamma$  avaldist:



$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

võib esitada ka järgmiselt

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

milles  $\beta^2$  avaldub nõnda:

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}.$$

Kõike eelnevat arvestades võib kinemaatilise teguri  $y$  asendada ligikaudse valemiga:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{4} \frac{v^4}{c^4}},$$

sest  $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ . Kuna liige

$$-\frac{1}{4} \frac{v^4}{c^4}$$

on väga väike, siis saame viimase avaldise kirjutada nõnda:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Sellest tulenevalt saame  $y$  avaldada järgmiselt:

$$y \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

või

$$\frac{1}{y} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

ja sooritada järgmised matemaatilised teisendused:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c \frac{1}{y} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right),$$

korrutame võrrandi mõlemad pooled  $mc$ -ga, saame järgmiselt:

$$v \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$mcv \approx mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$mcv \approx mc^2 - \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv.$$

Viimases võrrandis viisime liikme  $-mcv$  kosmoloogia osas teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{mv^2}{2} + mcv = mc^2$$

ja kui see võrrandi liige võrdub nulliga:

$$mcv = 0$$

ehk kiirus on null  $v = 0$ , siis saime järgmise väga tähtsa avaldise:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

Kuid nüüd näitame seda, et viimane avaldis on tegelikult samaväärne järgmise valemiga:

$$\frac{mv^2}{2} = mcv$$

kui viimases valemis on võrrandi liikmes  $mcv$  kiirus  $v = c$ . Kui aga  $v = 0$ , siis saame kineetilise energia, mis võrdub nulliga:

$$\frac{mv^2}{2} = 0$$

Mehaanilise energia jäävuse seaduse kohaselt peab keha potentsiaalne energia olema maksimaalne, kui tema „liikumisenergia“ ehk kineetiline energia võrdub nulliga:

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{R}$$

Sellest tulenevalt saame järgmise seose:

$$-\frac{GMm}{R} = mcv$$

milles  $v = 0$ . Kogu eelnevat mõttekäiku põhjendame kohe järgmise füüsikalise analüüsiga. Näiteks kui võrrandi liikmes  $mcv$  on  $v = 0$ , siis see tähendab füüsikaliselt seda, et tavaruumi K suhtes on keha m paigal, kuid hyperruumi K' suhtes liigub keha m kiirusega c. Seetõttu on keha m kineetiline energia  $\frac{mv^2}{2} = E_k$  võrdne  $E = mc^2$  ja seda siis hyperruumi K' suhtes. Antud juhul on siin tegemist kineetilise energia definitsiooniga:  $E_k$ . Kuna seoses  $mcv$  on  $v = 0$ , mis tähendab seda, et keha m on tavaruumi K suhtes paigal ehk keha kineetiline energia on tavaruumi K suhtes null, siis seega tavaruumi K suhtes olev keha m paigalseisu ehk potentsiaalne energia on võrdne gravitatsioonilise potentsiaalse energiaga järgmiselt:

$$mcv = -\frac{GMm}{R}$$

ja see potentsiaalne energia ei võrdu võrrandis enam nulliga. Kõiki eelnevaid seoseid arvestades saamegi järgmise väga olulise võrrandi:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{mc^2}{2}$$

milles massid  $m$  taanduavad kõik maha:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimane tuletatud seos väljendab tegelikult otseselt mehaanilise energia jäävuse seadust:

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

milles

$$E = E_k + E_p = \frac{v^2}{2} + \left(-\frac{GM}{R}\right) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \text{const} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimases seoses olev konstant  $-\frac{c^2}{2}$  ei tule matemaatiliselt välja klassikalises mehaanikas tuntud energia jäävuse seadusest. Sellise energia jäävuse seaduse kuju on võimalik tuletada ainult relativistliku mehaanika teel nagu me seda siin eelnevalt tegime. Hiljem me näeme seda, et viimases võrrandis olev konstandist liige  $-\frac{c^2}{2}$  võib võrduda ka nulliga:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

millest omakorda saame mehaanilise energia jäävuse seaduse klassikalisel kujul:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

Saadud viimane võrrand

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

sobib hästi kirjeldama Universumi kosmoloogilist paisumist. Näiteks viimases võrrandis olev kiirus  $v$  võib olla Universumi paisumiskiirus ehk tuntud Hubble'i seadus  $v = HR$ :

$$\frac{H^2}{2} = \frac{GM}{R^3}$$

Robertson-Walkeri meetrikast on teada seda, et Hubble'i konstant  $H$  võrdub:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ja seetõttu saame viimase võrrandi kujule

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$

ehk

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{GM}{R^3}$$

Viime liikme  $a^2$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 = \frac{GM}{R^3}a^2$$

Massi  $M$  võime avaldada tiheduse kaudu:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

ja seega saame võrrandi kujuks järgmiselt:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho a^2$$

Viime võrrandi kõik liikmed ühele poole võrdusmärgi ja saame:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = 0$$

Kuna viimane võrrand on saadud eespool tuletatud võrrandist:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

mis tegelikult nulliga ei võrdu:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

siis seega saame järgmiselt:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

Viimane võrrand on peaaegu identne Robertson-Walkeri meetrikatest saadud Friedmanni võrrandiga:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

milles  $k = 1, 0, -1$ . See tähendab seda, et kui viimases võrrandis on  $k$  väärtuseks  $+1$  ehk tegemist oleks Universumi positiivse kõveruse ruumiga, siis saamegi eelnevalt tuletatud võrrandiga täiesti identse seose:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et eelnevalt tuletatud võrrand on Robertson-Walkeri meetrika järgi tegemist positiivse kõveruse ruumiga ja seega kõik teised Universumi ruumi kõverused ( s.t. tasane ja negatiivne kõverus ) on välistatud. Tegelikult on kosmoloogia osas tõestatud, et ka positiivsest kõverusest ruumist ei sõltu Universumi paisumiskiiruse kinemaatika, vaid see sõltub mehaanilisest energia jäävuse seadusest ja salapärase kordaja  $y$  muutumisest ajas.

Universumi kosmoloogilist paisumist kirjeldab väga edukalt eespool tuletatud Friedmanni võrrand

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

ehk

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{c^2}{2}$$

Kui selles võrrandis võrdub konstant nulliga

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = 0$$

ja viime ühe liikme teisele poole võrdusmärgi nii, et mõlemad võrrandi pooled oleksid negatiivsed

$$-\frac{1}{2}(\dot{a})^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho a^2$$

siis saame järgmise võrduse, mis antud juhul on esitatud postulaadina:

$$-\frac{1}{2}(\dot{a})^2 \frac{1}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a = \ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$$

ehk

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2} \frac{(\dot{a})^2}{a}$$

Viimane seos on kosmoloogias tuntud Friedmanni võrrandina juhul, kui Universumi rõhk on null ehk  $p = 0$ . Robertson-Walkeri meetrikast on Hubble'i konstant  $H$  esitatav järgmiselt:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

milles

$$\dot{a} = Ha$$

Sellest tulenevalt saame viimase võrrandi kujuks

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2}H^2 a$$

ehk

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H^2 = -\frac{H^2}{2}$$

Kui me võtame Hubble'i konstandist  $H$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ühekordse tuletise aja järgi, siis saame

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}\dot{a}}{a^2} = \frac{\ddot{a}a}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

ehk

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

Kuna viimases võrduses olev liige on esitatav eelnevalt saadud seose põhjal

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2}$$

siis saame järgmise väga olulise võrrandi:

$$\dot{H} = -\frac{H^2}{2} - H^2$$

Järgnevalt arvestame seda, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ :

$$H = v = c$$

ja seega saame

$$\dot{c} = -\frac{c^2}{2} - c^2$$

Kuna konstandist  $c$  tuleb on null

$$0 = -\frac{c^2}{2} - c^2$$

ja kui me korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ , siis saame

$$0 = -\frac{mc^2}{2} - mc^2$$

Viime võrrandi liikme  $-mc^2$  teisele poole võrdusmärgi

$$mc^2 = -\frac{mc^2}{2}$$

ja arvestame erirelatiivsusteooriast tulenevat seost

$$-c^2 = v^2$$

ning lõpuks saamegi võrrandi

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

Kuna kineetilise energia klassikaline valem on avaldatav järgmiselt:

$$\frac{mv^2}{2} = E$$

siis saame esitada seisuenergia võrrandi:

$$E = mc^2$$

mida võib mõista kineetilise energia definitsioonina. See tähendab seda, et Universum paisub ajas tegelikult valguse kiirusega  $c$  ja seetõttu on kõikidel kehal Universumis kineetiline energia, mis antud juhul avaldubki seisuenergia valemiga. Seetõttu omab ka energiaväli energiat ja massi vastavalt eespool tuletatud ekvivalentsuse seosele:

$$E = mc^2$$

millele on võimalik eespool oleva analüüsi järgi anda ka järgmine võrdus:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Kui me tõstame saadud võrrandi

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

kõik pooled ruutu:

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{4} = m^2 c^4$$

ja seejärel võtame selles ruutjuure ehk lähme uuesti tagasi võrrandi esialgse kuju juurde:

$$\sqrt{E^2} = \sqrt{\frac{m^2 c^4}{4}} = \sqrt{m^2 c^4} = E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

siis me saame tulemuseks positiivse avaldise:

$$E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis pole enam negatiivne:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Kuna energia avaldub seosena:  $E = mc^2$ , siis võime võrrandi

$$E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

esitada ka kujul:

$$\frac{E}{2} = E$$

Järgnevalt on võimalik näidata elektrivälja energia

$$E = mc^2 = \frac{q\varphi}{2}$$

või elektrivälja potentsiaalse energia

$$E = mc^2 = q\varphi$$

„näitel“ väljapotentsiaali  $\varphi$  kasutamist

$$\frac{E}{q} = \varphi$$

mille korral saame eespool tuletatud võrduse

$$\frac{E}{2} = E$$

mõlemad pooled jagada elektrilaenguga:

$$\frac{1}{2} \frac{E}{q} = \frac{E}{q}$$

See annab meile järgmise tulemuse:

$$\frac{\varphi}{2} = \varphi$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled väljapotentsiaaliga  $\varphi$ :

$$\frac{\varphi^2}{2} = \varphi^2$$

ja viime 2-he teisele poole võrdusmärgi:

$$\varphi^2 = 2\varphi^2$$

Korrutame mõlemad pooled kahega:

$$2\varphi^2 = 4\varphi^2$$

ja tulemuseks saame:

$$\varphi^2 = \frac{4\varphi^2}{2}$$

Saadud avaldises võtame mõlemast poolest ruutjuure:

$$\varphi = \frac{2\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{\varphi + \varphi}{\sqrt{2}}$$

ja tulemuseks saame:

$$\sqrt{2}\varphi = \varphi + \varphi$$

Siinkohal tuleb märkida seda, et kui kehtib võrdus:

$$2\varphi = \varphi + \varphi$$

siis tegelikult ei saa enam kehtida avaldis:

$$\sqrt{2}\varphi \neq \varphi + \varphi$$

Järelikult peab olema tegemist komplekse võrrandiga  $z = a + ib$  ( kuna selles kehtib samuti „absurdne“ loogika  $i^2 = -1$  ):

$$\sqrt{2}\varphi = \varphi + i\varphi$$

ehk

$$\varphi = \frac{\varphi + i\varphi}{\sqrt{2}}$$

Selline tulemus kattub komplekset välja kirjeldavate võrranditega:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$$

ja

$$\varphi^* = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}$$

ning Higgsi väli ongi kompleksne väli.

Eespool esitatud analüüsi tõttu saame seisuenergia  $E$  võrduma panna järgmiselt:

$$E = mc^2 = \begin{cases} +\frac{mc^2}{2} \\ -\frac{mc^2}{2} \end{cases}$$

millest saame omakorda võrduse:

$$-\frac{mc^2}{2} = +\frac{mc^2}{2}$$

ehk

$$-mc^2 = +mc^2$$

ehk



$$0 = mc^2 + mc^2$$

Kuna energia avaldub:  $E = mc^2$ , siis võime kirjutada ka nii:

$$0 = E + E$$

ehk

$$0 = E_1 + E_2$$

Järgnevalt on võimalik näidata elektrivälja energia

$$E = mc^2 = \frac{q\varphi}{2}$$

või elektrivälja potentsiaalse energia

$$E = mc^2 = q\varphi$$

„näitel“ väljapotentsiaali  $\varphi$  kasutamist

$$\frac{E}{q} = \varphi$$

mille korral saame eespool tuletatud võrduse

$$0 = E + E$$

kirjutada ka kujule

$$0 = \frac{E}{q} + \frac{E}{q}$$

ehk

$$0 = \varphi + \varphi$$

Võrrandi lõplik kuju tuleb seega:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

ehk

$$\phi_1 + \phi_2 = 0$$

Kui me nüüd oletame, et  $\phi_1$  on seotud „konstandiga“  $\mu$ :

$$\phi_1 = \mu^2$$

ja  $\phi_2$  on seotud „konstandiga“  $\lambda$ :

$$\phi_2 = \lambda^3$$

siis see annab meile võrrandi kujuks:

$$\mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0$$

Viimast on võimalik matemaatiliselt välja arvutada järgmise „ekstreemumülesandega“:

$$\phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0$$

$$\mu^2 + \lambda\phi_{2,3}^2 = 0$$

$$\phi_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Saadud avaldist on võimalik esitada ka järgmiselt:

$$\phi = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Sellisele suurepärasele tulemusele on tegelikult võimalik jõuda ka otse eespool tuletatud võrrandist:

$$\phi_1 + \phi_2 = 0$$

ehk

$$\phi + \phi = 0$$

Näiteks viime ühe potentsiaali  $\phi$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\phi = -\phi$$

ja seejärel korrutame võrrandi mõlemad pooled potentsiaaliga  $\phi$ :

$$\phi^2 = -\phi^2$$

Kui me saadud võrrandi mõlemad pooled korrutame „konstandiga“  $\lambda$ :

$$\lambda\phi^2 = -\lambda\phi^2$$

siis võime võrrandi kuju esitada ka järgmiselt:

$$\lambda\phi^2 = -\mu^2$$

See annabki meile juba tuttava tulemuse:

$$\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

ehk

$$\phi = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

mis kattubki eespool tuletatud valemiga. Siinkohal on oluline märkida ka seda, et eelnevalt esitatud tuletuses nähtub ka selline seos:

$$-\lambda\phi^2 = -\mu^2$$

millest omakorda järeldeb

$$-\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

Kuid lihtsa võrduse põhjal

$$\phi^2 = -\phi^2$$

saame lõpptulemuseks ikkagi kvantväljade teooriast tuntud vaakumi potentsiaali  $\phi$  võrrandi:

$$\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

ehk

$$\phi = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Edasiseks analüüsiks võtame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

ja viime konstandi  $\lambda$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\lambda\phi^2 = -\mu^2$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$2\lambda\phi^2 = -2\mu^2$$

ja seejärel viime võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla:

$$\sqrt{2\lambda\phi^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Nendes võrrandites võib esineda vaakumi potentsiaal  $v$  või välja potentsiaal  $\phi$ :

$$\sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Tulemuseks saame Higgsi bosoni:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

mille massi suurust ei ole teada, sest konstant  $\lambda$  ei ole mõõdetav. Kuid Higgsi väli (ja koos sellega ka sümmeetria spontaane rikkumine) on otseselt tuletatav ka eespool tuletatud energia  $E$  võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

See tähendab, et viimasest saame tuletada otse Higgsi välja osakese, mis on omakorda lahutamatult seotud sümmeetria spontaanse rikkumisega. Näiteks eelnevalt esitatud energia  $E$  võrrand on tuletatud seosest:

$$0 = -\frac{c^2}{2} - c^2$$

Kui me nüüd korrutame selle võrrandi mõlemad pooled  $m^2$ -ga:

$$0 = -\frac{m^2 c^2}{2} - m^2 c^2$$

siis saame tulemuseks avaldise:

$$-\frac{m^2 c^2}{2} = m^2 c^2$$

milles me näeme, et  $c^2$  taandub võrrandist ilusti välja:

$$-\frac{m^2}{2} = m^2 \frac{c^2}{c^2}$$

ehk

$$-\frac{m^2}{2} = m^2$$

Massid ei saa omavahel võrrelda  $m^2 \neq \mu^2$  ja seetõttu toome sisse massi  $m$  uue tähistuse  $\mu$ :

$$m^2 \neq \mu^2$$

Saadud võrrandis

$$-\frac{m^2}{2} = \mu^2$$

viime  $-\frac{1}{2}$  teisele poole võrdusmärgi:

$$m^2 = -2\mu^2$$

ja viime võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

Saadud võrrandis võetakse ruutjuur negatiivsest arvust:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

ja selline tulemus kattub täielikult avaldisega, mis kirjeldaks Higgsi bosoni massi  $m$ . Higgsi boson on Higgsi välja osake ehk Higgsi välja „ergastatud olek“. Higgsi väli annab omakorda kõikidele elementaarosakestele massi, väljaarvatud footonitele ja gluonitele. Higgsi väli on lahutamatult seotud vaakumi spontaanse rikkumise kirjeldava matemaatilise ja füüsikalise süsteemiga.

Seisueenergia  $E$  uuest avaldisest:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

tuletasime omakorda skalaarbosoni massi  $m$  võrrandi:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

Järgnevalt näitamegi seda, et see massi  $m$  võrrand kirjeldabki tegelikult Higgsi bosonit, mis on Higgsi välja osake. Higgsi väli on omakorda lahutamatult seotud sümmeetria spontaanse rikkumisega. Näiteks Weinberg-Salami mudelis kirjeldab Higgsi välja skalaarne väli, mille kirjeldav lagranžiaani võrrand on:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4\right)$$

milles  $T$  on kineetiline energia,  $\mu$  on välja osakese mass ja  $\lambda$  on „teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant (neljane tipp)“. Kui  $\mu$  ja  $\lambda$  oleksid positiivsed reaalarvud, siis välja potentsiaal on minimaalne välja väärtusel  $\phi = 0$ . Sellisel juhul on tegemist vaakumiga. Kui aga  $\mu^2 < 0$  ehk mass oleks nagu imaginaarne (s.t. „mittefüüsikaline“), siis sellisel juhul tekib kaks välja potentsiaali miinimumi

$$\phi = \pm v$$

mis ei võrdu enam nullidega. Neid miinimumkohti ongi võimalik välja arvutada järgmise ekstreemumülesandega:

$$\frac{dV}{d\phi} = \mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0$$

$$\phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\mu^2 + \lambda \phi_{2,3}^2 = 0$$

$$\phi_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Saadud avaldist on võimalik esitada ka järgmiselt:

$$\phi = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Kuid edasiseks analüüsiks võtame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

ja viime konstandi  $\lambda$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\lambda \phi^2 = -\mu^2$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$2\lambda \phi^2 = -2\mu^2$$

ja seejärel viime võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla:

$$\sqrt{2\lambda \phi^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Nendes võrrandites võib esineda vaakumi potentsiaal  $v$  või välja potentsiaal  $\phi$ :

$$\sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Tulemuseks saamegi Higgsi bosoni:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

mille kirjeldav võrrand langeb väga täpselt kokku eespool tuletatud massi  $m$  võrrandiga. Higgsi bosoni massi suurust ei ole teada, sest  $\lambda$  ei ole mõõdetav. Kuid kõik eelnev tähendab seda, et Higgsi väli ( ja koos sellega ka sümmeetria spontaane rikkumine ) on otseselt tuletatavad kosmoloogias tuletatud energia  $E$  võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis näitab omakorda seda, et sümmeetria spontaane rikkumine on tingitud lihtsalt aegruumi struktuurist. See tähendab, et sümmeetria spontaane rikkumine ei ole tingitud mingisugusest konkreetsest füüsikalisest seaduspärasusest ( „pall liigub, kuna mina tõukasin seda palli“ stiilis ), vaid see on lihtsalt aegruumi omadus. „Vaakumit“ defineeritakse standardmudelil potentsiaalse energia miinimumina. Kuid eelnevalt saime kaks vaakumit, mille korral ei võrdu väli enam nulliga:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Selline tulemus on füüsikaliselt ebareaalne ( täpselt nagu imaginaarne masski ), kuid kõrgetel energiatel ei ole imaginaarse massiga juht ( ehk  $\mu^2 < 0$  korral ) oluliselt erinev sellest, kui  $\mu$  oleks positiivne reaalarv. Energia langedes läheb väli minimaalseima potentsiaalse energiaga olekusse, mida me mõistamegi „vaakumina“. Energia langedes „valib“ väli  $\phi$  „spontaanselt“ ühe kahest võrdväärsest vaakumist. Sümmeetria spontaanse rikkumise mudel seisnebki selles, et energia langedes muutub vaakumi sümmeetriline potentsiaal ebasümmeetriliseks.

Eespool me „tõdesime“, et Universumi punktsingulaarsuse korral:

$$\begin{cases} r = 0 \\ \rho = 0 \end{cases}$$

oli kogu Universumi ruumala  $r$  lõpmata väike ja aine-energia tihedus  $\rho$  võrdus nulliga. See tähendab füüsikaliselt seda, et Universumi punktsingulaarsuse „ajal“ ei eksisteerinud aega, ruumi ega materiat ning seetõttu võrduvad kõik väärtused lõppkokkuvõttes nulliga. Kuid kohe pärast Universumi inflatsioonilist paisumist ehk Universumi pindsingulaarsuse „ajal“:

$$\begin{cases} r = \infty \\ \rho = \infty \end{cases}$$

oli Universumi ruumala  $r$  lõpmata suur ja niisamuti ka aine-energia tihedus  $\rho$ . See tähendab füüsikaliselt seda, et pärast inflatsiooni ehk Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ tekkis koos aja ja ruumi tekkimisega ka materia ürgse energiavälja näol, milleks võiski olla Higgsi väli. See tähendab seda, et materia tekkis 0 sekundiga kohe vahetult pärast Universumi inflatsioonilist paisumist, mis väljendubki viimase avaldise eksisteerimises Universumi pindsingulaarsuse ajal.

Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ ehk 0 sekundit pärast Universumi inflatsioonilist paisumist eksisteeris „ürgne energiaväli“, mis võiski olla Higgsi väli. Seega tekkis Higgsi väli silmapilkselt ( s.t. 0 sekundiga ) koos Universumi aegruumiga. Vaakumit siis ei eksisteerinud ja sümmeetria ei olnud veel rikutud. Universumi kosmoloogilise paisumise tulemusena langes kõikjal energia ( temperatuur ), mille tõttu tekkis Universumis vaakum ja seega sai sümmeetria spontaanselt rikutud. Nõrk, tugev ja elektromagnetiline interaktsioon ehk põhimõtteliselt kogu meie tänapäevane materiaalne maailm tekkis kõik pärast vaakumi sümmeetria spontaanset rikkumist.

Aegruumi lõkspinnal on elektrijõud ja gravitatsioonijõud omavahel võrdsed. Selle võrduse valem tuletatakse võrrandist:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

milles  $e$  on elementaarne elektrilaeng:

$$e = 1,602 * 10^{-19} C$$

ja raadius  $R$  näitab sfäärilise kujuga aegruumi lõkspinna raadiust:

$$R = 1,3807 * 10^{-36} m$$

Kui me korrutame viimase avaldise  $4\pi$ -ga:

$$4\pi R = 1,73415 * 10^{-35} m$$

siis algebraline tulemus kattub „peaaegu“ Plancki pikkuse  $l$  väärtusega:

$$l_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616 * 10^{-35} \text{ m}$$

$4\pi R$  korral saaksime ka massi  $M$  väärtuse:

$$\frac{4\pi R}{G} c^2 = M = 2,3 * 10^{-8} \text{ kg}$$

mis kattub „peaaegu“ Plancki massi  $m$  väärtusega:

$$m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}} \approx 2,2 * 10^{-8} \text{ kg}$$

Elementaarlaengu  $e$ , Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki massi  $m$  omavahelised seosed näitavad seda, et mustade aukude füüsikast tuntud aegruumi lõkspinna füüsikaline olemus kattub tõepoolest Universumi punkt- ja pindsingulaarsuse füüsikaga. Sellest tulenevalt võis Universumi pindsingulaarsuse ajal eksisteerinud ürgsel energialväljal olla kõik Universumi interaktsioonid liitunud üheks jõuks ja energialvälja potentsiaali langus võis põhjustada „ilmselt“ interaktsioonide lahtutuse üksteisest. Seega võib ürgset energialvälja kirjeldada väga edukalt ka skalaarse välja lagranžiaani  $L$  võrrand:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left( \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \right)$$

Kuna Universumi punktisngulaarsuse „ajal“ oli Universumi paisumiskiirus lõpmata suur, mistõttu on seda võimalik füüsikaliselt tõlgendada Universumi inflatsioonilise paisumisena, siis seega on inflatsioonil Universumi fundamentaalses füüsikas viis väga tähtsat rolli:

1. Kogu meie materiaalne maailm ( ISEGI sümmeetria spontaanne rikkumine ) tekkis PÄRAST Universumi inflatsioonilist paisumist, mitte aga ENNE inflatsiooni ega inflatsiooni „AJAL“.
2. Universumi homogeensuse ja isotroopsuse paradoks on lahendatav just Universumi inflatsioonilise paisumisega.
3. Universumi ruumala oli juba pindsingulaarsuse „ajal“ ja on ka praegugi lõpmata suur. Näiteks galaktikaid on Universumis praegusel ajal lõpmata palju.
4. Aegruum ja Higgsi väli olid üldse esimesed „asjad/nähtused“, mis Universumis eksisteerisid.
5. Universumis puuduvad stabiilsed massiivsed magnetilised monopolid.

Universumi inflatsiooniline paisumine „lõppes“ just seetõttu, et Universum paisus sellega lõpmata suureks ja seega „polnud enam kuhugi paisuda“.

Kuna Universumi ruumala  $V$  oli juba pindsingulaarsuse „ajal“ lõpmata suur, siis seega ka materia osakesi oli/on Universumis lõpmata palju.

Materia välja kirjeldatakse füüsikalistes mudelites tavaliselt nii, et vaakumis oleks väli null. Seetõttu oletatakse, et vaakum on tekkinud spontaanselt:  $\phi_0 = +v$ . „Toome sisse“ uue välja  $\eta(x)$  mõiste:

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

Viimase avaldise paneme eespool esitatud skalaarse välja lagranžiaani  $L$  võrrandisse:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4\right)$$

Tulemuseks saame:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4 + \text{const}$$

millest järeldatakse seda, et väli  $\eta$  sai reaalse positiivse massi:

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Välja  $\eta$  potentsiaali miinimum ongi vaakumolek. Senimaani käsitlesime reaalses skalaarset Higgsi välja  $\phi$ , kuid edasiseks analüüsiks oletatakse, et Higgsi väli on „kompleksne skalaarväli“, mida kirjeldab järgmine lagranžiaani  $L$  võrrand:

$$L = (\partial_\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Oletame, et viimases on mass jälle taas imaginaarne ehk  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ . Sellisel juhul tuleb potentsiaali miinimum  $\phi$  komplekstasandil ringile raadiusega:

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

mis klapib täielikult eespool tuletatud avaldisega:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Järgnevalt defineeritakse  $\phi$  reaali- ja imaginaarosade asemel kaks uut välja, mis on mõlemad reaalsed ja mille minimaalne potentsiaal võrdub nulliga ehk vaakumolekuga:

$$\phi(x) = (\eta(x) + v)e^{i\xi(x)}$$

Ka selles saab väli  $\eta$  reaalse positiivse massi:

$$m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$$

mis kattub täielikult Higgsi skalaarbosonit kirjeldava võrrandiga.

Vektorvälja mass  $m_A$  tuletatakse elementaarosakeste füüsikas Higgsi välja ja elektromagnetvälja omavahelisest interaktsioonist, mida kirjeldab lagranžiaani  $L$  võrrand:

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

milles

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

on elektromagnetvälja lagranžiaan  $L$ . Seda interaktsiooni on võimalik alati teisendada:



$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi$$

ja

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$$

Oletame, et toimub sümmeetria spontaanne rikkumine ehk  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ . Toome sisse uued väljad, mille korral esineb vaakum välja väärtusel 0. Sellest tulenevalt teisendame vastavalt:

$$\phi \rightarrow (v + h(x))e^{i\xi(x)}$$

ja

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\xi$$

milles  $\xi$  nimetatakse „kalibratsioonteisenduse parameetriks“. Higgsi välja ja elektromagnetilise välja omavahelist interaktsiooni kirjeldava lagranžiaani  $L$  võrrand tuleb seega kujul:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 h^2 + v e^2 A_\mu^2 h - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

millest omakorda nähtubki skalaar  $h(x)$  massiga:

$$m_h = \sqrt{2\lambda v^2}$$

ja vektor  $A_\mu(x)$  massiga:

$$m_A = ev$$

Nende masside „tuletamine“ tähendab lühidalt seda, et Higgsi välja ja elektromagnetilise välja omavahelisest interaktsioonist  $L$  ( milles esineb kompleksne Higgsi väli ja massitu vektorväli ):

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

saime „Higgsi mehhanismi abil“ ühe reaalse Higgsi skalaari ja vektorvälja massi.

Nõrga jõu vahebosonid ( koos elektromagnetilise interaktsiooni vahebosoniga ) tuletatakse Weinberg-Salami mudelis läbi Higgsi mehhanismi, mis seisneb sümmeetria spontaanses rikkumises. Higgsi väli on kahekomponendiline ehk kompleksne väli:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Weinberg-Salami mudelis muudetakse kalibratsiooninvariantne lagranžiaan  $L$  ( mis kirjeldabki Higgsi välja ):

$$L = (\partial_\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2$$

lokaalselt kalibratsiooninvariantseks. Selleks teostatakse mudelis järgmine asendus:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + g\vec{\alpha} * \vec{W}_\mu + g'B_\mu$$

milles  $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ja  $\alpha_0$  on kalibratsioonteisenduse parameeter ning  $W_\mu^i$  ja  $B_\mu$  on vastavad „kompenseerivad väljad“, mis kalibratsioonteisendusel teisenevad järgmiselt:

$$\vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \times \vec{W})$$

ja

$$B_\mu \rightarrow B_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_0$$

Higgsi mehhanismi kasutades saadakse massid  $M$  järgmistele „kombinatsioonidele“:

$$W^+_\mu = W^1_\mu + iW^2_\mu$$

$$W^-_\mu = W^1_\mu - iW^2_\mu$$

$$M_W = \frac{1}{2}vg$$

$$Z^0_\mu = \frac{gW^3_\mu - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}$$

$$A_\mu = \frac{g'W^3_\mu + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$M_A = 0$$

Viimane arvatakse olevat footon, kuid massita vaheboson võib põhimõtteliselt olla ka gluuon. Masside  $M$  saamiseks pidi pöörama „vektorit“ ( $W^3, B$ ) nurga  $\theta_W$  võrra:

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}$$

$$A_\mu = \cos \theta_W * B_\mu + \sin \theta_W * W^3_\mu$$

$$Z_\mu = -\sin \theta_W * B_\mu + \cos \theta_W * W^3_\mu$$

Weinbergi nurga eksperimentaalne väärtus on  $\theta_W \approx 13,5^\circ$ . Koos eelnevalt esitatud massidega esineb ka Higgsi skalaarboson  $\sqrt{2\lambda v^2}$ , mis on Higgsi välja osake. Vaakumkeskmise  $v$  ja nõrga interaktsiooni seoskonstant (s.t. Fermi konstant)  $G$  on omavahel seotud:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

milles esinevad järgmised reaalsed väärtused:

$$v = 246 \text{ GeV}$$

$$M_W = \frac{37,3}{\sin \theta_W} \text{ GeV}$$

$$M_Z = \frac{74,6}{\sin\theta_W}$$

Siinkohal on oluline märkida seda, et kui siduda saadud väljad kalibratsiooninvariantset elektron-neutriino ja teiste vooludega, siis me näeme seda, et nõrga jõu vaheboson  $W^\pm$  on laetud elementaarlaenguga  $e$ :

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$$

Kogu eelnevalt kirjeldatud mudelit nimetatakse Weinberg-Salami mudeliks ehk elektronõrgaks ühendmudeliks, mis valmis juba 1967. aastal.

### 1.3.2 Interaktsioonid Universumis

Ürgses plasmas oli prootoneid natuke rohkem kui antiprootoneid. Ürgplasmas oli iga miljardi prooton-antiprotoni paari kohta olemas üks üleliigne prooton. Osakeste väga väike ülekaal antiosakestega võrreldes moodustabki kogu meie tajutava materiaalse maailma. Tegelikult ka elektron-positroni paaride tekkimisel on elektrone natuke rohkem. Negatiivselt laetud elektrone ja positiivselt laetud prootone on aga võrdselt.

Kvantmehaanika järgi on sisemine paarsus (+1 või -1) omane igale osakesele. See korrutub süsteemi orbitaalsest impulssmomendist tuleneva osaga:

$$P = \prod_s P_s (-1)^l$$

Nõrgas interaktsioonis on laenguline ja ruumiline paarsus maksimaalselt rikutud, kuid teistes interaktsioonides on need aga jäävad. Kombineeritud paarsus CP on „nende kahe teisenduse järjest rakendamise suhtes“ ning alguses arvati, et see on kõikjal jääv. Näiteks K-mesoni oleku korral:

$$K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (K^0 - \bar{K}^0)$$

( milles tähtedega tähistatakse tegelikult vastavaid olekufunktsioone ) on selle CP-paarsus -1

$$CPK_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{K}^0 - K^0) = -K_2^0$$

Just CP-jäävuse tõttu saab see „laguneda“ kolmeks  $\pi$ -mesoniks:

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

või

$$K_2^0 \rightarrow 3\pi^0$$

Kuid 1960. aasta paiku avastati CP-rikkumine, mille korral võib  $K_2^0$  laguneda väga väikese tõenäosusega ka kaheks  $\pi$ -mesoniks. CP-rikkumine on väga väike ( umbes 0,16% ). Selline äärmiselt väike CP-rikkumine on omane kogu nõrgale interaktsioonile. Osakeste ja antiosakeste maailmad ei ole just CP-rikkumise tõttu vastastikku täielikult sümmeetrilised. See tähendab, et CP-rikkumise tõttu tekkis pärast Suurt Pauku aine-antiaine suhtes ebasümmeetriline maailm, mis ei saanud täielikult footoniteks annihileeruda. CP-rikkumine on põhjustatud vaakumi sümmeetria spontaanses rikkumisest, mida kirjeldab skalaarse välja lagranžiaani võrrand:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left( \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \right)$$

Nõrk interaktsioon toimib kõigile osakestele ( peale footoni ja gluuoni ). Nõrga jõu toimetel muutuvad kvargid üksteiseks, mille korral nende koguarv säilib. Selles esineb elektron alati paaris elektron-neutriinoga, müüon oma neutriinoga ja tauon omaga. Kolme perekonna kvarkide omavahelist segunemist nõrgas interaktsioonis kirjeldab nn Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ( CKM ) maatriks, mille komponendid on aga järgmised:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,22 & 0 \\ 0,22 & 0,97 & 0,04 \\ 0 & 0,04 & 1 \end{pmatrix} * e^{i\delta} \begin{pmatrix} d \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Selles on  $d'$  ja  $s'$  „segud kahest kvargist“:

$$d' = d \cos\theta_c + s \sin\theta_c$$

$$s' = -d \sin\theta_c + s \cos\theta_c$$

„Cabibbo nurk“ on  $\theta_c$  ja selle väärtus on umbes  $13^\circ$ . CKM-maatriks on kompleksne, milles esineb väike parameeter  $\delta$ , mis ei võrdu nulliga. Selle parameetri väärtuse saabki siduda CP-sümmeetria rikkumisega. See tähendab seda, et teoorias on CP-rikkumine väljendatav teguriga  $e^{i\delta}$  CKM-maatriksis, mis näitab omakorda seda, et CP-rikkumine saab esineda ainult kolme fundamentaalosakeste perekonna olemasolu korral.

Vaakumit defineeritakse standardmudelis potentsiaalse energia miinimumina, mis võrdub nulliga. Kuid eelnevalt saime kaks vaakumit, mille korral ei võrdu väli nulliga:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Selline tulemus on füüsikaliselt ebareaalne ( täpselt nagu imaginaarne masski ), kuid kõrgetel energiatel ei ole imaginaarse massiga juht ( ehk  $\mu^2 < 0$  korral ) oluliselt erinev sellest, kui  $\mu$  oleks positiivne reaalarv. Energia langedes läheb väli minimaalseima potentsiaalse energiaga olekusse, mida me mõistamegi „vaakumina“. Energia langedes „valib“ väli  $\phi$  „spontaanselt“ ühe kahest võrdväärsest vaakumist. Sümmeetria spontaanses rikkumise mudel seisnebki selles, et energia langedes muutub vaakumi sümmeetriline potentsiaal ebasümmeetriliseks.

Vaakumis peab väli võrduma nulliga. Seetõttu oletatakse, et vaakum on tekkinud spontaanselt  $\phi_0 = +v$ , mille korral tuuakse sisse ka uue välja  $\eta(x)$  mõiste:

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

Eespool me järeldasime, et väli  $\eta$  sai reaalse positiivse massi:

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Välja  $\eta$  potentsiaali miinimum ongi vaakumolek. Senimaani käsitlesime reaalsel skalaarset Higgsi välja  $\phi$ , kuid tegelikult on Higgsi väli „kompleksne skalaarväli“, mida kirjeldab lagranžiaani  $L$  võrrand:

$$L = (\partial_\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Kui viimases avaldises on mass imaginaarne ehk  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ , siis sellisel juhul tuleb potentsiaali miinimum  $\phi$  „komplekstasandil ringile raadiusega“:

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

mis kattub täielikult eespool tuletatud avaldisega:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Higgsi väli on lahutamatult seotud sümmeetria spontaanse rikkumisega ehk  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ . Kuna vaakum saab esineda ainult välja väärtusel 0, siis peame sisse tooma uued väljad, mis on reaalsed. See tähendab seda, et defineerime potentsiaali  $\phi$  reaali- ja imaginaarosa asemele kaks uut välja, mis on mõlemad seekord reaalsed ja mille minimaalne potentsiaal võrdub seekord nulliga ehk vaakumolekuga:

$$\phi(x) = (\eta(x) + v)e^{i\xi(x)}$$

Ka selles saab väli  $\eta$  reaalse positiivse massi:

$$m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$$

mis kattub täielikult Higgsi skalaarbosoni kirjeldava võrrandiga.

Tuletame meelde, et seisuenergia  $E$  avaldisest:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

tuletasime omakorda skalaarbosoni massi  $m$  võrrandi:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

mis kirjeldab Higgsi bosoni ehk Higgsi välja osakest. See tähendab seda, et Higgsi väli ( ja koos sellega ka sümmeetria spontaanse rikkumine ) on otseselt tuletatavad eespool tuletatud energia  $E$  võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

millest omakorda järeldub see, et seisuenergia  $E$  võrrandist peab olema võimalik tuletada ka kõik teised interaktsiooni liigid, mis Universumis üldse eksisteerivad. See tähendab seda, et seisuenergia  $E$  avaldis määrab ära kogu meie materiaalse maailma struktuuri ehk võimalike interaktsioonide paljususe ja erinevuse kogu Universumis.

Kui me defineerisime potentsiaali  $\phi$  reaali- ja imaginaarosade asemel kaks uut välja, mis on mõlemad reaalsed ja mille minimaalne potentsiaal võrdub nulliga ehk vaakumolekuga, siis sellisel juhul kattus üks reaalne väli Higgsi väljaga, kuid teine reaalne väli ongi juba seotud elektromagnetilise, nõrga ja tugeva interaktsiooniga, mis moodustavad kõik korraga kogu meie materiaalse maailma ehituse ja funktsioneerimise.

Eelnevalt me nägime, et seisuenergia avaldis

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

tuleneb otseselt aja ja ruumi eksisteerimisest, mis väljendub Universumi kosmoloogilise paisumisenä. Energia ja mass on seotud materiaga ( s.t. aine ja väljaga ). Kogu järgneva matemaatilise ja füüsikalise analüüsiga me näeme seda, et seisuenergia  $E$  võrrandist on võimalik tuletada kõik interaktsiooni liigid, mis Universumis üldse eksisteerivad. See tähendab seda, et seisuenergia  $E$  avaldis määrab ära kogu meie materiaalse maailma struktuuri ehk võimalike interaktsioonide paljususe ja erinevuse Universumis. Kogu järgnev analüüs näitab meile üsna selgelt seda, et seisuenergiast  $E$  tuletatavad „matemaatilis-füüsikalised operatsioonid/süsteemid ( ehk lihtsalt tuletised )“ ja nende variatsioonide piiratud rikkus realiseeruvad kõik Universumis erinevateks interaktsioonideks. See, et milline on kogu meie materiaalne maailm, määrabki ära seisuenergiast  $E$  tuletatavad matemaatilis-füüsikaliste operatsioonide/süsteemide ehk tuletiste variatsioonid, mille arv on nii teoreetiliselt kui ka tegelikkuses piiratud. Näiteks arvu nelja:

$$x_{1,2,3,4} = 4$$

on matemaatilisel võimalik saada ainult neljal erineval viisil ehk variatsioonil:

$$x_1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$x_2 = 2 + 1 + 1$$

$$x_3 = 2 + 2$$

$$x_4 = 3 + 1$$

Selleks, et vältida lõpmatute versioonide tekkimist, tuleb kasutada ainult positiivseid ja reaalseid täisarve ja nullisid mitte arvestada.

Universumis on olemas nelja põhiliiki interaktsioone. Nendest energiaväljad on järgmised:

1. Elektromagnetiline jõud ( elektrivälja ja magnetvälja vahendavad massita footonid )
2. Tugev jõud ( mida vahendavad massita gluuonid )
3. Nõrk jõud ( mida vahendavad väga rasked kolm vahebosonit )

Nendele kolmele energiaväljale tasub eraldi lisada tegelikult veel kolm liiki energiavälja:

1. Higgsi väli ( mis annab kõikidele elementaarosakestele massi, väljaarvatud footonile ja gluuonile )
2. Osakese spinn tekitab magnetvälja ( magnetvälja tekitab ka elektrilaengu liikumine ruumis )

3.  $\pi$ -mesonite väli nukleonide vahelises ruumis ( gluonid eksisteerivad kvarkide vahelises ruumis )

Gravitatsiooniväli ei ole energiaväli ja seetõttu ei vahenda seda ükski kvantosake. Kvantgravitatsiooni ja seega gravitone pole tegelikult olemas. Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverus ehk seega „aegruumi väli“.

Kogu meie materiaalne maailm on „tuletatav“ ühest ainsast võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Kui elusorganismi kõiki tunnuseid määrab ära geenides olev DNA, siis kogu meie materiaalse maailma ehituse ja funktsioneerimise määrab ära just see viimane võrrand.

Materia kolm põlvkonda  
(fermionid)

	I	II	III	
mass →	2.4 MeV/c <sup>2</sup>	1.27 GeV/c <sup>2</sup>	171.2 GeV/c <sup>2</sup>	0
laeng →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spinn →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nimi →	u-kvark	c-kvark	t-kvark	footon
	<b>u</b>	<b>c</b>	<b>t</b>	<b><math>\gamma</math></b>
	d-kvark	s-kvark	b-kvark	gluon
Kvargid	<b>d</b>	<b>s</b>	<b>b</b>	<b>g</b>
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	$Z^0$
	elektron-neutriino	müü-neutriino	tau-neutriino	Z-boson
	<2.2 eV/c <sup>2</sup>	<0.17 MeV/c <sup>2</sup>	<15.5 MeV/c <sup>2</sup>	91.2 GeV/c <sup>2</sup>
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>e</b>	<b><math>\mu</math></b>	<b><math>\tau</math></b>	<b><math>W^\pm</math></b>
Leptonid	elektron	müüon	tauon	W-boson
	0.511 MeV/c <sup>2</sup>	105.7 MeV/c <sup>2</sup>	1.777 GeV/c <sup>2</sup>	80.4 GeV/c <sup>2</sup>
	-1	-1	-1	$\pm 1$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
				Kalibratsioonibosonid

Joonis Standardmudeli elementaariosakesed ( peale Higgsi bosoni )

Foto allikas: [https://et.wikipedia.org/wiki/Osakestef%C3%BC%C3%BCsika\\_standardmudel](https://et.wikipedia.org/wiki/Osakestef%C3%BC%C3%BCsika_standardmudel)

Energia E ja massi m omavahelise seose:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

ruut

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{4} = m^2 c^4$$

on esitatav ka relativistlikust mehaanikast tuntud keha relativistliku koguenergia E<sup>2</sup> võrrandiga:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

mis tähendab ka seda, et viimasest on võimalik omakorda uuesti tuletada seisenergia  $E$  võrrand. Selleks teostame keha relativistliku koguenergia võrrandis matemaatilise teisenduse:

$$E^2 = p^2 c^2 + p^2 c^2 = c^2(p^2 + p^2) = c^2 2p^2$$

millest saame impulsi  $p$  ja energia  $E$  vahelise seose:

$$\frac{E^2}{c^2} = 2p^2$$

Järgnevalt arvestame keha seisenergia  $E = mc^2$  matemaatilise definitsiooniga:

$$\frac{m^2 c^4}{c^2} = 2p^2$$

mistõttu  $c^2$  taandub võrrandist ilusti välja:

$$m^2 c^2 = 2p^2$$

Kui me viime massi  $m$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$mc^2 = E = \frac{2p^2}{m}$$

siis saame seisenergia  $E$  võrrandi kujuks:

$$E = mc^2 = \frac{2p^2}{m}$$

Viimases võrrandis on valguse impulss  $p = mc$ :

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{p^2}{m} = \frac{m^2 c^2}{m} = mc^2$$

Sellest tulenevalt saame „kineetilise energia seose seisenergiaga“ järgmiselt:

$$\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis näitab seda, et keha seisenergia  $E = mc^2$  on tegelikult oma olemuselt kineetiline energia, mis omakorda tuleneb Universumi kosmoloogilisest paisumisest:

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Siinkohal tasub märkida seda, et kui me võrrandi:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

kõik pooled tõstame ruutu:



$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{4} = m^2 c^4$$

ja võtame saadud võrrandis ruutjuure ehk lähme uuesti tagasi võrrandi esialgsele kujule:

$$\sqrt{E^2} = \sqrt{\frac{m^2 c^4}{4}} = \sqrt{m^2 c^4} = E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

siis tulemuseks saame positiivse avaldise:

$$E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis pole enam negatiivne. See on tähelepanuväärne tulemus. Viimase võrrandi ruutu:

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{4} = m^2 c^4$$

võime matemaatiliselt teisendada ka järgmiselt:

$$\frac{E^2}{2} = 2E^2 = E^2 + E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2$$

mistõttu saame tuttava seose:

$$\frac{E^2}{2} = E^2$$

Seda võime omakorda teisendada:

$$E^2 = 2E^2 = E^2 + E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2$$

mistõttu saame võrrandi lõplikuks kujuks:

$$E^2 = E^2$$

Tasub märkida ka seda, et valguse osakese ehk footoni seisumass võrdub nulliga ja seega kirjeldab footoni energiat võrrand:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = 0 + m^2 c^4$$

ehk

$$E = mc^2$$

mis ühtib ka kvandienergia võrrandiga. Eespool tuletatud seisueenergia E võrrandit:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = m^2 c^4$$

ehk

$$E^2 - p^2 c^2 - m^2 c^4 = 0$$

kasutatakse ka osakeste füüsikas kvandienergia E välja arvutamiseks. Kuid sellest on võimalik tuletada ka aatomi tuumapotentsiaali U võrrand, millest on võimalik omakorda järeldada kõikide Universumis võimalike eksisteerivate interaktsioonide ( vahebosonite ) olemasolu. Näitame seda illustratiivselt järgmiselt. Näiteks viimases avaldises esitatakse osakese energia E ja impulss p kvantmehaanikast tuntud diferentsiaaloperaatorite kaudu:

$$E \rightarrow \hat{H} = -\frac{h^2}{2M} \Delta + U(\vec{r}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

ja

$$p^2 \rightarrow \hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \nabla^2$$

Tulemuseks saame:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi - m^2 c^4 \psi = 0$$

Kui me nüüd jagame saadud võrrandi mõlemad pooled Plancki konstandi ruuduga  $\hbar^2$  ja valguse kiiruse ruuduga  $c^2$ , siis saame viimase võrrandi kujuks:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \nabla^2 \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Seda võrrandit nimetatakse Klein-Gordoni võrrandiks, mis on tuletatav ka Euler-Lagrange'i võrrandist:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

võttes lagranžiaani kujul:

$$L = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \mu^2 \psi^2 \right)$$

Näiteks võib viimast võrrandit esitada ka järgmiselt:

$$-\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) + \mu^2 \psi = 0$$

ehk

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) - \mu^2 \psi = 0$$

Tehes ära ühe spetsiifilise matemaatilise teisenduse:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) \rightarrow \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \square \psi$$

saamegi eespool esitatud Klein-Gordoni nimelise võrrandi:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi - \mu^2 \psi = 0$$

ehk

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \nabla^2 \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Mõnikord esitatakse seda ka järgmiselt:

$$(-m^2) \psi(x) = 0$$

milles

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \nabla^2 \psi = 0$$

ja dimensionaalselt on  $c = h = 1$ . Kuid edasiseks analüüsiks oletame, et

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0$$

ehk käsitleme ajas muutumatut olukorda:

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi(\vec{r})$$

Tulemuseks saame lihtsama võrrandi:

$$\nabla^2 \phi - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = 0$$

ehk

$$\left( \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{h^2} \right) \phi = 0$$

Järgnevalt oletame, et viimane avaldis ei võrdu enam nulliga, vaid mingi „konstandiga“  $g$ :

$$\left( \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{h^2} \right) \phi = g \delta(x)$$

Sellisel juhul saame kasutada matemaatikast tuntud Fourier'i integraale:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k e^{ik \cdot x} \tilde{\phi}(k)$$

ja

$$\tilde{\phi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 x e^{-ik \cdot x} \phi(x)$$

mistõttu saame võrrandi kujuks:

$$(-k^2 - \mu^2) \tilde{\phi}(k) = \frac{g}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$$

milles omakorda tähistab  $\mu$

$$\mu = \frac{mc}{h}$$

Teisendades viimast saadud võrrandit:

$$\tilde{\phi}(k) = -\frac{g}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{k^2 + \mu^2}$$

saame Yukawa tuumapotentsiaali võrrandi:

$$\phi(x) = -\frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

ehk

$$\phi(x_2) = -\frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\mu |x_2 - x_1|}}{|x_2 - x_1|}$$

mis kirjeldab aatomite tuumajõude ja üldse tugevat interaktsiooni. Peab märkima, et viimane potentsiaali  $\phi(x)$  avaldis tuletati Fourier'i integraalide  $V(r)$  abil:

$$\begin{aligned}
V(r) &= -g^2 \int \frac{e^{ikr}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2 + (\alpha m)^2} d^3k = \\
&= -\frac{g^2}{(2\pi)^3} \int e^{ikr} \frac{4\pi}{k^2 + (\alpha m)^2} d^3k = -g^2 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ikr}}{k^2 + (\alpha m)^2} = \\
&= -g^2 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(ikr)}{k^2 + m^2} = -g^2 4\pi \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 du \frac{e^{ikru}}{k^2 + m^2} = \\
&= -g^2 4\pi \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^2} \frac{\sin(kr)}{k^2 + m^2} = -g^2 4\pi \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^2} \frac{e^{ikr}}{k^2 + m^2} = \\
&= -g^2 4\pi \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk}{(2\pi)^2} \frac{e^{ikr}}{(k + im)(k - im)} = -g^2 4\pi \frac{1}{ir} \frac{2\pi i}{(2\pi)^2} \frac{im}{2im} e^{-rm} = \\
&= -g^2 4\pi \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-rm}}{r} = -g^2 \frac{e^{-rm}}{r} = -g^2 \frac{e^{-\frac{rmc}{h}}}{r}
\end{aligned}$$

milles  $\alpha = 1$  ja  $h = c = 1$ . Täpselt samale tulemusele saame me tegelikult ka siis, kui teostame eespool tuletatud võrrandis järgmised matemaatilised teisendused:

$$\nabla^2 \phi - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \phi - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = 0$$

millest omakorda saame:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{m^2 c^2}{h^2} r^2 \phi$$

Viimase võrrandi mõlemast poolest võtame ruutjuure ehk kaotame ära ruudud:

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{1}{r} \phi \frac{mc}{h} r$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled -1-ga läbi:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\phi}{r} \frac{mc}{h} r$$

„Negatiivsed märgid“ viime kõik ühele poole võrdusmärgi:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi}{r} \left( -\frac{mc}{h} r \right)$$

ehk seega saame

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\phi}{r} \left( -\frac{mc}{h} r \right)$$

mis annab meile lõpuks järgmise väga olulise diferentsiaalvõrrandi:

$$\partial\phi = -\phi\left(-\frac{mc}{h}\partial r\right)$$

ehk

$$d\phi = -\phi\left(-\frac{mc}{h}dr\right)$$

Kuna saadud diferentsiaalvõrrandis saame  $\phi$  „asendada“ nii negatiivse elektrivälja potentsiaalse energiaga:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

kui ka positiivse elektrivälja potentsiaalse energiaga:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

siis võime diferentsiaalvõrrandi kirjutada ka kujul:

$$d\phi = \phi\left(-\frac{mc}{h}dr\right)$$

Sellise võrrandi lahendiks ongi:

$$\phi(r) = \phi e^{-\frac{mc}{h}r}$$

milles  $e$  on Euleri arv. Kui me nüüd avaldame  $\phi$  „negatiivse elektrivälja potentsiaalse energiana“  $U = U(r)$ :

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}e^{-\frac{mc}{h}r}$$

või negatiivse elektrivälja potentsiaalina:

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r}e^{-\frac{mc}{h}r}$$

siis me olemegi tulatanud Yukawa tuumapotentsiaali  $\phi(r)$  võrrandi:

$$\phi(r) = -\frac{g^2}{r}e^{-\frac{mc}{h}r}$$

ehk

$$\phi(r) = -\frac{g}{r}e^{-\frac{mc}{h}r}$$

kuna konstandi  $g$  ja elementaarlaengu  $e$  vahel esineb ka selline seos:

$$g^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

ehk

$$g = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$$

Selline lõpptulemus kattub täielikult avaldisega, mis kirjeldab tugeva jõu välja potentsiaali  $U$  ehk  $\phi$ . Kuid tuletatud potentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{h}}$$

järeldubki Universumis kõik-võimalikud interaktsiooni tüübid ja seda vahebosonite masside näol.

See tähendab seda, et selline lõpptulemus kirjeldab tugeva jõu välja potentsiaali  $U$  ehk  $\phi$ , kuid samas tuletatud potentsiaali  $U$  võrrandist järeldub ka Universumi kõik-võimalikud interaktsiooni liigid ja seda vahebosonite masside näol. Selles mõttes on potentsiaali  $U$  võrrand „kahe-tähenduslik“.

Kõik need interaktsioonid on üksteisest lahutamatult seotud ehk „üks ei saa eksisteerida ilma teiseta“. Näiteks saadud potentsiaali võrrandil on olemas täpselt neli lahendit ehk neli ainuvõimalikku tõlgendust, mida me kohe ka järgnevalt näitamegi. Näiteks tõeliselt tugev interaktsioon avaldubki just kvarkide vahel. Eespool tuletatud potentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{h}}$$

saame korraga nii elektromagnetilise kui ka tugeva interaktsiooni vahebosonid. Näiteks kui seisumass  $m$  võrduks nulliga ehk  $m = 0$ , siis saame potentsiaali  $U$  käiguks:

$$U \propto \frac{1}{r} e^0 = \frac{1}{r}$$

Elektromagnetilise interaktsiooni vahebosoniks on footon, mille seisumass (ja ka elektrilaeng) võrdubki nulliga, mistõttu on elektromagnetilise interaktsiooni mõjuraadius lõpmatu:

$$U \propto \frac{1}{r}$$

See oli üks lahend. Kuid eespool tuletatud potentsiaali  $U$  võrrandil

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{h}}$$

on olemas veel kolm reaalist lahendit. Näiteks kui viimases avaldises võrdub vahebosoni kiirus valguse kiirusega ehk  $v = c$ , siis on tegemist seisumassita vahebosoniga, mille potentsiaali  $U$  käik võibki olla:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{h}}$$

mitte enam

$$U \propto \frac{1}{r}$$

Kuna interaktsiooni mõjuraadius  $r_0$  ja vahebosoni lainepikkus  $\lambda$  on potentsiaali  $U$  võrrandis põhimõtteliselt üksteisest eristamatud  $r_0 = \lambda$ , siis saame seisumassita vahebosoni (kineetilise)-massi välja arvutada tuntud lainepikkuse võrrandi kaudu:

$$m = \frac{h}{r_0 c}$$

Kuna kvarkid eksisteerivad prootonites ja neutronites, mille mõõtmed on umbes  $r_0 \approx 10^{-15} \text{ m}$ ,

siis sellisel juhul võib tegemist olla „gluoniga“, mis vahendab just kvarkide vahelist tugevat interaktsiooni ja mille seisumass võrdukski nulliga. Kui aga potentsiaali  $U$  võrrandis

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mv}{h}}$$

ei võrdu vahebosoni kiirus enam valguse kiirusega  $c$  ehk  $v = v$ , siis seega vahebosonil on reaalselt olemas seisumass. Sellisel juhul me vahebosoni massi teada ei saaks, kuid tema impulssi  $p$  saame välja arvutada küll:

$$mv = p = \frac{h}{r_0}$$

Sellise tõlgenduse järgi võib tegemist olla  $\pi$ -mesoniga ( s.t.  $\pi^{\pm 0}$  ), mille seisumass ei võrdu enam nulliga ja mis vahendab nukleonide ( s.t. prootonite ja neutronite ) vahelist tugevat interaktsiooni ehk antud juhul tuumajõudu. Prootonite ja neutronite hulkade mõõtkava on aatomite tuumades enamasti  $r_0 \approx 10^{-14} m$ . Sellegipoolest arvatakse, et  $\pi$ -mesoni mass võib võrdsuda  $273 m_e$  ( s.t. 273 elektroni massi ).

Tuumapotentsiaali  $\phi$  võrrandis:

$$\phi(r) = -\frac{g}{r} e^{-\frac{mc}{h}r}$$

esineb seose konstant  $g$ , mis on tegelikult seotud ka nõrga interaktsiooni vahebosoni massiga  $M_W$ :

$$g = \frac{2M_W}{v}$$

ehk

$$\frac{1}{2}vg = M_W$$

Viimases on  $v$  vaakumi potentsiaal. Läbi seose konstandi  $g$  on tuumapotentsiaali avaldis seotud ka nõrga interaktsiooniga. Nõrga jõu vahebosonitel on olemas seisumassid ja elektrilaengud. Värvilaengud neil puuduvad. Nõrga jõu mõjuraadius on  $3 * 10^{-17} m$  ( mõnedel andmetel isegi  $10^{-18} m$  ) ja nõrgal jõul puudub „tsentraalsümmeetrilisus“. Näiteks gravitatsiooniväli, elektriväli, teatud mõttes ka magnetväli ning tugeva jõu väli on kõik „tsentraalsümmeetrilised“ väljad. Nõrga jõu väli eksisteerib kõikjal ja alati, kuid nõrga jõu mõjuraadiust  $r_0$  saab välja arvutada ikkagi tuumapotentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mv}{h}}$$

ehkki nõrgal jõul puudub selline potentsiaali käik.

Viimases valemis esineb kvantmehaanikast tuntud de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  avaldis:

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

milles  $p$  on impulss. Kui me tõstame selle võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$m^2 v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2}$$

ja seejärel jagame mõlemad pooled  $2m$ -ga, siis saame kineetilise energia  $E$  avaldise:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2}{2m} \frac{1}{\lambda^2}$$

Kuna aatomis võib näiteks elektroni kineetilist energiat väljendada elektronvoltides eV:

$$E = eU$$

siis saame energia E võrrandi kujuks ka:

$$eU = \frac{h^2}{2m} \frac{1}{\lambda^2}$$

See tähendab ka seda, et elektroni lainepikkus  $\lambda$  aatomis avaldub:

$$\lambda^2 = \frac{h^2}{2me} \frac{1}{U}$$

ehk

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2me}} \frac{1}{\sqrt{U}}$$

Viimasest ongi näha, et osakese lainepikkus  $\lambda$  võib seotud olla ka elektrilise pingega U:

$$\lambda \propto \frac{1}{\sqrt{U}}$$

### 1.3.3 Higgsi boson ja elektromagnetiline interaktsioon I

Energiavälja massi m avaldist võime põhimõtteliselt tuletada ka elektrivälja energia E

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

ja eespool mainitud seisueenergia E

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2 = E$$

valemite omavahelisest võrdusest:

$$-\frac{mc^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

Näiteks võtame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\frac{m^2 c^4}{4} = \frac{q^2 \varphi^2}{4}$$

korrutame võrrandi mõlemad pooled kahega 2 ja arvestame kvantväljade teoorias tuletatud valguse



kiiruse  $c$  ja Plancki konstandi  $h$  vahelise seosega:

$$\frac{1}{c^4} \approx \bar{h} = \frac{h}{2\pi}$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{m^2}{2} = \bar{h} \frac{q^2}{2} \varphi^2$$

Järgnevalt oletame, et elektrilaeng  $q$  võrdub elementaarlaenguga ehk konstandiga  $e$ :

$$\frac{m^2}{2} = \bar{h} \frac{e^2}{2} \varphi^2$$

ja sellest tulenevalt tekkis meil üldisem konstant, mida tähistame tähega  $\lambda$ :

$$\bar{h} \frac{e^2}{2} = \text{const} = \lambda$$

See annab meile võrrandi üldkujuks:

$$\frac{m^2}{2} = \lambda \varphi^2$$

Viime kahe 2 võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$m^2 = 2\lambda \varphi^2$$

ja võtame võrrandi mõlemast poolest ruutjuure:

$$m = \sqrt{2\lambda \varphi^2}$$

Kui nüüd viimases võrrandis oleks elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  asemel tegemist energiavälja potentsiaaliga  $v$ :

$$m = \sqrt{2\lambda v^2}$$

siis tulemus kattuks samuti avaldisega, mis kirjeldaks Higgsi bosoni massi  $m$ . Siinkohal on kindlasti oluline märkida seda, et eespool tuletatud konstandi  $\lambda$  võrdus:

$$\lambda = \bar{h} \frac{e^2}{2} = \text{const}$$

ei ole tegelikult kvantmehaanikas üldiselt tuntud de Broglie lainepikkus  $\lambda$ :

$$\lambda = \bar{h} \frac{1}{p}$$

See on „teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp )“, mis tegelikult Higgsi välja korral ei võrdu:

$$\lambda = \text{const} \neq \bar{h} \frac{e^2}{2} = \text{const}$$

Kui aga siiski peaks kehtima seos:

$$\frac{1}{p} = \frac{e^2}{2}$$

siis me näeme omakorda selle seost kvantväljade teoorias tuletatud elementaarlaengu  $e$  ja impulssi  $p$  omavahelise seosega:

$$\frac{1}{3p^2} = e$$

Näiteks kui me võrrandit

$$\frac{1}{p} = \frac{e^2}{2}$$

diferentseerime ainult elementaarlaengu  $e$  järgi  $y = \frac{e^2}{2}$ :

$$y' = \frac{2e}{2} = e$$

siis me saame tulemuseks:

$$\frac{1}{p} = e$$

Kui me aga kvantväljade teoorias tuletatud võrrandit

$$\frac{1}{3p^2} = e$$

ehk

$$\frac{1}{e} = 3p^2$$

diferentseerime impulssi  $p$  järgi  $y = 3p^2$ :

$$y' = 6p$$

siis saame võrrandi:

$$\frac{1}{e} = 6p$$

ehk

$$\frac{1}{p} = 6e$$

Kui me nüüd võrdleme viimast võrrandit eespool tuletatud seosega:

$$\frac{1}{p} = e$$

siis nende kahe seose vahe on ainult kuuekordne, mis on erakordne kokkulangevus. Kuuekordne elementaarlaeng  $6e$  omab tegelikult ühte kindlat elektrilaengu  $q$  väärtust:

$$\frac{1}{p} = 6e = \text{const} = q$$

Seetõttu võib see siiski võrduda ka võrrandiga:

$$\frac{1}{p} = e$$

kuid seda ainult juhul, kui elementaarse elektrilaengu  $e$  asemel on võrrandis lihtsalt elektrilaeng  $q$ :

$$\frac{1}{p} = q$$

Kui me aga jagame võrduse

$$\lambda = \bar{h} \frac{e^2}{2} = \text{const}$$

mõlemad pooled elementaarlaenguga  $e$ :

$$\frac{\lambda}{e} = \bar{h} \frac{e}{2}$$

ja massiga  $m = M$ :

$$\frac{\lambda}{me} = \bar{h} \frac{e}{2M}$$

siis tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{\lambda}{me} = \frac{\bar{h} e}{2M}$$

milles ühel poolel esineb näiteks elektroni spinni magnetmoment:

$$\frac{\bar{h} e}{2M} = \mu_B$$

kui  $M$  oleks elektroni mass. Elektroni magnetmoment on teatavasti võrdne Bohri magnetroniga, mille väärtus on:

$$\mu_B = 9,27 * 10^{-24} \text{Am}^2$$

Siinkohal tasub märkida seda, et ruumis liikuv elektrilaeng tekitab magnetvälja, kuid samas võib magnetvälja tekitada ka elementaarosakese spinn. Kuna osakese spinn tekitab ruumis magnetvälja, siis selline magnetväli on „kvantmehaanilise päritoluga“.

Spinni magnetväli ei ole tuletatav Maxwelli võrranditest ega isegi kvantelektrodünaamikast. Spinni magnetväli tuletatakse üldiselt kvantmehaanikast, mis on teatud spetsiifiliste katsetega kooskõlas. Näiteks kvantmehaanikas oletatakse, et elektroni spinn ja impulsimoment on mõlemad samasuguste matemaatiliste omadustega ja seetõttu on spinni kirjeldavaid lainefunktsioone võimalik leida omaväärtusülesandest:

$$\hat{s}^2 \chi = h^2 s(s+1) \chi$$

ehk

$$\hat{s}_z \chi = h \sigma \chi$$

milles kirjeldab kvantarv  $s$  elektroni spinni ja kvantarv  $\sigma$  kirjeldab spinni projektsiooni  $z$ -teljele, kusjuures:

$$\sigma = +s, \dots, -s$$

Elektroni spinni kirjeldav kvantarv  $s$  on väärtusega:

$$s = \frac{1}{2}$$

kuna elektroni projektsioonide arv on aatomis  $2s + 1$ . Sellest tulenevalt saame spinni projektsiooni väärtusteks:

$$\sigma = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Kvantmehaanikas saab spinni väärtused olla üldse täis- või poolarvulised:

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

Spinniga on seotud ka magnetmoment. Näiteks Sterni-Gerlachi katse tulemustest järeldub kindel seos:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{M} \vec{s}$$

Viimane sarnaneb nii orbitaalse magnetmomendi kui ka orbitaalse momendi seosega, kui ei oleks jagatist  $\frac{1}{2}$ . Spinni magnetmomendi projektsioon z-teljele tuleb seega:

$$(\vec{\mu}_s)_z = -\frac{eh}{M} \sigma$$

millele vastav magnetmomendi väärtus on:

$$\mu_s = \frac{eh}{2M} \equiv \mu_B$$

Sellest järeldub, et elektroni magnetmoment on võrdne Bohri magnetroniga, mille arvuline väärtus on aatomis:

$$\mu_B = \frac{eh}{2M} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$$

M on elektroni mass ja e on elementaarlaeng.

Kuna me oleme eelnevalt tuletanud energiavälja massi m avaldised:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

ja

$$m = \sqrt{2\lambda v^2}$$

siis seega võib kehtida järgmine võrdus:

$$\sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Võtame selle võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$2\lambda v^2 = -2\mu^2$$

ja näeme, et kahed ( 2 ) taanduvad võrrandist ilusti välja:

$$\lambda v^2 = -\mu^2$$

Viimasest saame järgmise seose:

$$\lambda v^2 + \mu^2 = 0$$

Kogu järgneva analüüsi huvides arvestame võrrandi järgmist kuju:

$$\mu^2 + \lambda v^2 = 0$$

mis sellegipoolest annab meile eespool tuletatud võrrandi:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

Kui me aga korrutame võrrandi

$$\mu^2 + \lambda v^2 = 0$$

ehk

$$\mu^2 + \lambda \varphi^2 = 0$$

mõlemad pooled väljapotsiaaliga  $\varphi$ :

$$\mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = \frac{dV}{d\varphi} = 0$$

siis me näeme, et me saime tuletada skalaarse välja potentsiaalse energia  $V$  avaldise:

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda \varphi^4$$

Kineetilise energia  $T$  avaldisega

$$T = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2$$

annab see meile kvantväljade teoorias tuntud skalaarse välja lagranžiaani  $L$ :

$$E = L = T - V = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda \varphi^4 \right)$$

milles  $\mu$  on välja osakese mass või välja mass,  $\lambda$  on teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp ) ja  $\phi$  on väljapotsiaal.

Erinevaid füüsikateooriaid kirjeldavas lagranžiaanide matemaatikas avaldataksegi skalaarse välja kineetiline energia valemina:

$$E_k = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 = 0$$

mis antud juhul ( Universumi punktsingulaarsuse korral ) võrdub nulliga. Välja potentsiaalne energia avaldatakse aga valemitega:

$$\frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 \neq 0$$

ja

$$\frac{1}{4} \lambda \varphi^4 \neq 0$$

mille korral ei võrdu mõlemad nulliga, kuna nende summa võrdub nulliga:

$$\frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda \varphi^4 = 0$$

Viimane kirjeldab „paravälja“, mis tähendab seda, et kaks erinevat välja moodustavad kokku ühe tervik-välja, mille potentsiaal võib olla null. Kogu edasiseks analüüsiks võimegi kasutada just sellist tõlgendusviisi, mille tõttu on skalaarset ( klassikalist ) välja kirjeldav võrrand esitatav ka lagranžiaanina:

$$E = L = T - V = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda \varphi^4 \right)$$

Sellisel juhul oletame, et energiaväli koosneb kvantidest, mille korral on  $\mu$  välja osakese mass,  $\lambda$  on teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp ) ja  $\phi$  on väljapotsiaal. Võrrandis me

näeme, et kahe välja omavaheline kompenseerimine annab väljapotentsiaali väärtuseks nulli.

Kuna skalaarse välja lagranžiaan  $L$  võrdub energia jäävuse seaduse järgi nulliga:

$$E = L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \left( \frac{1}{2}\mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda \varphi^4 \right) = 0$$

siis sellest järeldeb, et peab kehtima võrdus:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 = \frac{1}{2}\mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda \varphi^4$$

Kui ka kineetiline energia võrdub nulliga:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 = 0$$

siis peab seda olema ka potentsiaalne energia:

$$\frac{1}{2}\mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda \varphi^4 = 0$$

millest omakorda järeldeb:

$$\frac{1}{2}\mu^2 \varphi^2 = -\frac{1}{4}\lambda \varphi^4$$

Seetõttu saame kineetilise energia avaldada järgmise diferentsiaalvõrrandina:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 = \pm \mu^2 \varphi^2$$

ehk

$$(\mu \varphi)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2$$

kuid siinkohal tasub märkida seda, et kineetiline energia saab füüsikas olla ainult positiivne. Negatiivset kineetilist energiat ei ole Universumis olemas.

### 1.3.4 Higgsi välja ja vektorvälja mass

Ametlikus kvantväljade teoorias esitatakse peale Higgsi skalaarbosoni ka veel „vektorvälja massi“  $m_A$  avaldis:

$$m_A = ev$$

milles  $e$  on elementaarlaeng ja  $v$  on „vaakumi potentsiaal“. Kui me korrutame selle võrrandi

mõlemad pooled massiga  $m$  ja viime  $v$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{m^2}{v} = me$$

siis me saame saadud seost kasutada eespool tuletatud Bohri magnetroni võrrandi analüüsis:

$$\frac{\lambda}{me} = \frac{h}{2M}$$

et mõista edasise analüütilise protsessi. Näiteks viime läbi järgmised elementaarsed matemaatilised teisendused:

$$\frac{\lambda v}{m^2} = \frac{\lambda \varphi}{m^2} = \frac{h}{2M}$$

ja

$$2\lambda\varphi = he \frac{m^2}{M} = hem$$

Korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled väljapotsiaaliga  $\varphi$  ja tulemuseks saame:

$$2\lambda\varphi^2 = hme\varphi = m \frac{1}{c^4} E$$

milles välja energia  $E$  võrdust:

$$E = e\varphi = q\varphi$$

tõestame veidi hiljem. Kuna eespool tuletasime „skalaarse välja massi“  $m$  definitsiooni:

$$2\lambda\varphi^2 = 2\lambda v^2 = m^2$$

siis saame tulemuseks energia  $E$  ruudu võrrandi:

$$E^2 = m^2 c^4 = mE$$

millest omakorda järeldeb, et peab kehtima võrdus:

$$m = E$$

Viimane tähendab tegelikult vektorvälja massi  $m$  „definitsiooni“:

$$m = q\varphi$$

ehk

$$m_A = ev$$

milles  $e$  on elementaarlaeng ja  $v$  on „vaakumi potentsiaal“.

Massi  $m$  ja energia  $E$  ekvivalentsuse seosest:

$$E = mc^2$$

on võimalik ka otse tuletada eespool mainitud vektorvälja massi  $m$  võrrand. Selleks viime valguse kiiruse  $c$  ruudu võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{c^2} E = m$$

Elektromagnetismi õpetusest on teada, et valguse kiirus  $c$  on seotud elektri- ja magnetkonstandiga järgmiselt:

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}}{4\pi * 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{(A * s)^2}} = \frac{1}{9 * 10^{16} \left(\frac{m}{s}\right)^2}$$

Viimases teisenevad ühikud täpsemalt:

$$\frac{4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}}{4\pi * 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{(A * s)^2}} = \frac{4\pi * 10^{-7} N (A * s)^2}{4\pi * 9 * 10^9 N A^2 m^2} = \frac{4\pi * 10^{-7} A^2 s^2}{4\pi * 9 * 10^9 A^2 m^2}$$

Kuid edasiseks analüüsiks teisendame ühikuid nii, et saaksime kasutada elektrilaenguid  $q$ :

$$\frac{A^2 s^2}{A^2 m^2} = \frac{A^2}{A^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{C^2 s^2}{C^2 s^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{C^2}{C^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{q^2}{q^2 c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{q^2}{q^2 c^2} = \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

ehk

$$\frac{q}{qc} = \frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

Järgneva analüüsi huvides oletame seda, et elektrilaengud tegelikult ei taandu võrrandist välja ja seetõttu saame järgmise seose:

$$\frac{e}{q} = \frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

milles  $e$  on elementaarlaeng ja elektrilaeng  $q$  võrdub konstandiga:

$$q = ec$$

Sellisel juhul saame ka seose:

$$\frac{e}{q} = \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

milles elektrilaeng  $q$  on

$$q = ec^2$$

Kuna elektri- ja magnetkonstant on mõlemad seotud elektrilaenguga  $q$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{q}{q} = \frac{e}{q} = \text{const} \neq 1$$

siis sellest saame omakorda väga tähtsa võrrandi:

$$\frac{e}{\epsilon_0} = \mu_0 q$$



Kuna mistahes elektrilaeng  $q$  on täpselt elementaarlaengu  $e$  arvukordne:

$$q = Ne$$

siis saame ka järgmise seose:

$$\frac{1}{N} = \frac{e}{q} = \frac{1}{c^2} = \text{const}$$

milles  $e$  on elementaarlaeng ja  $N$  on elektrilaengute kontsentratsioon. Kui me jagame viimase võrrandi mõlemad pooled  $4\pi$ -ga ja raadiusega  $r$ , siis saame antud juhul tulemuseks elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  avaldise:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} q$$

ehk

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K}{2} \frac{q}{r}$$

milles elektriline konstant  $k$  avaldub:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ja magnetiline konstant  $K$ :

$$K = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

Viimasest järeldub konstandi  $K$  definitsioon:

$$k \frac{2e}{q} = K = \text{const}$$

milles

$$q = ec^2$$

See annabki meile elektrivälja potentsiaali  $\varphi$ :

$$k \frac{e}{r} = \frac{K}{2} \frac{q}{r} = k \frac{2e}{q} \frac{1}{2} \frac{q}{r} = k \frac{e}{r} = \varphi$$

Siinkohal tasub kindlasti märkida seda, et tuumafüüsika osas tuletatud tuumapotentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U = \frac{g^2}{r} e^{-\frac{rmc}{\hbar}}$$

on võimalik tuletada samuti elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  võrrand, mis näitab seda, et elektromagnetilise interaktsiooni vahendajaks on seisumassita virtuaalne foton. Näiteks kui viimases võrrandis võrdub välja osakese seisumass nulliga ehk  $m = 0$ , siis saame potentsiaali  $U$  võrrandi kujuks:

$$U = \frac{g^2}{r}$$

Kuna konstandi  $g$  ja elementaarlaengu  $e$  vahel esineb kindel seos:

$$g^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

siis saame esialgu elektrivälja potentsiaalse energia avaldise:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

millest tegelikult nähtubki elektrivälja potentsiaal  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r}$$

Kogu eelnev analüüs tõestab eelnevalt esitatud postulaadi kasutamise õigsust:

$$\frac{1}{c^2} E = \frac{q}{q} E = \frac{e}{q} E = m$$

milles  $e$  on elementaarlaeng. Elektrivälja energia  $E$

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

ja kosmoloogias tuletatud seisueenergia  $E$

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2 = E$$

omavahelisest võrdusest

$$-\frac{mc^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

ehk

$$-mc^2 = -E = q\varphi$$

saame väljapotentsiaali  $\varphi$  avaldise:

$$-\frac{E}{q} = \varphi$$

Kuna „-“ märk võib antud juhul väljapotentsiaali  $\varphi$  võrrandis olla mistahes poolel:

$$\begin{cases} -\frac{E}{q} = \varphi \\ \frac{E}{q} = -\varphi \end{cases}$$

siis seega võime väljapotentsiaali  $\varphi$  „tähistada“ ka järgmiselt:

$$\frac{E}{q} = \pm\varphi = \varphi$$

Kui me nüüd eelnevalt esitatud võrrandit

$$\frac{e}{q} E = m$$

avaldame energiavälja potentsiaali  $\varphi$  kaudu:

$$\frac{e}{q} E = e \frac{E}{q} = e \frac{q\varphi}{q} = e \frac{q_2\varphi_2}{q_1} = e\varphi_1 = e\varphi = m$$

siis olemegi tuletanud vektorvälja massi võrrandi:

$$m_A = e\varphi$$

mis ametlikus kvantväljade teoorias tuletatakse muidu lagranžiaanide võrrandite kaudu.

Kuid eespool esitatud seisuenergia võrrand seob omavahel massi  $m$  ja energiat  $E$ :

$$E = mc^2$$

milles ei saa kuidagi kehtida võrdus:

$$E \neq m$$

Kui me aga viimases „mitte-võrduses“ korrutame ja jagame energiat  $E$  elektrilaenguga  $q$ :

$$q \frac{E}{q} = m$$

milles

$$\frac{q}{q} = \frac{e}{q} \neq 1$$

ja

$$\frac{E}{q} = \frac{q\varphi}{q} = \frac{q_2\varphi_2}{q_1} = \varphi_1 = \varphi$$

siis sellisel juhul saab kehtida võrdus:

$$e\varphi = m$$

Väljapotsiaali  $\varphi$  asemel võime kasutada ka kvantväljade teoorias tuntud vaakumi potentsiaali  $v$  mõistet:

$$\varphi = \pm v$$

mis annab meile võrrandi lõplikuks kujuks:

$$m_A = ev$$

Siinkohal tasub kindlasti märkida seda, et elektrivälja energia  $W$  avaldub võrrandina:

$$W = A = Fs = Eqs = Eqd = \frac{U_k}{d}qd = U_kq = \frac{Uq}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

( milles  $A$  on töö definitsioon,  $E$  on elektrivälja tugevus,  $U_k$  on keskmine pinge ja  $C$  on elektrimahutuvus ), kuid elektrivälja potentsiaalne energia  $E_p$  avaldub seosena:

$$E_p = q\varphi$$

milles  $q$  on elektrilaeng ja  $\varphi$  on väljapotsiaal.

Mistahes füüsikaline aine vorm Universumis omab energiat  $E$ :

$$E = mc^2$$

ja sellest tulenevalt ka impulssi  $p$ :

$$\frac{E}{c} = mc = p$$

Eespool ja ka kvantväljade teoorias tuletatakse ja tõestatakse energiavälja energia  $E$  võrrand:

$$E = q\varphi$$

millest omakorda saame väljapotsiaali  $\varphi$  definitsiooni:

$$\frac{E}{q} = \varphi$$

ja valguse kiirus  $c$  on seotud elektrilaengutega järgmiselt:

$$\frac{1}{c} = \frac{e}{q}$$

Sellest tulenevalt saame impulssi  $p$  seose energiaväljaga:

$$E \frac{1}{c} = E \frac{e}{q} = \frac{E}{q} e = \varphi e = p$$

millest omakorda saame elementaarlaengu  $e$  avaldise:

$$e = \frac{p}{\varphi}$$

Elementaarlaengu  $e$  väärtus tuleneb puhtalt Universumi aegruumi struktuurist. Seda tõestatakse kvantväljade teoorias lühidalt järgmiselt. Näiteks üldrelatiivsusteooria aja dilatatsiooni võrrandist:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2U}{c^2}}} = \infty$$

saame gravitatsioonipotentsiaali  $U$  maksimaalse väärtuse, mis Universumis üldse eksisteerida saab:

$$U = \frac{GM}{R} = \frac{c^2}{2}$$

Teisendame viimast avaldist matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{2G}{c} = R \frac{c}{M}$$

Kvantväljade teoorias tõestatakse impulssi  $p$  seos:

$$\frac{2G}{c} = \frac{E}{c} = p = \text{const}$$

milles energia  $E$  suurus on „fikseeritud“ ehk „ära määratud“. Kui me jagame viimase võrrandi mõlemad pooled kolmega, siis saame elementaarlaengu  $e$  ligikaudse väärtuse:

$$\frac{2G}{3c} = \frac{p}{3} \approx e$$

Saadud seose võrdlemisel eespool tuletatud elementaarlaengu e avaldisega:

$$\frac{p}{\varphi} = e$$

näeme seda, et peab kehtima „võrdus“ ehk antud juhul „asendus-võimalus“:  $\varphi \rightarrow 3$ . Seda on lihtne ka tõestada. Näiteks saame eespool esitatud analüüside põhjal teha järgmised matemaatilised teisendused:

$$\frac{2G}{3c} = \frac{2G}{3} \frac{1}{c} = \frac{2G}{3} \frac{e}{q} = e$$

ehk

$$\frac{2G}{3} = \frac{E}{3} = q$$

millest saamegi meile olulise „võrduse“ ehk „asenduse“:

$$\frac{E}{q} = 3 \rightarrow \varphi$$

Selline tulemus kinnitab kogu eelneva analüüsi õigsust.

Gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrand:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2U}{c^2}}} = \infty$$

kirjeldab aja kõverust. Lõpmata kõvera aegruumi korral avaldub gravitatsioonipotentsiaali U suurim võimalik väärtus kogu Universumis:

$$U = \frac{GM}{r} = \frac{c^2}{2}$$

ehk

$$G \frac{M}{r} = \frac{c^2}{2}$$

Kvantväljade teoorias tuletatakse viimasest avaldisest elektrijõu F suurim võimalik väärtus:

$$F = \frac{c^4}{G}$$

millest omakorda saame gravitatsioonikonstandi G väärtuse läbi selle elektrijõu F:

$$G = \frac{c^4}{F}$$

Elektrijõu F suurim võimalik väärtus Universumis näitab ka seda, et mitu korda on elektrijõud suurem gravitatsioonijõust. Näiteks gravitatsioonikonstandi G väärtuse tõttu saame me järgmise seose:

$$\frac{c^4}{F} \frac{M}{r} = \frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{M}{r} = \frac{F}{2c^2}$$

Viimasest saame omakorda „sümmeetrilise“ seose:

$$2 \frac{Mc^2}{r} = 2 \frac{E}{r} = \frac{q\varphi}{r} = F$$

ehk

$$F = F$$

mis tähendab ka seda, et elektrijõu ja gravitatsioonijõu erinevuse suurus seisneb just seisuenergia võrrandis oleva energia ja massi erinevuses:

$$E = mc^2$$

Näiteks kui eelnevalt tuletatud võrrandis:

$$G \frac{M}{r} = \frac{c^2}{2}$$

„puuduks“ gravitatsioonikonstant G, siis saaksime järgmise tulemuse:

$$\frac{M}{r} = \frac{E}{rc^2} = \frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{2E}{r} = \frac{q\varphi}{r} = F = c^4$$

Sellisel juhul saime tulemuseks „ebasümmeetrilise“ seose:

$$F = c^4$$

mis ei klapi kuidagi kokku eespool saadud seosega:

$$F = F$$

mille järgi kehtib võrdus:

$$F = \frac{c^4}{G}$$

See tähendab seda, et gravitatsioonikonstant G PEAB esinema Newtoni poolt kirjeldatud gravitatsioonijõu valemis, kuna gravitatsioonijõu ja elektrijõu erinevuse suurus PEAB olema looduses kooskõlas just seisuenergiaga E:

$$E = mc^2$$

Gravitatsioonijõu ja elektrijõu omavahelise suhte analüüs viitab sellele, et oluline ei ole tegelikult interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arväärtused, vaid erinevate interaktsioonide omavahelist suhet määravad asjaolud. See tähendab füüsikaliselt seda, et näiteks gravitatsioonikonstandi G

$$G = \frac{c^4}{F}$$

ja elektrijõu võrdeteguri k

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{4\pi k}{\mu_0}$$

arvväärtused võivad looduse poolt olla määratud tegelikult suvaliselt, KUID nende kahe erineva interaktsiooni omavahelise suhte määrab ära erirelatiivsusteooriast tuntud seisenergia  $E$  avaldis

$$E = mc^2$$

Näiteks elektrijõud  $F$  on gravitatsioonijõust suurem

$$F = \frac{c^4}{G}$$

korda just seisenergia  $E$  avaldise tõttu ja see suhe jääb samasuguseks ka siis ( ning sellest tulenevalt ka Universumi eksisteerimine ), kui konstantide arvväärtused peaksid olema täiesti teistsugused. Selles seisnebki „juhuse-teooria“ põhiline füüsikaline sisu, mis tuleneb eelnevast ja ka kogu järgnevast matemaatilisest analüüsist: erinevate interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arvväärtused võivad olla looduse poolt määratud tegelikult juhuslikult ( näiteks valguse kiirus  $c$  vaakumis ehk tavaruumi liikumiskiirus  $c$  hyperruumi suhtes )

$$\sqrt[4]{GF} = c$$

või need võivad olla tegelikult mistahes väärtusega, KUID oluline on siinkohal lihtsalt see, et erinevate interaktsioonide omavaheliseid suhteid ( näiteks kui mitu korda on elektrijõud  $F$  gravitatsioonijõust suurem )

$$F = \frac{c^4}{G}$$

määrab ära seisenergia  $E$  avaldis

$$E = mc^2$$

mis omakorda tuleneb aja ja ruumi füüsikast ehk antud juhul ajas rändamise teooriast. Universumi materia ehk aine ja välja eksisteerimise põhivormideks ongi aeg ja ruum.

### 1.3.5 Elektromagnetiline interaktsioon II

Elektromagnetiline interaktsioon on tuletatav sellest samast vektorvälja massi võrrandist:

$$m_A = ev$$

milles  $e$  on elementaarlaeng ja  $v$  on vaakumi potentsiaal. Valguse kui elektromagnetilise interaktsiooni saame tuletada siis, kui me oletame seda, et  $e$  on elementaarlaeng ja  $v$  on väljapotentsiaal  $\phi$

$$m = e\phi$$

Eespool oleva analüüsi järgi saame teha viimases avaldises järgmised matemaatilised teisendused:

$$m = e \frac{E}{q} = \frac{e}{q} E = \frac{1}{c^2} E = \varepsilon_0 \mu_0 E$$

Tulemuseks saame:

$$\frac{e}{q} E = \varepsilon_0 \mu_0 E$$

milles väljaenergia  $E$  taandub ilusti välja:

$$\frac{e}{q} = \varepsilon_0 \mu_0$$

Viimast teisendame omakorda järgmiselt:

$$\frac{e}{\varepsilon_0} = q \mu_0$$

Kui me nüüd jagame võrrandi mõlemad pooled  $4\pi r$ -ga, siis saame väljapotsiaali  $\varphi$  avaldise:

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 q}{2\pi r} = \varphi$$

Siinkohal on huvitav märkida seda, et meie tuletatud potentsiaali  $\varphi$  võrrandis:

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K q}{2 r}$$

esineb ühel poolel elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  ja teisel poolel magnetiline konstant  $K$ :

$$\varphi = \frac{K q}{2 r}$$

Selline pealtnäha absurdne võrdus saab aga hoopis uue kuju, kui me elektrilaengu  $q$  avaldame elektrivoolu  $I$  ja ajaperioodi  $t$  korrutisena:

$$q = It$$

Selle tulemusena saame:

$$\varphi = \frac{K q}{2 r} = \frac{K I}{2 d} t$$

milles  $I$  on elektrivool ja seega  $d$  on kaugus elektrivoolust. Viimasest saame tuletada Ampere'i seadusest tuntud magnetinduktsiooni  $B$  avaldise:

$$\frac{2\varphi}{t} = K \frac{I}{d} = B$$

ehk

$$2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{rt} = 2k \frac{I}{d} = K \frac{I}{d} = B$$

milles  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ja seega  $\sin \alpha = 1$ .

Siinkohal on oluline märkida seda, et näiteks elektrivälja tugevus  $E$  on „suunatud“ tsentraalsümmeetriliselt elektrilaengust  $q$  eemale:

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

kuid magnetväli saab eksisteerida ainult elektrivoolu suunaga risti:



$$\sin\alpha B = B = \frac{F}{Il} = K \frac{I}{d}$$

kuna  $d$  näitab kaugust elektrivoolust, millest järeldubki magnetvälja ja elektrivoolu omavaheline nurk. See tähendab, et vooluga juhtmele mõjuv magnetjõud on suunatud alati risti nii voolu kui ka magnetvälja suunaga.

Saadud seos magnetinduktsiooni  $B$  ja elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  vahel

$$\frac{2\varphi}{t} = K \frac{I}{d} = B$$

võib esmapilgul tunduda absurdne, kuid eespool saime elektrilise võrdeteguri  $k$  avaldise kujul:

$$k = \frac{Kq}{2e}$$

ja seetõttu saamegi puhtalt magnetinduktsiooni  $B$  võrrandi:

$$2k \frac{I}{d} = 2 \frac{Kq}{2e} \frac{I}{d} = 2 \frac{Kq}{2e} \frac{e}{rt} = K \frac{I}{d} = B$$

ehk

$$B = K \frac{I}{d}$$

milles  $I$  on elektrivool,  $d$  on kaugus elektrivoolust ja  $K$  on magnetiline võrdetegur. Kui me Ampere'i seaduse järgi avaldame eespool tuletatud võrrandis

$$\varphi = \frac{K I}{2 d} t$$

magnetvälja kirjeldava magnetinduktsiooni  $B$ :

$$K \frac{I}{d} = B$$

siis see annab meile võrrandi kujuks:

$$\varphi = \frac{1}{2} B t$$

ehk

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{1}{2} B$$

Magnetinduktsioon  $B$  on seotud magnetvälja tugevusega  $H$ :

$$B = \mu H$$

ja magnetvälja tugevus  $H$  on seotud omakorda „elektromagnetvälja vektorpotentsiaaliga“  $A$ :

$$H = \text{rot} A$$

Need seosed annavad meile võrrandi lõplikuks kujuks:

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{1}{2} \mu \operatorname{rot} A$$

mis näitab meile selgelt seda, et elektrivälja ( potentsiaali ) muutus tekitab magnetvälja ja see kehtib ka vastupidisel juhul – magnetvälja muutus tekitab elektrivälja. Edaspidi tõestame, et viimane avaldis võrdub ka järgmiselt:

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{1}{2} \mu \operatorname{rot} A = -c \operatorname{div} A$$

mis on oma olemuselt Maxwelli võrranditest tuntud elektromagnetvälja potentsiaali kirjeldav võrrand:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \operatorname{div} A$$

ehk

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Näitame seda järgnevalt. Näiteks eelnev analüüs kehtib väga täpselt ka elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  tuletamise korral võrrandist:

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K q}{2 r}$$

Sellisel juhul avaldub magnetiline võrdetegur  $K$  eespool tuletatud seosena:

$$K = 2k \frac{e}{q}$$

mille tulemusena saamegi puhtalt elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  avaldise:

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K q}{2 r} = 2k \frac{e}{q} \frac{1}{2 r} = k \frac{e}{r}$$

ehk

$$\varphi = k \frac{e}{r}$$

milles  $e$  on elementaarlaeng,  $r$  on kaugus elektrilaengust ja  $k$  on elektriline võrdetegur. Viimasest ongi võimalik tuletada elektromagnetvälja ( s.t. elektromagnetlaine ) potentsiaali võrrand. Näiteks kui me jagame elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  võrrandi

$$\varphi = k \frac{e}{r} = k \frac{q}{r}$$

mõlemad pooled „kohavektoriga“  $r$ , siis saame elektrivälja tugevuse  $E$  võrrandi:

$$\frac{\varphi}{r} = k \frac{q}{r^2} = E = \frac{F}{q}$$

Järgnevalt oletame seda, et kohavektor  $r$  avaldub:  $r = ct$ . See annab meile võrrandi kujuks:

$$\frac{\varphi}{ct} = E$$

Väljatugevus  $E$  on seotud omakorda elektromagnetvälja vektorpotentsiaaliga  $A$ :

$$E = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) = -divA = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial A_j}{\partial x_j}$$

kuid magnetvälja tugevus  $H$  on seotud sellega järgmiselt:

$$H = rotA = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

Need lihtsad seosed annavad meile võrrandi lõplikuks kujuks:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -divA$$

Saadud võrrand ühtib elektromagnetvälja potentsiaali diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -divA$$

ehk

$$divA + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

mis muidu tuletatakse kogu elektromagnetismi kirjeldavatest Maxwelli võrranditest. Maxwelli võrrandid kirjeldavad kogu elektromagnetismi õpetust, kuid need on eelkõige klassikalise füüsika võrrandid. Tuntud Maxwelli võrrandeid on võimalik tuletada ka eespool esitatud ühest ja ainsast diferentsiaalvõrrandist:

$$divA + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Näiteks viime  $divA$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -divA$$

ja tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (-divA)^2 = \Delta\varphi$$

Tulemuseks saame elektromagnetvälja ( antud juhul elektromagnetlaine ) potentsiaalide võrrandid:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

ja

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

Kuid elektrilaengu poolt tekitatud elektromagnetvälja vektorpotentsiaal avaldub:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

ja skalaarpotentsiaal:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j$$

Viimaseid võrrandeid on võimalik avaldada ka ainult magnetvälja tugevuse  $H$  kaudu:

$$\Delta H - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

ja ka elektrivälja tugevuse  $E$  kaudu:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Viimases avaldises viime  $\Delta E$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi ja teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$-\Delta E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} H = -\frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial H}{\partial t}$$

Saadud tulemus võrdub omakorda:

$$-\frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial H}{\partial t} = \text{grad div } E - \Delta E = \text{rot rot } E$$

milles nähtubki Maxwelli esimene võrrand:

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$$

Maxwelli teine võrrand avaldub kujul:  $\text{div } H = 0$  ja kolmas võrrand elektromagnetlainel korral:

$$\text{rot } H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$$

ning elektromagnetvälja korral:

$$\text{rot } H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi j}{c}$$

Maxwelli neljas võrrand avaldub vastavalt järgmiselt:  $\text{div } E = 0$  ja  $\text{div } E = 4\pi\rho$ .

Eespool tuletatud diferentsiaalvõrrandist:

$$\text{div} A = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ehk

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{div} A$$

on võimalik tuletada ka elektromagnetvälja tensor, mis samuti kirjeldab kogu elektromagnetilist interaktsiooni Maxwelli võrrandite kõrval. Selleks korrutame näiteks viimase võrrandi mõlemad pooled „diferentsiaalse avaldisega“  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ , tulemuseks saame:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} A = \Delta \varphi$$

ehk

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Viimane avaldis kehtib vaakumis leviva elektromagnetlaine korral, kuid elektrilaengu poolt põhjustatud elektromagnetvälja korral on viimane võrrand kujul:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

Viimasest saame omakorda:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

ja kui arvestada eespool tuletatud seosega:

$$\operatorname{div} A = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

siis tuleb võrrand kujul:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A$$

ehk

$$4\pi\rho = -\Delta\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A$$

Kui me arvestame ka diferentsiaaloperaatorite omavahelisi seoseid:

$$4\pi\rho = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A$$

siis saame divergentsi viia sulgude ette:

$$\operatorname{div} \left( -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 4\pi\rho$$

Tulemus kattub täielikult Maxwelli neljanda võrrandiga:  $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$  või  $\operatorname{div} E = 0$ . Kuid saadud võrrandis olevat väljatugevuse  $E$  avaldist:

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

on võimalik esitada ka võrrandite süsteemina:

$$\begin{cases} E_1 = i \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) \\ E_2 = i \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right) \\ E_3 = i \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) \end{cases}$$

milles esinevad järgmised tähistused:  $i\varphi = A_4$  ja  $x_4 = ict$ . Seda võrrandite süsteemi kirjeldabki 2-st järku neljamõõtmeline antisümmeetriline elektromagnetvälja tensor  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$  ehk

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}$$

millel on kuus komponenti. Selle tensori „pööramine“ avaldub samuti võrrandina:

$$F_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} \omega_{\beta\alpha} F_{\beta\alpha}$$

mille korral on tegemist Lorentzi teisenduse maatriksiga. Elektromagnetvälja tensor on seotud ka 4-mõõtmelise vooluga:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{4\pi}{c} j_\alpha$$

ning elektromagnetvälja tensor avaldub ka maatriksina:

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

mis on oma olemuselt füüsikaline suurus. Viimases maatriksi võrrandis avalduvad magnetvälja  $H = \text{rot}A$  rootori komponendid järgmiselt:

$$\begin{cases} H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ H_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ H_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

Elektromagnetvälja tensor on antisümmeetriline:

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$$

ja kui me korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled liikmega  $F_{\alpha\beta}$ , siis saame tulemuseks elektromagnetvälja lagranžiaani  $L$  võrrandi:

$$F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} F_{\alpha\beta}$$

ehk

$$L = F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Elektromagnetvälja lagranžiaani  $L$  võrrandit esitatakse vahel ka teisiti. Näiteks korrutame võrrandi

$$F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} F_{\alpha\beta}$$

mõlemad pooled -1-ga:

$$-F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha} F_{\alpha\beta}$$

ja jagame mõlemad pooled 4-ga:

$$-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} F_{\beta\alpha} F_{\alpha\beta}$$

Tulemuseks saamegi elektromagnetvälja lagranžiaani  $L$  võrrandi teise kuju:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

Tähelepanuväärne asjaolu on selle juures see, et lagranžiaan  $L$  võrdub ka järgmiselt:

$$L = F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = H^2 - E^2$$

milles  $H$  on magnetvälja tugevus ja  $E$  on elektrivälja tugevus. Nende summa aga võrdub teatavasti energia voo tihedusega  $U$ :

$$H^2 + E^2 = 8\pi U$$

mildest saame omakorda välja enda energia  $U$ :

$$U = \iiint \frac{H^2 + E^2}{8\pi} dV$$

### 1.3.6 Elektromagnetiline interaktsioon III

Energia  $E$  ja massi  $m$  omavaheline seos on esitatav ka relativistlikust mehaanikast tuntud keha relativistliku koguenergia  $E^2$  võrrandiga:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

mis tähendab ka seda, et sellest on võimalik tuletada seisuenergia  $E$  võrrand ja elektromagnetilise interaktsiooni vaheboson. Selleks teostame keha relativistliku koguenergia võrrandi matemaatilise teisenduse:

$$E^2 = p^2 c^2 + p^2 c^2 = c^2(p^2 + p^2) = c^2 2p^2$$

mildest saame impulsi ja energia vahelise seose:

$$\frac{E^2}{c^2} = 2p^2$$

Järgnevalt arvestame keha seisuenergia  $E = mc^2$  matemaatilise definitsiooniga:

$$\frac{m^2 c^4}{c^2} = 2p^2$$

mistõttu  $c^2$  taandub võrrandist välja:

$$m^2 c^2 = 2p^2$$

Kui me viime massi  $m$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$mc^2 = E = \frac{2p^2}{m}$$

siis saame seisuenergia  $E$  võrrandi kujuks:

$$E = mc^2 = \frac{2p^2}{m}$$

Viimases võrrandis on valguse impulss  $p = mc$ :

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{p^2}{m} = \frac{m^2 c^2}{m} = mc^2$$

Sellest tulenevalt saame kineetilise energia seose seisue energiaga järgmiselt:

$$\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis näitab seda, et keha seisuenergia  $E = mc^2$  on tegelikult oma olemuselt kineetiline energia, mis omakorda tuleneb Universumi kosmoloogilisest paisumisest:

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Elektromagnetilise interaktsiooni vahebosonit ehk footonit on võimalik „tuletada“ otse eespool tuletatud seisuenergia  $E$  võrrandist:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = m^2 c^4$$

ehk

$$E^2 - p^2 c^2 - m^2 c^4 = 0$$

mida kasutatakse ka osakeste füüsikas kvandenergia  $E$  välja arvutamiseks. Selle tuletuse lõpptulemus kattub ka aatomituuma potentsiaali  $U$  seosega, mis näitab elektromagnetilise ja tugeva interaktsiooni omavahelist seost. Näitame seda illustratiivselt järgmiselt. Näiteks viimases avaldises esitatakse osakese energia  $E$  ja impulss  $p$  kvantmehaanikast tuntud diferentsiaaloperaatorite kaudu:

$$E \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + U(\vec{r}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

ja

$$p^2 \rightarrow \hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \nabla^2$$

Tulemuseks saame:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi - m^2 c^4 \psi = 0$$

Kui me nüüd jagame saadud võrrandi mõlemad pooled Plancki konstandi ruuduga  $\hbar^2$  ja valguse kiiruse ruuduga  $c^2$ , siis saame viimase võrrandi kujuks:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \nabla^2 \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Edasiseks analüüsiks oletame, et

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0$$

ehk käsitleme ajas muutumatut olukorda:



$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi(\vec{r})$$

Sellest tulenevalt saame teostada järgmised matemaatilised teisendused:

$$\nabla^2 \phi - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \phi - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{m^2 c^2}{h^2} \phi = 0$$

millest omakorda saame:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{m^2 c^2}{h^2} r^2 \phi$$

Viimase võrrandi mõlemast poolest võtame ruutjuure ehk kaotame ära ruudud:

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{1}{r} \phi \frac{mc}{h} r$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled -1-ga läbi:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\phi}{r} \frac{mc}{h} r$$

„Negatiivsed märgid“ viime kõik ühele poole võrdusmärgi:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi}{r} \left( -\frac{mc}{h} r \right)$$

ehk seega saame

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\phi}{r} \left( -\frac{mc}{h} r \right)$$

mis annab meile lõpuks järgmise väga olulise diferentsiaalvõrrandi:

$$\partial \phi = -\phi \left( -\frac{mc}{h} dr \right)$$

ehk

$$d\phi = -\phi \left( -\frac{mc}{h} dr \right)$$

Kuna saadud diferentsiaalvõrrandis saame  $\phi$  „asendada“ nii negatiivse elektrivälja potentsiaalse energiaga:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

kui ka positiivse elektrivälja potentsiaalse energiaga:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

siis võime diferentsiaalvõrrandi kirjutada ka kujul:

$$d\phi = \phi \left( -\frac{mc}{h} dr \right)$$

Sellise võrrandi lahendiks ongi:

$$\phi(r) = \phi e^{-\frac{mc}{\hbar}r}$$

milles  $e$  on Euleri arv. Kui me nüüd avaldame  $\phi$  „negatiivse elektrivälja potentsiaalse energiana“  $U = U(r)$ :

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} e^{-\frac{mc}{\hbar}r}$$

või negatiivse elektrivälja potentsiaalina:

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} e^{-\frac{mc}{\hbar}r}$$

siis me olemegi tulatanud Yukawa tuumapotentsiaali  $\phi(r)$  võrrandi:

$$\phi(r) = -\frac{g^2}{r} e^{-\frac{mc}{\hbar}r}$$

ehk

$$\phi(r) = -\frac{g}{r} e^{-\frac{mc}{\hbar}r}$$

kuna konstandi  $g$  ja elementaarlaengu  $e$  vahel esineb ka selline seos:

$$g^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

ehk

$$g = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$$

Elektrivälja korral võrdub vahebosoni seisumass  $m$  nulliga. Selline tulemus kattub täielikult avaldisega, mis kirjeldab tugeva jõu välja potentsiaali  $U$ . Eespool tuletatud potentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{\hbar}}$$

saamegi elektromagnetilise interaktsiooni vahebosoni. Näiteks kui seisumass  $m$  võrduks nulliga ehk  $m = 0$ , siis saame potentsiaali  $U$  käiguks:

$$U \propto \frac{1}{r} e^0 = \frac{1}{r}$$

Elektromagnetilise interaktsiooni vahebosoniks on virtuaalne footon, mille seisumass ( ja ka elektrilaeng ) võrdub nulliga, mistõttu on elektromagnetilise interaktsiooni mõjuraadius lõpmatu:

$$U \propto \frac{1}{r}$$

Eelnevalt kasutasime võtteid, mis on pärit diferentsiaalvõrrandite matemaatikast. Selle kohta toome järgnevalt ka ühe konkreetsema näite, mille korral uurime raadiumi lagunemise kiirust. Raadiumi lagunemise kiirus on võrdeline tema massiga igal ajamomendil. Määrame raadiumi massi muutumise seaduse, kui ajamomendil  $t = 0$  oli raadiumi mass  $m_0$ :

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m$$

ehk

$$\frac{dm}{m} = -\lambda dt$$

Viimasest saab võtta „naturaalse logaritmi“:

$$\ln m = -\lambda t + C$$

ja seejärel võtame võrrandi mõlemad pooled e-astmesse:

$$e^{\ln m} = e^{-\lambda t + C}$$

See annab meile võrrandi kujuks:

$$m = e^{-\lambda t} + e^C$$

mille üldlahendiks on avaldis:

$$m = C_1 * e^{-\lambda t}$$

Kuid erilahendi  $m(0) = m_0$  saaksime nõnda:

$$m(0) = C_1 * e^{-\lambda 0} = C_1 = m_0$$

mis tegelikult näitabki meile raadiumi lagunemise kiirust:

$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

Viimane võrrand ongi raadiumi massi muutumise seadus, milles  $\lambda$  on võrdetegur ehk lagunemise koefitsient.

Eelnevalt me tuletasime relativistliku koguenergia võrrandi:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Kuid nüüd näitame järgnevalt seda, et antud võrrandit kasutatakse ka osakeste põrgete välja arvutamiseks. Näiteks tuletame „põrkuvate kimpude efekti“, mille korral põrkab üks osake (seisumassiga  $m$ ) teist seisvat osakest (massiga  $m$ ). Pealelangeva osakese energia ja impulss ongi kirjeldatav võrrandiga:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

ehk

$$p^2 = E^2 - m^2$$

milles  $c = 1$ . Antud süsteemi energia on enne põrget  $E + m$ , kuid pärast põrget tekib liitsüsteem seisumassiga  $M$ . Liitsüsteemile üle minevad energia  $E + m$  ja impulss  $p$  on jäävad suurused. Liitsüsteemi energia ja impulsi omavaheline seos on kirjeldatav võrrandiga:

$$(E + m)^2 = p^2 + M^2$$

ehk

$$M^2 = (E + m)^2 - E^2 + m^2 = 2Em + 2m^2$$

Ülirelativistlike energiatega korral ( $E \gg m$ ) on viimase võrrandi kujuks:

$$M^2 \approx 2Em$$

ehk

$$E = \frac{M^2}{2m}$$

Näiteks prootoni mass on ligikaudu  $m \approx 1 \text{ GeV}$  ja kui tahame kahe prootoni põrkel saada uusi osakesi kogumassiga  $M = 10 \text{ GeV}$ , siis selle protsessi energiaks saame  $E = 50 \text{ GeV}$ . See aga ületab viis korda vajalikku massi. Kui aga kogumassiks on  $M = 1 \text{ TeV}$ , siis energia tuleb  $E = 500 \text{ TeV}$ , mis tähendab ainult 0,2 % „põrke efektiivsust“.

### 1.3.7 Nõrk interaktsioon ehk nõrk jõud

Weinberg-Salami mudelis tuletati nõrga jõu vahebosonid ja ka elektromagnetilise jõu vaheboson Higgsi mehhanismi kasutades, kuid järgnevalt näitame seda, et neid vahebosoneid on võimalik tuletada ka ainult seisuenergiat kasutades. Eelnevalt me tõdesime, et vektorvälja massi võrrandist:

$$m_A = ev$$

on võimalik „tuletada“ elektromagnetiline interaktsioon. Viimasest saab tuletada ka nõrga interaktsiooni vahebosonid. Kuid enne nõrga interaktsiooni juurde tulemist vaatame veelkord seda, kuidas tuletasime Higgsi välja vahendava osakese. Higgsi välja vahebosonit kirjeldavat võrrandit tuletasime kosmoloogiast saadud avaldisest:

$$E = mc^2 = -\frac{mc^2}{2}$$

milles kiiruse  $c$  ruut taandub võrrandist välja:

$$m = -\frac{m}{2}$$

Tõstame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$m^2 = \frac{m^2}{4}$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$2m^2 = \frac{m^2}{2}$$

Tulemuseks saame järgmise seose:

$$m^2 + m^2 = \frac{m^2}{2}$$

Saadud võrrandi mõlemad pooled korrutame -1-ga:

$$-m^2 - m^2 = -\frac{m^2}{2}$$

ja viime ühe liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$-m^2 = -\frac{m^2}{2} + m^2$$

Viimases seoses me näeme selgelt seda, et peab kehtima järgmine võrdus:

$$+m^2 = -\frac{m^2}{2}$$

Tõestame seda lühidalt järgmiselt. Näiteks saame võrrandi:

$$-m^2 = -\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2}$$

milles me korrutame mõlemad pooled taas -1-ga läbi:

$$m^2 = \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2}$$

ja toome  $\frac{1}{2}$  sulgude ette:

$$m^2 = \frac{1}{2}(m^2 + m^2)$$

Tulemuseks saamegi kehtiva võrduse:

$$2m^2 = m^2 + m^2$$

Kuid eelnevalt saadud avaldises

$$m^2 = -\frac{m^2}{2}$$

me näeme seda, et massid  $m$  ei saa omavahel võrduda:  $m^2 \neq m^2$ , mistõttu tähistame teise massi järgmiselt:  $m^2 \neq \mu^2$ . Tulemuseks saame võrrandi:

$$\mu^2 = -\frac{m^2}{2}$$

mis võibki kirjeldada Higgsi välja vahebosonit:  $-2\mu^2 = m^2$  ehk

$$m_h = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}$$

Nõrk interaktsioon on seotud just Higgsi väljaga, mis väljendub selles, et eelnev analüüs toimib täpselt ka nõrga interaktsiooni vahebosonite tuletamise korral. Näitame seda lühidalt kohe järgnevalt. Näiteks kosmoloogia osas tuletatud „negatiivse energia“  $E$  võrrandis:

$$E = mc^2 = -\frac{mc^2}{2}$$

ehk

$$mc^2 = -\frac{mc^2}{2}$$

tõstame mõlemad pooled ruutu:

$$m^2 c^4 = + \frac{m^2 c^4}{4}$$

ja seejärel võtame mõlemast poolest ruutjuure:

$$mc^2 = \frac{mc^2}{2} = E$$

Tulemuseks saime positiivse energia  $E$  võrrandi. Sellest tulenevalt võib elektrivälja kui energiavälja energia  $E$  võrduda järgmiselt:

$$E = \frac{mc^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

millest omakorda saame:

$$mc^2 = q\varphi$$

Kuna energia  $E$  võrdub energiavälja tekitaja  $q$  ja energiavälja potentsiaali  $\varphi$  korrutisega:

$$E = mc^2 = q\varphi$$

siis seega mass  $m$  avaldub järgmiselt:

$$m = q\varphi \frac{1}{c^2} = \frac{E}{c^2}$$

Viimast võrrandit võib tegelikult avaldada ka elementaarlaengu  $e$  ja vaakumi potentsiaali  $v$  korrutisena:

$$E = m = q\varphi$$

ehk tuntud vektorvälja massi seosena

$$m_A = ev$$

mille loomulikuks ühikuks ongi lihtsalt jagatis  $\frac{GeV}{c^2}$ . Kuna kehtib eelnevalt saadud võrdus:

$$mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

siis seega saame järgmise välja energia  $E$  seose:

$$q\varphi = \frac{q\varphi}{2}$$

Siinkohal on oluline mõista, et tegemist võib olla ( kulonilise ) energiavälja potentsiaaliga  $\varphi = \varphi$  või vaakumi potentsiaaliga  $v = v$ , mille korral võib vaakumis omakorda eksisteerida „virtuaalne“ energiaväli. Antud juhul kehtib nende kahe vahel võrdus nii nagu seda oli ka kiiruste korral:  $c^2 = c^2$ . Kuna potentsiaalid  $\varphi$  taanduvad võrrandist ilusti välja, siis saame avaldise kujuks:

$$q = \frac{q}{2}$$

milles me näeme taas tuttavat olukorda:  $q \neq q$ . Järgnevalt võime oletada, et üks nendest on elementaarlaeng  $e$ :  $e \neq q$  ja teise laengu tähistame tähega  $g$ :  $q = g$ , mis ei pea ilmtingimata enam olema elektromagnetilise välja tekitaja. Võrrandi kujuks saame:

$$e = \frac{g}{2} = g \frac{1}{2}$$

milles  $\frac{1}{2} = 0,5$  ja seega

$$e = g \cdot 0,5$$

Matemaatikas võib 0 ja 1 vahelist arvu esitada ka „nurgafunktsioonina“:

$$e = g \sin\theta_W$$

Siinkohal on oluline märkida seda, et nurgafunktsioon võib antud juhul võrduda:

$$\sin\theta_W = \frac{1}{2} = 0,5$$

kuid ilmselgelt ei pea:

$$\sin\theta_W \neq \frac{1}{2} \neq 0,5$$

sest oluline on vaid see, et korrutis võrduks konstandiga ehk elementaarlaenguga  $e$ :

$$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

Katsed näitavad, et  $\theta_W \approx 13,5^\circ$  ja seetõttu saame  $g$  järgmised väärtused:

$$\frac{e}{\sin\theta_W} = g$$

ja

$$\frac{e}{\cos\theta_W} = g'$$

Elementaarlaeng  $e$  ongi seotud niimoodi „tuumalaenguga“  $g$ :

$$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

milles „Weinbergi nurgaks“ nimetatakse:  $\theta_W \approx 13,5^\circ$ . Sellest tulenevalt saame vektorvälja massi võrrandi:

$$m_A = ev$$

avaldata järgmiselt:

$$m_A = ve = vg \sin\theta_W$$

Kui me tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$m_A^2 = v^2 g^2 \sin^2\theta_W$$

siis me näeme, et selles kehtib järgmine eksperimentaalne väärtus:

$$\sin^2\theta_W = 0,23 \approx 0,25 = \frac{1}{4}$$

mildest võib omakorda järeldada:

$$\sin\theta_W \approx \frac{1}{2}$$

Siinkohal tasub märkida seda, et kõige varasemad eksperimentaalsed andmed näitavad sellist ligikaudset väärtust:  $\sin^2\theta_W = 0,239 \approx 0,24$ . Kuid uuemad mõõtmised näitavad järgmist võrdust:  $\sin^2\theta_W = 0,23$  ning kõige uuemad andmed näitavad aga hoopis:  $\sin^2\theta_W = 0,22$ . Seega saame võrrandi kujuks:

$$M_W^2 = \frac{v^2 g^2}{4}$$

ehk

$$M_W = \frac{vg}{2}$$

mille korral ei ole enam tegemist vektorvälja massiga  $m_A$ . Täpselt samale tulemusele saame ka siis, kui me jagame vektorvälja võrrandi  $m_A = ev$  mõlemad pooled  $2\sin\theta_W$ -ga:

$$\frac{m_A}{2\sin\theta_W} = \frac{ev}{2\sin\theta_W} = \frac{vg}{2} = M_W$$

ja saadud avaldist võime omakorda jagada  $\cos\theta_W$ -ga:

$$\frac{M_W}{\cos\theta_W} = \frac{ev}{2\sin\theta_W \cos\theta_W} = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2} = M_Z$$

milles omakorda nähtub:

$$\frac{g'}{g} = \tan\theta_W = \frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}$$

Saadud massi võrrandid  $M_W$  ja  $M_Z$  kirjeldavadki nõrga interaktsiooni vahebosonite masse. Viimasest ehk  $M_W$  võrrandist on võimalik tuletada vaakumi potentsiaali  $v$  seos Fermi konstandi  $G$  eksperimentaalse väärtusega. Selleks tõstame  $M_W$  võrrandi mõlemad pooled taas ruutu:

$$M_W^2 = \frac{v^2 g^2}{4}$$

ja teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{4M_W^2}$$

Kui me jagame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

siis saadud võrrand võrdub eksperimentaalse väärtusega (s.t. konstandiga):

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}} = \text{const}$$

mille järgi avaldubki  $v$  järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{2}}{2G} = v^2$$

ehk



$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2G}} = v = 246 \text{ GeV}$$

Viimases ei ole  $G$  gravitatsioonikonstant, vaid tegemist on „Fermi konstandiga“.

Nõrka interaktsiooni ei vahenda tegelikult ainult üks vaheboson:

$$M_W = \frac{vg}{2} = \frac{37,3}{\sin\theta_W} \text{ GeV} \frac{1}{c^2}$$

milles Weinbergi nurk avaldus

$$\theta_W \approx 13,5^\circ$$

ja vaakumi potentsiaal  $v$  võrdus:

$$v = 246 \text{ GeV}$$

Kui me korrutame viimase vahebosoni massi võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$2M_W = vg = \frac{74,6}{\sin\theta_W} \text{ GeV} \frac{1}{c^2}$$

siis saamegi ühe teise vahebosoni massi

$$2M_W = M_Z$$

mis vahendab samuti nõrka interaktsiooni:

$$M_Z = \frac{74,6}{\sin\theta_W} = v \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}$$

Kvantväljade teoorias esineb elementaarlaengu  $e$  ja „tuumalaengu“  $g$  vahel seos:

$$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

mildest omakorda saamegi väärtused:

$$\frac{e}{\sin\theta_W} = g$$

ja

$$\frac{e}{\cos\theta_W} = g'$$

Eelnevalt esitatud võrduses:

$$q = e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

milles avaldub Weinbergi nurk  $\theta_W \approx 13,5^\circ$ , nähtub nõrga interaktsiooni vahebosonite elektrilaengu olemasolu elementaarlaengu  $e$  seotuse tõttu ja nõrga interaktsiooni vahebosoni  $M_Z$  võrrandi tuletamine. Seda viimast näitame järgnevalt. Näiteks tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$g^2 \sin^2\theta_W = g'^2 \cos^2\theta_W$$

ja viime ühe liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$0 = +g^2 \sin^2\theta_W - g'^2 \cos^2\theta_W$$

Viimasest ongi näha seda, et negatiivne ja positiivne elektrilaeng annab tulemuseks alati neutraalse laengu. See tähendab seda, et nõrga interaktsiooni vaheboson  $M_W$  saab olla elektriliselt laetud

positiivselt või negatiivselt, kuid seevastu vaheboson  $M_Z$  peab olema neutraalse laenguga, kuna just viimastest võrdustest saame tuletada vahebosoni  $M_Z$  avaldise. Näiteks kui viimase võrduse „vahe“ asemel oleks „summa“, siis saaksime järgmiselt:

$$2 g^2 \sin^2 \theta_W = 2 g'^2 \cos^2 \theta_W = g^2 \sin^2 \theta_W + g'^2 \cos^2 \theta_W$$

See on sellepärast nii, et me hakkame tuletama massi võrrandit ja mass ei saa olla null. Korrutame viimaste võrduste kõik pooled jagatisega  $\frac{v^2}{4}$ :

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2 \theta_W = 2 \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2 \theta_W = \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2 \theta_W + \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2 \theta_W$$

Tulemuseks saame järgmised võrdused, millest üks avaldub:

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2 \theta_W = \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2 \theta_W + \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2 \theta_W$$

ehk

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W}$$

ja teine avaldub:

$$2 \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2 \theta_W = \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2 \theta_W + \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2 \theta_W$$

ehk

$$2 \frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

Viimaste võrduste põhjal saame luua võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} 2 \frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W} \\ 2 \frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W} + \frac{v^2 g'^2}{4} \end{cases}$$

ja teades eelnevalt nõrga interaktsiooni vahebosoni  $M_W$  avaldist, saame järgmised massi avaldised:

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} = 2 M_W^2$$

ning

$$2 \frac{v^2 g'^2}{4} = 2 M_W^2$$

Kogu järgneva analüüsi huvides jagame võrrandite süsteemis olevat avaldist

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W}$$

kahega

$$\frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g'^2}{4} \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W}$$

ja pärast seda viime „nurgafunktsioonid“ võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g'^2}{4}$$

Saadud võrrandile liidame mõlemale poolele jagatise  $\frac{v^2 g^2}{4}$ :

$$\frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

Täpselt samasugust analüüsi kasutame ka võrrandite süsteemis oleva teise võrrandi korral:

$$2 \frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

milles jagame võrrandi mõlemad pooled taas kahega:

$$\frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W}$$

ja viime „nurgafunktsioonid“ taas võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W} = \frac{v^2 g^2}{4}$$

Kui saadud võrrandi mõlemale poolele liidame jagatise  $\frac{v^2 g'^2}{4}$ :

$$\frac{v^2 g'^2}{4} + \frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

siis me näeme seda, et viimane avaldis võrdub ka järgmiselt:

$$\frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

mistõttu saame omakorda väga huvitava võrduse:

$$\frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g'^2}{4} + \frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W}$$

Kuna eespool oleva analüüsi tõttu kehtivad järgmised seosed:

$$\frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W}$$

ja

$$\frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g'^2}{4}$$

siis seega pärast lihtsat matemaatilist teisendust saame võrduseks nulli:

$$\frac{v^2 g^2}{4} - \frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W} = \frac{v^2 g'^2}{4} - \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = 0$$

ehk  $0 = 0$ , mis tõestab hiljuti saadud seose kehtivust:

$$\frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

Teades eelnevalt nõrga interaktsiooni vahebosoni  $M_W$  avaldist

$$\frac{v^2 g^2}{4} = M_W^2$$

millest omakorda võib järeldada:

$$\frac{v^2 g'^2}{4} = M_W'^2$$

siis sellest tulenevalt saamegi avaldise:

$$M_W^2 + M_W'^2 = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} = M_Z^2$$

mis juba kirjeldabki meie otsitavat vahebosonit  $M_Z$ . Näiteks teisendame matemaatiliselt viimast avaldist järgmiselt:

$$M_Z^2 = \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2)$$

ja kui võtame võrrandi mõlemast poolest ruutjuure, siis saamegi nõrga interaktsiooni vahebosoni  $M_Z$  avaldise:

$$M_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}$$

ehk

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}$$

mis peab olema neutraalse elektrilaenguga.

### 1.3.8 Tugev interaktsioon ja tuumajõud

Nõrga interaktsiooni vahebosonite masside tuletamine oli äärmiselt oluline, kuna nõrk jõud vastutab radioaktiivsuse eest. Tugevat interaktsiooni kirjeldab väljade kvantteoorias kvantkromodünaamika, mille põhivõrrand tuletatakse kvantmehaanikas tuntud teisenduste kaudu. Näiteks

eespool tuletatud relativistlikus koguenergia võrrandis:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

ehk

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$$

ehk

$$-p^2 + \frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2$$

korrutame mõlemad pooled  $i^2$ -ga ehk  $-1$ -ga:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2$$

Saadud kompleksse võrrandi viimane liige võrdub erirelatiivsusteooriast tuntud neli-impulssi ruuduga:

$$p_\mu p_\mu = -m^2 c^2$$

millest omakorda saame „tavalise“ neli-impulssi:

$$p_\mu = -mc$$

Erirelatiivsusteoorias defineeritakse neli-impulss ehk „neljamõõtmeline impulss“ järgmiselt:

$$p_\mu = p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} p = -mc$$

ja selle panime siis võrduma  $-mc$ -ga. Kui kasutame viimases võrrandis kvantmehaanikast tuntud impulssi operaatorit:

$$\hat{p} = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

siis saame järgmiselt:

$$p_\mu = p_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{mc}{h}$$

Võtame viimasest funktsiooni  $\psi$  ja arvestame neli-impulssi neljamõõtmelisust:

$$y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi = -\frac{mc}{h} \psi$$

ning viime impulssiga liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi + \frac{mc}{h} \psi = 0$$

Tulemuseks saame elektroni relativistliku võrrandi ehk Diraci „esimese“ võrrandi:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

milles  $\hbar = c = 1$ . Diraci võrrandit saab tuletada ainult siis, kui impulss  $p$  avaldub negatiivsena:

$$y \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -p$$

ehk

$$y \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = -p \psi$$

Näiteks viime impulssi  $p$  viimases võrrandis teisele poole võrdusmärgi:

$$y \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + p \psi = 0$$

ja saame võtta sulud:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + p \right) \psi = 0$$

Impulss  $p$  on massi  $m$  ja kiiruse  $c$  korrutis ehk  $p = mc$ :

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

kuid me kasutame  $\hbar = c = 1$  ühikute süsteemi ja kordaja  $y$  võrdub:

$$y_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}}$$

Kordajat  $y$  tõlgendatakse kvantväljateoorias ka „neljarealistena“, mis rahuldavad „antikommutatsioonireegleid“:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

Tulemuseks saamegi kvantmehaanikas tuntud elektroni relativistliku võrrandi:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

mida nimetatakse ka Diraci „esimeseks“ võrrandiks. Viimasest saadakse ka Diraci „teine“ võrrand:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi} = 0$$

milles defineeritakse  $\bar{\psi}$  kaasoperaatoriks ehk „kaasväljaks“:

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$$

Elektroni relativistlikud võrrandid ehk Diraci võrrandid on kõik tuletatavad ka elektron-positron-

välja lagranžiaani L võrrandist:

$$L = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi} \gamma_v \frac{\partial \psi}{\partial x_v} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_v} \gamma_v \psi \right) - m \bar{\psi} \psi,$$

milles  $\psi$  ja  $\bar{\psi}$  varieeritakse omavahel sõltumatult. See tähendab seda, et elektroni relativistlikud võrrandid ehk Diraci võrrandid „rahuldavad“ elektron-positronvälja võrrandit L.

Kalibratsiooniteisenduseks ( globaalseks kalibratsioonisümmeetriaks ehk invariantusteisenduseks ) nimetatakse kvantmehaanikas olekufunktsioonide teisendust, mille korral mõõdetavad suurused ( omaväärtused ) ei muutu:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x)$$

$\alpha$  on reaalne konstant. Normeeritud olekufunktsioon jääb ka endiselt normeerituks, sest:

$$|e^{i\alpha}| = 1$$

Elektron-positronvälja lagranžiaan ja interaktsioonilagranžiaan on mõlemad invariantseid viimati esitatud teisendusel, kuna nendes olev väli  $\psi$  ja tema kaasväli  $\bar{\psi}$  teiseneb järgmiselt:

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x)$$

Kuid „lokaalseks kalibratsioonisümmeetriaks“ nimetatakse selliseid teisendusi:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x)$$

ja

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}(x)$$

millega ei ole enam tegemist globaalse kalibratsioonisümmeetriaga. Elektron-positronvälja lagranžiaani L võrrand:

$$L = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi$$

ei ole lokaalselt kalibratsioon-invariantne, sest:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \rightarrow e^{i\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + ie^{i\alpha} \psi \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu}$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \rightarrow e^{-i\alpha} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} - ie^{-i\alpha} \bar{\psi} \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu}$$

Lokaalse kalibratsioon-invariantsuse saavutamiseks asendatakse tuletisoperaatorid elektron-positronvälja lagranžiaanis L järgmiselt:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow D_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie A_\mu$$

ja

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu}$$

millega viimane on nn „kompenseeriva välja“ teisenemine. Sellest tulenevalt saadakse elektron-positronvälja lagranžiaani L võrrandi kujuks:

$$L = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi - (\partial_{\mu} \bar{\psi}) \gamma_{\mu} \psi) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi A_{\mu}$$

milles kasutatakse järgmist tähistust:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$$

Kui  $A_{\mu}$  on elektromagnetväli ja  $e$  on positrioni laeng, siis oleme saanud ka täiendava KED ( s.t. kvantelektrodünaamika ) interaktsioonilagranžiaani  $L$ :

$$L = e \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi A_{\mu}$$

milles „vooluks“ nimetatakse:

$$j_{\mu} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi$$

Kõigest eelnevast järeldub väga oluline tõsiasi, et KED lagranžiaan  $L$

$$L = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi - (\partial_{\mu} \bar{\psi}) \gamma_{\mu} \psi) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi A_{\mu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

on „lokaalse kalibratsioonisümmeetria järeldus“. Elektron-positronvälja lagranžiaanis  $L$

$$L = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi} \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\mu}} \gamma_{\mu} \psi \right) - m \bar{\psi} \psi$$

( milles  $\psi \rightarrow q$  ) tuleb teostada järgmine asendus:

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + ig \sum_{a=1}^8 \alpha_a G_{\mu}^a$$

ja seda sellepärast, et elektron-positronvälja lagranžiaan oleks lokaalselt kalibratsioon-invariantne. Sellisel juhul peab paralleelselt  $q$ -välja kalibratsiooneiteisendusele:

$$q(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} q(x)$$

( milles  $\alpha(x)$  on  $3 \times 3$ -maatriks ) teisenema kaheksa lisavälja  $G_{\mu}^a$  järgmiselt:

$$G_{\mu}^a \rightarrow G_{\mu}^a - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \alpha_a - \sum_{b,c} f_{abc} \alpha_b G_{\mu}^c$$

milles arvud  $f$  on „konstantsed struktuurikordajad“. Selle tulemusena saame lagranžiaani  $L$  võrrandi kujuks:

$$L = (\bar{q}q) + (G^2) + g(\bar{q}qG) + g(G^3) + g^2(G^4)$$

mis kirjeldabki tugevat interaktsiooni ja on seega aluseks kogu kvantkromodünaamikale. Selles võrrandis tähistab liige  $(qq)$   $q$ -välja vaba lagranžiaani kineetilise energia ja massi liiget.  $G$ -välja kineetilise energia liiget tähistab liige  $(G^2)$ . Liige  $g(qqG)$  on interaktsiooniliige seoskonstandiga  $g$  ja  $G$ -väljade omavahelise interaktsiooni liikmed on võrrandis viimased kaks liiget.

Viimane lagranžiaani  $L$  võrrand kirjeldab tugevat interaktsiooni, mis tuletatakse kvantmehaanikast tuntud teisenduste kaudu. Kuid tugevat interaktsiooni kirjeldavat matemaatilist ja füüsikalist



süsteemi kirjeldab ka üsna edukalt Yukawa tuumapotentsiaali võrrand, mida on võimalik samuti „tuletada“ otse ( eespool tuletatud ) Albert Einsteini tuntud seisenergia E võrrandist:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = m^2 c^4$$

ehk

$$E^2 - p^2 c^2 - m^2 c^4 = 0$$

mida kasutatakse ka osakeste füüsikas kvandienergia E välja arvutamiseks. Selle tuletuse lõpptulemus kattub täielikult tuumapotentsiaali U seosega ja näitab seega kogu eelneva analüüsi õigsust. Näitame seda illustratiivselt järgmiselt. Näiteks viimases avaldises esitatakse osakese energia E ja impulss p kvantmehaanikast tuntud diferentsiaaloperaatorite kaudu:

$$E \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + U(\vec{r}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

ja

$$p^2 \rightarrow \hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \nabla^2$$

Tulemuseks saame:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi - m^2 c^4 \psi = 0$$

Kui me nüüd jagame saadud võrrandi mõlemad pooled Plancki konstandi ruuduga  $\hbar^2$  ja valguse kiiruse ruuduga  $c^2$ , siis saame viimase võrrandi kujuks:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \nabla^2 \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Edasiseks analüüsiks oletame, et

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0$$

ehk käsitleme ajas muutumatut olukorda:

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi(\vec{r})$$

Sellest tulenevalt saame teostada järgmised matemaatilised teisendused:

$$\nabla^2 \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = \frac{r^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0$$

millest omakorda saame:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} r^2 \phi$$

Viimase võrrandi mõlemast poolest võtame ruutjuure ehk kaotame ära ruudud:

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi = \frac{1}{r} \phi \frac{mc}{\hbar} r$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled -1-ga läbi:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\phi}{r} \frac{mc}{\hbar} r$$

„Negatiivsed märgid“ viime kõik ühele poole võrdusmärgi:

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\phi}{r} \left(-\frac{mc}{h}r\right)$$

ehk seega saame

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\phi}{r} \left(-\frac{mc}{h}r\right)$$

mis annab meile lõpuks järgmise väga olulise diferentsiaalvõrrandi:

$$\partial\phi = -\phi \left(-\frac{mc}{h}\partial r\right)$$

ehk

$$d\phi = -\phi \left(-\frac{mc}{h}dr\right)$$

Kuna saadud diferentsiaalvõrrandis saame  $\phi$  „asendada“ nii negatiivse elektrivälja potentsiaalse energiaga:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

kui ka positiivse elektrivälja potentsiaalse energiaga:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

siis võime diferentsiaalvõrrandi kirjutada ka kujul:

$$d\phi = \phi \left(-\frac{mc}{h}dr\right)$$

Sellise võrrandi lahendiks ongi:

$$\phi(r) = \phi e^{-\frac{mc}{h}r}$$

milles  $e$  on Euleri arv. Kui me nüüd avaldame  $\phi$  „negatiivse elektrivälja potentsiaalse energiana“  $U = U(r)$ :

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} e^{-\frac{mc}{h}r}$$

või negatiivse elektrivälja potentsiaalina:

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} e^{-\frac{mc}{h}r}$$

siis me olemegi tulatanud Yukawa tuumapotentsiaali  $\phi(r)$  võrrandi:

$$\phi(r) = -\frac{g^2}{r} e^{-\frac{mc}{h}r}$$

ehk

$$\phi(r) = -\frac{g}{r} e^{-\frac{mc}{h}r}$$

kuna konstandi  $g$  ja elementaarlaengu  $e$  vahel esineb ka selline seos:

$$g^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

ehk

$$g = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$$

Elektrivälja korral võrdub seisumass m nulliga. Selline tulemus kattub täielikult sellise avaldisega, mis kirjeldab tugeva jõu välja potentsiaali U. Mõnedes teaduskirjanduse allikates esitataksegi konstandi g ja elementaarlaengu e vaheline seos kujul:

$$g^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

milles ei esine Weinbergi nurka. Selline võrdus on tegelikult „peaaegu“ tuletatav ka seosest:

$$e = g \sin\theta_W \approx g \frac{1}{2}$$

milles esineb Weinbergi nurk. Näitame seda lühidalt nii, et võtame viimase avaldise mõlemad pooled ruutu:

$$e^2 = g^2 \frac{1}{4}$$

ja jagame mõlemad pooled raadiusega r:

$$4e^2 \frac{1}{r} = g^2 \frac{1}{r}$$

Kuna elektrivälja potentsiaalse energia  $E_p$  avaldisest:

$$E_p = e\varphi = k \frac{e^2}{r}$$

saame omakorda meile vajaliku seose

$$\frac{E_p}{k} = \frac{e^2}{r}$$

siis seega tuleb võrrand kujul:

$$4 \frac{E_p}{k} = 16\pi\epsilon_0 e\varphi = g^2 \frac{1}{r}$$

Kui raadiuse r viime võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$16\pi\epsilon_0 e\varphi r = g^2$$

siis saamegi sellise seose:

$$16\pi\epsilon_0 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = g^2$$

mis kattub eespool esitatud võrdusega

$$g^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

ja seda ainult sellisel juhul, kui teeme „matemaatilise asenduse“:  $16\pi\epsilon_0 \rightarrow 1$ . Kuid konstandi g ja elementaarlaengu e seose:

$$g = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$$

saame analoogilisel teel tuletada ka otse võrdusest:

$$8\pi\epsilon_0\varphi = \frac{g}{r}$$

mille kehtivust tõestame veidi hiljem. Näiteks kui me viime raadiuse  $r$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$8\pi\epsilon_0\varphi r = g$$

siis saamegi seose:

$$8\pi\epsilon_0 \frac{e}{4\pi\epsilon_0} = g$$

mis kattub võrdusega:

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0} = g$$

ja seda ainult juhul kui:  $8\pi\epsilon_0 \rightarrow 1$ .

Eespool me tuletasime Yukawa tuumapotentsiaali võrrandi Einsteini seisuenergia  $E$  ruudu avaldisest:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = m^2c^4$$

ehk

$$E^2 - p^2c^2 - m^2c^4 = 0$$

milles energia  $E$  oli avaldatud kvantmehaanikast tuntud operaatorina:

$$E \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + U(\vec{r}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

ja niisamuti ka impulss  $p$ :

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

ehk

$$p^2 \rightarrow \hat{p}^2 = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \nabla^2$$

Tulemuseks saime Klein-Gordoni nimelise võrrandi:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi - m^2 c^4 \psi = 0$$

Kuna me käsitlesime just ajas muutumatut olukorda:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0$$

siis Klein-Gordoni nimelise võrrandi kujuks saime:

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 c^2 \psi - m^2 c^4 \psi = 0$$

milles  $i$  on imaginaarühik. Tähelepanuväärne asjaolu on selle juures see, et viimasest on võimalik „tuletada“ ka impulsioperaatori omaväärtusülesande, mis näitab seda, et Yukawa potentsiaal on mõnes mõttes tuletatav ka impulsioperaatori omaväärtusülesandest, mis on omakorda seotud ka

määramatuse seosega osakese koordinaadi  $x$  ja impulsi  $p$  vahel. Näitame seda lühidalt nii, et jagame viimase saadud võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga ja viime massiga  $m$  liikme teisele poole võrdusmärgi:

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi = m^2 c^2 \psi$$

Kui me võtame nüüd võrrandi mõlemast poolest ruutjuure ehk „kaotame ära ruudud“:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p\psi$$

ja teisendame võrrandit järgmiselt:

$$\frac{\partial \psi}{\psi} = \frac{ip}{\hbar} dx$$

siis me olemegi saanud kvantmehaanikast tuntud impulsioperaatori omaväärtusülesande koordinaadi  $x$  näitel:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{ip}{\hbar} dx$$

mille matemaatiliseks lahendiks ongi:

$$\varphi(x) = A e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

Viimane avaldis erineb Yukawa tuumapotentsiaali võrrandist:

$$\varphi(x) = -\frac{g^2}{r} e^{\frac{px}{\hbar}}$$

selle poolest, et impulsioperaatori omaväärtusülesande võrrandis esineb imaginaarühik  $i$ :

$$e^{\frac{ipx}{\hbar}} \rightarrow e^{\frac{px}{\hbar}}$$

ja näiteks elektrivälja potentsiaalse energia asemel on kvantmehaanikast tuntud „normeerimiskordaja“  $A$ :

$$A \rightarrow \varphi = -k \frac{e^2}{r} = -\frac{g^2}{r}$$

Tugevat interaktsiooni kirjeldavat matemaatilist ja füüsikalist süsteemi on põhimõtteliselt võimalik tuletada ka eespool tuletatud elementaarlaengu  $e$  seose võrrandist:

$$e = g \sin\theta_W = g \cos\theta_W$$

ehk

$$e \approx g \frac{1}{2}$$

millest on omakorda võimalik tuletada tugeva interaktsiooni vahebosoni mass. Näiteks viime viimases võrrandis oleva kahe teisele poole võrdusmärgi:

$$2e = g$$

ja jagame võrrandi mõlemad pooled raadiusega  $r$ :

$$2 \frac{e}{r} = \frac{g}{r}$$

Kuna elektrivälja potentsiaal  $\phi$  avaldub võrrandina:

$$\phi = k \frac{e}{r}$$

millest omakorda saame:

$$\frac{\phi}{k} = \frac{e}{r} = \frac{q}{r}$$

siis seega saame võrrandi kujuks:

$$2 \frac{\phi}{k} = \frac{2}{k} \phi = \frac{g}{r}$$

ehk

$$8\pi\epsilon_0\phi = \frac{g}{r}$$

Viimase seose võime välja kirjutada ka niimoodi:

$$2\epsilon_0\phi = \frac{1}{4\pi} \frac{g}{r}$$

Kuna me „otsime“ parajasti tugeva interaktsiooni vahebosoni ehk gluuoni massi, siis seega hiljuti saadud võrrandis:

$$8\pi\epsilon_0\phi = 2e \frac{1}{r} = \frac{g}{r}$$

seome raadiuse  $r$  osakese määramatuse relatsiooniga:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{x} = \frac{p}{h} = \frac{mc}{h}$$

mille tulemusena saame võrrandi kujuks:

$$2e \frac{p}{h} = \frac{g}{r}$$

Järgmisena korrutame saadud võrrandi ühte poolt jagatisega  $\frac{r}{r} = 1$  :

$$2e \frac{r p}{r h} = \frac{g}{r}$$

ja teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$2 \frac{e}{r} = \frac{g}{r} \frac{h}{r p} = \frac{g}{r} \frac{h}{x p}$$

Tähelepanuväärne on nüüd see, et määramatuse relatsiooni avaldise  $xp = h$  tõttu võrdub üks liige ühega:

$$\frac{h}{xp} = 1$$

ja seetõttu on tegemist ikkagi algselt tuletatud võrrandiga:

$$2 \frac{e}{r} = \frac{g}{r} \frac{h}{xp} = \frac{g}{r} = 8\pi\epsilon_0\phi$$

Viimasest on näha, et kui vahebosoni seisumass võrduks nulliga ehk  $m_0 = 0$ , siis saaksime tulemuseks lõpmata suure potentsiaali  $\varphi$  väärtuse:

$$8\pi\varepsilon_0\varphi = \frac{g}{r} \frac{h}{xp} = \frac{g}{r} \frac{h}{xm_0c} = \frac{g}{r} * \frac{h}{x * 0 * c} = \infty$$

ehk  $\varphi = \infty$ . Kuna selline tulemus on füüsikaliselt „ebareaalne“, siis viimast võrrandit saame matemaatiliselt teisendada ka järgmiselt:

$$2 \frac{e}{r} = \frac{g}{r} \frac{h}{xp} = \frac{g}{r} \frac{1}{\frac{xp}{h}} = \frac{g}{r} \frac{1}{e^{\frac{xp}{h}}} = \frac{g}{r} e^{-\frac{xp}{h}} = \frac{g}{r} e^{-\frac{rmc}{h}}$$

ehk

$$2 \frac{e}{r} = \frac{g}{r} = \Delta \left( \frac{g}{r} \right) = d \left( \frac{g}{r} \right) = \frac{g}{r} \frac{h}{xp} = \frac{g}{r} e^{\frac{h}{xp}} = \frac{g}{r} e^{-\frac{xp}{h}} = \frac{g}{r} e^{-\frac{rmc}{h}} = 2 \frac{e}{r} = 8\pi\varepsilon_0\varphi$$

ehk

$$8\pi\varepsilon_0\varphi = \frac{g}{r} e^{-\frac{rmc}{h}}$$

milles olevas liikmes  $e^{-\frac{rmc}{h}}$  ei ole  $e$  elementaarlaeng, vaid see on „Euleri arv“  $e = 2,718\dots$ . Kuid matemaatilise korrektsuse ja ranguse huvides näitame seda, et kuidas eespool tuletatud võrrandist:

$$2 \frac{e}{r} = \frac{g}{r} = \frac{g}{r} \frac{h}{xp}$$

ehk

$$2 \frac{e}{r} \frac{xp}{h} = \frac{g}{r}$$

saame lõpuks ikkagi Yukawa tuumapotentsiaali võrrandi. Näiteks raadius  $r$  võib võrrandist „ajuti-selt“ välja taandada:

$$\frac{xp}{h} 2e = g$$

ja kuna kehtib ligikaudne seos:  $2e \approx g$ , siis võrrandi kuju saame esitada ka järgmiselt:

$$\frac{xp}{h} g \approx g$$

Lihtsuse huvides kasutame edaspidi siiski ainult „võrduse“ märki. Viimasest saame diferentsiaalvõrrandi:

$$dg = g \frac{mc}{h} dx$$

ja kui me korrutame selle võrrandi mõlemad pooled -1-ga läbi:

$$-dg = -g \frac{mc}{h} dx$$

siis me saame võrrandi kujuks:

$$dg = -g \left( -\frac{mc}{h} dx \right)$$

Kuna konstant  $g$  ja elementaarlaeng  $e$  on omavahel ligikaudses seoses:

$$2e \approx g$$

milles elementaarlaeng  $e$  võib olla nii positiivne  $+e$  kui ka negatiivne  $-e$ , siis võime võrrandi kirjutada ka kujul:

$$dg = g \left( -\frac{mc}{h} dx \right)$$

millega „matemaatiliseks lahendiks“ on:

$$g(x) = g e^{-\frac{mc}{h}x}$$

Kui me nüüd jagame võrrandi mõlemad pooled raadiusega  $r$  ( ehk toome võrrandisse uuesti raadiused  $r$  ), siis olemegi saanud Yukawa tuumapotentsiaali võrrandi:

$$\frac{g}{r} = \frac{g}{r} e^{-\frac{mc}{h}x} = 2 \frac{e}{r} = 8\pi\epsilon_0\varphi$$

Lõpptulemus võib erineda eespool saadud võrrandiga ainult märgi poolest. Seetõttu korrutame eespool saadud potentsiaali võrrandi

$$8\pi\epsilon_0\varphi = 2 \frac{e}{r} = \frac{g}{r} e^{-\frac{rmc}{h}}$$

mõlemad pooled  $-1$ -ga läbi:

$$-2 \frac{e}{r} = -\frac{g}{r} e^{-\frac{rmc}{h}}$$

Sellisel juhul saame kasutada negatiivse elementaarlaengu  $e$  elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  võrrandit:

$$\varphi = -k \frac{e}{r}$$

millega omakorda järeldeb

$$\frac{\varphi}{k} = -\frac{e}{r}$$

Selle tulemusena saame potentsiaali võrrandi kujuks:

$$-2 \frac{e}{r} = 8\pi\epsilon_0\varphi = -\frac{g}{r} e^{-\frac{rmc}{h}}$$

Kuna elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  on korrutatud konstandiga  $8\pi\epsilon_0$ , siis saame mingisuguse teise potentsiaali  $U$  avaldise:

$$8\pi\epsilon_0\varphi = \text{const } \varphi = U$$

ehk

$$U = -\frac{g}{r} e^{-\frac{rmc}{h}}$$

Kuna nurgafunktsioon võrdus ligilähedaselt:

$$\sin\theta_W \approx \frac{1}{2}$$

( milles Weinbergi nurk avaldus  $\theta_W \approx 13,5^\circ$  ) ja de Broglie lainepikkus  $\lambda$  võrdus:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

siis seega potentsiaali  $U$  „täpsem“ kuju avaldub järgmiselt:



$$U = U(r) \approx -\frac{g}{r} e^{-\frac{\lambda mc}{h}}$$

Seda nimetatakse tuumafüüsikas „Yukawa potentsiaaliks“  $U$ , mis kirjeldab tugeva jõu välja potentsiaali.

Siinkohal tasub märkida seda, et kui me kasutame võrrandis  $h = xp$  „võrduse“ märki, siis on tegemist tuntud de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  valemiga:

$$\frac{h}{p} = \lambda$$

Kui aga „võrduse“ asemel on „suurem või võrdne“ märk:

$$\frac{h}{p} \leq \lambda$$

siis on tegemist juba Heisenbergi määramatuse relatsiooniga osakese impulsi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel  $h \leq \Delta x \Delta p$  ehk

$$\frac{h}{\Delta p} \leq \Delta x$$

Yukawa tuumapotentsiaal  $U$  esitatakse erinevates teaduskirjanduse allikates mõnevõrra erinevalt, kuid sellegipoolest on need kõik tuletatavad täpselt nii nagu eespool näidatud. Mõned näited on järgmised:

$$U = g \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} = \frac{g}{r} e^{-\frac{rm_0 c}{h}}$$

ja

$$U_t(r) \sim -g \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} = -g \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r}$$

Viimases pole raske näha, et tugeva vastastikmõju raadiust näitab  $r_0 = a \approx 1,4 * 10^{-15} m$ . Veel mõned näited Yukawa potentsiaali  $U$  esitamise viisidest:

$$U_t \sim \frac{1}{r} e^{-\frac{rmc}{h}}$$

ja

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

Viimases näitab mõjuraadiust  $r_0$  ja dimensioniks on võetud  $h = c = 1$ . Kuid mõnedes väljaannetes on Yukawa potentsiaalil  $U$  ka selline kuju:

$$V_{Yukawa}(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha mr}}{r}$$

milles

$$\alpha = \frac{c}{h}$$

ja

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-\mu r}$$

milles omakorda  $\mu = m$  ja  $\hbar = c = 1$ . Yukawa potentsiaali  $U$  järgi saab teada ka tugeva jõu  $F$  suuruse:

$$dU = -Fdx$$

ehk

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Tuumajõudude energia küündib  $1,4 \cdot 10^5 \text{ eV}$  -ni, kuna tuumajõu  $F$  mõjuraadius  $r_0$  on  $2 \cdot 10 - 15 \text{ m}$ .

Eespool tuletatud potentsiaali  $U$  võrrand:

$$U = 8\pi\epsilon_0\varphi = -\frac{g}{r}e^{-\frac{rmc}{\hbar}}$$

on tähelepanuväärne selle tõttu, et see avaldis näitab nii elektromagnetilise kui ka tugeva interaktsiooni vahebosoni massi. Näiteks kui mass  $m$  võrdub nulliga ehk vaheosakese seisumass on null, siis Euleri arv võrdub ühega:

$$e^{-\frac{rmc}{\hbar}} = e^0 = 1$$

ja potentsiaali  $U$  võrrand tuleb kujul:

$$8\pi\epsilon_0\varphi = -\frac{g}{r}e^{-\frac{rmc}{\hbar}} = -\frac{g}{r}$$

ehk

$$8\pi\epsilon_0\varphi = \frac{g}{r}$$

Viimasest pole raske näha, et tegemist on elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  võrrandiga, kui teatavad konstandid viia teisele poole võrdusmärgi:

$$2\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{g}{r} = k \frac{g}{r}$$

ja kui arvestada elementaarlaengu  $e$  seost  $g$ -ga:

$$\varphi = k \frac{g}{r} \frac{1}{2}$$

ehk

$$\varphi = k \frac{e}{r}$$

Tulemus kattub tõepoolest elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  võrrandiga, mis näitab seda, et elektromagnetilise interaktsiooni vahebosoniks on foton, mille seisumass võrdubki nulliga. Footonit saab tõlgendada ka elektromagnetlainena ja väikseim võimalik elektromagnetlainepikkus  $\lambda$  looduses on:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mc} \approx 10^{-14} \text{ m}$$

Elektromagnetlainet ehk reaalse footoni lainepikkus võib „teoreetiliselt“ olla kuitahes pikk (s.t. ülempiiri ei ole). Kui aga vahebosoni lainepikkus  $\lambda$  võrdub ligikaudselt elektromagnetlainet ehk footoni väikseima võimaliku lainepikkusega või on sellest isegi veelgi väiksem:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mc} \approx 10^{-15} \text{ m}$$

siis me saame tulemuseks sellise potentsiaali  $U$  võrrandi:

$$U = -\frac{g}{r} e^{-\frac{rmc}{h}} = -\frac{g}{r} e^{-\frac{\lambda mc}{h}}$$

mis kirjeldab juba tugevat interaktsiooni. See tähendab seda, et kui vahebosoni ( mille seisumass võrdub nulliga ) lainepikkus  $\lambda$  on võrdne suuremate aatomituumade läbimõõduga

$$\lambda \approx 10^{-14} \text{ m}$$

või lausa vesiniku aatomituumade läbimõõduga:

$$\lambda \approx 10^{-15} \text{ m}$$

ja see kattub ka interaktsiooni mõjuraadiusega  $r$ , siis on tegemist juba gluuoni (kineetilise)massiga  $m$ :

$$m = \frac{h}{\lambda c}$$

Gluuonid vahendavad tugevat interaktsiooni. Käesolev analüüs näitas, et gluuoni suurim lainepikkus võib võrrelda ligikaudu elektromagnetlaine väikseima võimaliku pikkusega looduses. Eespool tuletatud potentsiaal  $U$ :

$$U = -\frac{g}{r} e^{-\frac{\lambda mc}{h}}$$

kirjeldab seega nii elektrivälja potentsiaali  $\phi$  kui ka tugeva jõu välja potentsiaali  $U$ .

Kuna erinevad teadusandmete allikad näitavad elektromagnetlaine pikkuse  $\lambda$  erinevaid „alampiirisid“, siis sellest tulenevalt on olemas kolm erinevat tõlgendusviisi, mida alljärgnevalt ka välja toome:

1. Esiteks mõnede teadusandmete põhjal on elektromagnetlaine väikseim võimalik pikkus looduses:

$$\lambda \approx 10^{-12} \text{ m}$$

ja kui võrrelda nüüd seda aatomituumade läbimõõduga ( s.t. tugeva jõu vahebosoni gluuoni mõjuraadiusega ):

$$\lambda \approx 10^{-15} \text{ m}$$

siis saame väga üllatava seose:

$$\frac{r}{\lambda} \approx \frac{\lambda}{\lambda} \approx \frac{10^{-15}}{10^{-12}} \approx \alpha \approx 7 * 10^{-3} \approx 0,00728 \approx \frac{1}{137}$$

Viimasest järeldub üsna selgesti see, et elektromagnetlaine ehk reaalse footoni väikseim võimalik lainepikkus looduses on vähemalt tuhat korda suurem gluuoni suurimast võimalikust lainepikkusest. Selline tulemus kattub üllatavalt hästi elektromagnetilise ja tugeva jõu erinevusega, mis on samuti umbes tuhandekordne. Seda näitab füüsikas peenstruktuurikonstant  $\alpha$ .

2. Kuid üsna suur osa teadusandmed näitavad, et elektromagnetlaine väikseim võimalik pikkus

looduses on võrdne:

$$\lambda \approx 10^{-14} \text{ m}$$

Aatomituuma läbimõõt ja läbi selle ka gluuoni lainepikkus ehk tugeva jõu mõjuraadius on:

$$\lambda \approx 10^{-15} \text{ m}$$

ning nukleonide ( s.t. prootonite ja neutronite ) vaheline tuumajõud eksisteerib mõõtkavas:

$$\lambda \approx 10^{-14} \text{ m}$$

Sellise tõlgenduse järgi võrdub elektromagnetlaineline väikseim võimalik pikkus looduses  $\pi$ -mesoni suurima võimaliku lainepikkusega.  $\pi$ -mesonid vahendavad nukleonide vahelist tuumajõudu. See tähendab ka seda, et tuumajõud hakkavad eksisteerima just „sealt“, kust „lõpeb“ elektromagnetlainete ehk reaalse footonite lainepikkuste skaala.

3. Teoreetiliselt on võimalik ka seegi, et elektromagnetlainete pikkused küündivad palju väiksemaks kui aatomite tuumad:

$$\lambda \ll 10^{-15} \text{ m} \ll 10^{-14} \text{ m}$$

ja seega kaks eelnevat tõlgendusviisi osutuvad valedeks. Looduses see tõenäoliselt siiski võimalik ei ole, kuna väikseim elektromagnetlaineline pikkus ongi gammakiirgusel, mis tekib aatomituuma üleminekul suurema energiaga ergastatud olekust väiksema energiaga ergastatud olekusse või põhiolekusse, millele vastav energia on minimaalne. Seetõttu on vähe usutav, et gammakiirguse väikseim lainepikkus saab olla väiksem aatomituumast või koguni kvarkidest. Elektromagnetlaineline ehk reaalse footoni väikseim võimalik lainepikkus looduses võib jääda  $10^{-14}$  ja  $10^{-15}$  meetri vahele.

Kuna tugeva interaktsiooni vahebosoni gluuoni massi  $m$  suurust pole eksperimentaalselt tuvastatud, siis on olemas ka sellele kaks erinevat tõlgendusviisi:

1. Esiteks, kuna potentsiaal  $U$  avaldub matemaatilise seosena:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

ehk jõud/potentsiaal kasvab alguses kauguse suurenedes ja alles siis jääb konstantseks, siis seega võib gluuoni seisumass  $m_0$  võrdsuda nulliga, kuid nullist erineva „kineetilise massi“  $m$  saab välja arvutada de Broglie lainepikkuse avaldisest:

$$m = \frac{h}{\lambda c}$$

milles gluuoni lainepikkus  $\lambda$  on:

$$\lambda \approx 10^{-15} \text{ m}$$

2. Kui aga gluuonil ei võrdu seisumass nulliga, siis ei ole võimalik gluuoni massi välja arvutada. Me saaksime kätte ainult gluuoni impulssi  $p$  väärtuse:

$$mv = p = \frac{h}{\lambda}$$

milles gluuoni lainepikkus  $\lambda$  on ikka:

$$\lambda \approx 10^{-15} \text{ m}$$

kuid gluuoni levimiskiirus ei võrdu enam valguse kiirusega  $c$ :  $v \neq c$ .

Tugeva interaktsiooni suuruse ( ja läbi selle ka seda vahendava gluuoni massi ) määrab ära ka füüsikas laialt tuntud peenstruktuurikonstant  $\alpha$ , mis näitab seda, et mitu korda on tugev jõud suurem elektromagnetilisest jõust. Peenstruktuurikonstandi  $\alpha$  saame tuletada taas eelnevalt leitud elementaarlaengu  $e$  seose võrrandist:

$$e = g \sin\theta_W \approx g \frac{1}{2}$$

Selleks tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$e^2 = g^2 \frac{1}{4}$$

ja jagame võrrandi mõlemad pooled raadiusega  $r$  ning viime 4-ja võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$4 \frac{e^2}{r} = \frac{g^2}{r}$$

Kuna elektrivälja potentsiaalne energia  $E$  avaldub seosena:

$$E = k \frac{e^2}{r}$$

millest omakorda saame jagatise:

$$\frac{E}{k} = \frac{e^2}{r}$$

siis seega saame „läbi matemaatiliste teisenduste“ võrrandi kujuks:

$$4 \frac{E}{k} = 4 \frac{mc^2}{k} = 4 \frac{hf}{k} = \frac{g^2}{r}$$

ehk

$$4 \frac{hf}{k} = \frac{g^2}{r}$$

Viimast saame omakorda teisendada järgmiselt:

$$fr = \frac{r}{t} = \frac{x}{t} = v = c = k \frac{g^2}{4h}$$

Kuna eelnevalt kehtis seos:

$$e^2 = g^2 \frac{1}{4}$$

siis saame võrduse

$$c = k \frac{e^2}{h} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 h}$$

millest saamegi tuletada „peenstruktuurikonstandi“  $\alpha$ :

$$1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

Kui me viime number 1-he võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

ehk

$$0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} - 1$$

siis saame järgmise võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} 1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \\ 0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} - 1 \end{cases}$$

Saadud võrrandite süsteemist on võimalik tuletada üldisem võrrand:

$$0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} - 1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

ehk

$$0 = +\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

ehk

$$0 = +e - e = +q - q$$

mis on oma olemuselt energia jäävuse seadus ja/või (elektri)laengu jäävuse seadus. Viimane tähendab seda, et elektrilaengud tekivad looduses alati paaris: + laengute ja – laengute paarina, mis kokku annabki alati nulli. Selles mõttes energiaväljad looduses tegelikult ei teki ega ka kao, mis ongi kooskõlas üldise energia jäävuse seadusega. Näiteks neutraalse laenguga neutron võib laguneda positiivse laenguga prootoniks ja negatiivse laenguga elektroniks, mis kokku annabki nulli:

$$+e + (-e) = 0$$

Kuid eelviimasest võrrandist saame omakorda võrduse:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

millest saamegi kätte kvantelektrodünaamikast tuntud „peenstruktuurikonstandi“  $\alpha$ :

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \alpha \approx \frac{1}{137}$$

ja seda siiski juhul, kui elektrilaenguks  $q$  on elektroni laeng ehk elementaarlaeng  $e$ . Teatud ühikute süsteemi kasutusele võtmisega võib elementaarlaeng  $e$  võrduda ka järgmiselt:

$$e = \sqrt{\alpha} \ll 1$$

Kui me eespool saadud võrrandit

$$1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

jagame mõlemad pooled raadiusega  $r$ , siis saame seose:

$$\frac{1}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = k \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{E}{\hbar c} = \frac{pc}{\hbar c} = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{x}$$

ehk

$$\frac{1}{x} = \frac{p}{\hbar}$$

mis kattub täielikult osakese määramatuse relatsiooniga koordinaadi  $x$  ja impulsi  $p$  vahel:

$$\hbar = px$$

Kuna „koordinaadi funktsiooni“  $\frac{1}{r}$  saime avaldada ka läbi peenstruktuurikonstandi  $\alpha$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = k \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{E}{\hbar c} = \frac{p}{\hbar}$$

siis seega võime eespool tuletatud Yukawa potentsiaali  $U$  võrrandi

$$2 \frac{e}{r} = \frac{g}{r} \frac{\hbar}{xp} = \frac{g}{r} = 8\pi\epsilon_0\varphi$$

kirjutada ka kujul:

$$2 \frac{e}{r} = \frac{e^2 g}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{\hbar}{xp} = k \frac{e^2 g}{\hbar c} \frac{\hbar}{xp}$$

Viimases me näeme seda, et Plancki konstandid  $\hbar$ -id taanduvad võrrandist ilusti välja ja läbi impulssi  $p$  avaldub kvandienergia  $E$ :

$$2 \frac{e}{r} = k \frac{e^2 g}{\hbar c} \frac{\hbar}{xp} = k \frac{e^2 g}{rc} \frac{1}{xp} = k \frac{e^2 g}{r} \frac{1}{xE}$$

Tulemuseks saamegi puhtalt kvandienergia  $E$  võrrandi:

$$2E = k \frac{eg}{r} = \varphi g$$

ehk

$$E = \frac{\varphi g}{2}$$

Kui meil oleks tegemist vaakumi potentsiaaliga  $\varphi = v$ , siis viimane võrrand kattuks nõrga interaktsiooni ühe vahebosoni massi avaldisega:

$$M_W = \frac{vg}{2}$$

mille ühikuks on jagatis  $\frac{GeV}{c^2}$ . Kuid kvandienergia  $E$  võrrandist saame eelkõige siiski elementaarlaengu  $e$  seose avaldise:

$$\frac{E}{\varphi} = q = e = \frac{g}{2} \approx g \sin\theta_W$$

ehk

$$e = g \sin\theta_W$$

millest me algselt tuletasimegi tuumajõudu kirjeldava Yukawa potentsiaali  $U$  võrrandi ja peenstruktuurikonstandi  $\alpha$  avaldise.

Siinkohal tasuks märkida seda, et peenstruktuurikonstant  $\alpha$  ja gammakiirguse väikseim võimalik lainepikkus  $\lambda$  looduses on need, mis määravad ära elektromagnetilise ja tugeva interaktsiooni omavahelise suhte. Näiteks peenstruktuurikonstant  $\alpha$ :

$$\alpha \approx \frac{1}{137}$$

näitab seda, et mitu korda on tugev jõud suurem elektromagnetilisest jõust ja elektromagnetlaine ( s.t. gammakiirguse ) väikseim võimalik lainepikkus  $\lambda$  looduses kattub tuumajõu ( s.t. nukleonide vahelise tugeva jõu ) suurima võimaliku mõjuraadiusega  $r$  looduses, mille pikkus on  $10^{-14}$  m.

Tugeva interaktsiooni vahebosonid ( näiteks gluonid ) on seotud just murruliste elementaarsete elektrilaengutega. Näitame seda pisut järgneva analüüsi teel. Näiteks üldrelatiivsusteooria gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrandist:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2U}{c^2}}} = \infty$$

saime gravitatsioonipotentsiaali  $U$  suurima võimalikkuse kogu Universumis:

$$U = \frac{c^2}{2} = \frac{GM}{r} = \frac{G}{r} M = \frac{G}{r} \frac{E}{c^2} = \frac{G}{r} \frac{q\varphi}{c^2} = \frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2} = \frac{G}{c^2} F = \frac{c^2}{2}$$

milles  $F$  on omakorda suurim võimalik elektrijõud looduses:

$$F = \frac{c^4}{G} = \text{const}$$

kuna sellisel korral on aeg(ruum) kõverdunud lõpmatuseni ( ehk antud juhul on aeg teisenenud lõpmatuseni ). Viimast seost teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{c}{M} r = \frac{2G}{c} = p = mc = \frac{E}{c}$$

mille korral saime impulsi  $p$  väärtuse. Kui me nüüd jagame saadud võrrandi mõlemad pooled 3-ga:

$$\frac{c}{3M} r = \frac{2G}{3c}$$

siis me olemegi saanud elementarlaengu  $e$  ligikaudse väärtuse:

$$\frac{2G}{3c} \approx e$$



Kogu viimast analüüsi selgitame pisut lähemalt. Näiteks lõpmata aegruumi kõveruse ehk antud juhul lõpmata aja teisenemise korral:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2U}{c^2}}} = \infty$$

on gravitatsioonipotentsiaali  $U$  väärtus:

$$U = \frac{c^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

mis viitab sellele, et sellest suuremat väärtust olla ei saa. Viimasest saame omakorda Schwarzschildi raadiuse  $r$  avaldise:

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

mis näitab tsentraalsümmeetrilise „aegruumi pinna“ ehk „aegruumi ääre“ olemasolu gravitatsiooni-välja tsentris, millel aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast. Aegruum ja seega gravitatsioon saab „alguse“ just Schwarzschildi pinnast. Aegruum on kõverdunud lõpmatuseni ka siis kui elektrijõul  $F$  on selline väärtus:

$$F = \frac{c^4}{G} = \text{const}$$

ja see viitab samuti sellele, et sellest suuremat väärtust elektrijõul  $F$  olla ei saa. Viimane näitab ka elektrijõu ja gravitatsioonijõu erinevust ehk seda, mitu korda on elektrijõud suurem gravitatsioonijõust. Eelneva analüüsi põhjal on võimalik tõlgendada ka seda, et aegruum ei ole kõverdunud lõpmatuseni elementaarlaengu  $e$  väärtuse korral, kuid kui Schwarzschildi raadiuse  $r$  valemist saab tuletada elementaarlaengu  $e$  ligikaudse väärtuse:

$$\frac{2G}{3c} \approx e$$

siis see tähendab seda, et elektrijõud „algab“ elementaarlaengust täpselt nii nagu gravitatsioon „algab“ Schwarzschildi pinnast. See tähendab, et väikseim elektrilaeng looduses saabki olla ainult elementaarlaeng  $e$  ja sellest väiksemat elektrilaengut looduses olla ei saa täpselt nii nagu gravitatsioon saab alguse Schwarzschildi pinnast ning mitte selle seest. Need piirid paneb paika just aegruumi meetriline sktruktuur, mis ongi näidatud eelneva matemaatilise analüüsiga. Näiteks väikseim võimalik elektrilaeng looduses ehk seega elementaarlaengu  $e$  väärtus ongi paika pandud „aegruumi eksisteerimise piiriga“. Kõik elektrilaengud looduses on elementaarlaengu  $e$  täisarvkordsed.

Schwarzschildi raadiusest  $r$  tuletatud võrrandist:

$$\frac{c}{3M} r = \frac{2G}{3c} = \frac{p}{3} \approx e$$

saame kaks võrdust:

$$\frac{c}{3M} r = \frac{2G}{3c}$$

ja

$$\frac{c}{3M} r = \frac{p}{3}$$

ning ühe ligikaudse võrduse:

$$\frac{c}{3M}r \approx e$$

Impulssi p sisaldavas võrduses:

$$\frac{c}{3M}r = \frac{p}{3} = \frac{mc}{3}$$

me näeme seda, et kehtib järgmine seos:

$$\frac{1}{m} = \frac{M}{r}$$

Elementaarlaengut e sisaldavas võrduses:

$$\frac{c}{3M}r \approx e$$

saame tegelikult samasuguse seose:

$$\frac{c}{3e} = \frac{M}{r} = \frac{1}{m}$$

mis annabki meile impulsi p ja elementaarlaengu e vahelise ligikaudse võrduse:

$$\frac{mc}{3} = \frac{p}{3} \approx e$$

Impulsi p seose tõttu

$$\frac{2G}{c} = p = mc$$

avalduks „fikseeritud“ energia E järgmiselt:

$$2G = mc^2 = E$$

Viimasest saame meile juba varem tuntud seisueenergia E avaldise:

$$G = \frac{mc^2}{2}$$

mis võib põhimõtteliselt võrduda ka elektrivälja energiaga:

$$G = \frac{q\varphi}{2} = \frac{e\varphi}{2}$$

või elektrivälja potentsiaalse energiaga:

$$2G = e\varphi$$

milles väljapotentsiaal  $\varphi$  on „fikseeritud“:

$$\frac{2G}{e} = \varphi$$

G on gravitatsioonikonstant ja e on elementaarlaeng.

Ligikaudsest võrdusest:

$$\frac{2G}{3c} \approx e$$

järeldub omakorda:

$$\frac{2G}{c} \approx 3e = e + e + e$$

ehk

$$\frac{2G}{c} \approx e + e + e$$

milles me näemegi, et kolm väikest murrulist elementaarset laengut moodustavad kokku ühe mitterurrulise elementaarse laengu:

$$\frac{2G}{3c} \approx \frac{1}{3}(e + e + e) = e$$

Kuna selle järgi avaldub positiivne elementaarne laeng

$$\frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e = +e$$

ja negatiivne laeng

$$-\frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = -e$$

siis seega neutraalne laeng saab avalduda ( minimaalselt ) ainult järgmiselt:

$$\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$$

( mis kattub täielikult neutroni neutraalse laenguga looduses ) ja

$$-\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e = 0$$

( mis kattub aga antineutroni neutraalse laenguga looduses ). Neutroni laengust võime vabalt järeldada prootoni positiivse laengu:

$$\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = +e$$

ja antineutroni laengust antiprotoni negatiivse laengu:

$$-\frac{2}{3}e - \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = -e$$

Kogu eelneva analüüsi järeldus või tulemus kattub täielikult elementaarosakeste füüsika fundamentaalse tõlgendusega, et positiivse elementaarlaenguga nukleon nimega prooton:

$$\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = +e$$

koosneb kahest u-kvargist ( punasest  $\frac{2}{3}e$  ja rohelisest  $\frac{2}{3}e$  ) ning ühest sinisest d-kvargist  $-\frac{1}{3}e$  . Eelneva analüüsi lõppjäreldus kattub ka tõlgendusega, et neutraalse elementaarlaenguga neutron:

$$\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$$

koosneb kahest d-kvargist ( punasest  $-\frac{1}{3}e$  ja sinisest  $-\frac{1}{3}e$  ) ning ühest rohelisest u-kvargist  $\frac{2}{3}e$  .

Kuna eespool tuletasime Yukawa tuumapotentsiaali võrrandi:

$$8\pi\epsilon_0\varphi = \frac{g}{r}$$

ehk lahti kirjutatuna

$$2\frac{e}{r} = \frac{g}{r} e^{-\frac{rp}{h}}$$

ja näiteks prootoni positiivne elementaarne elektrilaeng koosneb kolmest erinevast murrulise elektrilaenguga kvargist:

$$\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = +e$$

siis saaksime tuumapotentsiaali võrrandi kujuks ( prootoni näitel ):

$$2\left(\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e\right)\frac{1}{r} = \frac{g}{r} e^{-\frac{rp}{h}}$$

Saadud võrrandil on olemas täpselt kolm lahendit ehk kolm võimalikku tõlgendust, mida me kohe ka järgnevalt näitamegi. Näiteks tõeliselt tugev interaktsioon avaldubki just kvarkide vahel. Eespool tuletatud potentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{h}}$$

saame korraga nii elektromagnetilise kui ka tugeva interaktsiooni vahebosonid. Näiteks kui seisumass  $m$  võrduks nulliga ehk  $m = 0$ , siis saame potentsiaali  $U$  käiguks:

$$U \propto \frac{1}{r} e^0 = \frac{1}{r}$$

Elektromagnetilise interaktsiooni vahebosoniks on footon, mille seisumass ( ja ka elektrilaeng ) võrdub nulliga, mistõttu on elektromagnetilise interaktsiooni mõjuraadius lõpmatu:

$$U \propto \frac{1}{r}$$

See oli üks lahend. Kuid eespool tuletatud potentsiaali  $U$  võrrandil

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{h}}$$

on olemas veel kaks reaalselt lahendit. Näiteks kui viimases avaldises võrdub vahebosoni kiirus valguse kiirusega ehk  $v = c$ , siis on tegemist seisumassita vahebosoniga, mille potentsiaali  $U$  käik võibki olla:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{h}}$$

mitte enam

$$U \propto \frac{1}{r}$$

Kuna interaktsiooni mõjuraadius  $r_0$  ja vahebosoni lainepikkus  $\lambda$  on potentsiaali  $U$  võrrandis põhimõtteliselt üksteisest eristamatud  $r_0 = \lambda$ , siis saame seisumassita vahebosoni (kineetilise)-massi välja arvutada tuntud lainepikkuse võrrandi kaudu:

$$m = \frac{h}{r_0 c}$$

Kuna kvarkid eksisteerivad prootonites ja neutronites, mille mõõtmed on umbes  $r_0 \approx 10^{-15} \text{ m}$ , siis sellisel juhul võib tegemist olla „gluoniga“, mis vahendab just kvarkide vahelist tugevat interaktsiooni ja mille seisumass võrduks nulliga. Kui aga potentsiaali  $U$  võrrandis

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mv}{\hbar}}$$

ei võrdu vahebosoni kiirus enam valguse kiirusega  $c$  ehk  $v = v$ , siis seega vahebosonil on reaalselt olemas seisumass. Sellisel juhul me vahebosoni massi teada ei saaks, kuid tema impulssi  $p$  saame välja arvutada küll:

$$mv = p = \frac{\hbar}{r_0}$$

Sellise tõlgenduse järgi võib tegemist olla  $\pi$ -mesoniga ( s.t.  $\pi^{\pm 0}$  ), mille seisumass ei võrdu enam nulliga ja mis vahendab nukleonide ( s.t. prootonite ja neutronite ) vahelist tugevat interaktsiooni ehk antud juhul tuumajõudu. Prootonite ja neutronite hulkade mõõtkava on aatomite tuumades enamasti  $r_0 \approx 10^{-14} \text{ m}$ . Sellegipoolest arvatakse, et  $\pi$ -mesoni mass võib võrduda  $273 m_e$  ( s.t. 273 elektroni massi ).

Eelnevast järeldub, et kui interaktsiooni vaheosakeste vahel ei esine jõudu  $F$ , siis potentsiaali  $U$  käik on:

$$U \propto \frac{1}{r}$$

Viimane näitab näiteks elektromagnetilist potentsiaali  $U$ , mille mõjuraadius on teatavasti lõpmatu ja seetõttu ei saa footonitel olla elektrilaenguid. See tuleneb sellest, et virtuaalne footon peab elektrilaengute eemaldumisel läbima interaktsiooniprotsesside vahel järjest pikema tee ja see nõrgendab interaktsiooni. Kui aga interaktsiooni vaheosakeste vahel esineb siiski jõud  $F$ , siis potentsiaali  $U$  käik tuleb:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

Viimane näitabki tugeva jõu välja potentsiaali  $U$  käiku, mille korral esineb interaktsiooni vaheosakeste vahel jõud ja seega peavad vaheosakesed ( antud juhul gluonid ) olema (värvi)laetud. Sellise potentsiaali  $U$  korral on interaktsiooni mõjuraadius  $r_0$  väga väike.

Elektromagnetiline interaktsioon eksisteerib elektrilaengute vahel. Kuna tugev interaktsioon esineb just kvarkide vahel ( mille mõõtmed on mõõtkavas  $10^{-18} \text{ m}$  ), siis seega kvarkidel on peale elektrilaengu ka veel selline „laeng“, mis võtab osa tugevast jõust. Kvarkide „tugeva jõu laengut“ esitataksegi „värvilaenguna“. Selle järgi esineb elektromagnetiline interaktsioon kvarkide murruliste elektrilaengute vahel, kuid tugev jõud esineb kvarkide „värvilaengute“ vahel. Kolm värvilaengut ( punane, roheline ja sinine ) annavad kokku valge värvuse ja kui osakesel on „valge värvilaeng“, siis see ei võta osa tugevast jõust. Positiivne ja negatiivne elektrilaeng annavad kokku samuti neutraalse ehk 0-elektrilaengu. Näiteks prootoni positiivne elektrilaeng  $+e$ :

$$\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = +e$$

koosneb punasest u-kvargist  $\frac{2}{3}e$ , rohelisest u-kvargist  $\frac{2}{3}e$  ja sinisest d-kvargist  $-\frac{1}{3}e$ . Prootoni „kvarkvalem“ tuleb seega:  $p = ( uud )$ . Neutroni neutraalne elektrilaeng 0:

$$\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$$

koosneb rohelisest u-kvargist  $\frac{2}{3}e$ , sinisest d-kvargist  $-\frac{1}{3}e$  ja punasest d-kvargist  $-\frac{1}{3}e$ . Neutroni „kvarkvalem“ tuleb seega:  $n = (udd)$ . Vastavalt nendele avaldub antiprootoni laeng:

$$-\frac{2}{3}e - \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = -e$$

( mille kvarkvalem on  $\bar{p} = (\bar{u}\bar{u}\bar{d})$  ) ja antineutroni laeng:

$$-\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e = 0$$

( mille kvarkvalem on  $\bar{n} = (\bar{u}\bar{d}\bar{d})$  ). Nendes esinevad antipunased, antirohelised ja antisinised kvargid. Tugeva jõu välja potentsiaali  $U$  käik avaldus valemiga:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

Selline potentsiaali käik näitab, et kvargid on hadroni ( näiteks prootoni ) sees nõrgalt seotud, mida nimetatakse „asümptootiliseks vabaduseks“. Kuid kvarkide eemaldamisel üksteisest nende vaheline tugev jõud alguses suureneb ning siis jääb muutumatuks ehk konstantseks. See tähendab seda, et kvarkide täielikuks vabastamiseks üksteisest kulub lõpmata palju energiat ja seetõttu ei olegi võimalik kvarke üksteisest vabastada. Seda nimetatakse tuumafüüsikas „kvarkvangistuseks“.

Tugeva jõu välja potentsiaal  $U$  võib omakorda järeldada, et gluuonid peavad olema värvilaetud nagu seda on kvargid, kuid gluuonite ( nagu ka footonite ) elektrilaengud võrduvad nulliga. See tähendab, et gluuonite vahel esineb samuti tugev jõud nagu seda on kvarkide vahel. Näiteks virtuaalseid gluuoneid seob kvarkide värvilaengutest eemaldumise teel nende endi vaheline tugev vastastikmõju. Gluoni tee kahe interaktsiooniprotsessi vahel ei pikene. See tähendab seda, et kahe üksteisest eemalduva värvilaengu vahele tekib nagu „gluonpael“, mis ei valgu ruumis laiali ja seetõttu jääb tugev jõud konstantseks. Sellest tulenevalt ei saa värvilaetud osake eksisteerida „vabana“ ja seetõttu eksisteerivad vabana ainult valged kvarksüsteemid.

Kvargid vahetavad omavahel gluuoneid ja selle tulemusena vahetavad kvargid omavahel ka värvilaenguid. Gluonit välja kiirates jääks kvark ilma värvita, kuid tegelikult jätab lahkuv gluuon üht värvi ära viies samas teise kohe kvargile maha. Seetõttu kannab gluuon korraga nii ühte värvilaengut kui ka ühte anti-värvilaengut. Iga gluuon on korraga „värviliselt“ laetud ja antilaetud. Kuna esineb kolm põhivärvi ( punane, kollane ja sinine ), siis saame 9 võimalikku erinevat gluuoni „laengupaari“:

$$\begin{array}{ccc} P\bar{P} & P\bar{K} & P\bar{S} \\ K\bar{P} & K\bar{K} & K\bar{S} \\ S\bar{P} & S\bar{K} & S\bar{S} \end{array}$$

Rohelise värvilaengu asemel on antud juhul kollane värvilaeng, kuid kollase värvi asemel võib kasutada ka rohelist värvi. Laengupaaride tabeli diagonaalil olevad gluuonid

$$P\bar{P} \quad K\bar{K} \quad S\bar{S}$$

ei võta tugevast interaktsioonist osa, kuna need on „valged“ ehk 0-värvilaenguga gluuonid:

$$\begin{array}{ccc} 0 & P\bar{K} & P\bar{S} \\ K\bar{P} & 0 & K\bar{S} \\ S\bar{P} & S\bar{K} & 0 \end{array}$$

Kvantfüüsikast tuntud oleku superpositsiooni esinemise tõttu esinevad kõik need kolm gluuonite paarid võrdselt:

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{3}}(P\bar{P} + K\bar{K} + S\bar{S})$$

Gluuonite võimalike olekute superpositsioonidest järeldub ( kvantfüüsikaliselt ), et tugevat interaktsiooni vahendavad 8 ( ehk  $(3+1)*2=8$  ) sõltumatut gluuonit ehk seega „värvioktett“:

$$\begin{aligned} & (P\bar{S} + S\bar{P})/\sqrt{2} \\ & (P\bar{K} + K\bar{P})/\sqrt{2} \\ & (K\bar{S} + S\bar{K})/\sqrt{2} \\ & (P\bar{P} - S\bar{S})/\sqrt{2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} & -i(P\bar{S} - S\bar{P})/\sqrt{2} \\ & -i(P\bar{K} - K\bar{P})/\sqrt{2} \\ & -i(K\bar{S} - S\bar{K})/\sqrt{2} \\ & (P\bar{P} + S\bar{S} - 2K\bar{K})/\sqrt{6} \end{aligned}$$

Seisumassiga kvarkidel esineb korraga nii värvilaeng kui ka ( murruline ) elektrilaeng. Kuid gluuonitel esineb ainult värvilaeng, kuna elektrilaeng on neil null. See võib tuleneda otseselt sellest, et gluuonitel ( impulsiga  $p = mc$  ) ei ole seisumassi. Ka footonitel ( impulsiga  $p = mc$  ) ei ole seisumassi ja „seetõttu“ puudub neil ka elektrilaeng. Näiteks  $\pi$ -mesonitel ja nõrga jõu vahebosonitel ( impulsidega  $p = mv$  ) on olemas seisumassid ja seega on neil ka elektrilaengud ( +, – ja 0 ).

Nõrga jõu vahebosonitel on olemas seisumassid ja elektrilaengud. Värvilaengud neil puuduvad. Nõrga jõu mõjuraadius on  $3 * 10^{-17}$  m ( mõnedel andmetel isegi  $10^{-18}$  m ) ja nõrgal jõul puudub „tsentraalsümmeetrilisus“. Näiteks gravitatsiooniväli, elektriväli, teatud mõttes ka magnetväli ning tugeva jõu väli on kõik „tsentraalsümmeetrilised“ väljad. Nõrga jõu väli eksisteerib kõikjal ja alati, kuid nõrga jõu mõjuraadiust  $r_0$  saab välja arvutada ikkagi tuumapotentsiaali U võrrandist:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mv}{h}}$$

ehkki nõrgal jõul puudub selline potentsiaali käik.

Tähelepanuväärne on see, et kvarke on kokku 6 erinevat liiki ( punane, kollane ja sinine ning nende vastandvärvid: antipunane, antikollane ja antisinine ), kuid gluuoneid on kokku 8 liiki ( eelnevale loetelule lisame lihtsalt valge ja antivalge „värvuse“ ).

Seisumassita gluuonid vahendavad tugevat jõudu ainult kvarkide vahel:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mc}{h}}$$

kuid nukleonide ( ehk „kvarksüsteemide“ ) vahelist „tuumajõudu“ vahendavad  $\pi$ -mesonid:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mv}{h}}$$

millel on olemas seisumassid. Eespool tuletatud potentsiaali U võrrandist:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mv}{h}}$$

on näha seda, et kui kiirus  $v$  ei võrdu valguse kiirusega  $c$  ehk  $v \neq c$ , siis on tegemist vahebosoniga, millel on olemas seisumass. Sellest tulenevalt ei ole võimalik välja arvutada selle vahebosoni „kineetilist massi“:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

küll aga „seisumassi“:

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

Tuumajõud nukleonide vahel on kvarkide vahelise tugeva jõu nõrk, väljapoole põhiseoseid ulatuv kaja ( nn „jääk-tugev vastastikmõju“ ), mille potentsiaal  $U$  võibki olla:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-\frac{r_0 mv}{h}}$$

Elektromagnetlaine väikseim võimalik lainepikkus  $\lambda$  looduses on umbes  $10^{-14}$  m ( ekstreemsetes oludes võib see olla isegi  $10^{-14}$  m ja  $10^{-15}$  m vahel ), kuid kvarkide vahel esineva tugeva jõu mõjuraadius on umbes  $10^{-15}$  m. Kui nukleonide vahelise tuumajõu mõjuraadius ongi  $10^{-14}$  m, siis saamegi välja arvutada  $\pi$ -mesoni seisumassi:

$$m = \frac{h}{\lambda c}$$

Nukleonide ( ehk prootonite ja neutronite ) vahelise ruumi mõõtkava on natuke suurem, kui kvarkide vaheline ruum nukleoni sees. See tähendab ka seda, et elektromagnetlainete skaala „lõpeb seal“, „kust algab“ tuumajõu eksisteerimine. Näiteks elektromagnetlaine väikseim võimalik lainepikkus  $\lambda$  looduses on  $10^{-14}$  m ja tuumajõu mõjuraadius nukleonide vahel ongi just  $10^{-14}$  m, kuna aatomituumade suurused küündivad  $10^{-14}$  meetrini. Tugeva jõu mõjuraadius on aga  $10^{-15}$  m.

Gluonid ja kvargid on mõlemad värviliselt laetud. Kuid nukleonid ( s.t. prootonid ja neutronid ) on ise „valged“ osakesed ja seetõttu ei saa gluonid vahendada tugevat jõudu ( antud juhul tuumajõudu ) nukleonide vahel. Nukleonide vahelist „tugevat jõudu“ vahendav virtuaalne osake peab ise olema ka valge laenguga, mitte värviliselt laetud. Nendeks „valgeteks“ vahebosoniteks ongi  $\pi$ -mesonid.

$\pi$ -mesonitel on olemas seisumassid ja seetõttu ei saa need koosneda gluonitest ( ehk  $\pi$ -mesonid ei ole gluonid ). Järelikult peavad  $\pi$ -mesonid kui liitosakesed olema moodustunud kvarkidest ( millel on olemas seisumassid ). Kuna  $\pi$ -mesonid on vahebosonid ehk virtuaalsed osakesed ( mille eksisteerimise aeg peab olema seega väga väga lühike ), siis need peaksid koosnema mittepüsivatest kvark-antikvark süsteemist, mitte aga püsivast kolmest kvargist koosnevast süsteemist ( nagu seda on näiteks prootoni sisu ). See tähendab seda, et  $\pi$ -meson peab koosnema kvargist ja antikvargist. Näiteks  $\pi$ -meson võib koosneda sinisest u-kvargist ja antisinisest  $\bar{d}$ -antikvargist.

Kuna kvargid on murrulise elektrilaenguga, siis sellest jäeldub, et  $\pi$ -mesonid peavad olema samuti elektriliselt laetud. Seega on olemas kolme liiki  $\pi$ -mesoneid:  $\pi^+, \pi^-$  ja  $\pi^0$ . Näiteks  $\pi^+$ -meson ( elektrilaenguga  $+e$  )

$$\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = +e$$

koosneb sinisest u-kvargist ( laenguga  $+\frac{2}{3}e$  ) ja antisinisest  $\bar{d}$ -antikvargist ( laenguga  $+\frac{1}{3}e$  ).  $\pi^+$ -mesoni mass on 273 elektroni massi ja selle kvarkstruktuur on  $u\bar{d}$ ,  $\pi^-$ -mesoni oma aga vastavalt 273 elektroni massi ja  $d\bar{u}$  ning  $\pi^0$ -mesonil 264 elektroni massi ning  $u\bar{u}$  või  $d\bar{d}$ .



### 1.3.9 Ligikaudne arvutamine

Peab kindlasti ära märkima ka seda, et kogu käesolev väljade kvantteooria on esitatud tegelikult ligikaudselt, mitte päris täpselt. See tähendab eelkõige seda, et paljud tehtud ja ka tehtavad arvutused on ligikaudsed, mitte aga täpselt ühtivad eksperimentaalselt saadud andmetega. Selle tulenevust selgitame järgmise matemaatilise analüüsi kaudu, milles nähtub ligikaudsuse tekkimine füüsika erinevate võrrandite kasutamise tõttu ühe ja sama nähtuse või seaduspärasuse kirjeldamisel.

Vaatame selle näiteks järgmist arvutuslikku analüüsi. Näiteks kui elektriliselt laetud sfäärilise pinna poolt tekitatud välja energia  $E$

$$E = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

on  $6,2 * 10^{43}$  J ja kera raadius on üks meeter ( ning  $\epsilon_0$  on ligikaudu  $8,85 * 10^{-12}$  C<sup>2</sup>/Nm<sup>2</sup> ja  $\epsilon$  on ligikaudu üks ), siis saame kera laengu  $Q$  suuruseks  $1,1 * 10^{17}$  C. Vaakumis on  $\epsilon$  väärtus üks, kuid õhus on see 1,00057 ( seda ainult 20<sup>0</sup>C juures ). Kui antud elektriväljal on energia  $6,2 * 10^{43}$  J, siis vastavalt massi ja energia seosele  $E = mc^2$  on sellise koguse energia mass  $6,9 * 10^{26}$  kg, mis võib olla mõne taevakeha massiks. Sellest tulenevalt on sellise taevakeha massi Schwarzschildi raadius

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

üks meeter ja seetõttu peab selline ühe meetrine Schwarzschildi raadius tekkima ka antud elektriliselt laetud kera korral. Eelnevalt tuletatud elektrilaengu horisondi raadiuse

$$r_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

järgi saamegi laengu  $Q$  suuruseks  $1,1 * 10^{17}$  C, kui raadius on üks meeter ja  $\epsilon$  on ligikaudu üks. Kui aga Schwarzschildi raadius  $R$

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

on kolm meetrit, siis seega massi

$$M = \frac{Rc^2}{2G}$$

saame leida järgmiselt:

$$M = 2,023 * 10^{27} \text{ kg.}$$

Kuna kehtib energia ja massi ekvivalentsuse printsiip ehk  $E = mc^2$  , siis seega saame energiaks järgmise suuruse:

$$E = 1,8207 * 10^{44} \text{ J.}$$

Selline energia hulk võib olla mõne kosmilise elektrivälja energia  $E$

$$E = \frac{q^2}{2c} = mc^2 ,$$

millest saame laengu  $q$  suuruseks:

$$q = \sqrt{E(8\pi\epsilon_0\epsilon R)} = \sqrt{mc^2(8\pi\epsilon_0\epsilon R)} = 3,46649 * 10^{17} \text{ C}.$$

Sama laengu  $q$  suuruse leiame ka Nordströmi raadiuse valemi järgi arvutades, kui raadius  $R$  on samuti kolm meetrit:

$$q = \sqrt{\frac{R^2 4\pi\epsilon_0 c^4}{G}} = 3,48551 * 10^{17} \text{ C}.$$

Elektrivälja energia  $E$  on seotud elektrivälja tugevusega:

$$E = \frac{\epsilon\epsilon_0 E_T^2}{2}.$$

milles  $V = 1 \text{ m}^3$ . Antud elektrivälja energia koguse korral saame väljatugevuse  $E_T$  leida järgmiselt:

$$E_T = \sqrt{\frac{2E}{\epsilon\epsilon_0}} = 6,4144 * 10^{27} \text{ V/m}.$$

## 1.4 Elementaarosakeste füüsika mini-standardmudel

„Elementaarosakeste füüsika standardmudel“ püüab kirjeldada kõikide elementaarosakeste omadusi, mis Universumis eksisteerivad. Erinevaid osakesi on tegelikult palju rohkem kui tavalises aines kohata võib. Enamasti on need osakesed ebapüsivad. Kuid järgnevalt kirjeldame peamiselt prootonite, neutronite, elektronide, kvarkide ja nende vaheosakeste – gluuonite ja footonite masse. Need osakesed on looduses enamasti püsivad ja ka kõige levinumad elemendid Universumis. Seetõttu võib öelda seda, et tegemist on “mini-standardmudeliga” ehk elementaarosakeste füüsika standardmudeli „väiksema versiooniga“, mis kirjeldab ainult kõige levinumaid ja püsivamaid osakesi kogu Universumis. Kogu Universumi mateeria põhilisteks ehituskivideks ongi prootonid, neutronid ja elektronid, kuna nendest moodustunud aatomid ja molekulid on aluseks mistahes Universumi mateeria struktuurile. Võib öelda ka nii, et “mini-standardmudel” on omakorda aluseks sellele “suurele-standardmudelile” ehk „elementaarosakeste füüsika standardmudelile“.

Näiteks prootoni elektrilaengust e:

$$\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = +e = 1,602 * 10^{-19} \text{ C}$$

võime tuletada prootoni massi ja läbi selle ka neutroni massi. „Vesiniku aatomist“ on teada, et kaks elementaarset elektrilaengut vahekaugusega  $r$ :

$$r = 5,3 * 10^{-11} \text{ m}$$

mõjutavad üksteist elektrijõuga  $F$ :

$$F = 8,2 * 10^{-8} \text{ N}$$

Sellise vahekauguse korral oleks kahe prootoni vaheline gravitatsioonijõud  $F$ :

$$F = 6,6480 \cdot 10^{-44} \text{ N}$$

Sellest tulenevalt on elektrijõud suurem gravitatsioonijõust

$$\frac{F_{el}}{F_g} = 1,233 \cdot 10^{36}$$

korda. Kuid järgnevalt tuletame prootoni massi väärtuse. Prootoni massi saame otseselt tuletada eespool tuletatud valemist:

$$R = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}} = 1,3807 \cdot 10^{-36} \text{ m}$$

milles  $e$  on prootoni elektrilaeng. Viimane võrrand näitab aegruumi lõkspinna raadiust  $R$ , mille tekitajaks ongi prootoni elektrilaeng  $e$ . Esitatud valem on otseselt tuletatav Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandist:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \frac{G}{c^2} \frac{E}{c^2} = \frac{GE}{c^4} = \frac{G}{c^4} E = \frac{G}{c^4} k \frac{q^2}{r}$$

ehk

$$R = \frac{G}{c^4} k \frac{e^2}{R}$$

Viimasest nähtub Plancki jõu  $F_p$  „definitsioon“:

$$F_p = \frac{Gm^2}{r^2} = \frac{Gm^2}{\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2} = \frac{Gm^2 c^4}{G^2 m^2} = \frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = 1,2 \cdot 10^{44} \text{ N}$$

ehk

$$F_p = \frac{c^4}{G} = \frac{E}{l_p} = \frac{mc^2}{l_p} = \frac{hf}{l_p} = \frac{h}{t} \frac{1}{l_p} = \frac{h}{l_p} \frac{c}{l_p} = \frac{hc}{l_p^2}$$

mildest omakorda saame

$$G_p = \frac{l_p^2 c^3}{h}$$

Selle järgi on aegruumi lõkspinnal gravitatsioonijõud ja elektrijõud omavahel võrdsed:

$$F_g = G \frac{m^2}{R_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_2^2} = F_{el}$$

milles esineb Schwarzschildi raadius:

$$R_1 = \frac{Gm}{c^2}$$

ja „Nordströmi raadius“:

$$R_2 = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Kuna Plancki jõu võrrandis:

$$F_p = \frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}$$

esineb  $c^4$  ja  $G$ , siis vastavalt seisuenergia ruudu seosele  $E^2 = m^2 c^4$  ja Newtoni gravitatsioonijõule  $F = \frac{Gm^2}{r^2}$  saame võrrandit matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$F_p = \frac{c^4}{G} = \frac{E^2}{m^2} \frac{m^2}{Fr^2}$$

Tulemuseks saamegi elektrijõu ja gravitatsioonijõu võrduse:

$$F^2 = \frac{E^2}{r^2} = F^2$$

ehk  $F = F$ . Kuid eelnevalt tuletatud võrrandis

$$\frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}$$

teeme edasise analüüsi tarbeks mõned lihtsad matemaatilised teisendused:

$$\frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \rightarrow \frac{c^3}{G} \pi = \frac{1}{4\epsilon_0 c} \frac{e^2}{R^2} = \frac{c^4}{G} \frac{\pi}{c} = F_p \frac{\pi}{c} = 1,27106 * 10^{36}$$

Saadud võrrand

$$\frac{c^3}{G} \pi = \frac{1}{4\epsilon_0 c} \frac{e^2}{R^2}$$

näitab tegelikult elektrijõu ja gravitatsioonijõu „vahekorda“, millest on võimalik omakorda saada prootoni massi väärtus. Näitame seda järgmise lihtsa analüüsiga. Näiteks viimane võrrand teiseneb matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{c^2}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^2}{R^2}$$

Kui me arvestame seisuenergia seosega erirelatiivsusteooriast:

$$E = mc^2$$

ja gravitatsioonijõu definitsiooniga Newtoni mehaanikast:

$$F_g = \frac{Gm}{r^2}$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$\frac{c^2}{G} = \frac{E}{m} \frac{m}{F_g r^2}$$

ehk

$$\frac{c^2}{G} = \frac{E}{F_g r^2} = \frac{1}{F_g} \frac{1}{r} E = \frac{1}{F_g} \frac{1}{r} \left( k \frac{q^2}{r} \right) = \frac{1}{F_g} \frac{1}{r} k \frac{q^2}{r^2} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{r}$$

Saadud lihtsat seost:

$$\frac{c^2}{G} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{r}$$

võib avaldada ka järgmiselt:

$$\frac{c^2}{G} = \frac{c^4}{G} \frac{1}{c^2} = \frac{F_p}{c^2} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{r}$$

millest nähtub, et see võrdub tegelikult ühega:

$$\frac{F_p r}{c^2} = \frac{U}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 = \frac{F_{el}}{F_g}$$

See tuleneb otseselt sellest, et aegruumi lõkspinnal on gravitatsioonipotentsiaal  $U$  „piiratud“ maksimaalse võimaliku väärtusega Universumis:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{U}{c^2}}} = \infty$$

milles:

$$U = c^2 = G \frac{m_p}{l_p} = U_p$$

Aegruumi lõkspinnal on elektrijõud ja gravitatsioonijõud omavahel võrdsed. Kuid järgnevalt avaldame ja teisendame eelnevalt tuletatud võrrandit:

$$\frac{c^2}{G} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{r} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{ct}$$

kolmel erineval võimalikul viisil:

$$\frac{c^3}{G} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{t}$$

ja

$$\frac{c^3}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^2}{R^2} = \frac{E}{cR} = \frac{p}{R} = \frac{mc}{R} = \frac{m}{t}$$

ja

$$\frac{c^3}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{e^2}{R^2} = \frac{E}{cR} = \frac{h}{ct2\pi R} = \frac{h}{2\pi r} \frac{1}{R} = \frac{h}{\pi R} \frac{1}{R} = \frac{mc}{\pi R} = \frac{m}{\pi t}$$

Viimasest kolmest võrdusest saame luua võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} \frac{c^3}{G} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{t} \\ \frac{c^3}{G} = \frac{m}{t} \\ \frac{c^3}{G} = \frac{m}{\pi t} \end{cases}$$

ehk

$$\frac{c^3}{G} = \begin{cases} \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{t} \\ \frac{m}{\pi t} \end{cases}$$

Nendest võrrandisüsteemidest saame sellised võrdused:

$$\frac{F_{el}}{F_g} = \frac{c^3}{G} t = \frac{m}{\pi}$$

millest nähtub elektrijõu ja gravitatsioonijõu „suhe“ mitte aegruumi lõkspinnal:

$$\frac{c^3}{G} t \pi = m = \frac{c^3}{G} t = \frac{F_{el}}{F_g}$$

kusjuures aeg  $t$  „taandub“ võrrandis tegelikult ilusti välja:

$$\frac{c^3}{G} \pi = \frac{F_{el}}{F_g}$$

See tähendab seda, et kui kehtib seos:

$$\frac{c^3}{G} t \pi = \frac{F_{el}}{F_g}$$

milles  $\frac{F_{el}}{F_g} = \frac{c^3}{G} t$ , siis „peab“ kehtima ka selline seos:

$$\frac{c^3}{G} \pi = \frac{F_{el}}{F_g}$$

milles  $\frac{F_{el}}{F_g} = \frac{c^3}{G}$ . Sellisel juhul saime kordaja ehk konstandi:

$$\frac{F_{el}}{F_g} = \frac{c^3}{G} \pi = 1,27106 * 10^{36} \neq 1$$

mis tegelikult näitabki seda, et mitu korda on elektrijõud suurem gravitatsioonijõust mitte aegruumi lõkspinnal:

$$\frac{kq^2}{Gm^2} = \frac{c^3}{G} \pi$$

Aegruumi lõkspinnal on see aga:

$$\frac{c}{\pi} \frac{kq^2}{Gm^2} = \frac{c^4}{G} = F_p$$

Sellisest seosest saamegi prootoni massi  $m$  väärtuse:

$$m = \sqrt{\frac{ke^2}{c^3 \pi}} = 1,65 * 10^{-27} \text{ kg}$$

kuna meil oli kaks prootonit, millel peab olema ühesugune elektrilaeng ja ka mass. Võrreldes prootoni täpsema/tegeliku massi väärtusega ( $m = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ) on eelnev tulemus suurepärase. Prootoni massist ja elektrilaengust ning neutroni kvarkstruktuurist

$$\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$$

järeldub, et neutroni mass peab olema „peaaegu“ võrdne prootoni massiga, täpsemalt:

$$m = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Neutroni neutraalne elektrilaeng „koosneb“ ju kolmest elementaarlaengust e:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

mis on kõik samuti murruliste väärtustega. Kuna neutron laguneb prootoniks ja elektroniks ( ning ka antielektronneutriinoks )

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$$

siis põhimõtteliselt võib ka sellest järeldada, et neutron peab vastavalt energia jäävuse seadusele olema prootonist „veidi“ suurema massiga ja elektroni ning antielektronneutriino massid oleksid sellisel juhul neutroni ja prootoni masside „vahe“. Antielektronneutriino mass on niivõrd väike, et selle võib antud juhul jätta üldse arvestamata:

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^-$$

Elektron neeldub reaktsioonis:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu$$

kuna elektronil on vastastikmõju prootoniga. Kuid selline vastastikmõju ei saaks tekitada sellist reaktsiooni:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$$

kuna sellise reaktsiooni alguses pole elektroni üldse olemaski. Väljade kvantteooria järgi vastab osakestele vaakumis olev väli, mis eksisteerib kõikjal ja alati. Väli vaakumis on reaalsete osakeste puudumise korral oma minimaalse energiaga olekus. Sellise arusaama järgi on reaktsiooni:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$$

alguses neutronväli ühe osakese seisundis energiaga:

$$E = mc^2$$

kuid teised väljad on miinimumolekus ehk vaakumolekus. Pärast seda läks neutronväli ise vaakumolekusse, mille korral läks neutronvälja energia prooton-, elektron- ja antineutriinoväljale. Kõik need kolm läksid ühe osakesega olekusse. Kuna kõikide väljade vahel on interaktsioon ehk vastastikmõju olemas juba algusest peale, siis seega saigi selline reaktsioon toimuda. Kuna igal osakesel on oma antiosake, siis õigem oleks väita, et eksisteerib elektron-positronväli, mitte lihtsalt elektronväli.

Kuid elektroni massi saame „tuletada“ prootoni massi valemist:

$$\frac{F_{el}}{F_g} = \frac{c^3}{G} \pi$$

Selleks teostame eespool tuletatud võrrandis:

$$\frac{c^3}{G} \pi = (F_p) \frac{\pi}{c} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \right) \frac{\pi}{\sqrt{c}\sqrt{c}}$$

järgmised matemaatilised teisendused:

$$\frac{c^3}{G} \frac{\sqrt{c}}{\pi} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \right) \frac{1}{\pi\sqrt{c}}$$

Selle järgi saame valemi „asemel“:

$$\frac{kq^2}{Gm^2} = \frac{c^3}{G} \pi$$

uue avaldise:

$$\frac{kq^2}{Gm^2} = \frac{c^3}{G} \frac{\sqrt{c}}{\pi}$$

ehk

$$\frac{c\pi}{\sqrt{c}} \frac{kq^2}{Gm^2} = \frac{c^4}{G} = F_p$$

mis annabki meile elektroni massi väärtuse:

$$\frac{ke^2\pi}{c^3\sqrt{c}m_p} = m_e = 9,3 * 10^{-31} \text{ kg}$$

Viimases on  $e$  elementaarlaeng ja  $m_p$  on prootoni mass. Võrreldes elektroni täpsema/tegeliku massi väärtusega ( $m = 9,109 * 10^{-31} \text{ kg}$ ) on eelnev tulemus suurepärase. Eelneva füüsikaline sisu seisneb selles, et prootoni ja elektroni elektrilaengud vahekaugusega

$$r = 5,3 * 10^{-11} \text{ m}$$

mõjutavad vesiniku aatomis üksteist elektrijõuga:

$$F = 8,2 * 10^{-8} \text{ N}$$

Kuid prootoni ja elektroni vaheline gravitatsioonijõud on kõigest:

$$F = 3,7 * 10^{-47} \text{ N}$$

Selle järgi on elektrijõud suurem gravitatsioonijõust

$$\frac{F_{el}}{F_g} = 2,2162 * 10^{39}$$

korda.

Kahe elektroni vahel, mis asetsevad üksteisest vahekaugusel:



$$r = 5,3 * 10^{-11} \text{ m}$$

esineb samuti elektrijõud:

$$F = 8,2 * 10^{-8} \text{ N}$$

Sellisel korral on kahe elektroni vaheline gravitatsioonijõud:

$$F = 1,97022 * 10^{-50} \text{ N}$$

Seega on kahe elektroni korral elektrijõud suurem gravitatsioonijõust

$$\frac{F_{el}}{F_g} = 4,16197 * 10^{42}$$

korda. See on väga suur erinevus. Vesiniku aatomis esineva prootoni ja elektroni interaktsioonist saime tuletada elektroni massi väärtuse:

$$\frac{ke^2\pi}{c^3\sqrt{c}m_p} = m_e = 9,3 * 10^{-31} \text{ kg}$$

milles avaldus ka prootoni mass:

$$m_p = \sqrt{\frac{ke^2}{c^3\pi}} = 1,65 * 10^{-27} \text{ kg}$$

Nende kahe erineva valemi kasutamisel

$$m_e = \frac{ke^2\pi}{c^3\sqrt{c}m_p} = \frac{ke^2\pi}{c^3\sqrt{c}} \frac{1}{m_p} = \frac{ke^2\pi}{c^3\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt{\frac{ke^2}{c^3\pi}}} = \frac{ke^2\pi}{c^3\sqrt{c}} \frac{\sqrt{c^3\pi}}{\sqrt{ke^2}}$$

ehk

$$m_e^2 = \left(\frac{ke^2\pi}{c^3\sqrt{c}}\right)^2 \frac{c^3\pi}{ke^2} = \frac{\pi^3 ke^2}{c^4}$$

saame „tuletada“ elektroni massi ruudu väärtuse:

$$m_e^2 = \frac{\pi^3 ke^2}{c^4}$$

mille korral esineb gravitatsioonijõud ja elektrijõud kahe elektroni vahel. Sellisel juhul saame elektroni massi väärtuseks:

$$m_e^2 = \frac{\pi^3 ke^2}{c^4} \rightarrow m_e = \sqrt{\frac{\pi^3 ke^2}{c^4}} = 9,3958 * 10^{-31} \text{ kg}$$

mis on „peaaegu“ võrdne eespool saadud väärtusega:

$$\frac{ke^2\pi}{c^3\sqrt{c}m_p} = m_e = 9,3754 * 10^{-31} \text{ kg}$$

Elektroni massi täpsem/tegelik väärtus on aga  $m = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Prootoni ja elektroni interaktsiooni korral oli elektrijõud suurem gravitatsioonijõust

$$\frac{c^3}{G} \frac{\sqrt{c}}{\pi} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \right) \frac{1}{\pi\sqrt{c}}$$

korda. Viimast võrrandit ehk

$$\frac{c^4}{G} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4\pi^2\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}$$

on matemaatiliselt võimalik teisendada

$$\frac{c^4}{G} \frac{\pi^2}{\pi} = F_p \frac{\pi^2}{\pi}$$

sellisele kujule

$$\frac{c^4}{G} \frac{1}{\pi^3} = F_p \frac{1}{\pi^3}$$

mis nähtub selgesti ka viimati tuletatud elektroni massi avaldisest:

$$m_e^2 = \frac{\pi^3 k e^2}{c^4}$$

Näiteks viimane valem näitabki elektrijõu ja gravitatsioonijõu vahekorda kahe elektroni vahel:

$$\frac{c^4}{G} \frac{1}{\pi^3} = \frac{k e^2}{G m_e^2} \approx 4,16197 \cdot 10^{42}$$

Viimast lihtsat võrrandit:

$$\frac{c^4}{G} \frac{1}{\pi^3} = F_p \frac{1}{\pi^3}$$

on tegelikult võimalik matemaatiliselt tuletada ka otse prootoni massi võrrandist:

$$m_p = \sqrt{\frac{k e^2}{c^3 \pi}}$$

Näiteks kui me „jagame“ prootoni massi kolmega:

$$m_p \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{k e^2}{c^3 \pi} \frac{1}{3}}$$

siis peaksime teoreetiliselt saama ühe kvargi massi, kuna prooton koosneb kolmest kvargist. Tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu ja teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{m_p^2}{9} = \frac{k e^2}{c^3 \pi} \frac{1}{9} = \frac{k e^2}{c^3 \pi} \frac{1}{\pi^2} = \frac{k e^2}{c^3 \pi^3}$$

Kuna  $\pi = 3,14$ , siis  $\pi \approx 3$ . Viimasest võrduste jadast saame:

$$\frac{c^3}{G} \frac{1}{9} = \frac{ke^2}{Gm^2} \frac{1}{\pi^3}$$

ehk

$$\frac{c^3}{G} \frac{1}{\pi^2} = \frac{ke^2}{Gm^2} \frac{1}{\pi^3}$$

Kuna kahe prootoni vahel olev elektrijõud on gravitatsioonijõust suurem

$$\frac{ke^2}{Gm^2} = \frac{c^3}{G} \pi = F_p \frac{\pi}{c}$$

korda, siis saamegi kahe elektroni vahel oleva elektrijõu ja gravitatsioonijõu suhte:

$$\frac{c^4}{G} \frac{1}{\pi^3} = F_p \frac{1}{\pi^3}$$

millest on võimalik omakorda tuletada ühe elektroni massi võrrand, mitte aga kvargi massi võrrand.

Elektroni massi väärtuse

$$m_e = \frac{\pi ke^2}{\sqrt{c} c^3 m_p}$$

saab teada just prootoni massi kaudu:

$$m_p = \sqrt{\frac{ke^2}{c^3 \pi}}$$

mistõttu saimegi elektroni massi võrrandi lõplikuks kujuks:

$$m_e = \sqrt{\frac{\pi^3 ke^2}{c^4}}$$

Just elektroni massi avaldisest:

$$m_e = \frac{\pi ke^2}{\sqrt{c} c^3 m_p}$$

on võimalik välja arvutada ka prootoni ja neutroni kvarkide massid. Näiteks kui me viimases võrrandis „asendame“ elementaarlaengu prootoni u-kvargi murrulise elektrilaenguga:

$$+e \rightarrow +\frac{2}{3}e$$

siis tulemuseks saame:

$$m_e = \frac{\pi k}{\sqrt{c} c^3 m_p} e^2 = \frac{\pi k}{\sqrt{c} c^3 m_p} \frac{4}{9} e^2$$

ehk

$$9m_e = \frac{\pi k}{\sqrt{c} c^3 m_p} 4e^2 = \frac{e^2}{\sqrt{c} c^3 m_p \epsilon_0}$$

See tähendaks seda, et prootoni ja neutroni u-kvargi mass oleks „kõigest“ 9 elektroni massi:

$$9m_e = \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

Selline tulemus ei ole tegelikult väga täpne. Täpsema tulemuse saamiseks korrutame võrrandi:

$$m_e = \frac{\pi k e^2}{\sqrt{c}c^3m_p} = \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0} \frac{1}{4}$$

ehk

$$4m_e = \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

mõlemad pooled kahega:

$$8m_e = \frac{2e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

Prootoni ja neutroni u-kvargi mass on seega tegelikult 8 elektroni massi, mitte 9 elektroni massi:

$$9m_e = \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

Füüsikalise analüüsi tõttu saime alguses kvargi massi ligikaudse väärtuse, kuid matemaatiline analüüs andis meile lõpuks ikkagi täpse väärtuse. Täpselt sama on ka prootoni ja neutroni d-kvargi massi väärtuse leidmise korral. Näiteks elektroni massi võrrandis:

$$m_e = \frac{\pi k e^2}{\sqrt{c}c^3m_p}$$

„asendame“ elementaarlaengu d-kvargi murrulise elektrilaenguga:

$$-e \rightarrow -\frac{1}{3}e = +\frac{2}{3}e * \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Tulemuseks saame:

$$m_e = \frac{\pi k}{\sqrt{c}c^3m_p} e^2 = \frac{\pi k}{\sqrt{c}c^3m_p} \frac{1}{9} e^2 = \frac{1}{\sqrt{c}c^3m_p} \frac{1}{9} e^2 \frac{1}{4\epsilon_0}$$

ehk

$$18m_e = \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0 2}$$

Selline tulemus on jällegi „ebatäpne“ ehk „ligikaudne“. Täpsema tulemuse saamiseks korrutame u-kvargi massi võrrandi:

$$8m_e = \frac{2e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

mõlemad pooled kahega:

$$16m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

ja saadud võrrandi mõlemast poolest võtame 1 elektroni massi ära:

$$16m_e - 1m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} - 1m_e$$

Edasi teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$15m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} - 1m_e = 4\frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} - \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} \frac{1}{4}$$

$$15m_e = \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} \left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

Kuna viimases võrrandis võime arvestada ligikaudse väärtusega:

$$4 - \frac{1}{4} = 3,75 \approx 4$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$15m_e \approx \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0}$$

See tähendab seda, et prootoni ja neutroni d-kvargi mass on 15 elektroni massi, mitte 16 või 18 elektroni massi:

$$16m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0}$$

$$18m_e = \frac{2e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0}$$

Kvarkide massid on palju kordi väiksemad prootonite ja neutronite massidest. Näiteks prootonit moodustava kolme kvargi kogumass moodustab prootoni enda massist ainult 1-he %. Sellest järeldub, et ülejäänud mass peab esinema kvarkide vahelises energiaväljas, kuna energia ja mass on omavahel ekvivalentsest seotud:

$$E = mc^2$$

ehk

$$\frac{E}{c^2} = m$$

Kvarkide vahel esineb tugev interaktsioon, mida vahendavad gluonid. Virtuaalsed gluonid tekitavad kvarkide vahel energiavälja, täpselt nii nagu virtuaalsed footonid tekitavad elektrivälja elektrilaengu vahelises ruumis. Elektriväli on samuti energiaväli. Gluonitel ja footonitel endal ei ole seisumasse.

Kvarkide vahelise tugeva interaktsiooni potentsiaali  $U$  käik on esitatav:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

mis on tegelikult täpselt samasugune ka tuumajõul neutronite ja prootonite vahel. Neutronite ja prootonite vahelist tuumajõudu vahendavad  $\pi$ -mesonid ehk piionid, millel esinevad seisumassid.

Siinkohal tasub märkida ka seda, et u- ja d-kvargid esinevad ka  $\pi$ -mesonites ehk piionites ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$  ja  $\pi^0$ ), mis on tuumajõudude vahendajateks neutronite ja prootonite (s.t. nukleonite)

vahel aatomituumas:

$$\pi^+ = u\bar{d} = +\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = +e$$

$$\pi^- = d\bar{u} = -\frac{1}{3}e - \frac{2}{3}e = -e$$

$$\pi^0 = u\bar{u} = +\frac{2}{3}e - \frac{2}{3}e = 0$$

$$\pi^0 = d\bar{d} = -\frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e = 0$$

„Piionite“ massid on vastavalt (elektroni massides):

$$\pi^0 = 264 m_e$$

$$\pi^+ = \pi^- = 273 m_e$$

Kuna piionid koosnevad prootonite ja neutronite u- ja d-kvarkidest, siis peaks nende kaudu saama ka „tuletada“ piionite masse. Näiteks u-kvargi mass on 8 elektroni massi:

$$8m_e = \frac{2e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

kuid d-kvargi mass:

$$16m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

Täpsemalt on d-kvargi mass 15 elektroni massi:

$$15m_e \approx \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

Selle järgi on d-kvargi massi arväärtus võrdne kahe u-kvargi massi summaga, millest omakorda lahutada üks elektroni mass:

$$15 = 8 + 8 - 1$$

ehk

$$d_m = u_m + u_m - 1_m$$

Kui me nüüd korrutame viimase avaldise mõlemad pooled d-kvargi massiga d:

$$dd = d^2 = ud + du - d$$

siis me näeksime seda, et saadud võrrandis „esineksid“ erinevate piionite erinevad kvarkide paarid:

$$\pi^+ = u\bar{d} = +\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = +e$$

$$\pi^- = d\bar{u} = -\frac{1}{3}e - \frac{2}{3}e = -e$$

$$\pi^0 = d\bar{d} = -\frac{1}{3}e + \frac{1}{3}e = 0$$

Seetõttu võime kirjutada:

$$d\bar{d} = u\bar{d} + d\bar{u} - d$$

Siinkohal tasub märkida seda, et positiivne ja negatiivne elektrilaeng annavad meile kokku neutraalse elektrilaengu:

$$\pi^+ + \pi^- = \pi^0$$

Kuna d-kvargi mass avaldus valemina:

$$d_m = u_m + u_m - 1_m$$

siis seega d-kvargi massi ruut avaldub järgmiselt:

$$d^2 = ud + du - u - u + 1$$

Saadud avaldises viime u-kvargi massi teisele poole võrdusmärgi:

$$u + d^2 = ud + du - u + 1$$

Eespool me tõdesime, et d-kvargi massi ruut avaldus „valemina“:

$$d^2 = ud + du - d$$

kuid see võib avalduda ka niimoodi:

$$d^2 = ud + du$$

mille järgi võrdub d-kvargi mass ainult kahe u-kvargi massi summaga:

$$d = u + u = 8 + 8 = 16 \neq 15$$

Selle järgi saaksime sellise avaldise:

$$u + d^2 = ud + du + u$$

ehk

$$u\bar{d} + d\bar{u} + u = d\bar{d} + u$$

mis annaks meile neutraalse elektrilaenguga piioni massi elektroni massides:

$$(8 * 16) + (8 * 16) + 8 = 256 + 8 = 264$$

ehk

$$\pi^0 = 264 m_e$$

Sarnane analüüs kehtiks ka siis, kui me tuletaksime elektrilaengutega piionite massid. Näiteks neutraalse elektrilaenguga piioni massi avaldises:

$$u + d^2 = ud + du - u + 1$$

viime veel ühe u-kvargi massi võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$u + u + d^2 = ud + du + 1$$

Tulemuseks saame:

$$2u + d^2 = ud + du + 1$$

Kui me nüüd jälle võtame d-kvargi massi ruudu väärtuseks:

$$d^2 = ud + du$$

ja kahe u-kvargi massi summa võrduks „ligikaudu“ 17 elektroni massi:

$$2u \approx 17m_e \neq 16m_e \neq 15m_e$$

siis saaksime sellise avaldise:

$$2d\bar{u} + 2u = d\bar{d} + 2u$$

mis annakski meile elektrilaengutega piionite massid elektroni massides:

$$u\bar{d} + d\bar{u} + u + \bar{u} = d\bar{d} + 2u = 273m_e$$

ehk

$$\pi^0 + u = 264 + 8 + 1 = 256 + 17 = 273 m_e$$

$$\pi^0 + \bar{u} = 264 + 8 + 1 = 256 + 17 = 273 m_e$$

ehk

$$\pi^+ = \pi^- = 273 m_e$$

Kuid viimastest avaldistest nähtub „kummaline“ d-kvargi mass ( elektroni massides ):

$$2u \approx 8m_e * 2 \approx 17m_e \approx \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0}$$

ehkki tegelikult on d-kvargi mass 15 elektroni massi:

$$15m_e \approx \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0}$$

Selline „täpne“ d-kvargi mass saadi siis, kui me võrrandis:

$$16m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0}$$

lahutasime mõlemas pooles ära ühe elektroni massi:

$$16m_e - 1m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} - 1m_e$$

Kuid nüüd lahutamise asemel hoopis liidame ühe elektroni massi:

$$16m_e + 1m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} + 1m_e$$

mille tulemuseks saame:

$$17m_e = \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} + 1m_e = 4 \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} + \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\varepsilon_0} \frac{1}{4}$$

ehk



$$17m_e = \frac{e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0} \left(4 + \frac{1}{4}\right)$$

Kuna

$$4 + \frac{1}{4} = 4,25 \approx 4$$

siis võime d-kvargi massi ligikaudse väärtuse kirjutada ka kujul:

$$17m_e \approx \frac{4e^2}{\sqrt{c}c^3m_p\epsilon_0}$$

Prootoni, neutroni ja elektroni kui osakeste masside tuletamised puhtalt „aegruumi struktuurist“ on ÄÄRMISELT OLULISED ja seda järgmistel fundamentaalsetel põhjustel:

1. Osakeste massid  $m$  määravad ära nende samade osakeste lainepikkused  $\lambda$ , sealhulgas ka Comptoni lainepikkused:

$$\lambda = m_p t_p \frac{c}{m}$$

2. Prootoni ja neutroni massid määravad ära tugeva interaktsiooni ja ka tuumajõu mõjuraadiuse. Näiteks tugeva interaktsiooni mõjusfäär kattub näiteks prootoni enda suurusega, mille määrab omakorda ära prootoni mass.
3. Prootoni, neutroni ja elektroni massid määravad ära ka aatomite üldise struktuuri ja mõõtmed.
4. Prootonid, neutronid ja elektronid on kogu Universumi nähtava aine ehk barüonaine peamised koostisosad. Näiteks kogu keemiateadus põhineb ainult sellistel aine struktuuridel, mis koosnevad prootonitest, neutronitest ja elektronidest.
5. Osakeste masside kaudu on võimalik arvutada tuuma „seoseenergiat“, „eriseoseenergiat“ ja ka „massidefekt“. Viimased kolm mõistet on käsitletavad peamiselt tuumafüüsikas:

Tuuma „seoseenergia“ võrdub tööga, mida tuleb teha selleks, et viia tuuma nukleonid üksteisest sellisele kaugusele, kus nad üksteist enam ei mõjuta.

Seoseenergia ühe nukleoni kohta kirjeldab tuuma nukleonidevahelise seose tugevust ning suhtelist stabiilsust. Seda füüsikalist suurust nimetatakse „eriseoseenergiaks“.

Tuuma täielikul lõhustamisel erineb selle koostisosakeste ehk nukleonide kogumass tuuma kui terviku massist teatud suuruse võrra. Seda vahet nimetataksegi „massidefektiks“. Massidefekti abil saab leida tuuma moodustumisel eralduvat energiat  $E = mc^2$ , mis väljendab massidefekti seost tuuma seoseenergiaga.

6. Prootoni ja neutroni masside kaudu saab tuletada ka kvarkide massid nende sees. Kusjuures kolm valentskvarki moodustavad näiteks prootoni massist ainult 1 %. Ülejäänud prootoni mass tuleneb kvarkide ja gluonite vastastikmõjust. Footonitel ja gluonitel mass aga puudub.

Ülalpool välja toodud punktides esineb väide, et prootoni, neutroni ja elektroni massid määravad ära ka aatomite üldise struktuuri ja mõõtmed. See väide vajab lähemat selgitust. Näiteks elektroni

„tiirlemise“ korral ümber prootoni ehk ümber vesiniku aatomi tuuma esineb kesktõmbejõud  $F$ :

$$F = \frac{mv^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2}$$

ehk

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$$

Viimasest valemist on näha, et elektroni kesktõmbejõud  $F$  sõltub peale muude tegurite ka veel elektroni massist  $m$ . Kesktõmbejõu  $F$  avaldisest:

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}$$

saame „tuletada“ elektroni tiirlemiskiiruse vesiniku aatomis ümber tuuma ringjoonelisel orbiidil:

$$v = \sqrt{\frac{Fr}{m}} = \sqrt{\frac{(8,2 * 10^{-8} \text{ N})(5,3 * 10^{-11} \text{ m})}{9,1 * 10^{-31} \text{ kg}}} \approx 2,2 * 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Viimases on  $m$  elektroni mass,  $r$  on Bohri raadius ja  $F$  on prootoni ja elektroni vaheline elektrijõud. Ilma elektroni massita ei saa tiirlemiskiirust vesiniku aatomis välja arvutada. Vesiniku aatomi kineetilise energia valemi võime kirja panna järgmiselt:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

ehk

$$E_{kin} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$$

Elektroni potentsiaalne energia tuuma elektriväljas on seega:

$$E_{pot} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$$

Kineetiline ja potentsiaalne energia annavad meile vesiniku aatomi koguenergia võrrandi kujuks:

$$E_n = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$$

Bohri aatomiteoorias esineb „lubatud orbiitide postulaat ehk kvantreegel“, mis ütleb meile seda, et „aatomi statsionaarsetele olekutele vastab elektroni tiirlemine teatud kindlatel orbiitidel, millel elektroni liikumishulga momendi absoluutväärtus on kordne Plancki konstandiga  $h$ “:

$$mvr_n = n \frac{h}{2\pi}$$

Sellest tulenevalt saame elektroni kesktõmbejõu  $F$  avaldise kujuks vesiniku aatomis:

$$\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m r_n^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = F$$

millest omakorda

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$$

Kui  $n = 1$ , siis saame vesiniku aatomi raadiuse ehk „Bohri raadiuse“ väärtuse:

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \approx 5,29 * 10^{-11} \text{ m}$$

mille kaudu on võimalik esitada ka kõigi teiste lubatud orbiitide raadiused:

$$r_n = r_1 n^2$$

Aatomi koguenergia valemi ja kvantreegli järgi saame leida ka „aatomi statsionaarsete olekute energia“:

$$E_n = -\frac{m e^2}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

mille järgi oleks aatomi põhioleku energia ( ehk  $n = 1$  korral ) järgmine:

$$E_1 = -\frac{m e^2}{8\epsilon_0^2 h^2} = -2,168 * 10^{-18} \text{ J} = -13,5 \text{ eV}$$

Seetõttu võib aatomi statsionaarsete olekute energiat väljendada ka ainult „elektronvoltides“:

$$E_n = -\frac{13,5}{n^2} \text{ eV}$$

Elektrivälja potentsiaal on  $\varphi = \frac{E_{pot}}{q}$ , millest potentsiaalne energia avaldub  $E_{pot} = \varphi q$ . Elektroni laeng on elementaarlaeng  $q = -e$  ja seetõttu avaldub elektroni potentsiaalne energia aatomis järgmiselt:  $E_{pot} = -\varphi e$ .  $e$  on elementaarlaeng. Aatomis asub elektron tuuma positiivse laengu  $+e$  elektriväljas. Selle potentsiaal kaugusel  $r_n$  tuumast on  $\varphi = k \frac{e}{r_n}$ , milles

$$r_n = \frac{h^2}{k m e^2} n^2 \quad \text{ehk} \quad r_n = n \frac{h}{m v_n},$$

kus kvantarvuks on  $n = 1, 2, 3 \dots$  ja

$$v_n = \frac{nh}{m r_n}.$$

Seetõttu saame elektroni potentsiaalse energia avaldiseks:  $E_{pot} = -k \frac{e^2}{r_n}$ . Elektroni potentsiaalne energia vesiniku aatomis on  $-4,35 * 10^{-18} \text{ J}$ , kuid vesiniku aatomisse kuuluva elektroni asukohas on väljatugevus  $5 * 10^{11} \text{ V/m}$ .

Kuna aatomis oleva elektroni potentsiaalne energia  $U$  sõltub ainult kaugusest aatomi tuumast:

$$U = U(r) = -k \frac{e^2}{r}$$

siis seega kirjeldab seda ka kvantmehaanika põhivõrrand ehk statsionaarsete olekute Schrödingeri võrrand:

$$-k \frac{e^2}{r} = E + \frac{h^2}{2M} \Delta$$

ehk

$$-k \frac{e^2}{r} \varphi = E \varphi + \frac{h^2}{2M} \Delta \varphi$$

ehk

$$-\frac{h^2}{2M} \Delta \varphi - k \frac{e^2}{r} \varphi = E \varphi$$

Laplace'i operaator  $\Delta$  esitatakse antud juhul „sfäärilistes koordinaatides“, et näidata impulsimomendi jäävust:

$$\Delta = \Delta_r - \frac{1}{r^2 h^2} \hat{L}^2$$

Selles avaldub omakorda Laplace'i operaatori radiaalosa:

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Vesiniku aatomis avalduvat elektroni potentsiaalset energiat  $U$ :

$$U = -\frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

milles  $Ze$  on aatomituumade elektrilaeng ja  $r$  on tuuma ning elektroni vahekaugus, on võimalik avaldada ka sellise Schrödingeri võrrandi kuju kaudu:

$$U\psi = \frac{Ze^2}{r} \psi = \frac{h^2}{2m_e} \left( -\Delta\psi - \frac{2m_e}{h^2} E\psi \right)$$

Sellisel juhul asendatakse Schrödingeri võrrandis oleva energia  $U$  elektroni potentsiaalse energiaga vesiniku aatomis:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{h^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0$$

Kuna energiaväli on enamasti tsentraalsümmeetriline, siis esitame viimase võrrandi sfäärilistes koordinaatides:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m_e}{h^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0$$

milles  $\Delta\psi$  on Laplace'i operaator. Saadud võrrandil on ühesed, lõplikud ja pidevad lahendid energia meelevaldsetel positiivsetel väärtustel ja energia diskreetsetel negatiivsetel väärtustel, mis võrduvad:

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{2h^2 n^2}$$

milles  $n = 1, 2, 3, \dots$

Aegruumi lõkspinnal on elektrijõud ja gravitatsioonijõud omavahel võrdsed. Selle võrduse valemi tuletasime võrrandist:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

milles  $e$  on elementaarne elektrilaeng:

$$e = 1,602 * 10^{-19} C$$

ja raadius  $R$  näitab sfäärilise kujuga aegruumi lõkspinna raadiust:

$$R = 1,3807 * 10^{-36} m$$

Kui me korrutame viimase avaldise  $4\pi$ -ga:

$$4\pi R = 1,73415 * 10^{-35} m$$

siis algebraline tulemus kattub „peaaegu“ Plancki pikkuse  $l$  väärtusega:

$$l_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616 * 10^{-35} m$$

$4\pi R$  korral saaksime ka massi  $M$  väärtuse:

$$\frac{4\pi R}{G} c^2 = M = 2,3 * 10^{-8} kg$$

mis kattub „peaaegu“ Plancki massi  $m$  väärtusega:

$$m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}} \approx 2,2 * 10^{-8} kg$$

Elementaarlaengu  $e$ , Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki massi  $m$  omavahelised seosed näitavad seda, et kõik Universumi fundamentaalkonstandid on omavahel lahutamatult seotud.

Schwarzschildi raadius  $R$  näitab kerakujulise aegruumi lõkspinna ehk Schwarzschildi pinna suurust, millel on aegruum kõverdunud lõpmatuseni ehk aja ja ruumi füüsikaline eksisteerimine on lakanud:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast niisamuti ka Plancki pikkuse  $l$  mõõtkavas:

$$4\pi R = 1,73415 * 10^{-35} m$$

ehk

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616 * 10^{-35} m$$

See tähendab seda, et Plancki pikkusest  $l$  väiksematel mõõtkavadel ei ole Universumil enam füüsi-

kalist eksistensi. Niimoodi moodustab Plancki pikkus  $l$  väikseima võimaliku ruumi mõõtkava, mis hõlmab ühtlaselt kogu Universumi kolmemõõtmelist ruumi. Seda nimetame „Plancki pinnaks  $S$ “. See tähendab, et mida väiksemasse ruumi mõõtkavasse jõuda, seda lähemale jõuame Plancki pinnani  $S$ .

Siinkohal peame ära seletama selle, et kuidas „tekib“ võrrandisse  $4\pi R$ :

$$\frac{4\pi R}{G} c^2 = M$$

See on tegelikult väga lihtne. Näiteks Schwarzschildi ja Nordströmi raadiuste omavahelisest võrdusest:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

ehk

$$R^2 = \frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$$

saamegi kohe kätte  $4\pi R$ -i:

$$4\pi R = \frac{e^2 G}{R\epsilon_0 c^4} = 4\pi \frac{GM}{c^2}$$

Kuna massi ja energia vahel esineb ekvivalentsuse printsiip:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2} = \frac{E}{2}$$

ja valguse kiiruse  $c$  ning Plancki konstandi  $h$  vahel esineb samuti seos:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi}$$

siis me näeme, et võrrandi ühel poolel taandub  $4\pi$  ilusti välja:

$$4\pi R = 4\pi \frac{GM}{c^2} = 4\pi \frac{h}{2\pi} G \frac{E}{2} = hGE$$

Tulemuseks saamegi eespool kasutatud seose:

$$4\pi R = \frac{GM}{c^2}$$

ehk

$$\frac{4\pi R}{G} c^2 = M$$

milles seekord:  $E = mc^2$  ja  $\frac{1}{c^4} \rightarrow h$ .

Viimast massi  $M$  võrrandit tuletasime Schwarzschildi raadiuse  $R$  valemist:

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

Kuna massi  $M$  saame avaldada puhtalt energia  $E$  kaudu:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2} = \frac{E}{2}$$

ehk

$$M = \frac{E}{c^2 2}$$

ja võrrandis esineb tegelikult ka Plancki konstant  $h$ :

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = h$$

siis nende järgi saame Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandi kujuks:

$$R = \frac{GE}{c^4 2} = \frac{h}{2\pi} \frac{GE}{2} = \frac{hGE}{4\pi}$$

millest omakorda nähtubki  $4\pi R$ :

$$4\pi R = hGE$$

Kui me aga nüüd arvestame ainult selliseid energia  $E$  ja Plancki konstandi  $h$  seoseid:

$$E = mc^2$$

ja

$$\frac{1}{c^4} = h$$

siis saamegi eespool esitatud võrrandi kuju:

$$4\pi R = \frac{GE}{c^4}$$

ehk

$$4\pi R = \frac{GM}{c^2}$$

Niimoodi võib matemaatiliselt teisendada küll, kuna viimasest võrrandist saame:

$$4\pi R = \frac{GE}{c^4}$$

ehk

$$4\pi R = hGE$$

mille järgi ongi võimalik kasutada  $4\pi$ -d otstarbekalt järgmiselt:

$$R = \frac{hGE}{4\pi} = \frac{h}{2\pi} G \frac{E}{2} = \frac{GE}{c^4 2}$$

Saadud võrrandist näeme, et esinevad „täpsed“ energia  $E$  ja Plancki konstandi  $h$  seosed:

$$E = \frac{mc^2}{2} = \frac{E}{2}$$

ja

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi}$$

### 1.4.1 Universumi fundamentaalkonstandid

Teadus on püüdnud uurida füüsikalisi nähtusi ka kõige väikseimate vahemaadega ruumis ja leida ka väiksemaid ajavahemikke Universumis. Näiteks kvantelektrodünaamika kehtib vähemalt kaugusteni  $10^{-15}$  cm. Eksperimentaalselt kinnitatud väikseimaks ajavahemikuks on väiksem kui  $10^{-25}$  sekundit. Spekuleeritud on sedagi, et musta miniaugu leidmine massiga  $10^{15}$  grammi võimaldaks leida ka väikseim pikkuse ülaraja, mis on umbes  $10^{-23}$  cm. Kuid selliste kauguste uurimine nõuab  $10^{10}$  gigaelektronvoldilise energiaga osakeste voogu, mida laboratooriumites genereerima peab. Kuid nii kõrge energiaga ei ole praegu võimalik eksperimente sooritada.

Mõned dimensionaalanalüüsid näitavad seda, et väikseima pikkuse  $L$  korral peaks kaasnema ka vastav tihedus  $p$ . Selle seose saame kätte siis, kui arvestame teatud konstante:

$$p = \frac{h}{cL^4}$$

kus  $h$  on Plancki konstant ja  $c$  valguse kiirus vaakumis. Arvatakse, et antud tihedus  $p$  on ka suurim võimalik aine tihedus. Kuid musta augu tihedus avaldub järgmiselt:

$$p = \frac{c^6}{G^3 m^2}$$

kus  $c$  on valguse kiirus vaakumis,  $G$  on gravitatsioonikonstant ja  $m$  on mass. Viimane seos näitab, et kui musta augu tihedus suureneb, siis musta augu mass väheneb. Kui aga võetakse väikseima võimaliku augu tihedus võrdseks suurima võimaliku tihedusega, siis ilmneb vähim võimalik pikkus ja see on  $10^{-23}$  cm. Kuid see teeb musta augu väikseimaks võimalikuks massiks  $10^{15}$  grammi.

( Keskinen ja Oja 1983, 115 )

Erinevate interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arväärtused võivad olla looduse poolt määratud tegelikult juhuslikult ( näiteks valguse kiirus  $c$  vaakumis ehk tavaruumi liikumiskiirus  $c$  hyperruumi suhtes ) või need võivad olla tegelikult mistahes väärtusega. See tähendab seda, et näiteks gravitatsioonikonstant  $G$  PEAB esinema Newtoni poolt kirjeldatud gravitatsioonijõu valemis, kuna gravitatsioonijõu ja elektrijõu erinevuse suurus PEAB olema looduses kooskõlas just seisue energiaga  $E$ :

$$E = mc^2$$

Gravitatsioonijõu ja elektrijõu omavahelise suhte analüüs viitab sellele, et oluline ei ole tegelikult interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arväärtused, vaid erinevate interaktsioonide omavahelist suhet määravad asjaolud. See tähendab füüsikaliselt seda, et näiteks gravitatsioonikonstandi  $G$

$$G = \frac{c^4}{F}$$

ja elektrijõu võrdeteguri  $k$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{4\pi k}{\mu_0}$$



arvväärtused võivad looduse poolt olla määratud tegelikult suvaliselt, KUID nende kahe erineva interaktsiooni omavahelise suhte määrab ära erirelatiivsusteooriast tuntud seisenergia  $E$  avaldis

$$E = mc^2$$

Näiteks elektrijõud  $F$  on gravitatsioonijõust suurem

$$F = \frac{c^4}{G}$$

korda just seisenergia  $E$  avaldise tõttu ja see suhe jääb samasuguseks ka siis ( ning sellest tulenevalt ka Universumi eksisteerimine ), kui konstantide arvväärtused peaksid olema täiesti teistsugused. Selles seisnebki „juhus-teooria“ põhiline füüsikaline sisu, mis tuleneb eelnevast ja ka kogu järgnevast matemaatilisest analüüsist: erinevate interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arvväärtused võivad olla looduse poolt määratud tegelikult juhuslikult ( näiteks valguse kiirus  $c$  vaakumis ehk tavaruumi liikumiskiirus  $c$  hyperruumi suhtes )

$$\sqrt[4]{GF} = c$$

või need võivad olla tegelikult mistahes väärtusega, KUID oluline on siinkohal lihtsalt see, et erinevate interaktsioonide omavaheliseid suhteid ( näiteks kui mitu korda on elektrijõud  $F$  gravitatsioonijõust suurem )

$$F = \frac{c^4}{G}$$

määrab ära seisenergia  $E$  avaldis

$$E = mc^2$$

mis omakorda tuleneb aja ja ruumi füüsikast ehk antud juhul ajas rändamise füüsikateooriast. Universumi materia ehk aine ja välja eksisteerimise põhivormideks ongi aeg ja ruum.

Järgnevalt näitamegi mõnede fundamentaalsete konstantide omavahelisi seoseid, mis on heas kooskõlas eelnevalt esitatud teooriaga. Piisab juba väheste seoste nägemisest ja analüüsist, et jõuda sellistele järeldustele, mis olid eelnevalt esitatud.

Näiteks Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki aja  $t$  saame otseselt tuletada gravitatsioonipotentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U = \frac{GM}{R}$$

Massi  $M$  avaldame omakorda seisenergia seosest:

$$M = \frac{E}{c^2}$$

ja energia  $E$  omakorda määramatuse relatsioonist aja  $t$  ja energia  $E$  vahel:

$$E = \frac{h}{2t}$$

Gravitatsioonipotentsiaali võrrand tuleb seega kujul:

$$U = G \frac{h}{2} \frac{1}{c^2 t} \frac{1}{R} = G \frac{h}{2} \frac{1}{l^2 c}$$

Gravitatsioonipotentsiaal on Schwarzschildi raadiusega  $R$  seotud järgmiselt:

$$c^2 = \frac{2GM}{R} = 2U$$

millest saame omakorda suurima võimaliku gravitatsioonipotentsiaali kogu Universumis:

$$\frac{c^2}{2} = U$$

Sellest tulenevalt saame võrrandi  $U$ :

$$U = G \frac{h}{2} \frac{1}{l^2 c}$$

kirjutada kujule:

$$l^2 = \frac{Gh}{c^3}$$

Tegemist ongi juba Plancki pikkusega:

$$l_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = \sqrt{\frac{h \frac{l_p^2 c^3}{h}}{c^3}} = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

millest väiksematel ruumi skaaladel ei ole enam füüsikalist reaalsust ehk Universumi eksistentsi. Teades aja  $t$  definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$t = \frac{l}{v}$$

saame tuletada ka Plancki ajaperioodi:

$$t^2 = \frac{l^2}{c^2} = \frac{Gh}{c^5}$$

ehk

$$t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

millest väiksematel ajaperioodidel ei ole Universumis enam füüsikalist mõtet. Plancki pikkuse ja Plancki aja jagatis annab meile valguse kiiruse  $c$  ehk „Plancki kiiruse  $v$ “:

$$v^2 = \frac{l^2}{t^2} = \frac{Ghc^5}{c^3 Gh} = c^2$$

ehk

$$c = \frac{l_p}{t_p} = 2,99792458 * 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kui me kvandienergia  $E$  valemi:

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{r}$$

paneme võrduma gravitatsioonivälja potentsiaalse energiaga  $U$ :

$$U = E = \frac{GMm}{r} = \frac{Gm^2}{r} = \frac{hc}{r}$$

siis saame kohe Plancki massi väärtuse:

$$m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}} = \sqrt{\frac{hc}{\frac{l_p^2 c^3}{h}}} = \frac{h}{l_p} \frac{1}{c} = 2,176435 * 10^{-8} \text{ kg}$$

Kogu eelneva analüüsi ja arutluskäigu aluseks oli de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  valem:

$$\lambda = \frac{h}{mc} = \frac{h}{p}$$

mille järgi on Plancki konstant  $h$  defineeritud:

$$h = mc\lambda$$

Kui me aga kasutame ainult Plancki massi, Plancki pikkust ja Plancki aega, siis saame Plancki konstandi  $h$  definitsiooniks:

$$\frac{h}{2\pi} = m \frac{l_p}{t_p} \lambda = \frac{m_p l_p^2}{t_p}$$

ehk

$$h = \frac{2\pi m_p l_p^2}{t_p} = 6,6260755 * 10^{-34} \text{ Js}$$

Kvandienergia võrrandis:

$$E = hf$$

ehk

$$mc^2 = hf$$

võimegi Plancki konstandi  $h$  avaldada Plancki massi, Plancki pikkuse ja Plancki aja kaudu järgmiselt:

$$mc^2 = \frac{2\pi m_p l_p^2}{t_p} f$$

Järgnevalt oletame, et tegemist on taandatud Plancki konstandiga  $h$ :

$$mc^2 = \frac{m_p l_p^2}{t_p} f$$

Viime ühe liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$mt_p c^2 = m_p l_p^2 f$$

ja teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$m \frac{t_p^2 c^2}{l_p^2} = m \frac{c^2}{c^2} = \frac{E}{c^2} = m = m_p t_p f = m_p t_p \frac{1}{t} = m_p t_p \frac{c}{\lambda}$$

Tulemuseks võime saada elektroni massi  $m$ :

$$m_e = m_p t_p \frac{c}{\lambda} \approx 9,10938 * 10^{-31} \text{ kg}$$

kui  $\lambda$  oleks Comptoni lainepikkus elektroni korral ( $\lambda = 2,4263102367(11) * 10^{-12} \text{ m}$ ). Kui me aga eelnevalt saadud avaldist:

$$m \frac{t_p^2 c^2}{l_p^2} = m_p t_p f$$

teisendame matemaatiliselt teisiti:

$$\frac{l_p c^2}{m_p t_p f} = \frac{l_p^3}{m t_p^2}$$

siis tulemuseks saame gravitatsioonikonstandi  $G$  seose:

$$\frac{c^3}{m_p f} = \frac{l_p^3}{m_p t_p^2} = G = 6,67259 * 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Viimane võib teiseneda ka järgmiselt:

$$\frac{ctc^2}{m_p} = \frac{l_p^3}{m_p t_p^2} = G$$

milletõttu avaldub gravitatsioonikonstant  $G$ :

$$G = \frac{l_p}{m_p} c^2 = \frac{l_p^2 c^3}{h}$$

ja Plancki sagedus  $f$ :

$$f_p = \frac{c^3}{m_p G}$$

Kuid Plancki massi avaldisest:

$$m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}}$$

saame põhimõtteliselt ka neutroni massi väärtuse:

$$m_n = m_p t_p \frac{c}{\lambda} \approx \sqrt{\frac{hc}{G}} \sqrt{(6\pi^2 10^{-40})} \approx \sqrt{(6\pi^2 10^{-40}) \frac{hc}{G}} \approx 1,674927 * 10^{-27} \text{ kg}$$

kui  $\lambda$  oleks Comptoni lainepikkus neutroni korral ( $\lambda = 2,1001941552 * 10^{-16} \text{ m}$ ). Elektroni mass avaldus seosena:

$$m_e = m_p t_p \frac{c}{\lambda}$$

kuid see võib avalduda ka järgmiselt:

$$m_e = \frac{\alpha_e m_p l_p}{r_e}$$

Tõestame seda viimast järgmise võrdusena:

$$\frac{\alpha_e m_p l_p}{r_e} = m_p t_p \frac{c}{\lambda}$$

Võrdus taandub lõpuks lihtsaks võrrandiks:

$$\frac{\alpha_e}{r_e} = \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

ehk

$$\alpha_e = \frac{r_e}{\lambda_e} = \frac{1}{\lambda_e} r_e = \frac{1}{\lambda_e} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} \right) = \frac{1}{\lambda_e} \left( k \frac{e^2}{E_e} \right) = \frac{1}{137}$$

mis pikemalt lahti kirjutatuna esitub:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 h c} \frac{1}{r_e} = \frac{1}{137} * \frac{1}{r_e} = \frac{1}{\lambda}$$

Vesiniku aatomi spektrijoonte seeriajadasid kirjeldavas valemis on R Rydbergi konstant:  $R = 1,0974 * 10^7 m^{-1}$  ja elektroni raadius on:  $r_e = 2,8179403227(19) * 10^{-15} m$ . Ei ole raske näha, et saadud seos kirjeldab tuntud kvandienergiat E:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_e} = h \frac{c}{\lambda} = hf$$

ehk

$$E = hf$$

Elektroni massi väärtuse võime leida ka puhtalt elementaarlaengu  $e$  ( $1e = 1,6021892 * 10^{-19} C$ ) elektrivälja energia E avaldisest:

$$E = mc^2 = k \frac{e_e^2}{r_e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_e^2}{r_e}$$

mille korral saame

$$m = \frac{1}{c^2} E = \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_e^2}{r_e} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_e^2}{r_e} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e_e^2}{r_e} = \frac{K}{2} \frac{e_e^2}{r_e}$$

ehk

$$m_e = 10^{-7} \frac{e_e^2}{r_e} = 9,109 * 10^{-31} kg$$

„Elektrilise võrdeteguri“  $k$  saame samuti leida elektrivälja energia E avaldisest:

$$E = mc^2 = k \frac{q^2}{l}$$

mille järgi teiseneb valem:

$$k = \frac{mc^2 l}{q^2} = \frac{ml}{q^2} \frac{l^2}{t^2} = \frac{ml^3}{q^2 t^2}$$

Plancki massi, Plancki pikkust, Plancki aega ja Plancki elektrilaengut kasutades saamegi  $k$  väärtuse:

$$k_e = \frac{m_p l_p^3}{q_p^2 t_p^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

Selle läbi avaldub ka „Plancki elektrilaeng“:

$$q_p = \sqrt{\frac{m_p l_p^3}{k_e t_p^2}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0 h c} = \frac{e}{\sqrt{\alpha_e}} = 1,8755459 * 10^{-18} C$$

Kasutades Plancki massi ja Plancki gravitatsioonikonstandi definitsioone saame Newtoni gravitatsioonivõrrandi:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

esitada kujul:

$$F = \frac{l_p^2 c^3}{h} \frac{\frac{h}{l_p} \frac{1}{c} \frac{h}{l_p} \frac{1}{c}}{r^2} = \frac{hc}{r^2}$$

Viimane avaldub Plancki pikkuse kaudu järgmiselt:

$$F = \frac{h}{l_p} \frac{c}{l_p}$$

Siinkohal peab ära märkima ka selle, et valguse kiiruse  $c$  ruut on küll seotud magnetkonstandiga ja elektrikonstandiga:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

kuid magnetkonstandi ja elektrikonstandi arvvaartuste omavaheline erinevus on tingitud sellest, et viimane seos oleks kooskõlas ka teiste Universumi fundamentaalkonstantidega. Näiteks elektrivälja energia  $E$  võrrandist:

$$mc^2 = E = k \frac{e_e^2}{r_e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_e^2}{r_e}$$

saame otseselt „tuletada“ elektroni massi arvvaartuse:

$$m = \frac{1}{c^2} E = \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_e^2}{r_e} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_e^2}{r_e} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e_e^2}{r_e} = \frac{K}{2} \frac{e_e^2}{r_e}$$

ehk

$$m_e = 10^{-7} \frac{e_e^2}{r_e} = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

milles  $r_e$  on Bohri raadius,  $\mu_0$  on magnetkonstant ja  $e$  on elementaarlaeng ehk antud juhul elektroni elektrilaeng:

$$1e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Näiteks seetõttu peabki magnetkonstandi arvvaartus „erinema“ elektrikonstandi arvvaartusest, mitte olema omavahel võrdsed. Kuid elektrikonstandi arvvaartuse saame tuletada samuti elektrivälja energia  $E$  avaldisest:

$$E = mc^2 = k \frac{q^2}{l}$$

kui me teisendame seda matemaatiliselt järgmiselt:

$$k = \frac{mc^2 l}{q^2} = \frac{ml}{q^2} \frac{l^2}{t^2} = \frac{ml^3}{q^2 t^2}$$

Saadud avaldisest on selgesti näha, et Plancki massi, Plancki pikkuse ja Plancki aja kasutamise korral saamegi elektrilise konstandi  $k$  väärtuse:

$$k_e = \frac{m_p l_p^3}{q_p^2 t_p^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

Viimases valemis nähtub Plancki elektrilaeng, mis on omakorda seotud peenstruktuurikonstandiga:

$$q_p = \sqrt{\frac{m_p l_p^3}{k_e t_p^2}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e}{\sqrt{\alpha_e}} = 1,8755459 * 10^{-18} C$$

## 1.5 Lagranžiaanide matemaatika

### 1.5.1 Sissejuhatus

Eespool me kirjeldasime seda, et kuidas Universumi mateeria struktuur tuleneb aja ja ruumi seaduspärasustest. Aja ja ruumi tekkimisega Universumi Suures Paugus tekkis ka mateeria, mille struktuur oli „vormitud“ aegruumi enda füüsikast. Näiteks sümmeetria rikkumine ja neli interaktsiooni tulenevad kõik aegruumi füüsikast, millest tuletatav energia võrrand  $E = mc^2$  ongi põhiliseks mateeria struktuuri „loojaks“. Kuna väljade üldine kvantteooria on enamasti esitatav lagranžiaanide matemaatikaga, siis kogu järgneva matemaatilise ja füüsikalise analüüsiga näitamegi seda, et kuidas lagranžiaanide matemaatika on tegelikult seotud ka ajas rändamise füüsikaga ja kuidas lagranžiaanide matemaatika tuleneb ajas rändamist kirjeldavast aegruumi füüsikast.

Käesolev füüsikateooria põhjendab Standardmudeli vabu parameetreid, mis on ühe fundamentaalse teooria jaoks arvult 19. Seda on liiga palju. Näiteks käesolev teooria võimaldab arvutada Weinbergi nurka  $\theta_W$ , mille tulemus on väga lähedane tegelikkusele. Käesolev teooria võimaldab omavahel seostada universumi barüonlaengut ja nõrga jõu CP-rikkumist. Aine-antiaine asümmeetria tekkis vabadest X- ja Y-bosonitest, mis eksisteerisid väga kõrge energiana ainult kuni  $10^{-35}$  sekundit pärast universumi Suurt Pauku.

### 1.5.2 Universumi DNA mõiste

Tuletame meelde, et seisenergia  $E$  avaldisest:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

tuletasime omakorda skalaarbosoni massi  $m$  võrrandi:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

mis kirjeldab Higgsi bosonit ehk Higgsi välja osakest. See tähendab seda, et Higgsi väli ( ja koos sellega ka sümmeetria spontaane rikkumine ) on otseselt tuletatavad eespool tuletatud energia  $E$  võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

millest omakorda järeldub see, et seisenergia  $E$  võrrandist peab olema võimalik tuletada ka kõik teised interaktsiooni liigid, mis Universumis üldse eksisteerivad. See tähendab seda, et seisenergia  $E$  avaldis määrab ära kogu meie materiaalse maailma struktuuri ehk võimalike interaktsioonide paljususe ja erinevuse kogu Universumis.

Kui me defineerisime potentsiaali  $\phi$  reaali- ja imaginaarosa asemele kaks uut välja, mis on mõlemad reaalsed ja mille minimaalne potentsiaal võrdub nulliga ehk vaakumolekuga, siis sellisel juhul kattus üks reaalne väli Higgsi väljaga, kuid teine reaalne väli ongi juba seotud elektromagnetilise, nõrga ja tugeva interaktsiooniga, mis moodustavad kõik korraga kogu meie materiaalse maailma ehituse ja funktsioneerimise.

Eelnevalt me nägime, et seisenergia avaldis

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

tuleneb otseselt aja ja ruumi eksisteerimisest, mis väljendub Universumi kosmoloogilise paisumisenä. Energia ja mass on seotud materiaga ( s.t. aine ja väljaga ). Kogu järgneva matemaatilise ja füüsikalise analüüsiga me näeme seda, et seisenergia  $E$  võrrandist on võimalik tuletada kõik interaktsiooni liigid, mis Universumis üldse eksisteerivad. See tähendab seda, et seisenergia  $E$  avaldis määrab ära kogu meie materiaalse maailma struktuuri ehk võimalike interaktsioonide paljususe ja erinevuse Universumis. Kogu järgnev analüüs näitab meile üsna selgelt seda, et seisenergiast  $E$  tuletatavad „matemaatilis-füüsikalised operatsioonid/süsteemid ( ehk lihtsalt tuletised )“ ja nende variatsioonide piiratud rikkus realiseeruvad kõik Universumis erinevateks interaktsioonideks. See, et milline on kogu meie materiaalne maailm, määrabki ära seisenergiast  $E$  tuletatavad matemaatilis-füüsikaliste operatsioonide/süsteemide ehk tuletiste variatsioonid, mille arv on nii teoreetiliselt kui ka tegelikkuses piiratud. Näiteks arvu nelja:

$$x_{1,2,3,4} = 4$$

on matemaatiliselt võimalik saada ainult neljal erineval viisil ehk variatsioonil:

$$x_1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$x_2 = 2 + 1 + 1$$

$$x_3 = 2 + 2$$



$$x_4 = 3 + 1$$

Selleks, et vältida lõpmatute versioonide tekkimist, tuleb kasutada ainult positiivseid ja reaalseid täisarve ning nullisid mitte arvestada.

Universumis on olemas nelja põhiliiki interaktsioone. Nendest energiaväljad on järgmised:

1. Elektromagnetiline jõud ( elektrivälja ja magnetvälja vahendavad massita footonid )
2. Tugev jõud ( mida vahendavad massita gluuonid )
3. Nõrk jõud ( mida vahendavad väga rasked kolm vahebosonit )

Nendele kolmele energiaväljale tasub eraldi lisada tegelikult veel kolm liiki energiavälja:

1. Higgsi väli ( mis annab kõikidele elementaarosakestele massi, väljaarvatud footonile ja gluuonile )
2. Osakese spinn tekitab magnetvälja ( magnetvälja tekitab ka elektrilaengu liikumine ruumis )
3.  $\pi$ -mesonite väli nukleonide vahelises ruumis ( gluuonid eksisteerivad kvarkide vahelises ruumis )

Gravitatsiooniväli ei ole energiaväli ja seetõttu ei vahenda seda ükski kvantosake. Kvantgravitatsiooni ja seega gravitone pole tegelikult olemas. Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverus ehk seega „aegruumi väli“.

Kogu meie materiaalne maailm on „tuletatav“ ühest ainsast võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Kui elusorganismi kõiki tunnuseid määrab ära geenides olev DNA, siis kogu meie materiaalse maailma ehituse ja funktsioneerimise määrab ära just see viimane võrrand.

Wikeepeerias on DNAST kirjutatud järgmiselt: „Elusorganismides esineval DNA struktuuril on suur bioloogiline tähtsus. Kuna DNA primaarstruktuuris võivad nukleotiidid paikneda suvalises järjestuses, võimaldab DNA nende järjestuste kaudu talletada bioloogilist informatsiooni (seda võimaldab ka RNA, kuid DNA on oma suurema keemilise stabiilsuse tõttu pikaajalisemaks info säilitamiseks märksa sobivam ühend). Organismi geneetiline info on talletatud kromosoomidesse, mis koosneb DNA molekulidest, mis omakorda jagunevad geenideks. Igas organismi rakus, selle tuumas sisaldub kogu organismi genoom. Geen on geneetilise info baasühik, mis kodeerib mingi kindla proteiini sünteesi. Kui geeni ekspresseeritakse, siis kopeeritakse geenist üheaheelaline mRNA matriits, mis seejärel suundub rakutuumast ribosoomi, kus toimub geneetilise koodi alusel mRNAst tRNA ja mitmete ensüümide abil aminohappeahelate sünteesimine, mis hiljem pakitakse valguks.“

Mateeria kolm põlvkonda  
(fermionid)

	I	II	III	
mass→	2.4 MeV/c <sup>2</sup>	1.27 GeV/c <sup>2</sup>	171.2 GeV/c <sup>2</sup>	0
laeng→	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spinn→	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nimi→	<b>u</b> u-kvark	<b>c</b> c-kvark	<b>t</b> t-kvark	$\gamma$ foton
Kvargid	4.8 MeV/c <sup>2</sup>	104 MeV/c <sup>2</sup>	4.2 GeV/c <sup>2</sup>	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>d</b> d-kvark	<b>s</b> s-kvark	<b>b</b> b-kvark	<b>g</b> gluon
Leptonid	<2.2 eV/c <sup>2</sup>	<0.17 MeV/c <sup>2</sup>	<15.5 MeV/c <sup>2</sup>	91.2 GeV/c <sup>2</sup>
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	$\nu_e$ elektron- neutriino	$\nu_\mu$ müü- neutriino	$\nu_\tau$ tau- neutriino	<b>Z<sup>0</sup></b> Z-boson
	0.511 MeV/c <sup>2</sup>	105.7 MeV/c <sup>2</sup>	1.777 GeV/c <sup>2</sup>	80.4 GeV/c <sup>2</sup>
	-1	-1	-1	$\pm 1$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>e</b> elektron	<b>μ</b> müüon	<b>τ</b> tauon	<b>W<sup>±</sup></b> W-boson
				Kalibratsioonibosonid

Joonis Standardmudeli elementaariosakesed ( peale Higgsi bosoni )

Foto allikas: [https://et.wikipedia.org/wiki/Osakestef%C3%BC%C3%BCsika\\_standardmudel](https://et.wikipedia.org/wiki/Osakestef%C3%BC%C3%BCsika_standardmudel)

Higgsi väli ( ja koos sellega ka sümmeetria spontaane rikkumine ) on otseselt tuletatavad kosmoloogias tuletatud energia E võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis näitab omakorda seda, et sümmeetria spontaane rikkumine on tingitud lihtsalt aegruumi struktuurist. See tähendab, et sümmeetria spontaane rikkumine ei ole tingitud mingisugusest konkreetsest füüsikalisest seaduspärasusest ( „pall liigub, kuna mina tõukasin seda palli“ stiilis ), vaid see on lihtsalt aegruumi omadus.

Siinkohal on oluline rõhutada, et energia E ja massi m omavahelise seose:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

ruut

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{4} = m^2 c^4$$

on esitatav ka relativistlikust mehaanikast tuntud keha relativistliku koguenergia E<sup>2</sup> võrrandiga:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

mis tähendab ka seda, et viimasest on võimalik omakorda uuesti tuletada seisuenergia E võrrand. Selleks teostame keha relativistliku koguenergia võrrandis matemaatilise teisenduse:

$$E^2 = p^2 c^2 + p^2 c^2 = c^2(p^2 + p^2) = c^2 2p^2$$

millest saame impulsi  $p$  ja energia  $E$  vahelise seose:

$$\frac{E^2}{c^2} = 2p^2$$

Järgnevalt arvestame keha seisuenergia  $E = mc^2$  matemaatilise definitsiooniga:

$$\frac{m^2 c^4}{c^2} = 2p^2$$

mistõttu  $c^2$  taandub võrrandist ilusti välja:

$$m^2 c^2 = 2p^2$$

Kui me viime massi  $m$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$mc^2 = E = \frac{2p^2}{m}$$

siis saame seisuenergia  $E$  võrrandi kujuks:

$$E = mc^2 = \frac{2p^2}{m}$$

Viimases võrrandis on valguse impulss  $p = mc$ :

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{p^2}{m} = \frac{m^2 c^2}{m} = mc^2$$

Sellest tulenevalt saame „kineetilise energia seose seisue energiaga“ järgmiselt:

$$\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis näitab seda, et keha seisuenergia  $E = mc^2$  on tegelikult oma olemuselt kineetiline energia, mis omakorda tuleneb Universumi kosmoloogilisest paisumisest:

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Siinkohal tasub märkida seda, et kui me võrrandi:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

kõik pooled tõstame ruutu:

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{4} = m^2 c^4$$

ja võtame saadud võrrandis ruutjuure ehk lähme uuesti tagasi võrrandi esialgsele kujule:

$$\sqrt{E^2} = \sqrt{\frac{m^2 c^4}{4}} = \sqrt{m^2 c^4} = E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

siis tulemuseks saame positiivse avaldise:

$$E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis pole enam negatiivne.

### 1.5.3 Ajas rändamise üldvõrrand

Kosmoloogia osas tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

teostame järgmised matemaatilised teisendused. Juhul kui  $ct = 0$ , saame järgmise võrrandi

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c .$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled  $t'$ -ga:

$$\frac{vt'}{t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{ct'}{t'}$$

ja sellest tulenevalt saame lõpuks järgmise väga olulise võrrandi:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Eelnevalt tuletatud võrrandist on võimalik matemaatiliselt tuletada kosmoloogia põhivõrrand ehk Friedmanni võrrand ja ka keha seisuenergia valem  $E = mc^2$ . Näiteks keha  $m$  kineetiline energia  $E$  avaldub valemiga:

$$E = \frac{mv^2}{2} .$$

Kui kiirused on väikesed võrreldes valguse kiirusega vaakumis, siis saab kasutada ligikaudseid valemeid:

$$\frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2$$

Kinemaatilise teguri  $\gamma$  avaldist:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

võib esitada ka järgmiselt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

milles  $\beta^2$  avaldub nõnda:

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}.$$

Kõike eelnevat arvestades võibki kinemaatilise teguri  $\gamma$  asendada ligikaudse valemiga:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{4} \frac{v^4}{c^4}},$$

sest  $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ . Kuna liige  $-\frac{1}{4} \frac{v^4}{c^4}$  on väga väike, siis saame viimase avaldise kirjutada nõnda:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Sellest tulenevalt saame  $\gamma$  avaldada järgmiselt:

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

või siis

$$\frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

ja sooritada järgmised matemaatilised teisendused:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c \frac{1}{\gamma} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Kui me korrutame võrrandi mõlemad pooled  $mc$ -ga, siis saame järgmise „tehete analüüsi“:

$$v \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ehk

$$mcv \approx mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

milles kaotame ära sulud

$$mcv \approx mc^2 - \frac{mv^2}{2}$$

ja avaldame kineetilise energia:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv$$

ehk

$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)' = (mc^2 - mcv)$$

Eelnevalt tuletatud võrrandis

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv$$

viime liikme  $-mcv$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{mv^2}{2} + mcv = mc^2$$

ja kui see võrrandi liige võrdub nulliga:

$$mcv = 0$$

ehk kiirus on null  $v = 0$ , siis saame järgmise väga tähtsa avaldise:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

Järgmisena näitame seda, et viimane avaldis on tegelikult samaväärne sellise valemiga:

$$\frac{mv^2}{2} = mcv$$

kui viimases valemis on võrrandi liikmes  $mcv$  kiirus  $v = c$ . Kui aga  $v = 0$ , siis saame kineetilise energia, mis võrdub nulliga:

$$\frac{mv^2}{2} = 0$$

Mehaanilise energia jäävuse seaduse kohaselt peab keha potentsiaalne energia olema maksimaalne, kui tema „liikumisenergia“ ehk kineetiline energia võrdub nulliga:

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{R}$$

Sellest tulenevalt saame järgmise seose:

$$-\frac{GMm}{R} = mcv$$

milles  $v = 0$ . Kui võrrandi liikmes  $mcv$  on  $v = 0$ , siis see tähendab füüsikaliselt seda, et tavaruumi K suhtes on keha m paigal, kuid hyperruumi K' suhtes liigub keha m kiirusega c. Seetõttu on keha m kineetiline energia  $\frac{mv^2}{2} = E_k$  võrdne  $E = mc^2$  ja seda siis hyperruumi K' suhtes. Antud juhul on siin tegemist kineetilise energia definitsiooniga:  $E_k$ . Kuna seoses  $mcv$  on  $v = 0$ , mis tähendab seda, et keha m on tavaruumi K suhtes paigal ehk keha kineetiline energia on tavaruumi K suhtes null, siis seega tavaruumi K suhtes olev keha m paigalseisu ehk potentsiaalne energia on võrdne gravitatsioonilise potentsiaalse energiaga järgmiselt:

$$mcv = -\frac{GMm}{R}$$

ja see potentsiaalne energia ei võrdu võrrandis enam nulliga. Kõiki eelnevaid seoseid arvestades saamegi järgmise väga olulise võrrandi:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{mc^2}{2}$$

milles massid  $m$  võivad kõik maha taanduda:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimane tuletatud seos väljendab tegelikult otseselt „mehaanilise energia jäävuse seadust“:

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

ehk

$$E = E_k + E_p = \frac{v^2}{2} + \left(-\frac{GM}{R}\right) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \text{const} = -\frac{c^2}{2}$$

Viimases seoses olev konstant  $-\frac{c^2}{2}$  ei tule matemaatiliselt välja klassikalises mehaanikas tuntud energia jäävuse seaduse võrrandist. Sellise energia jäävuse seaduse kuju on võimalik tuletada ainult relativistliku mehaanika teel nagu me seda siin eelnevalt tegime. Viimases võrrandis olev konstandist liige  $-\frac{c^2}{2}$  võrdub klassikalises mehaanikas nulliga:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

millest saamegi mehaanilise energia jäävuse seaduse klassikalisel kujul:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{R}$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

Energia jäävuse seadusest, mille ühel poolel on kineetiline energia ja teisel poolel on gravitatsiooniline potentsiaalne energia ehk lihtsalt gravitatsioonipotentsiaal:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

on võimalik matemaatiliselt tuletada Newtoni II seadus gravitatsioonijõu korral:

$$a = g = \frac{GM}{r^2}$$

Esiteks gravitatsioonipotentsiaal  $\phi$  on tegelikult tuletatav Newtoni gravitatsioonijõust  $F$ , kui me Newtoni gravitatsiooniseadust integreerime raadiuse  $r$ -i järgi järgmiselt:

$$\frac{GMm}{r} = \int_r^{+\infty} \frac{GMm}{r^2} d\vec{r} = U$$

milles  $F$  ongi Newtoni ülemaailmne gravitatsiooniseadus:

$$\frac{GMm}{r^2} = F$$

Teiseks on kineetiline energia  $E$  võrdeline tehtud tööga:

$$Fs = ma = mg = m \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds} = mv \frac{dv}{ds}$$

ehk

$$Fs = mv \frac{dv}{ds}$$

Viimasest seosest ongi näha seda, et töö  $A$  avaldise diferentseerimisel saame kineetilise energia valemi järgmiselt:

$$dA = Fsds = mv dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Integreerides viimast avaldist:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} s d\vec{s}$$

saamegi kineetilise energia matemaatilise avaldise:

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{mv^2}{2}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2}{2}$$

Niimoodi võrrandi kahte poolt eraldi diferentseerides ja integreerides ( nagu diferentsiaal- ja integraalarvutuses asi käib ) jõuamegi lõpuks kaudselt või otseselt Newtoni II seaduse vormini:

$$a = \frac{F}{m}$$

ehk gravitatsiooni korral

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{GM}{r^2}$$

Mõnikord omistatakse Newtoni II seadusele ka selline kuju, mille korral on mass  $m$  lihtsalt korrutatud kiirendusega  $a$ :

$$F = ma$$

ja see võib olla täiesti identne ka Newtoni gravitatsioonijõuga  $F$ :

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

#### 1.5.4 Füüsikalise süsteemi lagranžiaan



Newtoni II seaduse järgi on jõud  $F$  defineeritud potentsiaali  $U$  ja koordinaadi  $x$  kaudu järgmiselt:

$$F_x = ma = \frac{d}{dt}mv = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Sellest saame omakorda võrrandi:

$$\frac{d}{dt}mv_1 + \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0$$

Kuna jõud  $F$  võrdub impulsi  $p$  tuletisega aja  $t$  järgi:

$$\dot{p} = \frac{d}{dt}mv_1$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$\dot{p}_1 - F_1 = 0$$

millest omakorda nähtub järgmine võrdus:

$$\dot{p}_1 = F_1$$

Kui me nüüd koordinaadid

$$q \rightarrow x_1, x_2, x_3$$

ja kiirused

$$\dot{q} \rightarrow v_1, v_2, v_3$$

asendame, siis saame süsteemi „üldistatud impulsi“:

$$\dot{p} = \pi_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$$

ja süsteemi „üldistatud jõu“:

$$F = \phi_n = \frac{\partial L}{\partial q_n}$$

milles  $\pi$  ei ole  $\pi = 3,14...$ . Saadud võrdustes esineb Lagrange'i funktsioon  $L$ , mis kirjeldab süsteemi koguenergia. Süsteemi koguenergia  $L$  on teatavasti kineetilise  $T$  ja potentsiaalse  $U$  energia summa:

$$L = T - U = \sum_k \frac{mv_k^2}{2} - U(\vec{x})$$

mis võib võrduda nulliga:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$$

Hiljem me näeme seda, et saadud summa „sarnaneb“ Lagrange'i funktsioonis esineva summaga:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$$

Süsteemi koguenergia  $L$  võrrandit võime kirjeldada „mõju integraaliga“:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} L' dt + f \Big|_{t_1}^{t_2}$$

millest nähtub omakorda „mehaanilise süsteemi Lagrange“:

$$L = L' + \frac{d}{dt}f(q, t)$$

Kui mehaaniline süsteem liigub ( s.t. areneb ), siis see muutub kiirusega:

$$\dot{q}_n \equiv \frac{dq_n}{dt}$$

Meil on antud süsteemi üldistatud koordinaadid kahel erineval ajahetkel:

$$t_1 < t_2$$

Neid punkte ühendab omavahel trajektoor. Trajektoore on lõpmata palju, kuid ainult üks neist on „tõeline“:

$$L(q, \dot{q}, t)$$

ehk

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

L on Lagrange funktsioon ja S on mõjufunktsioon, mis on minimaalne. Lagrange väärtuste vahe avaldub järgmiselt:

$$\delta L = \sum_{n=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t$$

milles  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$  ja  $\delta t = 0$ . Tahkel kehal ehk tahkisel on ruumis 6 arvu ehk vabadusastet ja seega on ta fikseeritud  $s = 6$ . Üks punkt liigub 2s mõõtmelises ruumis. Varda ja kahe punkti korral on  $3 + 2 = 5$  vabadusastet. Kuna vähima mõju printsiibi tõttu kehtib võrdus:

$$\delta S = 0$$

siis seega saame kirjutada järgmiselt:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$$

ehk

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

Lagrange'i võrrand saab teiseneda matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n = \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{d}{dt} \delta q_n = \dots$$

Mõnede allikate järgi kehtib ka võrdus:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \right) = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{d}{dt} \delta q_n$$

kuid tegelikult peame arvestama ikkagi selliste diferentsiaalsete seostega:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{d}{dt} \delta q_n = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta q_n$$

Selle tõttu saame Lagrange'i võrrandi tegelikuks kujuks:

$$\dots = \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta q_n$$

ehk

$$\dots = \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta q_n + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \right)$$

Kui me nüüd võtame viimasest võrrandist summa ja integraali, siis saame tulemuseks mõjufunktsiooni:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{n=1}^s \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta q_n + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \right) \right]$$

milles üks liige võrdub nulliga:

$$\sum_{n=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

kuna kehtib võrdus:

$$\delta q_n(t_1) = \delta q_n(t_2) = 0$$

Seetõttu saame mõjufunktsiooni kujuks:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{n=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta q_n \Rightarrow 0$$

mistõttu võime välja kirjutada ka sellise seose:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$$

milles  $n = 1, 2, \dots, s$ .

Optikas kehtib Fermat' printsiip, mille korral läbib valgus alati sellise tee ehk trajektoori, mille läbimiseks kulub kõige vähem aega. Sellisest seaduspärasusest järgeldub omakorda üldisem seaduspärasus, mida võib tinglikult nimetada „vähima mõju printsiibiks“.

Näiteks kui valgus läbib lõpmata väikese teepikkuse  $ds$ , siis selleks kuluks ajaperiood  $dt$ :

$$dt = \frac{ds}{v}$$

Sellisel juhul on valguse kiirus  $v$  keskkonna antud punktis. Antud juhul saame kasutada optikast tuntud keskkonna murdumisnäitaja  $n$  valemit:

$$n = \frac{c}{v}$$

milles  $c$  on valguse kiirus vaakumis. See annab meile ajaperioodi  $dt$  valemi kujuks:

$$dt = \frac{nds}{c}$$

millest nähtubki ruumi punktide A ja B vahelise tee läbimiseks kuluv aeg  $t$ :

$$t = \frac{1}{c} \int_A^B nds$$

Fermat' printsiibi järgi peab aeg  $t$  olema kõige väiksem. Valguse kiirus vaakumis on konstantne ja seega peab „ekstreemumi tingimus“ kehtima ka „optilise teepikkuse“  $L$  kohta:

$$L = \int_A^B nds$$

Homogeenses keskkonnas on optiline teepikkus avaldatav korrutisena:

$$L = ns$$

milles  $s$  on „geomeetriline teepikkus“ ja  $n$  on „keskkonna murdumisnäitaja“. Sellest tulenevalt seisneb Fermat' printsiip valguse liikumises, mille optiline teepikkus on kõige väiksem.

Fermat' printsiibist saab tuletada valguse murdumisseaduse (nn Snelli seaduse) ja peegeldumisseaduse kahe erineva optilise keskkonna piirpinnal.

Lähtuvalt „vähima mõju printsiibist“ on sellest arendatavad kõik füüsikateooriad.

Niisamuti ka relativistlik mehaanika tuleneb näiteks Lagrange'i teoreemist:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

See tähendab seda, et füüsikalise süsteemi areng:

$$\dot{q}_n \equiv \frac{dq_n}{dt}$$

kulgeb alg- ja lõppolekute vahel

$$t_1 < t_2$$

mööda kõikidest võimalikest arenguteedest, mille „mõjuintegraal“ on kõige väiksem:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Füüsikaline süsteem on  $N$  vabadusastmega. Süsteemi üldistatud koordinaatide kogumit

$$q_1, q_2, \dots, q_N$$

tähistatakse tähega  $q$ . Need on suvaliselt määratud arvud, mis iseloomustavad süsteemi olekut. Sellest lähtuvalt saame välja kirjutada ka süsteemi üldistatud kiirused:

ehk  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$

$$\dot{q}_1 = \frac{d}{dt} q_1$$

Seetõttu võibki erinevaid füüsikateooriaid kirjeldada Lagrange'i funktsiooniga ehk lagranžiaaniga:

$$L(q, \dot{q}, t)$$

Väljade kvantteooria on matemaatiliselt tuletatav Lagrange'i funktsioonist ehk lagranžiaanist

$$L(q, q')$$

Mõju integraaliks ehk lihtsalt mõjuks nimetatakse sellist integraali:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt.$$

mis on arvutatud mööda etteantud trajektoori N-mõõtmelises ruumis ajahetkest  $t_1$  kuni ajahetkeni  $t_2$ . Vähima mõju printsiibi tõttu peab mõju variatsioon võrduma nulliga:

$$\delta S = 0$$

Vastava variatsioonülesande lahendamise korral leitakse liikumisvõrrandite süsteemi Euleri võrrandid ehk Euler-Lagrange'i võrrand:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$$

milles  $n = 1, 2, \dots, N$ . Lagrange'i funktsiooniga  $L$  on seotud ka „kanoonilised impulsid“:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = p_n$$

( milles  $n = 1, 2, \dots, N$  ) ja Hamiltoni funktsioon ehk hamiltoniaan:

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n - L$$

mis kirjeldab koguenergiat.

### 1.5.5 Välja „kvantiseerimine“

Füüsikalisi väljasid on võimalik esitada pidevate funktsioonidega koordinaatidest. Kuna igas ruumi punktis saab välja „punkt“ muutuda suvaliselt pidevuse nõudeid rikkumata, siis seega on sellisel süsteemil lõpmata palju vabadusastmeid. Neid välja väärtusi käsitletaksegi väljateoorias „üldistatud koordinaatidena“. Välja üldistatud koordinaatideks on väljapotentiaalid. Väljapotentiaal

$$(A = 1, 2, \dots, n)$$

ja n-komponendiline funktsioon

$$u_A(x)$$

kirjeldavad füüsikalist välja, milles x tähistab aegruumi koordinaate  $x_\mu$ :

$$(\mu = 1, 2, 3, 4)$$

Lõpmatute väärtuste vältimiseks peab igas ruumi punktis olema arvutatav energia tihedus, mida mõistetakse „lagranžiaani tihedusena“. Sellegipoolest kasutatakse selliseid mõisteid nagu „hamiltoniaan“ ja „lagranžiaan“.

Kuna välja kirjeldav võrrand peab olema relativistlikult kovariantne ehk kujuga 4-skalaar  $=0$  või 4-vektor  $=0$ , siis seega peame eespool esitatud võrrandi:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$$

kirjutama kujule:

$$\frac{\partial L}{\partial u_A} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}} \right) = 0$$

milles

$$u_{A,\mu} \equiv \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu}$$

Antud juhul kehtib meil „summa konventsioon“ ja L on lagranžiaani tihedus, mis on 4-skalaar. Saadud viimast võrrandit nimetatakse välja u Euler-Lagrange'i võrrandiks. Kuid hamiltoniaani tiheduse võrrand on esitatav:

$$H(x) = \sum_A \frac{\partial L(x)}{\partial \dot{u}_A(x)} \dot{u}_A(x) - L(x)$$

ja kanoonilised impulsid on defineeritud järgmiselt:

$$\pi_A(x, t) = \frac{\partial L(x, t)}{\partial u_A(x, t)}$$

Energia-impulssstensor  $T_{\mu\nu}$  on defineeritud just lagranžiaani kaudu:

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \sum_A \frac{\partial L}{\partial u_{A,\nu}} u_{A,\mu}$$

ja selle kaudu energia-impulssvektor:

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x$$

millega neljas komponent määrab energia:

$$E = \int H d^3x = - \int T_{44} d^3x$$

Järgnevalt tuletatakse selline lainevõrrand, mis kirjeldab välja osakese füüsikalist olemust ja eksisteerimist aegruumis ning tema seost väljapotentiaaliga  $\varphi$ . Seda nimetatakse kvantväljateoorias välja kvantiseerimiseks, mille korral minnakse üle klassikaliselt väljalt kvantiseeritud väljale. Sellisel juhul loetakse väljade kvantteoorias väljapotentiaal operaatoriks, mis mõjub mingisugusele väljafunktsioonile  $\phi$ . Näiteks vaakumile vastab teatud väljafunktsioon  $\phi_0$ . Vastavalt väljaoperaatorite vahel kvantiseeritakse väljapotentiaalid. Väljaoperaatorid võivad olla üldistatud koordinaadid ja nendele vastavad üldistatud impulssid. Niimoodi postuleeritakse kommutatsioonieskirjad:

$$[u_A, u_B] = [\pi_A, \pi_B] = 0$$

$$[u_A(\vec{r}, t), \pi_B(\vec{r}', t)] = i\delta_{AB}\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Operaatorite kommutaator võrdub väljade kvantteoorias arvuga, mitte enam operaatoriga. Niinimetatud „teistkordne välja kvantiseerimine“ seisneb selles, et välja kvantiseerides muudetakse olekufunktsioonid, mis kirjeldavad pidevaid väljasid, omakorda operaatoriteks. Näiteks skalaarne olekufunktsioon kirjeldab osakesi spinniga 0.

Klein-Gordoni võrrand:

$$(-m^2)\varphi(x) = 0$$

milles  $m$  on antud juhul elektroni (energia)välja osakese mass, on aluseks relativistlikule kvantmehaanikale ja see võrrand tuletatakse väljade kvantteoorias välja u Euler-Lagrange'i võrrandist:

$$\frac{\partial L}{\partial u_A} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}} \right) = 0$$

kus

$$u_{A,\mu} = \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu}$$

ja milles lagranžiaani  $L$  kujuks on:

$$L = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + m^2 \varphi^2 \right)$$

Kuid Klein-Gordoni võrrandit:

$$(-m^2)\varphi(x) = 0$$

on võimalik tuletada ka otse osakeste relativistlikust koguenergia võrrandist:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

mis on omakorda tuletatud Albert Einsteini erirelatiivsusteooriast. Analüüsime seda pisut. Näiteks jagame viimase võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$  ruuduga:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$$

ja viime impulssiga liikme teisele poole võrdusmärgi:

$$-p^2 + \frac{E^2}{c^2} = -p^2 + \frac{1}{c^2} E^2 = m^2 c^2$$

Saadud võrrandis võtame kasutusele kvantmehaanikast tuntud impulssi ruudu operaatori:

$$\hat{p}^2 = -h^2 \Delta$$

ja koos sellega ka energia operaatori:

$$\hat{E} = ih \frac{\partial}{\partial t}$$

Tulemuseks saame juba eelnevalt tuttava lainevõrrandi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \frac{m^2 c^2}{h^2}$$

mis on positiivse märgiga. Kui me võtame viimasest funktsiooni  $\psi$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi$$

ja viime jälle impulssiga liikme teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi = 0$$

siis olemegi tuletanud osakeste relativistlikust koguenergia võrrandist Klein-Gordoni lainevõrrandi:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - m^2 \right) \psi = 0$$

milles  $h = c = 1$ . Saadud Klein-Gordoni lainevõrrand võib kirjeldada peale välja osakest ka veel ühekomponendilist ehk skalaarset välja  $\varphi(x)$ . Skalaarne olekufunktsioon kirjeldab osakesi spinniga 0. Selle kirjeldav relativistlik võrrand ongi eelnevalt tuletatud Klein-Gordoni võrrand:

$$(\square - m_0^2) \varphi(x) = 0$$

Klassikalises elektrodünaamikas on lainevõrrandi kujuks:

$$\square \varphi = -4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

ja  $\rho = 0$  ( ehk elektromagnetlaine ) korral on see:

$$\square \varphi = \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = 0$$

Sellest tulenevalt võrdub ka Poissoni võrrand samuti nulliga:

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$$

ja see võrrand on harmooniline. Postuleerides, et elektrivälja osake on foton ( millel pole elektrilaengut ehk  $\rho = 0$  ), siis seda ja samas ka väljapotentsiaali kirjeldav Klein-Gordoni lainevõrrand tuleb seega kujul:

$$(-m_0^2) \varphi(x) = 0$$



milles  $m_0$  on välja osakese mass.

Klein-Gordoni võrrandit rahuldavad tasalained:

$$\varphi(x) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k x_0)}$$

milles lainearv on:

$$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$$

ja  $\omega$  on lainesagedus:

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2$$

ehk

$$\omega_k = \pm k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Sellest järeldub see, et Klein-Gordoni võrrandil on positiivsetele ja negatiivsetele sagedustele vastavad lahendid:

$$\varphi^+(x) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - k_0 x_0)}$$

$$\varphi^-(x) = e^{i(\vec{k}\vec{r} + k_0 x_0)}$$

kuid superpositsioon on nende üldlahendiks:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (c(\vec{k})\varphi^+ + b(\vec{k})\varphi^-)$$

milles  $V$ -d nimetatakse „normeerimisruumalaks“. Kui me võtame kasutusele järgmise tähistuse:

$$b(-k) = c^*(k)$$

siis saame superpositsiooni võrrandi kujuks:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (c(\vec{k})e^{ikx} - c^*(\vec{k})e^{-ikx})$$

milles neljamõõtmelist skalaarkorrutist tähistab korrutis  $kx$ .  $c^*$  on  $c$  kaaskompleksarv, kui  $\varphi$  on reaalne.

Kuid edasiseks analüüsiks tuletame meelde kvantmehaanilist impulsi  $P$  operaatori kuju:

$$-i[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}(x)] = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}$$

Viimane võrrand näitab seda, et impulssi  $P$  ehk 4-impulssi

$$p_\mu = P_\mu = mv_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau} = m \frac{dx_\mu}{dt\sqrt{1-\beta^2}} = m \frac{dx_\mu}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

kommutaator energiavälja potentsiaaliga  $\varphi(x)$  peab andma tuletise välja potentsiaaliga. Kui aga  $\varphi(x)$  avaldub 4-impulssi kommutaatoris väljapotentsiaaliga superpositsiooni võrrandina:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (c(\vec{k})e^{ikx} - c^*(\vec{k})e^{-ikx})$$

siis saame järgmised seosed:

$$-\vec{k}c_k = [\vec{P}, c_k]$$

$$-k_0c_k = [P_0, c_k]$$

$$\vec{k}c_k^* = [\vec{P}, c_k^*]$$

$$\vec{k}c_k^* = [P_0, c_k^*]$$

Nende seoste kehtivus peab olema kooskõlas nn. „kommutatsioonieskirjadega“:

$$[c_k, c_{k'}] = [c_k^*, c_{k'}^*] = 0$$

$$[c_k, c_{k'}^*] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

Kvantmehaanilist impulsi P operaatorit:

$$-i[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}(x)] = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}$$

tuletatakse impulsioperaatori omaväärtusülesandest:

$$\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = p\psi$$

Erinevate operaatorite omaväärtusülesanded aitavad lahendada kvantväljateooriasse kuuluvaid ülesandeid. Näiteks viime imaginaarühiku i teisele poole võrdusmärgi:

$$h \frac{\partial}{\partial x} \psi = ip\psi = \pm ip\psi = -ip\psi$$

ehk

$$h \frac{\partial}{\partial x} \psi = -ip\psi$$

ja võtame ühikute süsteemiks:  $h = c = 1$

$$-ip\psi = \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

Kui me võtame impulssi p operaatori kujule:  $p \rightarrow \hat{P}_\mu$ , milles  $\mu = 1, 2, 3, 4$  ehk tegemist on nüüd „4-impulssiga“, siis sellest tulenevalt saame teisendada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Sellisel juhul võime impulsi p omaväärtusülesandelt minna üle P ehk 4-impulssi kommutaatorile näiteks energiavälja potentsiaaliga  $\varphi$ :

$$-ip\psi = -i[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}(x)]$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}$$

ehk impulssi p omaväärtusülesandest järeldub see, et P ehk 4-impulssi kommutaator energiavälja potentsiaaliga  $\varphi$  annab tulemuseks tuletise välja potentsiaalist  $\varphi$ :

$$-i[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}(x)] = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}$$

Eespool esitatud energia-impulssvektorist:

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3 x$$

saab välja arvutada energia ja impulsi operaatoreid. Selleks kasutatakse energia-impulssstensorit:

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \sum_A \frac{\partial L}{\partial u_{A,\nu}} u_{A,\mu}$$

lagranžiaani L:

$$L = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + m^2 \varphi^2 \right)$$

ja  $\varphi(x)$  valemite:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (c(\vec{k}) e^{ikx} - c^*(\vec{k}) e^{-ikx})$$

Nende abil saadaksegi energia:

$$E = P_0 = -iP_4 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} k_0 (c_k c_k^* - c_k^* c_k)$$

ja impulss:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} (c_k c_k^* - c_k^* c_k)$$

Selleks, et energia ja impulss ei võrduks nulliga, peab operaatoriteks lugema just kordajaid  $c$  ja  $c^*$ .  
Energia ja impulsi „omaväärtusülesandest“:

$$P_0 \Phi_\varepsilon = \varepsilon \Phi_\varepsilon$$

$$\vec{P} \Phi_\varepsilon = \vec{p} \Phi_\varepsilon$$

leiame mingisuguse välja olekule vastavad funktsioonid:

$$c_k \Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon'$$

$$c_k^* \Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon''$$

Eespool olevaid seoseid kasutades:

$$-\vec{k} c_k = [\vec{P}, c_k]$$

$$-k_0 c_k = [P_0, c_k]$$

$$\vec{k} c_k^* = [\vec{P}, c_k^*]$$

$$\vec{k} c_k^* = [P_0, c_k^*]$$

saame järgmised tulemused:

$$P_0 \Phi'_\varepsilon = P_0 c_k \Phi_\varepsilon = c_k P_0 \Phi_\varepsilon - k_0 c_k \Phi_\varepsilon = (\varepsilon - k_0) \Phi'_\varepsilon$$

$$P_0 \Phi''_\varepsilon = P_0 c_k^* \Phi_\varepsilon = c_k^* P_0 \Phi_\varepsilon + k_0 c_k^* \Phi_\varepsilon = (\varepsilon + k_0) \Phi''_\varepsilon$$

Peale nende saame ka veel analoogilise impulsi omaväärtusülesandega  $\vec{P}$ . Välja energia ja impulsi vähenemises  $(k_0, \vec{k})$  võrra nähtub operaatori  $c_k$  mõju, kuid välja energia ja impulsi suurenemine esialgseist  $(k_0, \vec{k})$  võrra saab toimuda ainult operaatori  $c_k^*$  toimetel. Seetõttu nimetataksegi operaatorit  $c_k^*$  kvandi tekkeoperaatoriks ehk kiirgamisoperaatoriks energiaga  $k_0$  ja impulsiga  $\vec{k}$ . Vastavalt sellele on  $c_k$  kvandi kadumisoperaator ehk neeldumisoperaator. Vaakumi  $\Phi_0$  korral saaksime 1 osakesega oleku  $c^* \Phi_0 = \Phi_1$ , 2 osakesega oleku  $c^* c^* \Phi_0 = \Phi_2, \dots$ , ja oleku puudumise korral  $c \Phi_0 = 0$ . Osakeste arvu operaatoriks on  $N_k = c_k^* c_k$ . Kasutades „kommutatsioonieskirju“:

$$[c_k, c_k] = [c_k^*, c_k^*] = 0$$

$$[c_k, c_k^*] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}}$$

saame välja kirjutada järgmiselt:

$$N \Phi_0 = c^* c_0 \Phi_0 = c^* * 0 \Phi_0 = 0 * \Phi_0$$

$$N \Phi_1 = N c^* \Phi_0 = c^* c c^* \Phi_0 = c^* (1 + c^* c) \Phi_0 = c^* \Phi_0 = \Phi_1$$

Selle järgi kehtib reegel:  $cc^* - c^*c = 1$  ehk  $cc^* = 1 + c^*c$ . Edasi saadakse:

$$N \Phi_2 = 2 \Phi_2, \Phi_3 = 3 \Phi_3, \dots, N \Phi_n = n \Phi_n$$

### 1.5.6 Elektron-positronväli

Elektron-positronvälja teoorias postuleeritakse, et väljapotentiaali komponendid, mis vastavad osakestele, rahuldavad samasuguseid võrrandeid, mis osakeste lainefunktsioonid. Näiteks relativistliku elektroni korral on see selleks Diraci võrrand. Elektron-positronvälja operaatorite vahel kehtivad antikommutatsiooniseosed, mitte kommutatsiooniseosed. Sellest hoolimata nimetatakse antikommutatsiooniseoseid üldjuhul sageli ka kommutatsiooniseosteks.

Väljade kvantteooria võrranditest tuleb välja see, et elektron-positronvälja antikommutaatorid on tegelikult tavalised funktsioonid. Pärast matemaatilisi tehteid ja teisendusi saadakse operaatorid, mis kirjeldavad elektroni tekkimist (vastava polarisatsiooni ja impulsiga) ehk elektroni tekke-

operaatorit, elektroni kao-operaatorit, positroni tekke-operaatorit ja positroni kao-operaatorit.

Elektroni relativistlik võrrand ehk Diraci „esimene“ võrrand:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

ehk

$$\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi + \frac{mc}{h} \psi = 0$$

milles  $\hbar = c = 1$ , on samuti tuletatav väljade kvantteoorias elektron-positronvälja lagranžiaanist  $L$ :

$$L = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi} \gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\nu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi,$$

milles  $\psi$  ja  $\bar{\psi}$  varieeritakse omavahel sõltumatult. Kordajad  $\gamma$  tõlgendatakse kvantväljateoorias ka „neljarealistest maatriksitena“, mis rahuldavad „antikommutatsioonireegleid“:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

Kvantmehaanikas tuntud elektroni relativistlikku võrrandit:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

nimetatakse ka Diraci „esimeseks“ võrrandiks.

Sarnaselt Klein-Gordoni lainevõrrandiga saab tuletada väljade kvantteoorias ka Diraci võrrandit erirelatiivsusteooriast tuntud relativistlikust koguenergia võrrandist:

$$-p^2 + \frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2$$

Analüüsime seda pisut lähemalt. Näiteks eespool tuletatud relativistlikus koguenergia võrrandis:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

ehk

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$$

ehk

$$-p^2 + \frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2$$

korrutame mõlemad pooled  $i^2$ -ga ehk  $-1$ -ga:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2$$

Saadud kompleksse võrrandi viimane liige võrdub erirelatiivsusteooriast tuntud neli-impulssi ruuduga:

$$p_\mu p_\mu = -m^2 c^2$$

millest omakorda saame „tavalise“ neli-impulssi:

$$p_\mu = -mc$$

Erirelatiivsusteoorias defineeritakse neli-impulss ehk „neljamõõtmeline impulss“ järgmiselt:

$$p_\mu = p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} p = -mc$$

ja selle panime siis võrduma  $-mc$ -ga. Kui kasutame viimases võrrandis kvantmehaanikast tuntud impulssi operaatorit:

$$\hat{p} = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

siis saame järgmiselt:

$$p_\mu = p_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{mc}{h}$$

Võtame viimasest funktsiooni  $\psi$  ja arvestame neli-impulssi neljamõõtmelisust:

$$y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi = -\frac{mc}{h} \psi$$

ning viime impulssiga liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi + \frac{mc}{h} \psi = 0$$

Tulemuseks saame elektroni relativistliku võrrandi ehk Diraci „esimese“ võrrandi:

$$\left( y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

milles  $h = c = 1$ . Diraci võrrandit saab tuletada ainult siis, kui impulss  $p$  avaldub negatiivsena:

$$y \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -p$$

ehk

$$y \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = -p \psi$$

Näiteks viime impulssi  $p$  viimases võrrandis teisele poole võrdusmärgi:

$$y \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + p \psi = 0$$

ja saame võtta sulud:

$$\left( y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + p \right) \psi = 0$$

Impulss  $p$  on massi  $m$  ja kiiruse  $c$  korrutis ehk  $p = mc$ :

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

kuid me kasutame  $\hbar = c = 1$  ühikute süsteemi ja kordaja  $\gamma$  võrdub:

$$\gamma_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}}$$

Kordajat  $\gamma$  tõlgendatakse kvantväljateoorias ka „neljarealist maatriksitena“, mis rahuldavad „antikommutatsioonireegleid“:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

Tulemuseks saamegi kvantmehaanikas tuntud elektroni relativistliku võrrandi:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

mida nimetatakse ka Diraci „esimeseks“ võrrandiks. Viimasest saadakse ka Diraci „teine“ võrrand:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi} = 0$$

milles defineeritakse  $\bar{\psi}$  kaasoperaatoriks ehk „kaasväljaks“:

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$$

Elektroni relativistlikud võrrandid ehk Diraci võrrandid on kõik tuletatavad ka elektron-positronvälja lagranžiaani  $L$  võrrandist:

$$L = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi} \gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\nu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi,$$

milles  $\psi$  ja  $\bar{\psi}$  varieeritakse omavahel sõltumatult. See tähendab seda, et elektroni relativistlikud võrrandid ehk Diraci võrrandid „rahuldavad“ elektron-positronvälja võrrandit  $L$ .

Nende Diraci võrrandite üldlahendid esitatakse kvantväljateoorias järgmiselt:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 [a_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{ipx} + b_r^*(\vec{p}) v_r(-\vec{p}) e^{-ipx}]$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 [a_r^*(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) e^{-ipx} + b_r(\vec{p}) \bar{v}_r(-\vec{p}) e^{ipx}]$$

milles  $u, \bar{u}, v, \bar{v}$  on bispiinorid. Indeksi  $r$  kaks võimalikku väärtust näitavad kahte spiraalsuse olekut ehk spinni suunda impulsi suhtes. Kordajad  $a, a^*, b, b^*$  on operaatorid. Tähelepanuväärne on see, et elektron-positronvälja vahel kehtivad antikommutatsiooniseosed:

$$\{a_r(p), a_s^*(p')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\{b_r(p), b_s^*(p')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\{a, b\} = \{a, b^*\} = \{a^*, b\} = \{a^*, b^*\} = 0$$

milles

$$\{A, B\} = AB + BA$$

ongi operaatorite A ja B antikommutaator. Eelnevalt esitatud antikommutatsiooniseoste tõttu ei ole  $\psi$  ja  $\bar{\psi}$  antikommutaatorid enam operaatorid, vaid need on „tavalised funktsioonid“. Diraci võrrandite üldlahendites on  $a_r^*(p)$  elektroni tekke-operaator,  $a_r(p)$  elektroni kao-operaator,  $b_r^*(p)$  positroni tekke-operaator ja  $b_r(p)$  positroni kao-operaator.

Operaator

$$N_r(p) = a_r^*(p)a_r(p)$$

on olekus impulsiga  $\vec{p}$  ja energiaga  $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Elektronide arvu operaator

$$N\Phi_n = n\Phi_n$$

on polarisatsiooniga r. Kui me kasutaksime osakeste arvu operaatorit vaakumi korral:

$$N\Phi_0 = a^*a\Phi_0 = 0$$

nagu seda tegime eespool:

$$c^*\Phi_0 = \Phi_1$$

$$c^*c^*\Phi_0 = \Phi_2$$

.....

$$c\Phi_0 = 0$$

siis saaksime ühe elektroniga oleku jaoks:

$$\Phi_1 = a^*\Phi_0$$

ehk

$$N\Phi_1 = a^*aa^*\Phi_0 = a^*(1 - a^*a)\Phi_0 = a^*\Phi_0 - 0 = \Phi_1$$

See tuleneb sellest, et (anti)kommutatsiooniseostest:

$$\{a_r(p), a_s^*(p')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\{b_r(p), b_s^*(p')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\{a, b\} = \{a, b^*\} = \{a^*, b\} = \{a^*, b^*\} = 0$$

järeldub:

$$a^*a + aa^* = 1$$

ehk

$$aa^* = 1 - a^*a$$

See tähendab, et  $\Phi_1$  ongi väli ühe elektroniga. Edasised arvutused näitavad, et  $\Phi_2$  ja  $\Phi_3, \Phi_4, \dots$  ei olegi tegelikult olekud:



$$\begin{aligned}
N\Phi_2 &= a^*aa^*a^*\Phi_0 = a^*(1-a^*a)a^*\Phi_0 = a^*a^*\Phi_0 - a^*a^*aa^*\Phi_0 = \\
&= a^*a^*\Phi_0 - a^*a^*(1-a^*a)\Phi_0 = a^*a\Phi_0 = 0
\end{aligned}$$

Pauli keeluprintsiip seisneb kvantfüüsikas selles, et väljas saab olla ainult üks ühesuguse impulsi ja polarisatsiooniga elektrone. See viib Fermi-Diraci statistikale. Pauli keeld tuleb välja ka välja kvantiseerimisest antikommutaatoritega. Välja ei saa kvantiseerida antikommutatsioonireegli rakendamisel poolearvulise spinniga osakestega, sest siis ilmneb vastuolu Pauli keeluga. Kui aga kvantiseerida kommutaatoritega täisarvulise spinniga osakeste korral, siis ei teki Pauli keeldu ja seetõttu ei minda sellega vastuollu. Sellised osakesed alluvad Bose-Einsteini statistikale.

### 1.5.7 Elektromagnetväli

Tulemused, mis on kooskõlas nn. „kommutatsioonieskirjadega“:

$$[c_k, c_{k'}] = [c_k^*, c_{k'}^*] = 0$$

$$[c_k, c_{k'}^*] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

saadakse ka otse elektromagnetvälja potentsiaalid. Näiteks neljamõõtmeline vektorpotentsiaal  $A_\mu(x)$  on klassikalises elektrodünaamikas elektromagnetvälja potentsiaal elektrivoolu  $\vec{j}$  korral:

$$\frac{d^2 \vec{A}}{dx^2} + \frac{d^2 \vec{A}}{dy^2} + \frac{d^2 \vec{A}}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

ja elektromagnetlainete korral:

$$\frac{d^2 \vec{A}}{dx^2} + \frac{d^2 \vec{A}}{dy^2} + \frac{d^2 \vec{A}}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$A_\mu(x)$  rahuldab tuntud Maxwelli võrrandeid:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{4\pi}{c} j_\alpha = 0$$

ehk

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

milles

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

on elektromagnetvälja teist järku neljamõõtmeline antisümmeetriline tensor:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

Sellel on kuus komponenti ja maatriks kujul on see avaldatav:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Tegemist on füüsikalise suurusega, mille diagonaalis peavad olema 0-d, sest tegemist on antisümmeetrilise tensoriga. Sellega võrdväärne on süsteem:

$$A_\mu(x) = 0$$

milles Lorentzi tingimus on:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

ehk

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

ehk 4-mõõtmeline divergents võrdub:

$$\text{div} A = 0$$

Kalibratsioonitingimus defineeritakse võrdusena:

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

millest saadakse:

$$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Maxwelli võrrandite võrdusi tuletatakse kvantelektrodünaamikas elektromagnetvälja lagranžiaanist L:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

kuid neid võrdusi on võimalik tuletada ka otse massi  $m$  ja energia  $E$  ekvivalentsuse seosest:

$$E = mc^2$$

Selleks viime valguse kiiruse  $c$  ruudu võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{c^2} E = m$$

Elektromagnetismi õpetusest on teada, et valguse kiirus  $c$  on seotud elektri- ja magnetkonstandiga järgmiselt:

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}}{4\pi * 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{(A * s)^2}} = \frac{1}{9 * 10^{16} \left(\frac{m}{s}\right)^2}$$

Viimases teisenevad ühikud täpsemalt:

$$\frac{4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}}{4\pi * 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{(A*s)^2}} = \frac{4\pi * 10^{-7} N(A*s)^2}{4\pi * 9 * 10^9 NA^2m^2} = \frac{4\pi * 10^{-7} A^2s^2}{4\pi * 9 * 10^9 A^2m^2}$$

Kuid edasiseks analüüsiks teisendame ühikuid nii, et saaksime kasutada elektrilaenguid q:

$$\frac{A^2s^2}{A^2m^2} = \frac{A^2}{A^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{C^2s^2}{C^2s^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{C^2}{C^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{q^2}{q^2c^2} = \epsilon_0\mu_0$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{q^2}{q^2c^2} = \frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0$$

ehk

$$\frac{q}{qc} = \frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$$

Järgneva analüüsi huvides oletame seda, et elektrilaengud tegelikult ei taandu võrrandist välja ja seetõttu saame järgmise seose:

$$\frac{e}{q} = \frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$$

milles e on elementaarlaeng ja elektrilaeng q võrdub konstandiga:

$$q = ec$$

Sellisel juhul saame ka seose:

$$\frac{e}{q} = \frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0$$

milles elektrilaeng q on

$$q = ec^2$$

Kuna elektri- ja magnetkonstant on mõlemad seotud elektrilaenguga q

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{q}{q} = \frac{e}{q} = const \neq 1$$

siis sellest saame omakorda väga tähtsa võrrandi:

$$\frac{e}{\epsilon_0} = \mu_0 q$$

Kuna mistahes elektrilaeng q on täpselt elementaarlaengu e arvukordne:

$$q = Ne$$

siis saame ka järgmise seose:

$$\frac{1}{N} = \frac{e}{q} = \frac{1}{c^2} = const$$

milles e on elementaarlaeng ja N on elektrilaengute kontsentratsioon. Kui me jagame viimase võrrandi mõlemad pooled  $4\pi$ -ga ja raadiusega r, siis saame antud juhul tulemuseks elektrivälja potentsiaali  $\phi$  avaldise:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} q$$

ehk

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K}{2} \frac{q}{r}$$

milles elektriline konstant k avaldub:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ja magnetiline konstant K:

$$K = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

Viimasest järeldub konstandi K definitsioon:

$$k \frac{2e}{q} = K = \text{const}$$

milles

$$q = ec^2$$

See annabki meile elektrivälja potentsiaali  $\varphi$ :

$$k \frac{e}{r} = \frac{K}{2} \frac{q}{r} = k \frac{2e}{q} \frac{1}{2} \frac{q}{r} = k \frac{e}{r} = \varphi$$

Siinkohal võiks esitada ka sellise tuletuskäigu:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{m}{E} = \frac{m_A}{q\varphi} = \frac{ev}{q\varphi} = \frac{e\varphi}{q\varphi} = \frac{e}{q}$$

milles E on antud juhul elektrivälja energia, m on vektori  $A_\mu(x)$  mass,  $\varphi$  on elektrivälja potentsiaal, v on „vaakumi potentsiaal“ ( mis antud juhul loeme elektrivälja potentsiaaliks  $\varphi$  ) ja e on elementaarlaeng.

Eespool oleva analüüsi järgi saame teha seisuenergia E avaldises järgmised matemaatilised teisendused:

$$m = e \frac{E}{q} = \frac{e}{q} E = \frac{1}{c^2} E = \epsilon_0 \mu_0 E$$

Tulemuseks saame:

$$\frac{e}{q} E = \epsilon_0 \mu_0 E$$

milles väljaenergia E taandub ilusti välja:

$$\frac{e}{q} = \epsilon_0 \mu_0$$

Viimast teisendame omakorda järgmiselt:

$$\frac{e}{\epsilon_0} = q \mu_0$$

Kui me nüüd jagame võrrandi mõlemad pooled  $4\pi r$ -ga, siis saame väljapotentsiaali  $\varphi$  avaldise:

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{q}{r} = \varphi$$

Siinkohal on huvitav märkida seda, et meie tuletatud potentsiaali  $\varphi$  võrrandis:

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K q}{2 r}$$

esineb ühel poolel elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  ja teisel poolel magnetiline konstant  $K$ :

$$\varphi = \frac{K q}{2 r}$$

Selline pealtnäha absurdne võrdus saab aga hoopis uue kuju, kui me elektrilaengu  $q$  avaldame elektrivoolu  $I$  ja ajaperioodi  $t$  korrutisena:

$$q = It$$

Selle tulemusena saame:

$$\varphi = \frac{K q}{2 r} = \frac{K I}{2 d} t$$

milles  $I$  on elektrivool ja seega  $d$  on kaugus elektrivoolust. Viimasest saame tuletada Ampere'i seadusest tuntud magnetinduktsiooni  $B$  avaldise:

$$\frac{2\varphi}{t} = K \frac{I}{d} = B$$

ehk

$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{rt} = 2k \frac{I}{d} = K \frac{I}{d} = B$$

milles  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ja seega  $\sin \alpha = 1$ .

Siinkohal on oluline märkida seda, et näiteks elektrivälja tugevus  $E$  on „suunatud“ tsentraalsümmeetriliselt elektrilaengust  $q$  eemale:

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

kuid magnetväli saab eksisteerida ainult elektrivoolu suunaga risti:

$$\sin \alpha B = B = \frac{F}{Il} = K \frac{I}{d}$$

kuna  $d$  näitab kaugust elektrivoolust, millest järeldubki magnetvälja ja elektrivoolu omavaheline nurk. See tähendab, et vooluga juhtmele mõjuv magnetjõud on suunatud alati risti nii voolu kui ka magnetvälja suunaga.

Saadud seos magnetinduktsiooni  $B$  ja elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  vahel

$$\frac{2\varphi}{t} = K \frac{I}{d} = B$$

võib esmapilgul tunduda absurdne, kuid eespool saime elektrilise võrdeteguri  $k$  avaldise kujul:

$$k = \frac{Kq}{2e}$$

ja seetõttu saamegi puhtalt magnetinduktsiooni  $B$  võrrandi:

$$2k \frac{I}{d} = 2 \frac{Kq}{2e} \frac{I}{d} = 2 \frac{Kq}{2e} \frac{e}{rt} = K \frac{I}{d} = B$$

ehk

$$B = K \frac{I}{d}$$

milles I on elektrivool, d on kaugus elektrivoolust ja K on magnetiline võrdetegur. Kui me Ampere'i seaduse järgi avaldame eespool tuletatud võrrandis

$$\varphi = \frac{K I}{2 d} t$$

magnetvälja kirjeldava magnetinduktsiooni B:

$$K \frac{I}{d} = B$$

siis see annab meile võrrandi kujuks:

$$\varphi = \frac{1}{2} B t$$

ehk

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{1}{2} B$$

Magnetinduktsioon B on seotud magnetvälja tugevusega H:

$$B = \mu H$$

ja magnetvälja tugevus H on seotud omakorda „elektromagnetvälja vektorpotentsiaaliga“ A:

$$H = \text{rot} A$$

Need seosed annavad meile võrrandi lõplikuks kujuks:

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{1}{2} \mu \text{rot} A$$

mis näitab meile selgelt seda, et elektrivälja ( potentsiaali ) muutus tekitab magnetvälja ja see kehtib ka vastupidisel juhul – magnetvälja muutus tekitab elektrivälja. Edaspidi tõestame, et viimane avaldis võrdub ka järgmiselt:

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{1}{2} \mu \text{rot} A = -c \text{div} A$$

mis on oma olemuselt Maxwelli võrranditest tuntud elektromagnetvälja potentsiaali kirjeldav võrrand:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \text{div} A$$

ehk

$$\text{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Näitame seda järgnevalt. Näiteks eelnev analüüs kehtib väga täpselt ka elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  tuletamise korral võrrandist:

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K q}{2 r}$$

Sellisel juhul avaldub magnetiline võrdetegur K eespool tuletatud seosena:

$$K = 2k \frac{e}{q}$$

mille tulemusena saamegi puhtalt elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  avaldise:

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K q}{2 r} = 2k \frac{e}{q} \frac{1}{2 r} = k \frac{e}{r}$$

ehk

$$\varphi = k \frac{e}{r}$$

milles  $e$  on elementaarlaeng,  $r$  on kaugus elektrilaengust ja  $k$  on elektriline võrdetegur. Viimasest ongi võimalik tuletada elektromagnetvälja ( s.t. elektromagnetlaine ) potentsiaali võrrand. Näiteks kui me jagame elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  võrrandi

$$\varphi = k \frac{e}{r} = k \frac{q}{r}$$

mõlemad pooled „kohavektoriga“  $r$ , siis saame elektrivälja tugevuse  $E$  võrrandi:

$$\frac{\varphi}{r} = k \frac{q}{r^2} = E = \frac{F}{q}$$

Järgnevalt oletame seda, et kohavektor  $r$  avaldub:  $r = ct$ . See annab meile võrrandi kujuks:

$$\frac{\varphi}{ct} = E$$

Väljatugevus  $E$  on seotud omakorda elektromagnetvälja vektorpotentsiaaliga  $A$ :

$$E = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) = -divA = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial A_j}{\partial x_j}$$

kuid magnetvälja tugevus  $H$  on seotud sellega järgmiselt:

$$H = rotA = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

Need lihtsad seosed annavad meile võrrandi lõplikuks kujuks:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -divA$$

Saadud võrrand ühtib elektromagnetvälja potentsiaali diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -divA$$

ehk

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

mis muidu tuletatakse kogu elektromagnetismi kirjeldavatest Maxwelli võrranditest. Maxwelli võrrandid kirjeldavad kogu elektromagnetismi õpetust, kuid need on eelkõige klassikalise füüsika võrrandid. Tuntud Maxwelli võrrandeid on võimalik tuletada ka eespool esitatud ühest ja ainsast diferentsiaalvõrrandist:

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Näiteks viime  $\operatorname{div} A$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} A$$

ja tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (-\operatorname{div} A)^2 = \Delta \varphi$$

Tulemuseks saame elektromagnetvälja ( antud juhul elektromagnetlaine ) potentsiaalide võrrandid:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

ja

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

Kuid elektrilaengu poolt tekitatud elektromagnetvälja vektorpotentsiaal avaldub:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

ja skalaarpotentsiaal:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j$$

Viimaseid võrrandeid on võimalik avaldada ka ainult magnetvälja tugevuse  $H$  kaudu:

$$\Delta H - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

ja ka elektrivälja tugevuse  $E$  kaudu:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Viimases avaldises viime  $\Delta E$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi ja teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$-\Delta E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} H = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t}$$

Saadud tulemus võrdub omakorda:



$$-\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{grad} \operatorname{div} E - \Delta E = \operatorname{rot} \operatorname{rot} E$$

milles nähtubki Maxwelli esimene võrrand:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$$

Maxwelli teine võrrand avaldub kujul:  $\operatorname{div} H = 0$  ja kolmas võrrand elektromagnetlaine korral:

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$$

ning elektromagnetvälja korral:

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi j}{c}$$

Maxwelli neljas võrrand avaldub vastavalt järgmiselt:  $\operatorname{div} E = 0$  ja  $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$ .

Eespool tuletatud diferentsiaalvõrrandist:

$$\operatorname{div} A = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ehk

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} A$$

on võimalik tuletada ka elektromagnetvälja tensor, mis samuti kirjeldab kogu elektromagnetilist interaktsiooni Maxwelli võrrandite kõrval. Selleks korrutame näiteks viimase võrrandi mõlemad pooled „diferentsiaalse avaldisega“  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ , tulemuseks saame:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A = \Delta \varphi$$

ehk

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Viimane avaldis kehtib vaakumis leviva elektromagnetlaine korral, kuid elektrilaengu poolt põhjustatud elektromagnetvälja korral on viimane võrrand kujul:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

Viimasest saame omakorda:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

ja kui arvestada eespool tuletatud seosega:

$$\operatorname{div} A = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

siis tuleb võrrand kujul:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A$$

ehk

$$4\pi\rho = -\Delta\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A$$

Kui me arvestame ka diferentsiaaloperaatorite omavahelisi seoseid:

$$4\pi\rho = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A$$

siis saame divergentsi viia sulgude ette:

$$\operatorname{div} \left( -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 4\pi\rho$$

Tulemus kattub täielikult Maxwelli neljanda võrrandiga:  $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$  või  $\operatorname{div} E = 0$ . Kuid saadud võrrandis olevat väljatugevuse  $E$  avaldist:

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

on võimalik esitada ka võrrandite süsteemina:

$$\begin{cases} E_1 = i \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) \\ E_2 = i \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right) \\ E_3 = i \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) \end{cases}$$

milles esinevad järgmised tähistused:  $i\varphi = A_4$  ja  $x_4 = ict$ . Seda võrrandite süsteemi kirjeldabki 2-st järku neljamõõtmeline antisümmeetriline elektromagnetvälja tensor  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$  ehk

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}$$

millel on kuus komponenti. Selle tensori „pööramine“ avaldub samuti võrrandina:

$$F_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} \omega_{\beta\alpha} F_{\beta\alpha}$$

mille korral on tegemist Lorentzi teisenduse maatriksiga. Elektromagnetvälja tensor on seotud ka 4-mõõtmelise vooluga:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{4\pi}{c} j_\alpha$$

ning elektromagnetvälja tensor avaldub ka maatriksina:

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

mis on oma olemuselt füüsikaline suurus. Viimases maatriksi võrrandis avalduvad magnetvälja  $H = \text{rot}A$  rootori komponendid järgmiselt:

$$\begin{cases} H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ H_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ H_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

Elektromagnetvälja tensor on antisümmeetriline:

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$$

ja kui me korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled liikmega  $F_{\alpha\beta}$ , siis saame tulemuseks elektromagnetvälja lagranžiaani  $L$  võrrandi:

$$F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}F_{\alpha\beta}$$

ehk

$$L = F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

Elektromagnetvälja lagranžiaani  $L$  võrrandit esitatakse vahel ka teisiti. Näiteks korrutame võrrandi

$$F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}F_{\alpha\beta}$$

mõlemad pooled -1-ga:

$$-F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}F_{\alpha\beta}$$

ja jagame mõlemad pooled 4-ga:

$$-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}F_{\beta\alpha}F_{\alpha\beta}$$

Tulemuseks saamegi elektromagnetvälja lagranžiaani  $L$  võrrandi teise kuju:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

Tähelepanuväärne asjaolu on selle juures see, et lagranžiaan  $L$  võrdub ka järgmiselt:

$$L = F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = H^2 - E^2$$

milles  $H$  on magnetvälja tugevus ja  $E$  on elektrivälja tugevus. Nende summa aga võrdub teatavasti energia voo tihedusega  $U$ :

$$H^2 + E^2 = 8\pi U$$

millest saame omakorda välja enda energia  $U$ :

$$U = \iiint \frac{H^2 + E^2}{8\pi} dV$$

Maxwelli võrrandite võrdusi tuletatakse kvantelektrodünaamikas elektromagnetvälja lagranžiaanist  $L$ :

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

ja nende võrduste üldlahend ongi:

$$A_\mu(\vec{k}, x) = c_\mu(\vec{k})e^{ikx} + c_\mu^*(\vec{k})e^{-ikx}$$

Korrutis  $kx$  tähistab neljamõõtmelist skalaarkorrutist:

$$kx = \vec{k}\vec{r} + \omega_k x_4$$

ja võimalikke polarisatsiooniolekuid nummerdab indeks  $\mu$ .  $A$ ,  $c$  ja  $c^*$  muutuvad kvantiseerimisel operaatoriteks. Üldlahend peab olema samuti kooskõlas postuleeritud kommutatsioonireeglitega:

$$[c, c] = [c^*, c^*] = 0$$

$$[c_\mu(\vec{k}), c_\nu^*(\vec{k}')] = \delta_{\mu\nu}\delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Siin tõlgendatakse operaatoreid  $c$  ja  $c^*$  vastavalt kvantide ehk footonite tekke- ja kao-operaatoritena. Energiavälja operaatorite  $A$  kommutaatorid on nüüd tavalised funktsioonid, mitte enam operaatorid. See tuleneb kommutatsioonireeglitest.

### 1.5.8 Kvantelektrodünaamika

Kvantsüsteemi energiat kirjeldab hamiltoniaan  $H$ :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + U(\vec{r})$$

Schrödingeri võrrand on kvantmehaanika põhivõrrand. Selle järgi kirjeldab hamiltoniaan kvantsüsteemi ajalist arengut. Schrödingeri esituses antud olekufunktsioonide korral kirjeldab lainefunktsiooni Schrödingeri võrrand:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2\psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(\vec{r}, t)}{\partial z^2}\right) + U(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)$$

Kuid Heisenbergi esituses on olekufunktsioonid ajas muutumatud, kuid ajalist arengut kirjeldavad operaatorid. See on tegelikult sisuliselt sama mis Schrödingeri esitus. Kvantelektrodünaamikas ehk KED-is sõltub oleku areng ainult interaktsioonihamiltoniaanist:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = H'\Phi$$

mitte enam vabade väljade hamiltoniaanist. Sellist esitust nimetatakse „interaktsiooniesituseks“. Hamiltoniaan ise koosneb vabade väljade hamiltoniaanist ja interaktsioonihamiltoniaanist. Välja-

vektoriks ongi  $\Phi$ , mis sisaldab küll kõiki väljasid, kuid eelkõige siiski elektron-positron- ja elektromagnetvälja. Interaktsiooni tõttu muutub  $\Phi$  olekust  $\Phi(0)$  ajahetkel  $t = 0$  olekusse  $\Phi(t)$  ajahetkel  $t$ . Sellist muutust kirjeldatakse operaatoriga  $S$ , mis väljendatakse maatriksina:

$$(\Phi(t)) = (S(t, 0)(\Phi(0)))$$

Tegemist on hajumise maatriksiga ehk  $S$ -maatriksiga, mis saksa keeles nimetatakse „Streuung“-iks. Operaator  $S$  viib kõikvõimalike olekute vektori  $\Phi(0)$  uueks kõikvõimalike olekute vektoriks  $\Phi(t)$ . Erinevaid kvantolekuid erinevates ajahetkedes seob  $S$ -maatriksi mingi element. Vastava kvantoleku ülemineku tõenäosust saab välja arvutada siis, kui on teada vastava maatrikselemendi väärtust. Kui me viime  $S$ -maatriksi interaktsioonihamiltoniaani valemisse, siis saame tulemuseks:

$$i \frac{\partial S}{\partial t} \Phi(0) = H' S \Phi(0)$$

ehk

$$i \frac{\partial S}{\partial t} = H' S$$

Kuna seosekonstant  $e$  on ühest väiksem arv:

$$e = \sqrt{\alpha} \ll 1$$

milles

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

siis seega arendatakse  $S$ -maatriks seosekonstandi  $e$  astmete järgi ritta:

$$S(t, t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t, t_0)$$

Kõige esimene „lähendus“ oleks  $S_0$ , kuna selle tõenäosus on kõige suurem. See tähendab, et reaktsiooni ei toimu. Seetõttu  $S_0 = 1$ . Teised liikmed on „suurusjärgult“ vastavalt  $e^k$  korda väiksemad. Niisamuti ka  $H'$  on  $e$  järku väike. Valemis:

$$i \frac{\partial S}{\partial t} = H' S$$

esinevate vastavat järku liikmete võrdsustumise korral saadakse:

$$i \frac{\partial S_k}{\partial t} = H' S_{k-1}$$

mille integreerimine annab tulemuseks:

$$S_k(t, t_0) = i \int_{t_0}^t H'(\tau) S_{k-1}(\tau, t_0) d\tau$$

Antud juhul saame liikmeid vaadata järjest, mille korral tähistatakse integreerimismuutujaid järjekorras  $t_1, t_2, \dots$ :

$$S_k(t, t_0) = (-i)^k \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k H'(t_1) H'(t_2) \dots H'(t_k)$$

Järjestatud on integreerimismuutujate väärtused:

$$t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_k$$

$H'$ -d on  $H'$ -de korrutises järjestatud „kronoloogiliseks korrutiseks“. Integreerimisruumala suureneks  $k!$  korda, kui integraalide ülemised rajad ühtlustada:

$$S_k(t, t_0) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_k T(H'(t_1) H'(t_2) \dots H'(t_k))$$

Viimases tähistab  $T$  kronoloogilist korrutist ja see tähendab seda, et korrutises kehtib kronoloogiline järjekord. Kronoloogilise korrutise korral:

$$S_k(t, t_0) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k T(H'(t_1) H'(t_2) \dots H'(t_k))$$

järjestatakse kõik väljaoperaatorid aja kahanemise järjekorras:

$$t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_k$$

Elektron-positronvälja ja elektromagnetvälja omavahelise interaktsiooni käigus läheb energia ühelt väljalt teisele vastavate kvantide tekke ja kaoga. Väljades toimuvad selle interaktsiooni toimet muutused. Interaktsioon toimub siis, kui eri väljades langevad kokku kvantide aegruumi punktid ehk kvantide ( s.t. osakeste ) kokkusaamisel. Interaktsiooni tugevuse määrab ära elektroni laeng  $e$ . Kvantelektrodünaamikas arvestatakse elektron-positronvälja lagranžiaaniga:

$$L = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi} \gamma_v \frac{\partial \psi}{\partial x_v} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_v} \gamma_v \psi \right) - m \bar{\psi} \psi$$

ja elektromagnetvälja lagranžiaaniga:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Peale nende kahe arvestatakse ka „interaktsioonilagranžiaaniga“:

$$L = L_{e-m} + L_{e-p} + L'$$

mille kuju on:

$$L' = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu$$

Selles nimetatakse „vooluks“:

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

Interaktsioonihamiltoniaani valemit kasutades:

$$S(t, t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t, t_0)$$

saame interaktsioonilagrangiaani arvutada järgmiselt:

$$H' = \frac{\partial L'}{\partial \frac{\partial u_A}{\partial x_0}} \frac{\partial u_A}{\partial x_0} - L'$$

milles

$$u_A = \bar{\psi}, \psi, A_\mu$$

Kuid võrrand võtab siiski sellise kuju:

$$H' = -L'$$

kuna  $L'$  ei sisalda tuletisi. Interaktsioonihamiltoniaani valemi:

$$H' = -L'$$

ja interaktsioonilagrangiaani valemi:

$$L' = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$$

asetamise korral S-matriksisse:

$$S_k(t, t_0) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k T(H'(t_1)H'(t_2) \dots H'(t_k))$$

nähtub, et kõik väljaoperaatorid tuleb järjestada aja kahanemise järjekorras. Operaatorid on kolmekaupaga seotud samasse ruumi punkti. Integreerida tuleb üle nende punktide. Kuid kuna vaakumi energia ja impulss peavad võrduma nulliga, siis kõik tekke-operaatorid peavad seega olema paigutatud kao-operaatoreist vasakule. Seda nimetatakse normaaljärjestuseks ehk normaalkorrutiseks. Näiteks energia operaatorite

$$E = P_0 = -iP_4 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} k_0 (c_k c_k^* - c_k^* c_k)$$

ja impulsi operaatorite

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} (c_k c_k^* - c_k^* c_k)$$

rakendamise korral vaakumolekule  $\Phi_0$  saadakse:

$$P_0 \Phi_0 = \vec{P} \Phi_0 = 0$$

See kehtib ainult siis, kui me võtame energia

$$E = P_0 = -iP_4 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} k_0 (c_k c_k^* - c_k^* c_k)$$

ja impulsi

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} (c_k c_k^* - c_k^* c_k)$$

asemel sellised avaldised:

$$P_0 = \sum_{\vec{k}} k_0 c^* c$$

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \vec{k} c^* c$$

kuna  $c^* \Phi_0 = \Phi_1$ ,  $c^* c^* \Phi_0 = \Phi_2$ , .....,  $c \Phi_0 = 0$ . S-matriksi valemis peab kehtima samasugune järjestus, kuid selles esineb hoopis kronoloogiline järjestus:

$$S_k(t, t_0) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k T(H'(t_1) H'(t_2) \dots H'(t_k))$$

Selleks avaldame kronoloogilise korrutise:

$$T(uv) = :uv: + \dot{u}\dot{v}$$

milles  $u$  ja  $v$  on suvalised operaatorid,  $:$  : tähistab normaalkorrutist ja  $\dot{u}\dot{v}$  nimetatakse „kronoloogiliseks seoseks“, mis defineeritakse järgmiselt:

$$\dot{u}(t_1)\dot{v}(t_2) = \begin{cases} [u^-(t_1)v^+(t_2)], & \text{kui } t_1 > t_2 \\ [v^-(t_2)u^+(t_1)], & \text{kui } t_1 < t_2 \end{cases}$$

Selles tähistavad  $u^+$  ja  $v^+$  tekke-operaatoritega osa ja  $u^-$  ning  $v^-$  kao-operaatoritega osa:

$$u = u^+ + u^-$$

ja

$$v = v^+ + v^-$$

Kommutatsiooniseoste tõttu:

$$\{a_r(p), a_s^*(p')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\{b_r(p), b_s^*(p')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\{a, b\} = \{a, b^*\} = \{a^*, b\} = \{a^*, b^*\} = 0$$

ja

$$[c, c] = [c^*, c^*] = 0$$

$$[c_\mu(\vec{k}), c_\nu^*(\vec{k}')] = \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

on kronoloogiliste seoste avaldised tegelikult tavalised funktsioonid, mitte operaatorid. Seepärast võimaldabki eespool esitatud korrutis:

$$T(uv) = :uv: + \dot{u}\dot{v}$$

normaalkorrutiste säilimist S-matriksis. Näiteks mistahes T-korrutise saab nüüd avaldada normaalkorrutiste summana:

$$T(u_1 u_2 u_3 u_4) = :u_1 u_2 u_3 u_4: + \dot{u}_1 \dot{u}_2 :u_3 u_4: + \dot{u}_1 u_2 \dot{u}_3 u_4 + \dots + (\dot{u}_1 \dot{u}_2)(\dot{u}_3 \dot{u}_4) + \dots$$

millega liikmetes esinevad kõikvõimalikud seosed. Kvantelektrodünaamikas esinevad näiteks sellised kronoloogiliste seoste avaldised:

$$\dot{A}_\mu(x) \dot{A}_\nu(y) = \delta_{\mu\nu} \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_C d^4 p \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2}$$

ja



$$\psi_\alpha(x)\dot{\bar{\psi}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4p \frac{(p_\mu \gamma_\mu - m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2}$$

Selles ümbritseb integreerimistee C komplekstasandi vasakut poolt

$$Re p_0 < 0$$

kui  $x_0 < 0$ . Kui  $x_0 > 0$ , siis paremat poolt. Nulliga võrduvad kõik teised kronoloogilised seosed väljaoperaatorite vahel.

$S_k$  avaldises esineb

$$T(u_1 u_2 u_3 u_4) = :u_1 u_2 u_3 u_4: + \dot{u}_1 \dot{u}_2 :u_3 u_4: + : \dot{u}_1 u_2 \dot{u}_3 u_4 : + \dots + (\dot{u}_1 \dot{u}_2)(\dot{u}_3 \dot{u}_4) + \dots$$

järel hulk liidetavaid, milles igaühes on k aegruumi koordinaati. Integreerimine toimub üle nende. Nende punktide vahel on liidetavates erinev arv seoseid:

$$\dot{A}_\mu(x)\dot{A}_\nu(y) = \delta_{\mu\nu} \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_C d^4p \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2}$$

ja

$$\psi_\alpha(x)\dot{\bar{\psi}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4p \frac{(p_\mu \gamma_\mu - m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2}$$

Peale selle esinevad seal ka erinev arv seostega sidumata väljaoperaatoreid:

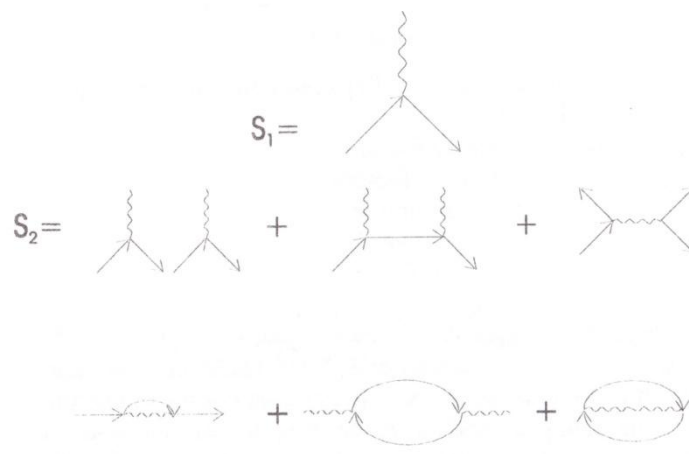
$$A_\mu(x), \psi(x), \bar{\psi}(x)$$

Järgnevalt tähistatakse koordinaati x punktiga; punktide x ja y vahel oleva lainelise joonega seost

$\dot{A}_\mu(x)\dot{A}_\nu(y)$ ; vastavate punktide vahel oleva suunatud ( noolega ) joonega seost  $\dot{\psi}(x)\dot{\bar{\psi}}(y)$ ;

punktiga seotud lainelise joonega vaba operaatorit  $A_\mu$  ja punkti siseneva ja väljuva joonega

vastavalt  $\psi$  ning  $\bar{\psi}$ . Kõige selle tõttu saaksime  $S_1$  ja  $S_2$  jaoks järgmised graafilised joonised:



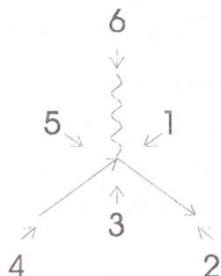
Palju rohkem liikmeid sisaldab  $S_3$ .

Tegemist on „Feynmani graafikutega“. Koordinaate tähistavad punktid ehk „graafiku tipud“, mida integreeritakse üle lõpmatu aegruumi. Igas graafiku tipus on üks sisenev ja üks väljuv elektron-positronjoon. Peale selle esineb ka üks fotonjoon. Kuna jooni liigitatakse sisemisteks ja

välisteks, siis seega reaktsiooni sisenevaid ja väljuvaid jooni tähistatakse väliste joontega. Näiteks elektron võib liikuda noole suunas, kuid positron liigub seega vastassuunas. Graafikudel on tegelikult mitmeid tõlgenduse võimalusi. Kuid edasiseks analüüsiks vaatame järgmist „elementaargraafikut“:

$$S_1 = ie \int d^4x: \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x):.$$

mille jooniseks on:



Graafik kirjeldab 6 erinevat protsessi, mis võib sõltuda aja kulgemise suunast:

1. positron neelab footoni,
2. positron kiirgab footoni,
3. paari annihileerumine,
4. elektron kiirgab footoni,
5. elektron neelab footoni,
6. paari teke.

Alates  $S_2$ -st on graafikudel peale välisjoonte ka veel sisejooned. Neid tõlgendatakse mitte-reaalsete osakestena, kuna nad kannavad energiat ja impulssi edasi sõltumatult. Sisejoone elektronil võib energia olla isegi väiksem tema seisumassist. Ülekantav impulss ei ole üldiselt suunatud tekkepunktist neeldumispunkti. Reaalne foton ei oma „pikipolarisatsiooni komponenti“, küll aga graafikute sisejoone foton. Kõige selle tõttu nimetatakse neid ebareaalsete osakesi „virtuaalseteks“. Nende olemasolu ei ole võimalik tuvastada, kuid nende osakeste eksisteerimise aeg  $\Delta t$  on määratud Heisenbergi määramatuse relatsiooniga:

$$\Delta t \Delta E \geq h$$

milles  $\Delta E$  näitab osakese energiat:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Feynmani graafikul olevate tippude arvuga võrdub protsessi järgu number  $k$ , mis on ka seosekonstandi astendajas:

$$S_k(t, t_0) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_k T(H'(t_1) H'(t_2) \dots H'(t_k))$$

Selletõttu on iga järgnev  $S_k$  eelmisest  $\frac{1}{e}$  korda väiksem. Sõltuvalt täpsusest on võimalik arvutustes piirduda mõne üksiku  $S_k$ -ga. Iga järgnev liige kujutab endast väikest parandust eelnevale arvutusele ja seda nimetatakse „häiritusarvutuseks“.

Välisjoonte etteandmine määrab protsessi ja sisejoonte arv ei ole piiratud. Näiteks sellise graafiku maatrikselement, mis kirjeldab elektroni hajumist elektronil, sisaldab mistahes kõrgemat järku liikmeid (niisamuti ka vaakumi „fluktuatsioone“). Integreerida tuleb üle kõikvõimalike energia ja impulsi väärtuste ja seetõttu ilmnevad lõpmatud rajad. See tähendab, et graafiku

kinnistele silmustele vastavad „päratud integraalid“, mis ei koonu. Seetõttu esinevad kõrgemat järku protsessides hajuvused. Hajuvate integraalide lahendus seisneb „renormeerimises“. Kvant-elektrodünaamika rakendamisel tuleb esimeste järkudega saadud arvutustulemustele lisada nn „vaakumparandused“, mis tulenevad renormeerimisest.

Nähtus, mida nimetatakse „vaakumi polarisatsiooniks“, seletab füüsikaliselt sellist lõpmatuste vastastikust taandumist. Vaakumi polarisatsioon seisneb kvantväljateooria järgi selles, et elektroni laeng tekitab enda ümbritsevas ruumis ehk vaakumis virtuaalsete osakeste toimet intensiivseid protsesse. Elektroni negatiivse laengu ümbritsevas ruumis organiseeruvad positiivsed laengud üldiselt elektronile lähemale, kuid negatiivsed laengud aga kaugemale. Selletõttu varjestavad positiivsed laengud elektroni tegelikku laengut ja seega näib elektroni laeng olevat kaugemal väiksemana.

Kvantelektrodünaamika hajuvad integraalid annavad vaakumi energiaks ja massi tiheduseks lõpmata suured väärtused. Kuid renormeerimine annab neile väärtuseks nulli, kuna mistahes kohta energiaskaalal võime väärtuse lugeda nulliks. Kogu ruumi ühtlaselt täitev energianivoo ei ole reaalselt avalduv. Renormeerimine võimaldab kvantelektrodünaamikas ilmnevad hajuvused ehk lõpmatused omavahel vastuoludeta kompenseerida ehk teooria on konstantide ümberhindamise teel renormeeritav, kuna Feynmani graafikutes esinevad kolme joonega seotud tipud ja footonjoon vastab sellisele osakesele, mille seisumass on null.

Kvantväljateooria järgi on kogu Universumi vaakum täis virtuaalseid osakesi ja seetõttu on vaakum tegelikult lõpmata kõrge energiatihedusega. Kuid renormeerimise tulemusena võime selle vaakumi energiatiheduse lugeda ikkagi praktiliselt nulliks, sest selline energianivoo, mis täidab ühtlaselt kogu meie Universumi ruumi, ei ole tegelikult niikuinii mingil moel avalduv ega mõõdetav. 0 väärtuse võime lugeda mistahes kohta energiaskaalal.

Elektromagnetlaine ( näiteks valguslaine ) ei ole tegelikult pidev, vaid see liigub ruumis „portsjonite“ ehk kvantide kaupa. Vastavalt kvantelektrodünaamika ehk kvantväljateooria seaduste järgi võib elektromagnetvälja vaadelda ka kui virtuaalsete footonite kogumina või nende voona. Elektriliselt laetud osakeste omavaheline vastastikmõju ehk interaktsioon seisneb tegelikult selles, et üks osake neelab ühe footonist, mille kiirgas esimene. See tähendab seda, et laetud osakesed vahetavad omavahel footoneid. Iga laetud osake tekitab enda ümber välja, mis tegelikult reaalselt seisneb footonite kiirgamises ja neelamises. Need footonid pole aga reaalsed, vaid neid mõistetakse virtuaalsetena. Neid virtuaalseid osakesi pole võimalik avastada nende eksisteerimise ajal. See teebki need virtuaalseteks. Tavaliselt on footoni ja mingi laetud osakese summaarne energia suurem kui paigaloleval laetud osakesel ( footonil endal laengut ei ole ). See aga rikub energia jäävuse seadust. Kuid kui laetud osakese poolt kiiratud footon neelatakse sama või mõne teise laetud osakese poolt enne ajavahemiku

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E}$$

möödumist, siis ei ole võimalik avastada energia jäävuse seaduse rikkumist.  $\Delta E$  näitab energia kõrvalekallet impulsiga määratud väärtusest

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Reaalne footon, mis võib kiirguda näiteks kahe laetud osakese pöörkel, võib eksisteerida aga piiramatult kaua. Kahe ruumipunkti vahel, mille vahekaugus on  $l = c\Delta t$ , on virtuaalsel footonil võimalik anda vastastikmõju ja seda siis  $\Delta t$  jooksul. Elektromagnetjõudude mõjuraadius võib olla mistahes suur, sest footoni energia

$$E = hf = mc^2$$

saab olla ükskõik kui väike. Valguse osakesi ehk footoneid kirjeldabki kvandienenergia võrrand  $E = hf = mc^2$ , kus  $f$  on laine sagedus ja  $h$  on Plancki konstant väärtusega  $6,62 \cdot 10^{-34}$  Js.

Välja vahendavad osakesed ei ole reaalsed, vaid on virtuaalsed, sest nad kannavad edasi energiat

ja impulssi sõltumatult. Elektron võib kanda energiat, mis on väiksem tema seisumassist. Impulss, mida kantakse parajasti üle, ei pruugi olla suunatud tekkepunktist neeldumispunkti. Virtuaalne foton võib omada ka pikipolarisatsiooni komponenti. Sellepärast ongi need osakesed ebareaalsed ja seetõttu kutsutakse neid virtuaalseteks osakesteks. Nende olemasolu ei ole võimalik katseliselt tõestada.

Kvantmehaanikas ei ole kirjeldatud footoni kui osakese mõõtmeid, vaid selle asemel kirjeldab osakeste liikumist ajas ja ruumis lainefunktsioon. Kvantmehaanika üks põhivõrrandeid  $\lambda = h/p$  ehk  $\lambda = h/mv$  näitab ära samaaegselt footoni nii leiulaine pikkuse kui ka valguslaine ehk elektromagnetlaine pikkuse. See tähendab füüsikaliselt seda, et footoni leiulaineks ongi tegelikult valguslaine ehk elektromagnetlaine. De Broglie' valem  $\lambda = h/mv = h/p$  seob osakeste laineomadusi ( $\lambda$ ) ja korpuskulaaromadusi ( $m, v, p$ ).

Footoni ja valguslaine omavaheline seos on analoogiline kvantmehaanikas tuntud lainefunktsiooni ja tema poolt kirjeldatava osakese seosega. Näiteks tõenäosuse, millega foton satub mingisse ruumipunkti, määrab ära valguslaine amplituudi ruut sarnaselt nii nagu valguse intensiivsust mõõdab valguslaine elektrivекtori ruudu keskväärts. Täpselt samamoodi annab ka lainefunktsiooni mooduli ruut füüsikaliselt tõenäosuse ruumalaühiku kohta ehk tõenäosustiheduse mistahes osakese asumiseks vastavas ruumiosas. Statsionaarsete olekute korral on lainefunktsiooni kuju määratud nii, et osakese tõenäosustihedus ei sõltu enam ajast. Lainefunktsioon ja selle mooduli ruut on matemaatiliselt kompleksed suurused. See tähendab seda, et tõenäosus võib väljenduda ainult reaalarvuna. Kõik eelnev tähendab sisuliselt seda, et kvantmehaanika ei võimalda määrata osakese täpset asukohta ruumis ega tema liikumistrajektoori, vaid on võimalik ainult ennustada, millise tõenäosusega leiame osakese mingis ruumipunktis. Seega on kvantmehaanikal statistiline iseloom.

Näiteks elektroni asukoha määramatus on vesiniku aatomis peaaegu võrdne aatomi raadiusega. Seetõttu ei saa elektroni vaadata kui kindlat trajektoori mööda liikuva osakesena, vaid pigem vesiniku tuuma ümber oleva elektronpilvena.

Kvantmehaanika ei anna tegelikult infot footoni kui osakese suuruse kohta midagi, vaid ennustab seda, et millises ruumipunktis ja ajahetkes me osakest leida võime. See tähendab seda, et osakese suuruse ja aegruumi täpse asukoha asemel on tegelikult tõenäosusväli, mida kirjeldabki tuntud lainefunktsioon. Näiteks valguse ehk footoni leiulaineks

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

on valguslaine ehk elektromagnetlaine. Osakeste leiutõenäosust määravaid laineid nimetatakse lühidalt leiulaineteks. Laineid kirjeldavat funktsiooni ehk tõenäosuslainete konkreetset kuju ruumis ja ajalist muutumist kirjeldavat matemaatilist avaldist nimetatakse lainefunktsiooniks.

### 1.5.9 Operaatorid kvantmehaanikas

Osakese olekut kirjeldab kvantmehaanikas lainefunktsioon  $\Psi$ . Sellest lainefunktsioonist peab kätte saama kogu informatsiooni mingite matemaatiliste operatsioonidega. Nende matemaatiliste operatsioonide aluseks ongi operaatorid, mis teisendavad ühtesid funktsioone teisteks. Operaatorid kuuluvad kvantmehaanika põhimõistete hulka ja seetõttu ei saa ilma nendeta mõista kvantmehaanika formalismist ega ka füüsikalisest sisust. Operaator on matemaatikas eeskiri, mille

abil on võimalik saada mingist funktsioonist teise funktsiooni. Kvantmehaanikas on vaja ainult arvuga korrutamise operaatoreid ja diferentseerimisoperaatoreid. Operaatorid, mida kasutatakse kvantmehaanikas, on enamasti lineaarsed. Operaatorite korrutamine tähendab nende järjestikust rakendamist ja seetõttu on korrutises operaatorite järjekord üldiselt oluline. Tulemus ei sõltu operaatorite rakendamise järjekorrast siis, kui operaatorid omavahel kommuteeruvad. Operaatorite rakendamise järjekord on oluline omavahel mittekommuteeruvate operaatorite korral. Tuleb kindlasti märkida ka seda, et operaatorid mõjuvad alati funktsioonidele.

Kvantmehaanikas vastab igale füüsikalisele suurusele ( energia, impulss vms ) mingi kindel operaator. Füüsikaliste suuruste operaatorite saamiseks on enamasti vaja teada ainult koordinaadi ja impulsi operaatoreid. Koordinaadi operaatorid ( ristkoordinaatides ) on vastavad koordinaadid ise. Need on arvuga korrutamise operaatorid. Kuid impulssi operaatori korral on tegemist juba arvuga korrutamise operaatori ja diferentseerimisoperaatori korrutisega. Igale füüsikalisele suurusele vastab mingi kindel operaator ja operaatori omaväärtused annavad selle füüsikalise suuruse mõõdetavad väärtused. Füüsikaliste operaatorite omaväärtused peavad olema reaalarvulised, mitte imaginaarsed, sest kõik füüsikaliselt mõõdetavad suurused on reaalarvulised. Kuid kvantmehaanikas leiduvad ka selliseid lineaarse operaatori omaväärtused, mis ei ole reaalsed. Hermiitilise operaatori korral on kaasoperaator võrdne selle operaatori endaga. Füüsikaliste suuruste operaatorid peavad kvantmehaanikas olema hermiitilised, mille korral on selle omaväärtused reaalsed.

Energiakvandi määramatuse seosed tulenevad tema lainelistest omadustest, mitte aga lihtsalt suvaliselt matemaatilistest võrranditest. Matemaatilise lähenemise korral lahendatakse kvantmehaanikas operaatori omaväärtusülesanne, mille korral tuleb leida omaväärtused ja seega omaolekud ( diskreetsel juhul ):

$$\hat{A}f = af,$$

kus  $\hat{A}$  on operaator ( operaator on alati katusena ) ehk füüsikaline suurus,  $f$  on omaolek ehk omafunktsioon ja tundmatu  $a$  on omaväärtus ehk füüsikalisele suurusele vastav kindel arvuline väärtus. Füüsikaliste suuruste arvud peavad olema reaalarvud. Omaväärtusülesanne ei anna meile normeeritud kuju. Operaator on arvude üldistus. Igale füüsikalisele suurusele vastab operaator, mis toimib olekufunktsioonina. Operaator on teisenemise eeskiri, mille järgi saame ühest funktsioonist teise funktsiooni. Funktsioon  $f = \psi_a = \varphi_n$  on lõpmata mõõtmeline vektor ehk lõpmata komponendine vektor, milles on olemas funktsioonid  $\varphi_n$  ( kus  $n = 1, 2, 3, \dots$  ). Operaatori omaväärtusülesanne on pidevuse kujul esitatav aga järgmiselt:

$$\hat{A}\psi(x, a) = a\psi(x, a),$$

milles  $a$  väärtus võib muutuda nullist kuni lõpmatuseni ehk pidevalt ja

$$\psi = \sum_a c_a \psi_a = \int c(a) \psi(x, a) da,$$

milles  $a$  on konkreetsed väärtused,  $|c_a|^2$  on ühe konkreetse väärtuse tõenäosus,  $|c(a)|^2$  näitab tõenäosuse tihedust ja  $\psi_a$  on omafunktsioonid.

Illustreerimaks operaatori omaväärtusülesannet, püüame järgnevalt lahendada ühte kõige lihtsamat varianti. Näiteks impulsi  $p$  omaväärtusülesande korral on meil vaja teada de Broglie' laine pikkuse  $\lambda$  valemit, mis avaldus Plancki konstandi  $h$  ja impulsi  $p$  jagatisena:

$$x = \frac{h}{p} = \lambda$$

milles Plancki konstant  $h$  on jagatud  $2\pi$ -ga

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar$$

ja  $k$  näitab lainearvu

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

Lainefunktsiooni rahuldab siinuseline lainevõrrand ( antud juhul koordinaadi  $x$ -i järgi )

$$\sin(2\pi kx)$$

ja seda lainevõrrandit on võimalik esitada ka imaginaarsel kujul

$$e^{i2\pi kx} = e^{i\frac{2\pi}{k}px} = e^{i\frac{p}{h}x}$$

kuna see rahuldab järgmist matemaatilist reeglit:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Järgnevalt peame arvestama ka järgmise matemaatilise eeskirjaga:

$$\frac{d}{d\alpha} e^{i\alpha} = ie^{i\alpha}$$

Impulsi operaatori leidmiseks tuleb ära lahendada impulsi omaväärtusülesanne:

$$\hat{p}_x \psi = p_x \psi$$

milles  $\hat{p}_x$  on füüsikaline suurus ehk operaator,  $\psi$  on omaolekud ehk omafunktsioonid ja  $p_x$  on omaväärtus ehk füüsikalisele suurusele vastav kindel arvuline väärtus. Viimasest võrrandist võrdub  $\psi$  järgmise avaldisega

$$\psi = e^{\frac{i}{h}p_x x}$$

ja seega saame impulsi omaväärtusülesande järgmise kuju

$$\hat{p}_x e^{\frac{i}{h}p_x x} = p_x e^{\frac{i}{h}p_x x}$$

Tehes ära viimases võrrandis mõned lihtsad matemaatilised teisendused, saame järgmise avaldise

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{i}{h} p \psi$$

Kui me viime  $i$  ja  $h$  jagatise teisele poole võrdusmärgi, siis saamegi impulsi  $p$  omaväärtusülesande:

$$\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = p \psi$$

mildest saame ka impulsi  $p$  operaatori

$$\hat{p}_x = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Koordinaadi operaator võrdub alati iseendaga:  $\hat{x} = x$ . Impulsi operaator:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

on hermiitiline ja seda tõestatakse kvantmehaanikas järgmiselt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \hat{p} \psi_n dx &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \frac{d\psi_n}{dx} dx = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi_m^*}{dx} \psi_n dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -i\hbar \frac{d\psi_m}{dx} \right)^* \psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{p} \psi_m)^* \psi_n dx. \end{aligned}$$

Viimasest on näha, et kehtib võrdus:

$$\langle \hat{p} \psi_m | \psi_n \rangle = \langle \psi_m | \hat{p} \psi_n \rangle$$

ja see tõestabki impulsi  $p$  operaatori hermiitilisust.

Energiakvandi impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  määramatuse relatsioon

$$px = \hbar$$

tuletataksegi kvantmehaanikas nende operaatorite „mittekommuteeruvuse“ kaudu järgmiselt:

$$[\hat{p}_k, x_j] \Psi = \hat{p}_k x_j \Psi - x_j \hat{p}_k \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} x_j \Psi - x_j \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j \Psi) - x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right)$$

millest saame:

$$[\hat{p}_k, x_j] \Psi = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \Psi + x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right)$$

Kuna sulgudes olev liige võrdub nulliga:

$$x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = 0$$

siis saamegi määramatuse seose:

$$[\hat{p}_k, x_j] \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \Psi = \frac{\hbar}{i} \delta_{jk} \Psi$$

mis näitab seda, et energiakvandi impulsi ja koordinaadi operaatorid omavahel ei kommuteeru:

$$[\hat{p}_k, \hat{x}_j] = \frac{\hbar}{i} \delta_{jk}$$

ja see näitabki matemaatiliselt määramatuse seost energiakvandi koordinaadi ja impulsi vahel:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

Analoogilisel teel saadakse ka määramatuse seos energia ja aja vahel:

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar$$

### 1.5.10 Kvantkromodünaamika

Kalibratsiooniteisenduseks ( globaalseks kalibratsioonisümmeetriaks ehk invariantusteisenduseks ) nimetatakse kvantmehaanikas olekufunktsioonide teisendust, mille korral mõõdetavad suurused ( omaväärtused ) ei muutu:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$$

$\alpha$  on reaalne konstant. Normeeritud olekufunktsioon jääb ka endiselt normeerituks, sest:

$$|e^{i\alpha}| = 1$$

Elektron-positronvälja lagranžiaan ja interaktsioonilagranžiaan  $L'$

$$L' = e\bar{\psi}y_{\mu}\psi A_{\mu},$$

milles „vooluks“ nimetatakse:

$$j_{\mu} = \bar{\psi}y_{\mu}\psi,$$

on mõlemad invariantid viimati esitatud teisendusel, kuna nendes olev väli  $\psi$  ja tema kaasväli  $\bar{\psi}$  teisenevad järgmiselt:

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)$$

Kuid „lokaalseks kalibratsioonisümmeetriaks“ nimetatakse selliseid teisendusi:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$$

ja

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x)$$

mille korral ei ole enam tegemist globaalse kalibratsioonisümmeetriaga. Elektron-positronvälja lagranžiaani  $L$  võrrand:

$$L = -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}y_{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_{\mu}}y_{\mu}\psi\right) - m\bar{\psi}\psi$$

ei ole lokaalselt kalibratsioon-invariantne, sest:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_{\mu}} \rightarrow e^{i\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_{\mu}} + ie^{i\alpha}\psi\frac{\partial\alpha}{\partial x_{\mu}}$$

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_{\mu}} \rightarrow e^{-i\alpha}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_{\mu}} - ie^{-i\alpha}\bar{\psi}\frac{\partial\alpha}{\partial x_{\mu}}$$

Lokaalse kalibratsioon-invariantsuse saavutamiseks asendatakse tuletisoperaatorid elektron-positronvälja lagranžiaanis  $L$  järgmiselt:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \rightarrow D_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ie A_{\mu}$$

ja



$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu}$$

milles viimane on nn „kompenseeriva välja“ teisenemine. Sellest tulenevalt saadakse elektron-positronvälja lagranžiaani L võrrandi kujuks:

$$L = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu$$

milles kasutatakse järgmist tähistust:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial_\mu$$

Kui  $A_\mu$  on elektromagnetväli ja  $e$  on positroni laeng, siis oleme saanud ka täiendava KED ( s.t. kvantelektrodünaamika ) interaktsioonilagranžiaani  $L'$ :

$$L' = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu$$

milles „vooluks“ nimetatakse:

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

Kõigest eelnevast järeldub väga oluline tõsiasi, et KED lagranžiaan L

$$L = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

on „lokaalse kalibratsioonisümmeetria järeldus“. Elektron-positronvälja lagranžiaanis L

$$L = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi$$

( milles  $\psi \rightarrow q$  ) tuleb teostada järgmine asendus:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{a=1}^8 \alpha_a G_\mu^a$$

ja seda sellepärast, et elektron-positronvälja lagranžiaan oleks lokaalselt kalibratsioon-invariantne. Sellisel juhul peab paralleelselt q-välja kalibratsiooniteisendusele:

$$q(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} q(x)$$

( milles  $\alpha(x)$  on  $3 \times 3$ -maatriks ) teisenema kaheksa lisavälja  $G_\mu^a$  järgmiselt:

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a - \sum_{b,c} f_{abc} \alpha_b G_\mu^c$$

milles arvud  $f$  on „konstantsed struktuurikordajad“. Selle tulemusena saame lagranžiaani L võrrandi kujuks:

$$L = (\bar{q}q) + (G^2) + g(\bar{q}qG) + g(G^3) + g^2(G^4)$$

mis kirjeldabki tugevat interaktsiooni ja on seega aluseks kogu kvantkromodünaamikale. Selles

võrrandis tähistab liige (qq) q-välja vaba lagranžiaani kineetilise energia ja massi liiget. G-välja kineetilise energia liiget tähistab liige ( $G^2$ ). Liige g(qqG) on interaktsiooniliige seoskonstandiga g ja G-väljade omavahelise interaktsiooni liikmed on võrrandis viimased kaks liiget.

### 1.5.11 Sümmeetria rikkumine

Ürgses plasmas oli prootoneid natuke rohkem kui antiprootoneid. Ürgplasmas oli iga miljardi prooton-antiprootoni paari kohta olemas üks üleliigne prooton. Osakeste väga väike ülekaal antiosakestega võrreldes moodustabki kogu meie tajutava materiaalse maailma. Tegelikult ka elektron-positroni paaride tekkimisel on elektrone natuke rohkem. Negatiivselt laetud elektrone ja positiivselt laetud prootone on aga võrdselt.

Kvantmehaanika järgi on sisemine paarsus (+1 või -1) omane igale osakesele. See korrutub süsteemi orbitaalsest impulssmomendist tuleneva osaga:

$$P = \prod_s P_s (-1)^l$$

Nõrgas interaktsioonis on laenguline ja ruumiline paarsus maksimaalselt rikutud, kuid teistes interaktsioonides on need aga jäävad. Kombineeritud paarsus CP on „nende kahe teisenduse järjest rakendamise suhtes“ ning alguses arvati, et see on kõikjal jääv. Näiteks K-mesoni oleku korral:

$$K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (K^0 - \bar{K}^0)$$

( milles tähtedega tähistatakse tegelikult vastavaid olekufunktsioone ) on selle CP-paarsus -1

$$CPK_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{K}^0 - K^0) = -K_2^0$$

Just CP-jäävuse tõttu saab see „laguneda“ kolmeks  $\pi$ -mesoniks:

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

või

$$K_2^0 \rightarrow 3\pi^0$$

Kuid 1960. aasta paiku avastati CP-rikkumine, mille korral võib  $K_2^0$  laguneda väga väikese tõenäosusega ka kaheks  $\pi$ -mesoniks. CP-rikkumine on väga väike ( umbes 0,16% ). Selline äärmiselt väike CP-rikkumine on omane kogu nõrgale interaktsioonile. Osakeste ja antiosakeste maailmad ei ole just CP-rikkumise tõttu vastastikku täielikult sümmeetrilised. See tähendab, et CP-rikkumise tõttu tekkis pärast Suurt Pauku aine-antiaine suhtes ebasümmeetiline maailm, mis ei saanud täielikult footoniteks annihileeruda. CP-rikkumine on põhjustatud vaakumi sümmeetria spontaansest rikkumisest, mida kirjeldab skalaarse välja

lagranžiaani võrrand:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right)$$

Nõrk interaktsioon toimib kõigile osakestele ( peale footoni ja gluuoni ). Nõrga jõu toimetel muutuvad kvargid üksteiseks, mille korral nende koguarv säilib. Selles esineb elektron alati paaris elektron-neutriinoga, müüon oma neutriinoga ja tauon omaga. Kolme perekonna kvarkide omavahelist segunemist nõrgas interaktsioonis kirjeldab nn Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ( CKM ) maatriks, mille komponendid on aga järgmised:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,22 & 0 \\ 0,22 & 0,97 & 0,04 \\ 0 & 0,04 & 1 \end{pmatrix} * e^{i\delta} \begin{pmatrix} d \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

Selles on  $d'$  ja  $s'$  „segud kahest kvargist“:

$$d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c$$

$$s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c$$

„Cabibbo nurk“ on  $\theta_c$  ja selle väärtus on umbes  $13^\circ$ . CKM-maatriks on kompleksne, milles esineb väike parameeter  $\delta$ , mis ei võrdu nulliga. Selle parameetri väärtuse saabki siduda CP-sümmeetria rikkumisega. See tähendab seda, et teoorias on CP-rikkumine väljendatav teguriga  $e^{i\delta}$  CKM-maatriksis, mis näitab omakorda seda, et CP-rikkumine saab esineda ainult kolme fundamentaalosakeste perekonna olemasolu korral.

Kusjuures mõningates nõrga interaktsiooni protsessides mikroosakeste vahel esineb „ajalise sümmeetria rikkumist“. Sellest vahel järeldatakse, et entroopia kasvu seadus on mingil moel põhjustatud just „aja suunatusest“.

Sümmeetria spontaanse rikkumisega on seotud Higgsi väli. Tuntud Weinberg-Salami mudelis kirjeldab Higgsi välja skalaarne väli, mille kirjeldav lagranžiaani võrrand on:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right)$$

Selles on T kineetiline energia,  $\mu$  on välja osakese mass ja  $\lambda$  on „teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp )“. Kui  $\mu$  ja  $\lambda$  oleksid positiivsed reaalarvud, siis välja potentsiaal on minimaalne välja väärtusel  $\phi = 0$ . Sellisel juhul on tegemist vaakumiga. Kui aga  $\mu^2 < 0$  ehk mass oleks nagu imaginaarne ( s.t. „mittefüüsikaline“ ), siis sellisel juhul tekib kaks välja potentsiaali miinimumi

$$\phi = \pm v$$

mis ei võrdu enam nullidega. Neid miinimumkohti ongi võimalik välja arvutada järgmise ekstreemumülesandega. Näiteks võttes diferentsiaali potentsiaalsest energiast V potentsiaali järgi:

$$\frac{dV}{d\phi} = \mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0$$

saame tulemuseks:

$$\phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0$$

Kuna selle järgi peab kehtima võrdus:

$$\phi_1 = 0$$

siis saadud võrrandist:

$$\mu^2 + \lambda \phi_{2,3}^2 = 0$$

saame potentsiaali definitsiooniks:

$$\phi_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Saadud avaldist on võimalik esitada ka järgmiselt:

$$\phi = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Kuid edasiseks analüüsiks võtame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

ja viime konstandi  $\lambda$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\lambda \phi^2 = -\mu^2$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$2\lambda \phi^2 = -2\mu^2$$

ja seejärel viime võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla:

$$\sqrt{2\lambda \phi^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Nendes võrrandites võib esineda vaakumi potentsiaal  $v$  või välja potentsiaal  $\phi$ :

$$\sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Tulemuseks saamegi Higgsi bosoni:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

mille massi suurust ei ole teada, sest  $\lambda$  ei ole mõõdetav.

Kuid sellegipoolest arvatakse Higgsi bosoni mass olevat 115 ja 180 GeV/c<sup>2</sup> vahel, veelgi täpsemalt 125 – 127 GeV/c<sup>2</sup> vahel.

„Vaakumit“ defineeritakse standardmudelil potentsiaalse energia miinimumina. Kuid eelnevalt saime kaks vaakumit, mille korral ei võrdu väli enam nulliga:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Selline tulemus on füüsikaliselt ebareaalne ( täpselt nagu imaginaarne masski ), kuid kõrgetel energiatel ei ole imaginaarse massiga juht ( ehk  $\mu^2 < 0$  korral ) oluliselt erinev sellest, kui  $\mu$  oleks

positiivne reaalarv. Energia langedes läheb väli minimaalseima potentsiaalse energiaga olekusse, mida me mõistamegi „vaakumina“. Energia langedes „valib“ väli  $\phi$  „spontaanselt“ ühe kahest võrdväärsest vaakumist. Sümmeetria spontaanse rikkumise mudel seisnebki selles, et energia langedes muutub vaakumi sümmeetriline potentsiaal ebasümmeetriliseks. Joonis:

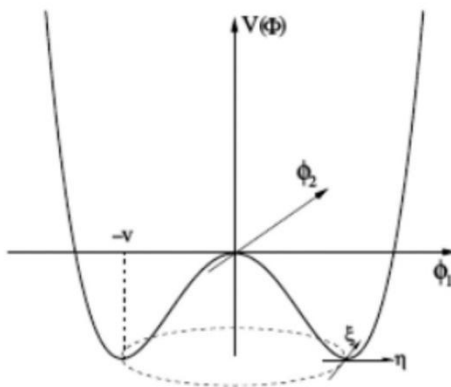


Foto allikas: [https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking\\_fig1\\_330116851](https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking_fig1_330116851)

Jooniselt me näeme, et energiavälja potentsiaalse energia  $V$  maksimaalne väärtus ulatub lõpmatusse.

Materia välja kirjeldatakse füüsikalistes mudelites tavaliselt nii, et vaakumis oleks väli null. Seetõttu oletatakse, et vaakum on tekkinud spontaanselt:  $\phi_0 = +v$ . „Toome sisse“ uue välja  $\eta(x)$  mõiste:

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

Viimase avaldise paneme eespool esitatud skalaarse välja lagranžiaani  $L$  võrrandisse:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4\right)$$

Tulemuseks saame:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4 + \text{const}$$

millest järeldatakse seda, et väli  $\eta$  sai reaalse positiivse massi:

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Välja  $\eta$  potentsiaali miinimum ongi vaakumolek. Senimaani käsitlesime reaalsel skalaarset Higgsi välja  $\phi$ , kuid tegelikult on Higgsi väli „kompleksne skalaarväli“, mida kirjeldab lagranžiaani  $L$  võrrand:

$$L = (\partial_\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Kui viimases avaldises on mass imaginaarne ehk  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ , siis sellisel juhul tuleb potentsiaali miinimum  $\phi$  „komplekstasandil ringile raadiusega“:

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

mis kattub täielikult eespool tuletatud avaldisega:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Higgsi väli on lahutamatult seotud sümmeetria spontaanse rikkumisega ehk  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ . Kuna vaakum saab esineda ainult välja väärtusel 0, siis peame sisse tooma uued väljad, mis on reaalsed. See tähendab seda, et defineerime potentsiaali  $\phi$  reaali- ja imaginaarosa asemele kaks uut välja, mis on mõlemad seekord reaalsed ja mille minimaalne potentsiaal võrdub seekord nulliga ehk vaakumolekuga:

$$\phi(x) = (\eta(x) + v)e^{i\xi(x)}$$

Ka selles saab väli  $\eta$  reaalse positiivse massi:

$$m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$$

mis kattub täielikult Higgsi skalaarbosonit kirjeldava võrrandiga.

Kuna me oleme eelnevalt tuletanud energiavälja massi  $m$  avaldised:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

ja

$$m = \sqrt{2\lambda v^2}$$

siis seega võib kehtida järgmine võrdus:

$$\sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Võtame selle võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$2\lambda v^2 = -2\mu^2$$

ja näeme, et kahed ( 2 ) taanduvad võrrandist ilusti välja:

$$\lambda v^2 = -\mu^2$$

Viimasest saame järgmise seose:

$$\lambda v^2 + \mu^2 = 0$$

Kogu järgneva analüüsi huvides arvestame võrrandi järgmist kuju:

$$\mu^2 + \lambda v^2 = 0$$

mis sellegipoolest annab meile eespool tuletatud võrrandi:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

Kui me aga korrutame võrrandi

$$\mu^2 + \lambda v^2 = 0$$

ehk

$$\mu^2 + \lambda \varphi^2 = 0$$

mõlemad pooled väljapotentsiaaliga  $\varphi$ :

$$\mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = \frac{dV}{d\varphi} = 0$$

siis me näeme, et me saime tuletada skalaarse välja potentsiaalse energia  $V$  avaldise:

$$V = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

Kineetilise energia  $T$  avaldisega

$$T = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2$$

annab see meile kvantväljade teoorias tuntud skalaarse välja lagranžiaani  $L$ :

$$E = L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\right)$$

milles  $\mu$  on välja osakese mass või välja mass,  $\lambda$  on teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp ) ja  $\phi$  on väljapotsiaal.

Erinevaid füüsikateooriaid kirjeldavas lagranžiaanide matemaatikas avaldataksegi skalaarse välja kineetiline energia valemina:

$$E_k = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 = 0$$

mis antud juhul ( Universumi punktsingulaarsuse korral ) võrdub nulliga. Välja potentsiaalne energia avaldatakse aga valemitega:

$$\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 \neq 0$$

ja

$$\frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \neq 0$$

mille korral ei võrdu mõlemad nulliga, kuna nende summa võrdub nulliga:

$$\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 = 0$$

Viimane kirjeldab „paravälja“, mis tähendab seda, et kaks erinevat välja moodustavad kokku ühe tervik-välja, mille potentsiaal võib olla null. Kogu edasiseks analüüsiks võimegi kasutada just sellist tõlgendusviisi, mille tõttu on skalaarset ( klassikalist ) välja kirjeldav võrrand esitatav ka lagranžiaanina:

$$E = L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\right)$$

Sellisel juhul oletame, et energiaväli koosneb kvantidest, mille korral on  $\mu$  välja osakese mass,  $\lambda$  on teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp ) ja  $\phi$  on väljapotsiaal. Võrrandis me näeme, et kahe välja omavaheline kompenseerimine annab väljapotsiaali väärtuseks nulli.

Kuna skalaarse välja lagranžiaan  $L$  võrdub energia jäävuse seaduse järgi nulliga:

$$E = L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\right) = 0$$

siis sellest järeldub, et peab kehtima võrdus:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

Kui ka kineetiline energia võrdub nulliga:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 = 0$$

siis peab seda olema ka potentsiaalne energia:

$$\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 = 0$$

millest omakorda järeldeb:

$$\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 = -\frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

Seetõttu saame kineetilise energia avaldada järgmise diferentsiaalvõrrandina:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 = \pm\mu^2\varphi^2$$

ehk

$$(\mu\varphi)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2$$

kuid siinkohal tasub märkida seda, et kineetiline energia saab füüsikas olla ainult positiivne. Negatiivset kineetilist energiat ei ole Universumis olemas.

Higgsi väli ( ja koos sellega ka sümmeetria spontaane rikkumine ) on otseselt tuletatav ka eespool tuletatud energia E võrrandist:

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

See tähendab, et viimasest saame tuletada otse Higgsi välja osakese, mis on omakorda lahutamatult seotud sümmeetria spontaanse rikkumisega. Näiteks eelnevalt esitatud energia E võrrand on tuletatud seosest:

$$0 = -\frac{c^2}{2} - c^2$$

Kui me nüüd korrutame selle võrrandi mõlemad pooled  $m^2$ -ga:

$$0 = -\frac{m^2c^2}{2} - m^2c^2$$

siis saame tulemuseks avaldise:

$$-\frac{m^2c^2}{2} = m^2c^2$$

milles me näeme, et  $c^2$  taandub võrrandist ilusti välja:

$$-\frac{m^2}{2} = m^2\frac{c^2}{c^2}$$

ehk

$$-\frac{m^2}{2} = m^2$$

Massid ei saa omavahel võrrelda  $m^2 \neq m^2$  ja seetõttu toome sisse massi m uue tähistuse  $\mu$ :



$$m^2 \neq \mu^2$$

Saadud võrrandis

$$-\frac{m^2}{2} = \mu^2$$

viime  $-\frac{1}{2}$  teisele poole võrdusmärgi:

$$m^2 = -2\mu^2$$

ja viime võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

Saadud võrrandis võetakse ruutjuur negatiivsest arvust:

$$m = \sqrt{-2\mu^2}$$

ja selline tulemus kattub täielikult avaldisega, mis kirjeldaks Higgsi bosoni massi  $m$ . Higgsi boson on Higgsi välja osake ehk Higgsi välja „ergastatud olek“. Higgsi väli kui energiaväli annab omakorda kõikidele elementaarosakestele massi, väljaarvatud footonitele ja gluonitele. Higgsi väli on lahutamatult seotud vaakumi spontaanset rikkumist kirjeldava matemaatilise ja füüsikalise süsteemiga.

Energiavälja massi  $m$  avaldist võime põhimõtteliselt tuletada ka elektrivälja energia  $E$

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

ja eespool mainitud seisuenergia  $E$

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2 = E$$

valemite omavahelisest võrdusest:

$$-\frac{mc^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

Näiteks võtame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\frac{m^2 c^4}{4} = \frac{q^2 \varphi^2}{4}$$

korrutame võrrandi mõlemad pooled kahega 2 ja arvestame kvantväljade teoorias tuletatud valguse kiiruse  $c$  ja Plancki konstandi  $h$  vahelise seosega:

$$\frac{1}{c^4} \approx \bar{h} = \frac{h}{2\pi}$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{m^2}{2} = \bar{h} \frac{q^2}{2} \varphi^2$$

Järgnevalt oletame, et elektrilaeng  $q$  võrdub elementaarlaenguga ehk konstandiga  $e$ :

$$\frac{m^2}{2} = \bar{h} \frac{e^2}{2} \varphi^2$$

ja sellest tulenevalt tekkis meil üldisem konstant, mida tähistame tähega  $\lambda$ :

$$\hbar \frac{e^2}{2} = \text{const} = \lambda$$

See annab meile võrrandi üldkujuks:

$$\frac{m^2}{2} = \lambda \varphi^2$$

Viime kahe 2 võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$m^2 = 2\lambda \varphi^2$$

ja võtame võrrandi mõlemast poolest ruutjuure:

$$m = \sqrt{2\lambda \varphi^2}$$

Kui nüüd viimases võrrandis oleks elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  asemel tegemist energiavälja potentsiaaliga  $v$ :

$$m = \sqrt{2\lambda v^2}$$

siis tulemus kattuks samuti avaldisega, mis kirjeldaks Higgsi bosoni massi  $m$ .

Kuid ametlikus kvantväljade teoorias esitatakse peale Higgsi skalaarbosoni ka veel „vektorvälja massi“  $m$  avaldis:

$$m_A = ev$$

milles  $e$  on elementaarlaeng ja  $v$  on „vaakumi potentsiaal“. Kui me korrutame selle võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$  ja viime  $v$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{m^2}{v} = me$$

siis me saame saadud seost kasutada eespool tuletatud Bohri magnetroni võrrandi analüüsis:

$$\frac{\lambda}{me} = \frac{h}{2M} \frac{e}{M}$$

et mõista edasisi analüütilisi protsesse. Näiteks viime läbi järgmised elementaarsed matemaatilised teisendused:

$$\frac{\lambda v}{m^2} = \frac{\lambda \varphi}{m^2} = \frac{h}{2M} \frac{e}{M}$$

ja

$$2\lambda \varphi = he \frac{m^2}{M} = hem$$

Korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled väljapotentsiaaliga  $\varphi$  ja tulemuseks saame:

$$2\lambda \varphi^2 = hme\varphi = m \frac{1}{c^4} E$$

milles välja energia  $E$  võrdust:

$$E = e\varphi = q\varphi$$

tõestame veidi hiljem. Kuna eespool tuletasime „skalaarse välja massi“  $m$  definitsiooni:

$$2\lambda\varphi^2 = 2\lambda v^2 = m^2$$

siis saame tulemuseks energia E ruudu võrrandi:

$$E^2 = m^2 c^4 = mE$$

millest omakorda järeldub, et peab kehtima võrdus:

$$m = E$$

Viimane tähendab tegelikult vektorvälja massi m „definiitsiooni“:

$$m = q\varphi$$

ehk

$$m_A = ev$$

milles e on elementaarlaeng ja v on „vaakumi potentsiaal“.

Massi m ja energia E ekvivalentsuse seosest:

$$E = mc^2$$

on võimalik ka otse tuletada eespool mainitud vektorvälja massi m võrrand. Selleks viime valguse kiiruse c ruudu võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{c^2} E = m$$

Elektromagnetismi õpetusest on teada, et valguse kiirus c on seotud elektri- ja magnetkonstandiga järgmiselt:

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}}{4\pi * 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{(A * s)^2}} = \frac{1}{9 * 10^{16} \left(\frac{m}{s}\right)^2}$$

Viimases teisenevad ühikud täpsemalt:

$$\frac{4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}}{4\pi * 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{(A * s)^2}} = \frac{4\pi * 10^{-7} N(A * s)^2}{4\pi * 9 * 10^9 NA^2 m^2} = \frac{4\pi * 10^{-7} A^2 s^2}{4\pi * 9 * 10^9 A^2 m^2}$$

Kuid edasiseks analüüsiks teisendame ühikuid nii, et saaksime kasutada elektrilaenguid q:

$$\frac{A^2 s^2}{A^2 m^2} = \frac{A^2}{A^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{C^2 s^2}{C^2 s^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{C^2}{C^2 \frac{m^2}{s^2}} = \frac{q^2}{q^2 c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{q^2}{q^2 c^2} = \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$$

ehk

$$\frac{q}{qc} = \frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

Järgneva analüüsi huvides oletame seda, et elektrilaengud tegelikult ei taandu võrrandist välja ja seetõttu saame järgmise seose:

$$\frac{e}{q} = \frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

milles  $e$  on elementaarlaeng ja elektrilaeng  $q$  võrdub konstandiga:

$$q = ec$$

Sellisel juhul saame ka seose:

$$\frac{e}{q} = \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

milles elektrilaeng  $q$  on

$$q = ec^2$$

Kui me nüüd eelnevalt esitatud võrrandit

$$\frac{1}{c^2} E = \frac{e}{q} E = m$$

avaldame energiavälja potentsiaali  $\phi$  kaudu:

$$\frac{e}{q} E = e \frac{E}{q} = e \frac{q\phi}{q} = e\phi = m$$

siis olemegi tuletanud vektorvälja massi võrrandi:

$$m_A = e\phi$$

mis ametlikus kvantväljade teoorias tuletatakse muidu lagranžiaanide võrrandite kaudu. Näiteks väljapotentsiaali  $\phi$  asemel võime kasutada kvantväljade teooriast tuntud vaakumi potentsiaali  $v$  mõistet:

$$\phi = \pm v$$

mis annabki meile võrrandi lõplikuks kujuks:

$$m_A = ev$$

Vektorvälja massi  $m_A$  võrrandi tuletamiseks kasutasime eespool tuletatud seost:

$$\frac{e}{q} = \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

milles elektrilaeng  $q$  avaldus

$$q = ec^2$$

Tõestame viimase seose kehtivust. Näiteks kuna elektri- ja magnetkonstant on mõlemad seotud elektrilaenguga  $q$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{q}{q} = \frac{e}{q} = \text{const} \neq 1$$

siis saame selle kaudu analüüsida järgmise seose kehtivust:

$$\frac{e}{\varepsilon_0} = \mu_0 q$$

Kui me jagame viimase võrrandi mõlemad pooled  $4\pi$ -ga ja raadiusega  $r$ , siis saame antud juhul tulemuseks elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  avaldise:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} e = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} q$$

ehk

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K}{2} \frac{q}{r}$$

milles elektriline konstant  $k$  avaldub:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

ja magnetiline konstant  $K$ :

$$K = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

Viimasest järeldeb konstandi  $K$  definitsioon:

$$k \frac{2e}{q} = K = \text{const}$$

milles

$$q = ec^2$$

See annabki meile elektrivälja potentsiaali  $\varphi$ :

$$k \frac{e}{r} = \frac{K}{2} \frac{q}{r} = k \frac{2e}{q} \frac{1}{2} \frac{q}{r} = k \frac{e}{r} = \varphi$$

Siinkohal on huvitav märkida seda, et meie tuletatud potentsiaali  $\varphi$  võrrandis:

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{K}{2} \frac{q}{r}$$

esineb ühel poolel elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  ja teisel poolel magnetiline konstant  $K$ :

$$\varphi = \frac{K}{2} \frac{q}{r}$$

Selline pealtnäha absurdne võrdus saab aga hoopis uue kuju, kui me elektrilaengu  $q$  avaldame elektrivoolu  $I$  ja ajaperioodi  $t$  korrutisena:

$$q = It$$

Selle tulemusena saame:

$$\varphi = \frac{K}{2} \frac{q}{r} = \frac{K}{2} \frac{I}{d} t$$

milles  $I$  on elektrivool ja seega  $d$  on kaugus elektrivoolust. Viimasest saame tuletada Ampere'i seadusest tuntud magnetinduktsiooni  $B$  avaldise:

$$\frac{2\varphi}{t} = K \frac{I}{d} = B$$

ehk

$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{rt} = 2k \frac{I}{d} = K \frac{I}{d} = B$$

milles  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ja seega  $\sin \alpha = 1$ . Saadud seos magnetinduktsiooni  $B$  ja elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  vahel

$$\frac{2\varphi}{t} = K \frac{I}{d} = B$$

võib esmapilgul tunduda absurdne, kuid eespool saime elektrilise võrdeteguri  $k$  avaldise kujul:

$$k = \frac{Kq}{2e}$$

ja seetõttu saamegi puhtalt magnetinduktsiooni  $B$  võrrandi:

$$2k \frac{I}{d} = 2 \frac{Kq}{2e} \frac{I}{d} = 2 \frac{Kq}{2e} \frac{e}{rt} = K \frac{I}{d} = B$$

ehk

$$B = K \frac{I}{d}$$

milles  $I$  on elektrivool,  $d$  on kaugus elektrivoolust ja  $K$  on magnetiline võrdetegur.

Vektorvälja mass  $m_A$  tuletatakse elementaarosakeste füüsikas Higgsi välja ja elektromagnetvälja omavahelisest interaktsioonist, mida kirjeldab lagranžiaani  $L$  võrrand:

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

milles

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

on elektromagnetvälja lagranžiaan  $L$ . Seda interaktsiooni on võimalik alati teisendada:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi$$

ja

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$$

Oletame, et toimub sümmeetria spontaanne rikkumine ehk  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ . Toome sisse uued väljad, mille korral esineb vaakum välja väärtusel  $0$ . Sellest tulenevalt teisendame vastavalt:

$$\phi \rightarrow (v + h(x))e^{i\xi(x)}$$

ja

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\xi$$

milles  $\xi$  nimetatakse „kalibratsioonteisenduse parameetriks“. Higgsi välja ja elektromagnetilise välja omavahelist interaktsiooni kirjeldava lagranžiaani  $L$  võrrand tuleb seega kujul:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 h^2 + v e^2 A_\mu^2 h - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

millest omakorda nähtubki skalaar  $h(x)$  massiga:

$$m_h = \sqrt{2\lambda v^2}$$

ja vektor  $A_\mu(x)$  massiga:

$$m_A = ev$$

Nende masside „tuletamine“ tähendab lühidalt seda, et Higgsi välja ja elektromagnetilise välja omavahelisest interaktsioonist  $L$  ( milles esineb kompleksne Higgsi väli ja massitu vektorväli ):

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

saiime „Higgsi mehhanismi abil“ ühe reaalse Higgsi skalaari ja vektorvälja massi.

Kuna kehtib eelnevalt saadud võrdus:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

siis seega saame välja energia  $E$  seoseks ka:

$$E = q\varphi = \frac{q\varphi}{2}$$

Siinkohal on oluline mõista, et tegemist võib olla ( kulonilise ) energiavälja potentsiaaliga  $\varphi = \varphi$  või vaakumi potentsiaaliga  $v = v$ , mille korral võib vaakumis omakorda eksisteerida „virtuaalne“ energiaväli. Antud juhul kehtib nende kahe vahel võrdus nii nagu seda oli ka kiiruste korral:  $c^2 = c^2$ . Kuna potentsiaalid  $\varphi$  taanduvad võrrandist ilusti välja, siis saame avaldise kujuks:

$$q = \frac{q}{2}$$

milles me näeme taas tuttavat olukorda:  $q \neq q$ . Järgnevalt võime oletada, et üks nendest on elementaarlaeng  $e$ :  $e \neq q$  ja teise laengu tähistame tähega  $g$ :  $q = g$ , mis ei pea ilmtingimata enam olema elektromagnetilise välja tekitaja. Võrrandi kujuks saame:

$$e = \frac{g}{2} = g \frac{1}{2}$$

milles  $\frac{1}{2} = 0,5$  ja seega

$$e = g \, 0,5$$

Matemaatikas võib 0 ja 1 vahelist arvu esitada ka „nurgafunktsioonina“:

$$e = g \sin\theta_W$$

Siinkohal on oluline märkida seda, et nurgafunktsioon võib antud juhul võrduda:

$$\sin\theta_W = \frac{1}{2} = 0,5$$

kuid ilmtingimata ei pea:

$$\sin\theta_W \neq \frac{1}{2} \neq 0,5$$

sest oluline on vaid see, et korrutis võrduks konstandiga ehk elementaarlaenguga  $e$ :

$$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

Katsed näitavad, et  $\theta_W \approx 13,5^\circ$  ja seetõttu saame  $g$  järgmised väärtused:

$$\frac{e}{\sin\theta_W} = g$$

ja

$$\frac{e}{\cos\theta_W} = g'$$

Elementaarlaeng  $e$  ongi seotud niimoodi „tuumalaenguga“  $g$ :

$$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

milles „Weinbergi nurgaks“ nimetatakse:  $\theta_W \approx 13,5^\circ$ . Sellest tulenevalt saame vektorvälja massi võrrandi:

$$m_A = ev$$

avaldata järgmiselt:

$$m_A = ve = vg \sin\theta_W$$

Kui me tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$m_A^2 = v^2 g^2 \sin^2\theta_W$$

siis me näeme, et selles kehtib järgmine eksperimentaalne väärtus:

$$\sin^2\theta_W = 0,23 \approx 0,25 = \frac{1}{4}$$

millest võib omakorda järeldada:

$$\sin\theta_W \approx \frac{1}{2}$$

Siinkohal tasub märkida seda, et kõige varasemad eksperimentaalsed andmed näitavad sellist ligikaudset väärtust:  $\sin^2\theta_W = 0,239 \approx 0,24$ . Kuid uuemad mõõtmised näitavad järgmist võrdust:  $\sin^2\theta_W = 0,23$  ning kõige uuemad andmed näitavad aga hoopis:  $\sin^2\theta_W = 0,22$ . Seega saame võrrandi kujuks:

$$M_W^2 = \frac{v^2 g^2}{4}$$

ehk

$$M_W = \frac{vg}{2}$$

mille korral ei ole enam tegemist vektorvälja massiga  $m_A$ . Täpselt samale tulemusele saame ka siis, kui me jagame vektorvälja võrrandi  $m_A = ev$  mõlemad pooled  $2\sin\theta_W$ -ga:

$$\frac{m_A}{2\sin\theta_W} = \frac{ev}{2\sin\theta_W} = \frac{vg}{2} = M_W$$

ja saadud avaldist võime omakorda jagada  $\cos\theta_W$ -ga:



$$\frac{M_W}{\cos\theta_W} = \frac{ev}{2\sin\theta_W\cos\theta_W} = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2+g'^2} = M_Z$$

milles omakorda nähtub:

$$\frac{g'}{g} = \tan\theta_W = \frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}$$

Saadud massi võrrandid  $M_W$  ja  $M_Z$  kirjeldavadki nõrga interaktsiooni vahebosonite masse. Viimasest ehk  $M_W$  võrrandist on võimalik tuletada vaakumi potentsiaali  $v$  seos Fermi konstandi  $G$  eksperimentaalse väärtusega. Selleks tõstame  $M_W$  võrrandi mõlemad pooled taas ruutu:

$$M_W^2 = \frac{v^2 g^2}{4}$$

ja teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{4M_W^2}$$

Kui me jagame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

siis saadud võrrand võrdub eksperimentaalse väärtusega ( s.t. konstandiga ):

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}} = \text{const}$$

millega järgi avaldubki  $v$  järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{2}}{2G} = v^2$$

ehk

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2G}} = v = 246 \text{ GeV}$$

Viimases ei ole  $G$  gravitatsioonikonstant, vaid tegemist on „Fermi konstandiga“.

Nõrga interaktsiooni ei vahenda tegelikult ainult üks vaheboson:

$$M_W = \frac{vg}{2} = \frac{37,3}{\sin\theta_W} \text{ GeV} \frac{1}{c^2}$$

milles Weinbergi nurk avaldus

$$\theta_W \approx 13,5^\circ$$

ja vaakumi potentsiaal  $v$  võrdus:

$$v = 246 \text{ GeV}$$

Kui me korrutame viimase vahebosoni massi võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$2M_W = vg = \frac{74,6}{\sin\theta_W} \text{ GeV} \frac{1}{c^2}$$

siis saamegi ühe teise vahebosoni massi

$$2M_W = M_Z$$

mis vahendab samuti nõrka interaktsiooni:

$$M_Z = \frac{74,6}{\sin\theta_W} = v \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}$$

Kvantväljade teoorias esineb elementaarlaengu  $e$  ja „tuumalaengu“  $g$  vahel seos:

$$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

millest omakorda saamegi väärtused:

$$\frac{e}{\sin\theta_W} = g$$

ja

$$\frac{e}{\cos\theta_W} = g'$$

Eelnevalt esitatud võrduses:

$$q = e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

milles avaldub Weinbergi nurk  $\theta_W \approx 13,5^\circ$ , nähtub nõrga interaktsiooni vahebosonite elektrilaengute olemasolu elementaarlaengu  $e$  seotuse tõttu ja nõrga interaktsiooni vahebosoni  $M_Z$  võrrandi tuletamine. Seda viimast näitame järgnevalt. Näiteks tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$g^2 \sin^2\theta_W = g'^2 \cos^2\theta_W$$

ja viime ühe liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$0 = +g^2 \sin^2\theta_W - g'^2 \cos^2\theta_W$$

Viimasest ongi näha seda, et negatiivne ja positiivne elektrilaeng annab tulemuseks alati neutraalse laengu. See tähendab seda, et nõrga interaktsiooni vaheboson  $M_W$  saab olla elektriliselt laetud positiivselt või negatiivselt, kuid seevastu vaheboson  $M_Z$  peab olema neutraalse laenguga, kuna just viimasest võrdusest saame tuletada vahebosoni  $M_Z$  avaldise. Näiteks kui viimase võrduse „vahe“ asemel oleks „summa“, siis saaksime järgmiselt:

$$2 g^2 \sin^2\theta_W = 2 g'^2 \cos^2\theta_W = g^2 \sin^2\theta_W + g'^2 \cos^2\theta_W$$

See on sellepärast nii, et me hakkame tuletama massi võrrandit ja mass ei saa olla null. Korrutame viimaste võrduste kõik pooled jagatise  $\frac{v^2}{4}$ :

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2\theta_W = 2 \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2\theta_W = \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2\theta_W + \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2\theta_W$$

Tulemuseks saame järgmised võrdused, millest üks avaldub:

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2\theta_W = \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2\theta_W + \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2\theta_W$$

ehk

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W}$$

ja teine avaldub:

$$2 \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2 \theta_W = \frac{v^2 g^2}{4} \sin^2 \theta_W + \frac{v^2 g'^2}{4} \cos^2 \theta_W$$

ehk

$$2 \frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

Viimaste võrduste põhjal saame luua võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} 2 \frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W} \\ 2 \frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W} + \frac{v^2 g'^2}{4} \end{cases}$$

ja teades eelnevalt nõrga interaktsiooni vahebosoni  $M_W$  avaldist, saame järgmised massi avaldised:

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} = 2 M_W^2$$

ning

$$2 \frac{v^2 g'^2}{4} = 2 M_W'^2$$

Kogu järgneva analüüsi huvides jagame võrrandite süsteemis olevat avaldist

$$2 \frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W}$$

kahega

$$\frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g'^2}{4} \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W}$$

ja pärast seda viime „nurgafunktsioonid“ võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{v^2 g^2}{4} \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g'^2}{4}$$

Saadud võrrandile liidame mõlemale poolele jagatise  $\frac{v^2 g^2}{4}$ :

$$\frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g^2}{4} \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

Täpselt samasugust analüüsi kasutame ka võrrandite süsteemis oleva teise võrrandi korral:

$$2 \frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

milles jagame võrrandi mõlemad pooled taas kahega:

$$\frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W}$$

ja viime „nurgafunktsioonid“ taas võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W} = \frac{v^2 g^2}{4}$$

Kui saadud võrrandi mõlemale poolele liidame jagatise  $\frac{v^2 g'^2}{4}$ :

$$\frac{v^2 g'^2}{4} + \frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

siis me näeme seda, et viimane avaldis võrdub ka järgmiselt:

$$\frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

mistõttu saame omakorda väga huvitava võrduse:

$$\frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g'^2}{4} + \frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W}$$

Kuna eespool oleva analüüsi tõttu kehtivad järgmised seosed:

$$\frac{v^2 g^2}{4} = \frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W}$$

ja

$$\frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = \frac{v^2 g'^2}{4}$$

siis seega pärast lihtsat matemaatilist teisendust saame võrduseks nulli:

$$\frac{v^2 g^2}{4} - \frac{v^2 g'^2 \cos^2 \theta_W}{4 \sin^2 \theta_W} = \frac{v^2 g'^2}{4} - \frac{v^2 g^2 \sin^2 \theta_W}{4 \cos^2 \theta_W} = 0$$

ehk  $0 = 0$ , mis tõestab hiljuti saadud seose kehtivust:

$$\frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4}$$

Teades eelnevalt nõrga interaktsiooni vahebosoni  $M_W$  avaldist

$$\frac{v^2 g^2}{4} = M_W^2$$

millest omakorda võib järeldada:

$$\frac{v^2 g'^2}{4} = M_W'^2$$

siis sellest tulenevalt saamegi avaldise:

$$M_W^2 + M_{W'}^2 = \frac{v^2 g^2}{4} + \frac{v^2 g'^2}{4} = M_Z^2$$

mis juba kirjeldabki meie otsitavat vahebosonit  $M_Z$ . Näiteks teisendame matemaatiliselt viimast avaldist järgmiselt:

$$M_Z^2 = \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2)$$

ja kui võtame võrrandi mõlemast poolest ruutjuure, siis saamegi nõrga interaktsiooni vahebosoni  $M_Z$  avaldise:

$$M_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}$$

ehk

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}$$

mis peab olema neutraalse elektrilaenguga.

Nõrga jõu vahebosonid ( koos elektromagnetilise interaktsiooni vahebosoniga ) tuletatakse Weinberg-Salami mudelis läbi Higgsi mehhanismi, mis seisneb sümmeetria spontaanses rikkumises. Higgsi väli on kahekomponendiline ehk kompleksne väli:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Weinberg-Salami mudelis muudetakse kalibratsiooninvariantne lagranžiaan  $L$  ( mis kirjeldabki Higgsi välja ):

$$L = (\partial_\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$$

lokaalselt kalibratsiooninvariantseks. Selleks teostatakse mudelis järgmine asendus:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + g \vec{\alpha} * \vec{W}_\mu + g' B_\mu$$

milles  $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ja  $\alpha_0$  on kalibratsioonteisenduse parameeter ning  $W_\mu^i$  ja  $B_\mu$  on vastavad „kompenseerivad väljad“, mis kalibratsioonteisendusel teisenevad järgmiselt:

$$\vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \times \vec{W})$$

ja

$$B_\mu \rightarrow B_\mu - \frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha_0$$

Higgsi mehhanismi kasutades saadakse massid  $M$  järgmistele „kombinatsioonidele“:

$$W_\mu^+ = W_\mu^1 + i W_\mu^2$$

ja

$$W_\mu^- = W_\mu^1 - i W_\mu^2$$

mildest nähtub elektrilaenguga nõrga jõu vahebosoni mass:

$$M_W = \frac{1}{2} v g$$

Kuid sellisele kombinatsioonile:

$$Z^0_\mu = \frac{g W^3_\mu - g' B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

vastab elektrilaenguta nõrga jõu vahebosoni mass:

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}$$

ja vektorvälja kombinatsioonile:

$$A_\mu = \frac{g' W^3_\mu + g B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

vastab selline osake, millel polegi massi:

$$M_A = 0$$

Viimane arvatakse olevat footon, kuid massita vaheboson võib põhimõtteliselt olla ka gluuon. Masside M saamiseks pidi pöörama „vektorit“ ( $W^3, B$ ) nurga  $\theta_W$  võrra:

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}$$

Näiteks:

$$A_\mu = \cos \theta_W * B_\mu + \sin \theta_W * W^3_\mu$$

ja

$$Z_\mu = -\sin \theta_W * B_\mu + \cos \theta_W * W^3_\mu$$

Weinbergi nurga eksperimentaalne väärtus on  $\theta_W \approx 13,5^\circ$ . Koos eelnevalt esitatud massidega esineb ka Higgsi skalaarboson  $\sqrt{2\lambda v^2}$ , mis on Higgsi välja osake. Vaakumkeskmise  $v$  ja nõrga interaktsiooni seoskonstant (s.t. Fermi konstant)  $G$  on omavahel seotud:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

Selles esineb vaakumi potentsiaali väärtus:

$$v = 246 \text{ GeV}$$

ning nõrga jõu vahebosoni massid:

$$M_W = \frac{37,3}{\sin \theta_W} \text{ GeV}$$

ja

$$M_Z = \frac{74,6}{\sin \theta_W}$$

Siinkohal on oluline märkida seda, et kui siduda saadud väljad kalibratsiooninvariantsele elektron-neutriino ja teiste vooludega, siis me näeme seda, et nõrga jõu vaheboson  $W^\pm$  on laetud elementaarlaenguga  $e$ :

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$$

Kogu eelnevalt kirjeldatud mudelit nimetatakse Weinberg-Salami mudeliks ehk elektronõrgaks ühendmudeliks, mis valmis juba 1967. aastal.

### 1.5.12 Kasutatud kirjandus

„Elementaariosakeste füüsika standardmudel“, Ain Ainsaar, Tallinna Pedagoogikaülikool, Teoreetilise füüsika õppetool, TPÜ Kirjastus, Tallinn 1998.

## 1.6 Lainefunktsioon ja kvantpõimumine

Osakeste lained ei ole keskkonna lained. Osakeste laineomadused avalduvad osakeste liikumisel ( näiteks difraktsiooni- ja interfereentsikatsete käigus ), kuid korpuskulaaromadused avalduvad osakeste vastastikmõjus ( näiteks põrgetel ). Osakese lainet kirjeldava valemi tuletamiseks teostame kosmoloogia osas tuletatud ajas rändamise üldvõrrandis

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c$$

järgmised matemaatilised teisendused. Näiteks kui selles võrrandis:  $ct = 0$ , siis saame järgmise võrrandi

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c .$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled  $t'$ -ga:

$$\frac{vt'}{t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{ct'}{t'}$$

ja sellest tulenevalt saame võrrandi kujuks:

$$v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

ehk visuaalselt paremini esitatuna:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

või

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Kuna aja dilatatsiooni võrrand, mis on tuletatav samuti ajas rändamise üldvõrrandist, on kujul

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

siis seetõttu saame kinemaatilise teguri avaldada järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}.$$

Ajas rändamise üldvõrrandist tuletatud valemi

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

saame seega viia järgmisele matemaatilisele kujule:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{ct}{t'}$$

ehk

$$v = c \frac{t}{t'}.$$

Selles viime  $t'$  teisele poole

$$vt' = ct$$

ja teisendame viimast võrrandit kujule:

$$v \Delta t = ct,$$

milles  $\Delta t = t'$ . Viimasest tuletatud väga olulisest võrrandist

$$v \Delta t = ct$$

on selgelt näha seda, et keha  $m$  liikumiskiirus  $v$  sõltub aja kulgemisest või keha liikumiskiirus ise tingib aja kulgemise iseloomu:

$$v = \frac{ct}{\Delta t}$$



Teepikkus  $ct$  võib olla valguse teepikkus tavaruumis  $K$  või seisumassiga keha teepikkus hyperruumi  $K'$  suhtes:

$$v = \frac{s}{\Delta t},$$

milles  $s = ct$ . Kui me eelnevalt tuletatud võrrandis

$$v \Delta t = ct$$

korrutame mõlemad pooled impulsiga  $p$  ehk  $mc$ -ga:

$$mcv \Delta t = mc^2 t$$

milles  $\Delta t = t'$  ja  $mc^2 = E$  on erirelatiivsusteoorias tuntud seisuenergia, siis saamegi seose „energia korda aeg“, mis on Plancki konstandi  $h$  dimensiooniks kvantmehaanikas:

$$mct' = Et = \text{const} = h$$

Sellest tulenevalt saame de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  „definiitsiooni“:

$$ct' = \frac{Et}{mv} = \frac{h}{p} = s = \lambda$$

ja saame ka seisuenergia „lahutamatus“ kvandienergiast:

$$E = mc^2 = hf$$

Eespool tuletatud võrrand  $ct' = \lambda$  on tegelikult võrdne ka järgmise valemiga:

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda$$

või

$$ct = \lambda$$

milles  $v = 0$ . Näiteks kui me viime kordaja liikme  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  teisele poole võrdusmärgi:

$$ct = \lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ja aja dilatatsiooni võrrandist

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

asendame ruutjuure kordaja järgmiselt

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

saamegi võrduse

$$ct = \lambda \frac{t}{t'}$$

ehk

$$ct' = \lambda$$

Saadud võrdusest saame seose

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{t'} = f$$

või

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{t} = f$$

mis defineeritakse füüsikas laine sagedusena. Sellest on näha, et laine sagedus  $f$  ja keha kiirus  $v = c$  on seotud järgmiselt:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

De Broglie arvas esimesena, et peale korpuskulaaromaduste on mikroosakestel veel ka lainelised omadused, nii nagu oli valguse puhul. Footonil on energia  $E$

$$E = hf$$

ja impulss  $p$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{2\pi h}{\lambda}$$

De Broglie idee järgi on elektroni või mõne teise osakese liikumine seotud lainega, mille pikkus on

$$\lambda = \frac{2\pi h}{p} = \frac{2\pi h}{mv}$$

ja sagedus  $f$  on

$$f = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$$

De Broglie selline oletus on nüüd tuntud kui de Broglie hüpoteesina, mis on leidnud katseliselt kinnitust. Ülal välja toodud valemities on  $h$  jagatud  $2\pi$ -ga. Antud juhul käsitletakse osakest, millel on lainelised omadused, mitte vastupidi – lainet, millel on korpuskulaarsed ( osakeste ) omadused. Broglie valem seob omavahel osakeste laineomadusi (  $\lambda$  ) ja korpuskulaaromadusi (  $m$ ,  $v$ ,  $p$  ). Osakeste lained on leiutõenäosuse lained ehk leiulained. Laine intensiivsus ( amplituudi ruut ) antud punktis ja hetkel määrab osakese leidmise tõenäosuse selles kohas ja sellel ajahetkel.

De Broglie hüpotees seisnes selles, et kui valguse osakest footonit oli võimalik käsitleda lainena, siis järelikult võis ka kõiki ülejäänud osakesi vaadelda kui lainena. See tähendab seda, et peale footonite on ka kõikidel teistel osakestel lainelised omadused. Kuid de Broglie ei pannud tähele siin ühte olulist asja. Nimelt valguse osakesed footonid liiguvad vaakumis kiirusega  $c$ , mille korral on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni. Ajas rändamise teooria tõlgenduse järgi eksisteerivad footonid „väljaspool“ aegruumi, sest liikudes vaakumis kiirusega  $c$  on aeg aeglenenud lõpmatuseni

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

ja ruumi pikkus lühenenud samuti lõpmatuseni

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$$

( ehk aega ja ruumi enam ei eksisteeri ). Kui footonitel esinevad lainelised omadused, siis kas see tuleneb sellest, et need footonid eksisteerivad „väljaspool“ aegruumi? Kui see on tõesti nii, siis peaks see kehtima ka kõikide teiste osakeste korral, millel esinevad samuti lainelised omadused. Ajas rändamise teooria tõlgenduse järgi teleportreeruvad „väljaspool“ aegruumi ehk hyperruumis olevad kehad aegruumis.

Absoluutselt kõik kehad Universumis liiguvad tegelikult valguse kiirusega  $c$ , kuid sellest on pikem matemaatiline analüüs

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

esitatud ajas rändamise füüsikateooria relatiivsusteooria osas ja seetõttu ei hakka me seda siin enam pikemalt käsitlema.

Välisvaatleja jaoks on valguse kiirusega liikuvale kehal kiiruseks  $c$ , kuid kiirusega  $c$  liikuva keha enda suhtes ehk n.ö. „omaajas“ jõuab see mistahes ruumipunkti Universumis ühe hetkega ehk tema kiirus on seega lõpmata suur. See tähendab seda, et valguse kiirusega liikuvale kehal on liikumiskiirus omaajas lõpmata suur, kuid samas välisvaatleja suhtes on selle keha kiirus ikkagi  $c$ . Tekib küsimus, et kui osake jõuab omaajas mistahes ruumipunkti ja ajahetke Universumis kõigest 0 sekundiga, siis kuidas saab osakese liikumiskiirus välisvaatleja suhtes olla  $c$  ehk võrdne valguse kiirusega vaakumis või sellest väiksem kiirus? Ükskõik kui suur on vahemaa ruumis

$$\Delta x = c \Delta t$$

valgus läbib selle teepikkuse omaajas alati 0 sekundiga

$$\Delta t = 0$$

Kui mingi keha jõuab mistahes ruumipunkti 0 sekundiga ehk keha läbib mingi vahemaa 0 sekundiga, siis on võimalik seda mõista teleportatsioonina ja keha teleportatsioon ei sõltu vaatlejast ehk see ei ole suhteline nähtus – s.t. teleportatsioon on mistahes vaatleja suhtes ikka teleportatsioon. Kehad teleportreeruvad aegruumis, kui nende liikumiskiirused lähenevad lõpmatusele:

$$v \rightarrow \infty$$

Lõpmata suure kiiruse korral jõuab keha mistahes ruumipunkti Universumis kõigest 0 sekundiga. Eelnevalt püstitatud dilemma lahendus seisneb selles, et osake teleportreerub:

1. ruumipunktist A ajahetkel  $t_1$  ruumipunkti B ja ajahetke  $t_2$
2. ruumipunktist B ajahetkel  $t_2$  ruumipunkti C ja ajahetke  $t_3$
3. ja niimoodi lõputult edasi.

Osake võib teleportreeruda mistahes ruumipunkti ja mistahes ajahetke ( kuid ajas ainult edasi ). See tähendab seda, et osake teleportreerub ajas ja ruumis korraga ning seda pidevalt ehk lakkamatult. Kui osake teleportreerub ajas ja ruumis lakkamatult, siis seega ei ole võimalik täpselt ette teada, et

millisesse ruumipunkti osake teleportreerub ja millisesse ajahetke. Seetõttu arvutatakse välja tõenäosused iga võimaliku ruumipunkti ja ajahetke kohta, kuhu osake ( teleportreerumisel ) jõuda võib. Kõik need tõenäosused on nullist erinevad ja summeerides kõik need tõenäosused, saame tulemuseks:

$$P = 100 \%$$

Osakese tõenäosusjaotust ajas ja ruumis mõjutavad teised füüsikalised kehad nagu näiteks pilu, millest osake läbi läheb. Seda tõenäosusjaotust ajas ja ruumis võib ettekujutada kui vee lainena, millel on lainelised omadused. Seetõttu võib öelda, et tegemist on osakese tõenäosuslainega, mis levib ajas ja ruumis. See, mis juhtub vee lainega pilu läbimisel, juhtub sama ka osakese tõenäosuslainega, mis läbib samuti pilu. Tulemuseks on osakese laineline käitumine.

On täiesti selge, et kui osakesel esinevad lainelised omadused, siis seda osakest on võimalik kirjeldada ka lainena. Edasiseks analüüsiks teisendame näiteks aja dilatatsiooni võrrandi järgmiselt:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

ehk

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

ja võtame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$1 - \frac{R}{r} = \left(\frac{t}{t'}\right)^2$$

Teisendame jälle:

$$1 - \left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \frac{R}{r}$$

Viimases võrrandis avaldub Schwarzschildi raadius R võrrandina:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Teades seisuenergia võrrandi definitsiooni:  $E = mc^2$ , millest omakorda saame massi M matemaatilise definitsiooni energia E kaudu:

$$\frac{E}{c^2} = m = M$$

saame Schwarzschildi raadiuse R võrrandi kujuks:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2GE}{c^4}$$

Eespool tõestasime kvantmehaanikas kasutatava Plancki konstandi  $h$  ligikaudse seose:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = h$$

ja impulssi p kehtivuse:

$$\frac{1}{2GE} = p$$

MÄRKUS. Plancki konstandi  $h$  ligikaudse väärtuse kehtivust on võimalik tõestada impulssi  $p$  seose

$$\frac{1}{2GE} = p = mc$$

kaudu. Näiteks selleks teostatakse järgmine matemaatiline teisendusakt:

$$\frac{1}{2Gm} = Ec$$

ja korrutatakse viimase võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga:

$$\frac{c^2}{2Gm} = \frac{1}{R} = Ec^3$$

Viimasest võrrandist saame:

$$\frac{1}{c^3} = ER$$

ja kui me jagame saadud võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$ -ga:

$$\frac{1}{c^4} = E \frac{R}{c} = Et$$

milles me arvestasime kiiruse  $v$  definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$v = c = \frac{s}{t}$$

siis saame määramatuse relatsiooni energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$h = Et$$

mis kattubki Plancki konstandi  $h$  dimensiooniga: „energia korda aeg“.

Sellest tulenevalt saame Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandi kujuks:

$$R = \frac{2GE}{c^4} = \frac{h}{p} = \lambda$$

mis annab omakorda gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemi kujuks:

$$1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2 = \frac{R}{r} = \frac{h}{xp}$$

ehk

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] = \frac{h}{xp}$$

Üldrelatiivsusteooria järgi on gravitatsiooniväli aegruumi kõverus. Aegruumi kõverust näitab

näiteks gravitatsiooniline aja dilatatsioon, mille kehtivust on ka eksperimentaalselt tõestatud. Eespool oleva analüüsi järgi saame selle valemi kujuks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{xp}}}$$

Kuna  $xp$  korrutis saab olla ainult võrdne Plancki konstandiga  $h$ :

$$xp = h$$

kuna

$$x = r = \lambda = \frac{h}{p}$$

siis saame tulemuseks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{h}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{t}{0} = \infty$$

Sellest järeldub, et kui aeg ja ruum on kõverdunud ehk teisenenud lõpmatusele

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{h}{h}} = l_0 \sqrt{1 - 1} = 0$$

( s.t. kui aja ja ruumi eksisteerimised lakkavad olemast ), siis hakkavad avalduma kvantmehaanika seaduspärasused, mis seisneb peamiselt selles, et footoni või mõne teise osakese liikumine on seotud lainega, mille pikkus on:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Aeg ja ruum on kõverdunud lõpmatusele näiteks musta augu tsentris oleva Schwarzschildi pinnal ehk aegruumi lõkspinnal.

Järgnevalt uurimegi osakese lainet veidi lähemalt. Selleks kirjutame välja siinuselise laine võrrandi, mis liigub  $x$ -telje sihis:

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

$k$  on lainearv ja see on seotud lainepikkusega:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Tavaliselt esitatakse selline laine kompleksarvulisel kujul:

$$\psi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)}$$

Esitatakse kompleksarvulisel kujul sellepärast, et eksponente on matemaatiliselt lihtne diferentseerida ja integreerida. Klassikalises füüsikas on lihtne just laine kompleksarvulisel kujul teha matemaatilisi arvutusi. Kuna füüsikalised suurused on reaalarvulised, siis tuleb pärast arvutusi reaalsosa eraldada. Viimane seos ongi välja toodud kompleksarvulise laine reaalsosa. Kuid viimase seose ( laine ) on võimalik avaldada ka energia  $E$  ja impulsi  $p$  kaudu:

$$\omega = \frac{E}{h}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{h}$$

$$\psi(x, t) = Ae^{-\frac{i}{h}(Et - px)}$$

Viimane siinuseline laine on välja toodud osakese-karakteristikute kaudu ( näiteks energia, impulss, mass jne ), kuid varem oli laine kuju antud laine-karakteristikute kaudu ( näiteks sagedus, lainearv jne ). Järgnevalt leiame de`Broglie laine faasikiiruse:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

Albert Einsteini erirelatiivsusteoorias tuntakse osakese impulsi ja energia vahelist seost:

$$v_f = \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{p} > c$$

Kuid siin on näha seda, et de`Broglie laine faasikiirus on valguse kiirusest ( vaakumis ) suurem. Kuna valguse kiirust vaakumis ei saa ületada, siis de`Broglie laine ei saa ilmselt reaalselt osakest kirjeldada. Siinuseline laine, mis on lõputu, on tegelikult idealiseeritud, sest seda tegelikult ei ole looduses olemas. Faasikiirus näitab aga sama faasiga punktide levimiskiirust, mitte aga konkreetse osakese levimiskiirust. Uurida tuleb laine rühmakiirust. Olemasolevad lained on üldjuhul ruumis ikkagi lokaliseeritud. Need kujutavad endast mitme ( tihti lõputu ) siinuselise laine superpositsiooni. Just ruumis liikuvat osakest võibki selline lokaliseeritud lainet ehk lainepaketti kujutada. Laine rühmakiirus annab levimiskiiruse järgmiselt:

$$v_r = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$$

ehk

$$v_r = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}.$$

Vaakumis liikuva valguslainete faasi- ja rühmakiirused omavahel ühtivad. Rühmakiiruse valemit saab kasutada ainult siis, kui esineb dispersioon ehk kui lainete faasikiirus sõltub sagedusest. Kui dispersioon on null ehk:

$$\frac{dv_f}{d\lambda} = 0,$$

siis rühmakiirus  $v_r$  on võrdne faasikiirusega  $v_f$ . Rühmakiirus  $v_r$  võib faasikiirusest  $v_f$  olla suurem või väiksem. Relatiivsusteooriast on teada energia, massi ja impulsi vahelist seost:

$$E = mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

ja siin ongi näha seda, et de`Broglie osakese rühmakiirus on võrdne osakese tegeliku liikumiskiirusega  $v$ :

$$v_r = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v$$

Nendest võrranditest järeldub selgesti ka see, et osakese kirjeldamine lainena on täiesti võimalik. Siinkohal tuleb märkida ka veel seda, et osakese lainepikkused  $\lambda$  on rühma kuuluvate lainete varieeruvad lainepikkused või osakese lainepikkus  $\lambda$  vastab rühma moodustavate komponentlainete näitajatele.

Kuna valguse kiirus vaakumis on looduse piirkiirus, siis esmapilgul tundub, et osakeste teleportreerumised ajas ja ruumis võimaldavad ületada valguse kiirust vaakumis või lihtsalt ei allu selle looduse piirkiirusele. Keha teleportatsioon ajas ja ruumis on ju võrdne keha lõpmatu suure kiirusega. Kuid sellegipoolest osakesed siiski alluvad relatiivsusteooria nõuetele. Näiteks mitte ükski keha Universumis ei ületa valguse kiirust vaakumis. Osakesed küll tõesti teleportreeruvad ajas ja ruumis, kuid see põhjustab ju osakeste lainelisi omadusi ehk osake käitub kui laine. Seetõttu võib aegruumis liikuvat osakest kujutada lainepaketina ehk lokaliseeritud lainena, mis kujutab endast mitme või lõputu siinuselise laine superpositsiooni. See tähendab ka seda, et osakese lainepakett kannab endas impulsi ja energiat ning selle lainepaketi levimiskiirust näitab laine rühmakiirus, mis ongi võrdne ka osakese reaalse liikumiskiirusega. Ja see allub juba täielikult relatiivsusteooria põhinõuetele. Osakesed järgivad seega relativistliku mehaanika seadusi.

Kui mingi keha jõuab mistahes ruumipunkti 0 sekundiga ehk keha läbib mingi vahemaa 0 sekundiga, siis on võimalik seda mõista teleportatsioonina. Kehad teleportreeruvad aegruumis, kui nende liikumiskiirused lähenevad lõpmatusele:

$$v \rightarrow \infty$$

Lõpmata suure kiiruse korral jõuab keha mistahes ruumipunkti Universumis kõigest 0 sekundiga.

Teleportreerumisel ei läbi keha ruumis kõiki ruumipunkte nagu tavalise liikumise puhul. Sama on tegelikult ka ajas teleportreerumisega. Näiteks kui keha teleportreerub ajas, siis see läbib samuti erinevaid tõkkeid nagu ruumi teleportatsiooni korralgi. See tähendab seda, et kui keha X teleportreerub ühest ajahetkest teise ajahetke ja nende ajahetkede vahepeal eksisteeris keha Y, siis see keha Y ei sega kehal X jõuda ühest ajahetkest teise ajahetke.

Järgnevalt esitame mõned postulaadid, mis kirjeldaksid olukorda ( loogiliselt peaksid paika ), kui füüsikalised kehad ehk järgneval juhul osakesed tõepoolest teleportreerusid ajas ja ruumis:

1. Osake teleportreerub ruumipunktist A ajahetkel  $t_1$  ruumipunkti B ja ajahetke  $t_2$ , ruumipunktist B ajahetkel  $t_2$  ruumipunkti C ja ajahetke  $t_3$  jne jne. Osake võib teleportreeruda mistahes ruumipunkti ja mistahes ajahetke ( kuid ajas ainult edasi ). Osake teleportreerub ajas ja ruumis korraga ning seda pidevalt.
2. Teleportreerumisel ruumis asub osake mistahes ruumipunktis x ainult 0 sekundit. Kuid ühest ajahetkest teise ajahetke teleportreerumisel ilmneb selge aja vahe. Osakese teleportreerumine ajas toimub ainult tuleviku suunas ( osake teleportreerub ajas edasi ).
3. Osake teleportreerub ruumipunktist A ajahetkel  $t_1$  ruumipunkti B ja ajahetke  $t_2$  ning ruumipunktist B ajahetkel  $t_2$  edasi ruumipunkti C ja ajahetke  $t_3$  jne. Osake võib teleportreeruda mistahes ruumipunkti, kuid ajas ainult edasi. Järelikult oma teleportreerumistel ajas ja ruumis „eksisteerib“ osake mistahes ruumipunktis ( kuhu ta teleportreerub ) ja mistahes ajahetkel ( millisesse ajahetke ta teleportreerub ) 0 sekundit ning osake ei eksisteeri ka ajahetkede vahepealsel perioodil, mil osake teleportreerub ühest ajahetkest teise. Samuti ka ruumipunktide vahelises piirkonnas, mil osake teleportreerub ühest ruumipunktist teise ruumipunkti. Kuna osake ei eksisteeri üheski aegruumi punktis,



siis seega pole osakest reaalselt ka olemas. Osake ei asu kõikjal aegruumis korraga, nagu siiani on seda arvatud. Sellest tulenebki osakese füüsikaliste parameetrite ( mass, kiirus, impulss, energia jne ) määramatused. Küll aga osake teleportreerub teatud aegruumi osas ( näiteks elektron mingisugusel aatomi kindlal orbiidil ) ja selles osas on osake olemas.

4. Osakese asukoha täpsus ruumis sõltub sellest, et kui suures ruumimõõtkavas me osakest jälgime. Näiteks väga suures ruumimõõtkavas on osakese asukoht ruumis alati täpselt teada. Kuid samas väga väikeses ruumimastaabis ilmneb juba osakese asukoha määramatus. Osakese asukoht ruumis ei ole enam nii kindlalt fikseeritud. See tähendab ka seda, et teatud üliväikeses ruumipiirkonnas osake teleportreerub aegruumis. Näiteks elektroni asukoha määramatus on vesiniku aatomis nii suur, et see on peaaegu võrdne aatomi enda raadiusega. Seepärast elektroni ei vaadelda kindlat trajektoori mööda liikuva osakesena, vaid elektroni kujutatakse ette aatomis tuuma ümber oleva elektronpilvena. Aatomis kaob elektron ühelt orbiidilt ja ilmub välja siis teises kohas orbiidil. Kuid selline nähtus on ju sisuliselt teleportatsioon. Seetõttu ongi elektroni liikumine aatomis tõenäosuslik. Osakese liikumistrajektoori ei ole.
5. Energia jäävuse seaduse järgi ei kao ega teki juurde energiat. Kui aga keha teleportreerub ühest ruumipunktist teise, siis jääb mulje, et sellest samast kehast tekib „hetkeks“ kaks samasugust keha, sest teleportreerumine ruumis ei võta enam aega. Keha ( ehk energia ) juurde tekkimine mitte millegi arvelt on vastuolus energia jäävuse seadusega. Kuna keha teleportreerub ruumis lõpmata väikese aja perioodi jooksul ja seega eksisteerib üks keha kahes erinevas ruumipunktis korraga lõpmata väikese ajaperioodi jooksul, siis seega energia jäävuse seaduse rikkumist ei ole võimalik otseselt tuvastada.

Nendest postulaatidest ongi võimalik järeldada seda, et kui osake teleportreerub ajas ja ruumis pidevalt, siis seega ei ole võimalik täpselt ette teada seda, et millisesse ruumipunkti osake teleportreerub ja millisesse ajahetke. Seetõttu arvutatakse välja tõenäosused iga võimaliku ruumipunkti ja ajahetke kohta, kuhu osake ( teleportreerumisel ) jõuda võib. Kõik need tõenäosused on nullist erinevad ja summeerides kõik need tõenäosused, saame tulemuseks:

$$P = 100 \%$$

Osakese tõenäosusjaotust ajas ja ruumis mõjutavad teised füüsilised kehad, näiteks pilu, millest osake läbi läheb. Seda tõenäosusjaotust ajas ja ruumis võib ettekujutada kui vee lainena, millel on lainelised omadused. Seetõttu võib öelda, et tegemist on osakese tõenäosuslainega, mis levib ajas ja ruumis. See, mis juhtub vee lainega pilu läbimisel, juhtub sama ka osakese tõenäosuslainega, mis läbib samuti pilu. Tulemuseks ongi osakese laineline käitumine.

Max Born oli esimene füüsik, kes tõlgendas elektronilaineid omal ajal leiutõenäosuse lainetena. Osakeste leiulained on lained, mis määravad osakeste leiutõenäosust ajas ja ruumis. Lainefunktsioon  $\psi(x,y,z,t)$  määrab ära osakese leiutõenäosuse ajas ja ruumis. Osakese leiutõenäosus  $\psi^2$  mingis ruumipunktis ja ajahetkel on alati positiivne. See ei saa olla kunagi negatiivne.

Osakese ajas ja ruumis levivat tõenäosuslainet ( või lihtsalt osakese füüsikalist olekut ) kirjeldab matemaatiliselt lainefunktsioon:

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

ja selle lainefunktsiooni mooduli ruut

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

annabki tõenäosustiheduse osakese asukoha leidmiseks ajahetkel  $t$  (  $\psi^*$  on  $\psi$  kaaskompleks ). Sellest

tulenevalt saame leida osakese asukoha tõenäosuse ruumielemendis  $dV$ :

$$dW = |\psi|^2 dV.$$

See tähendab seda, et lainefunktsiooni absoluutväärtuse ruut on võrdeline tõenäosusega leida osakest vastavas ruumipunktis ja vastaval ajahetkel. Osakese lainefunktsioon peab olema ühene, lõplik ja pidev funktsioon. Ka selle tuletis peab olema pidev. Lainefunktsioon peab olema normeeritud

$$\int |\psi|^2 dV = 1,$$

mis tähendab seda, et osakest on võimalik kusagil ruumis leida. Tõenäosuste summa on alati 1 ( diskreetsel kujul ):

$$\psi^*(z_1) * \psi(z_1) + \psi^*(z_2) * \psi(z_2) + \dots + \psi^*(z_n) * \psi(z_n) = 1$$

ehk

$$\sum_n \psi_n^* \psi_n = 1$$

kuid pidevuse kujul:

$$\int \psi^*(z) \psi(z) dz = 1$$

ehk

$$\int \psi^* \psi d\vec{x} = 1$$

kus  $d\vec{x} = x_1, x_2, x_3$ . Olekufunktsiooni võime alati korrutada mistahes arvuga. Lainefunktsioon otseselt mõõdetav füüsikaline suurus ei ole, mõõta saab ainult tõenäosust:

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

kus A on normeerimiskordaja, lainefunktsiooni ruumiline osa

$$\psi \sim e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

ja ajaline osa

$$\psi \sim e^{2\pi i f t}$$

milles A on nendes mõlemates 1. Kuid vabaoleku osakese funktsioon on

$$\psi \sim e^{2\pi i k x}.$$

Kuna aga lainefunktsioon annab tõenäosuse, nimetatakse seda tihti ka tõenäosusamplituudiks. Lainefunktsiooni mooduli ruut annab tõenäosustiheduse. Lainefunktsiooniga on määratud vaadeldava osakese olek ja tema edaspidine käitumine. Statsionaarsete olekute lainefunktsioon on aga

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-i(\frac{E}{\hbar})t} \psi(x, y, z).$$

Sellisel juhul ei sõltu lainefunktsiooni tõenäosustihedus ajast:

$$\Psi \Psi^* = e^{-i(\frac{E}{\hbar})t} \psi e^{i(\frac{E}{\hbar})t} \psi^* = \psi \psi^*$$

Kompleksed suurused on lainefunktsioon ja selle ruut, kuid reaalarvuna võib väljenduda ainult tõenäosus.

Termodünaamika teine seadus ütleb meile seda, et kõik looduslikud protsessid kulgevad nende olekute tõenäosuse kasvamise suunas. Seega seisneb entroopia mõiste suurima tõenäosusega oleku saavutamises:

Suurima võimaliku entroopiaga olekule vastab alati suurima tõenäosusega olek.

Isoleeritud süsteem läheb “iseenesest” väiksema tõenäosusega makrokonfiguratsiooniga olekust kõige tõenäolisema makrokonfiguratsiooniga olekusse.

Entroopia on võrdeline süsteemi mikrooleku realiseerumise tõenäosuse logaritmi keskvaartusega. Entroopia on “olekufunktsioon”, mis sõltub ainult süsteemi makroolekust. Entroopia ei sõltu protsessist, mille tagajärjel realiseerub süsteemi makroolek. See tähendab, et entroopia kirjeldab süsteemi makrooleku korrapäratust või määramatust.

Osakese tõenäosuslainet on võimalik kirjeldada lainepaketina, mis on ruumis lokaliseeritud ja mida on võimalik esitada teatud lainepikkusega siinuseliste lainete superpositsioonina. Järgnevalt näeme seda, et mida suurem on superpositsiooni lainearvude vahemik, seda kitsam on lainepakett. See kehtib ka vastupidisel juhul. Lainearv ja impulss on omavahel seotud. Järgnevat analüüsi alustame aga Fourier'i integraalist. Fourier'i integraal on Fourier'i rea üldistuseks mitteperioodiliste funktsioonide juhule. Ühe muutuja funktsiooni  $f(x)$  Fourier'i integraal on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dx$$

$g(k)$  funktsioon on  $f(x)$  funktsiooni Fourier'i pööre, mida on võimalik  $f(x)$  funktsiooni kaudu välja arvutada järgmiselt:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dk.$$

Praeguses näites vaatame aga teatud kindlal ajahetkel olevat lainepaketti. Lainepaketi kuju on võimalik esitada Gaussi jaotusena:

$$f(x) = A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

$\sigma$  nimetatakse dispersiooniks, mis iseloomustab jaotuse laiust. Antud näites saab osakese tõenäosuslainet kirjeldada lainepaketina. Järelikult dispersioon kirjeldab siin osakese asukoha määramatust:

$$\Delta x = \sigma$$

Kui me  $f(x)$  funktsiooni esitame Fourier'i integraalina, siis avaldub  $f(x)$  siinuseliste lainete  $e^{ikx}$  superpositsioonina.  $k$  on lainearv ja  $\lambda$  on lainepikkus:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Lainepaketi lainearvu ja amplituudi komponente näitabki eespool väljatoodud  $g(k)$  funktsioon. Kui me  $g(k)$  funktsioonis asendame  $f(x)$  funktsiooniga

$$f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

saame järgmise integraali

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx} dx. \end{aligned}$$

Arvestades kompleksmuutuja funktsioonide teooriat saame integraali arvutada niimoodi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + i\beta} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

kus

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma^2} \quad \text{ja} \quad \beta = -k.$$

Integraal võtab kuju

$$g(k) = A\sigma e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}.$$

Viimane seos näitab, et ka Fourier'i pööre on Gaussi jaotus, kuid lainearvu funktsioonina. Suurus  $\frac{1}{\sigma}$  näitab dispersiooni. Lainearvu määramatus avaldub

$$\Delta k = \frac{1}{\sigma}.$$

Kui me määramatusi korrutame, saame

$$\Delta x \Delta k = 1$$

See näitabki eespool väljatoodud seost, et mida suurem on superpositsiooni lainearvude vahemik, seda kitsam on lainepakett ja vastupidi. Lainearv  $k$  ja osakese impulss  $p$  on seotud

$$p = \hbar k$$

ja seega saamegi määramatuse seose osakese asukoha ja impulsi vahel järgmiselt:

$$\Delta x \Delta p = \hbar.$$

Nagu me näeme on tulemus täpselt sama mis on juba eespool matemaatiliselt välja tuletatud. See tähendab, et osakeste määramatuse seoseid on võimalik tuletada puhtalt lainet kirjeldavatest võrranditest ja samas ka (eri)relatiivsusteooria võrranditest (s.t. antud juhul ajas rändamise teooria üldvõrrandist). Kuna lõpptulemused on matemaatiliselt täpselt samad ehk omavahel ekvivalentsed, siis võib füüsikaliselt järeldada seda, et osakeste lainelised omadused tulenevad just sellest, et need osakesed teleportreeruvad meie tajutavas aegruumis. Näiteks valguse osakesed „foonid“ liiguvad vaakumis kiirusega  $c$ , mille korral on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni. Ajas rändamise teooria tõlgenduse järgi eksisteerivad foonid „väljaspool“ aegruumi, sest liikudes vaakumis kiirusega  $c$  on välisvaatleja suhtes aeg aeglenenud lõpmatuseni ja keha pikkus lühenenud samuti lõpmatuseni (ehk aega ja ruumi enam ei eksisteeri). Foonite lainelised omadused tulenevad just sellest, et need osakesed eksisteerivad „väljaspool“ aegruumi ja see kehtib ka kõikide teiste osakeste korral, millel esinevad samuti lainelised omadused. Ajas rändamise teooria üldvõrrandi diferentsiaaltõlgenduse

järgi teleporteeruvad „väljaspool“ aegruumi ehk hyperruumis olevad kehad meie tajutavas aegruumis.

Lainefunktsiooni reaalseks näiteks vaatleme järgnevalt mingi suvaliselt valitud pinna valgustust. Valguslaine elektrivektori ruudu keskvärtus mõõdab valguse intensiivsust. Valguslaine amplituudi ruut on laineteooria järgi võrdeline valgustatusega pinna mingisuguses punktis, kuid kvantteooria järgi on valgustatus ( ja seega valguslaine amplituudi ruut ) võrdeline hoopis valguse osakeste voo tihedusega. Valgusosake ehk footon kannab endas energiat ja impulsi. Footoni langemisel mingis pinna punktis vabaneb seal energia. Footoni langemist pinna mingisugusesse punkti määrab ära tõenäosus, mis sõltub valguslaine amplituudi ruudu väärtusest. Footoni leidmise tõenäosust ruumalas  $dV$  kirjeldab diferentsiaalvõrrand:

$$dW = \chi A^2 dV$$

kus  $\chi$  on võrdetegur ja  $A$  on valguslaine amplituud. Tõenäosustihedus avaldub nõnda:

$$\frac{dW}{dV} = \chi A^2$$

Oletame, et meil on selline lainefunktsioon, mis on normeeritud ühele

$$\psi'(r,t) = N\psi(r,t)$$

kus  $N$  on mingi konstant. Mõlemad lainefunktsioonid ehk  $\psi'(r,t)$  ja  $N\psi(r,t)$  kirjeldavad füüsikalist olekut, mis on tegelikult üks ja sama. Teades seda, et

$$|\psi'|^2 = |\psi|^2$$

ja

$$\int_{\infty} |\psi(r,t)|^2 dV = A,$$

kus arv  $A$  on lihtsalt selle integraali väärtus, saame leida normeerimisteguri  $N$  järgmiselt:

$$\int_{\infty} |\psi'(r,t)|^2 dV = 1 = |N|^2 \int_{\infty} |\psi(r,t)|^2 dV = |N|^2 A$$

ehk

$$|N|^2 A = 1$$

Kuid  $N$  võib olla reaalarvuline ja seega saame:

$$N = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

See näitab seda, et näiteks Schrödingeri võrrandi lahend ( mida me hiljem vaatame palju täpsemalt ) - lainefunktsioon üldse - on tegelikult määratud konstantse faasiteisenduste täpsuseni ehk mitte üheselt, sest kehtib järgmine faasiteisendus:

$$|\psi'|^2 = (\psi')^* \psi' = e^{-i\alpha} \psi^* e^{i\alpha} \psi = \psi^* \psi = |\psi|^2,$$

kus  $\alpha$  on suvaline reaalarv. Summaarne tõenäosus on alati võrdne ühega. Alguses leitakse võrrandi mingi üldine lahend ja siis seda kasutades sobiv normeerimistegur. Kui aga lainefunktsiooni integraal

$$\int |\psi(r, t)|^2 dV$$

pole lõplik ehk

$$\int_{\infty} |\psi(r, t)|^2 dV \rightarrow \infty,$$

siis lainefunktsioon ei ole normeeritav, ehkki võib olla pidev ja lõplik. Vaatame näiteks ühte kindla energia ja impulsiga osakest, mis „liigub“ x-telje sihis, mida kirjeldab võrrand

$$\varphi_1(x) = A e^{ikx}$$

Selle ( lainefunktsiooni ) mooduli ruut ( mis on seotud osakese leidmise tõenäosusega ) tuleb:

$$|\varphi_1(x)|^2 = A^* e^{-ikx} A e^{ikx} = |A|^2.$$

Kuna osakesel on kindel impulss, siis tema impulsi määramatus on  $\Delta p = 0$  ja seetõttu on ka osakese asukoht x-teljel määramata ehk  $\Delta x = \infty$ . See tähendab seda, et osakese leidmise tõenäosus on kõikjal ühesugune ehk osakest on võimalik leida võrdse tõenäosusega mistahes x-telje punktist. Sellest tulenevalt ei saa  $|\varphi_1|^2$  normeerida üheks. Näiteks

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = \infty.$$

Kuid sellegipoolest on  $|\psi|^2 dV$  peaaegu võrdne tõenäosusega leidmaks osakest mingis asukohas ruumis dV ehk

$$dP \sim |\psi(r, t)|^2 dV$$

Viimase järgi saame võrrelda omavahel erinevates ruumpunktides olevaid tõenäosusi.

Mikroosakeste süsteemi olekufunktsioonis

$$\Psi(q_1, q_2) = \psi_1(q_1) * \psi_2(q_2)$$

on olemas näiteks kaks osakest:  $\psi_1(q_1)$  ja  $\psi_2(q_2)$ , kus  $q_1$  ja  $q_2$  on koordinaadid. Osake või kvantsüsteem võib olla kahes erinevas olekus, mida kirjeldavad vastavalt lainefunktsioonid  $\psi_1^{(1)}$  ja  $\psi_1^{(2)}$ . Sellisel juhul võib osake olla ka olekutes, mida kirjeldatakse olekute  $\psi_1^{(1)}$  ja  $\psi_1^{(2)}$  lineaarse kombinatsioonina:

$$\Psi = c_1 \psi_1^{(1)} + c_2 \psi_1^{(2)}.$$

Kui aga  $\psi_1^{(1)}$  ja  $\psi_1^{(2)}$  ei ole ortogonaalsed, siis saab neist moodustada 2 lineaarset kombinatsiooni, mis on omavahel ortogonaalsed:

$$\hat{L} \Psi = c_1 \hat{L} \psi_1^{(1)} + c_2 \hat{L} \psi_1^{(2)} = c_1 \lambda_1 \psi_1^{(1)} + c_2 \lambda_1 \psi_1^{(2)} = \lambda_1 \Psi.$$

Koefitsientide  $c_1$  ja  $c_2$  mooduli ruudud

$$|c_1|^2 \text{ ja } |c_2|^2$$

annavad vastavate olekute esinemise tõenäosused. Seda nimetatakse superpositsiooniprintsiibiks. Superpositsiooniprintsiibi korral liituvad osakeste olekufunktsioonid, mitte tõenäosused:

$$\psi^* \psi = (c_1^* \psi_1^* + c_2^* \psi_2^*) (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = |c_1|^2 |\psi_1|^2 + |c_2|^2 |\psi_2|^2 + c_1^* c_2 \psi_1^* \psi_2 + c_2^* c_1 \psi_2^* \psi_1$$

milles olev avaldis

$$c_1^* c_2 \psi_1^* \psi_2 + c_2^* c_1 \psi_2^* \psi_1$$

on interfereents liikmed. Kaaskompleks on imaginaararvu vastas märk.

Superpositsiooniprintsiibi järele on osakeste põimunud olekud, kui tegemist on enam kui ühe osakesega. Omavahel ühenduses olnud kaks footonit ( näiteks on need kiiratud üheskoos välja mõnest aatomist ) jäävad ühendusse ka mistahes suure vahemaa korral. See tähendab ka seda, et samas protsessis tekkivate osakeste vahel kehtivad jäävusseadused. Põimunud olekud on superpositsiooniprintsiibi järele, kui tegemist on enam kui ühe osakesega. Superpositsiooniprintsiibi järgi viibib footon mitmes olekus ühe korraga. Teaduskeeles öelduna seisneb superpositsiooniprintsiip üksteist välistavate ehk ortogonaalsete olekute koosseisist.

„Ortogonaalsus“ tähendab „risti olema“. Risti on ainult siis, kui skalaarkorrutis on null.

Superpositsiooniprintsiibi korral liituvad osakeste olekufunktsioonid, mitte tõenäosused. Kvantpõimumise korral on mõlemad osakesed enne mõõtmist tundmatu olekus. Ühe osakese mõõtmine annab infot ka teise osakese kohta. See tähendab seda, et ühe osakese mõõtmise tulemus mõjutab teist osakest silmapilkselt, mis ei sõltu osakeste vahekaugusest. Põimunud olekud taanduvad mõõtmisel klassikalisteks olekuteks.

Kvantpõimituse korral ( mida mõnikord nimetatakse ka kvantteleportatsiooniks ) ei teleportreeru osake otseselt ühest ruumipunktist või ajahetkest teise, vaid ühe osakese mõõtmise tulemus mõjutab teist osakest silmapilkselt, mis ei sõltu osakeste vahekaugusest. Seetõttu on kvantpõimitus teleportatsiooni eriliik ( s.t. erijuht ) nii nagu oli näiteks aja dilatatsioon erijuht rändamaks ajas tulevikku kui selle asemel saaks kasutada aegruumi tunnelit, mis võimaldaks teleportreeruda. Kvantpõimitus näitab väga selgelt kvantmehaanika tulenemist osakeste teleportreerumistest aegruumis nii nagu seda näitab ka osakeste läbimine barjäärist teatud tõenäosuse olemasolul.

Kui osake teleportreerub ajas ja ruumis pidevalt/lakkamatult, siis seega ei ole võimalik täpselt ette teada seda, et millisesse ruumipunkti ja millisesse ajahetke osake teleportreerub. Seetõttu arvutatakse välja tõenäosused iga võimaliku ruumipunkti ja ajahetke kohta, kuhu osake ( lakkamatu teleportreerumise tõttu ) jõuda võib. Kõik need tõenäosused on nullist erinevad ja summeerides kõik need tõenäosused, saame tulemuseks:

$$P = 100 \%$$

Osakese tõenäosusjaotust ajas ja ruumis mõjutavad teised füüsilised kehad, nagu näiteks pilu, millest osake võib läbi minna. Seda tõenäosusjaotust ajas ja ruumis võib ettekujutada kui vee lainena, millel on lainelised omadused. Seetõttu võib öelda, et tegemist on osakese tõenäosuslainega, mis levib ajas ja ruumis ning mille lainepikkus  $\lambda$  võrdubki:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

See, mis juhtub vee lainega pilu läbimisel, juhtub sama ka osakese tõenäosuslainega, kui see läbib pilu. Tulemuseks on osakese laineline käitumine.

Osakese ajas ja ruumis levivat tõenäosuslainet ( või lihtsalt osakese füüsikalist olekut ) kirjeldabki matemaatiliselt lainefunktsioon:

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

ja selle lainefunktsiooni mooduli ruut

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

annabki tõenäosustiheduse osakese asukoha leidmiseks ajahetkel  $t$  (  $\psi^*$  on  $\psi$  kaaskompleks ). Sellest tulenevalt saame leida osakese asukoha tõenäosuse  $dW$  ruumielemendis  $dV$ :

$$dW = |\psi|^2 dV$$

See tähendab seda, et lainefunktsiooni absoluutväärtuse ruut on võrdeline tõenäosusega leida osakest vastavas ruumipunktis ja vastaval ajahetkel. Kuid osakese lainefunktsioon võib avalduda ka järgmiselt:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

milles  $c$  kordajad on võrdsed tõenäosusega. Tõenäosus ise avaldub ainult ruudus:  $|c_1|^2$  ja  $|c_2|^2$ . Viimane võrrand kirjeldab tegelikult ka osakeste kvantpõimumist, mille korral liituvad osakeste olekufunktsioonid, mitte tõenäosused. Näiteks ühe osakese spinni olekut kirjeldab lainefunktsioon:

$$|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle$$

ehk

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

kuid samas kahe osakese olekut:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Nüüd on selgesti näha seda, et kahe osakese spinni olekut kirjeldab ÜKS lainefunktsioon:

$$|\psi\rangle = c_1|00\rangle + c_2|11\rangle$$

ja lainefunktsioon ise tulenes osakese lakkamatust teleportreerumisest ajas ja ruumis. See viib mõttelisele eksperimendile, et kui üks lainefunktsioon ( s.t. ühe osakese tõenäosusvälja ) „eraldada“ ruumis kaheks erinevaks väljaks ( nii võib see juhtuda näiteks kahe osakese tekke protsessil ), siis tekiks kaks erinevat tõenäosusvälja ehk kaks erinevat osakest, mille korral peaksid need jääma omavahel „teleportatsiooniliselt seotuks“ mistahes vahemaa korral. Näiteks omavahel ühenduses olnud kaks footonit, mis on kiiratud üheskoos välja mõnest aatomist, jäävad „ühendusse“ ka mistahes suure vahemaa korral. Mõlemad osakesed on enne mõõtmist tundmatu olekus. Ühe osakese mõõtmine annab infot ka teise osakese kohta. See tähendab seda, et ühe osakese mõõtmise tulemus mõjutab teist osakest silmapilkselt ( ehk kõigest 0 sekundiga ), mis ei sõltu osakeste vahekaugusest. Sellised olekud taanduvad mõõtmisel klassikalisteks olekuteks.

Kvantpõimumise korral ( mida mõnikord nimetatakse ka kvantteleportatsiooniks ) ei teleportree-ru osake otseselt ühest ruumipunktist või ajahetkest teise, vaid ühe osakese mõõtmise tulemus mõjutab teist osakest silmapilkselt ehk 0 sekundiga, mis ei sõltu osakeste vahekaugusest. Kuid see võib vihjata sellele, et kvantpõimumine ise tuleneb osakeste teleportreerumistest ajas ja ruumis täpselt nii nagu osakeste läbimine barjäärist teatud tõenäosuse olemasolu korral.



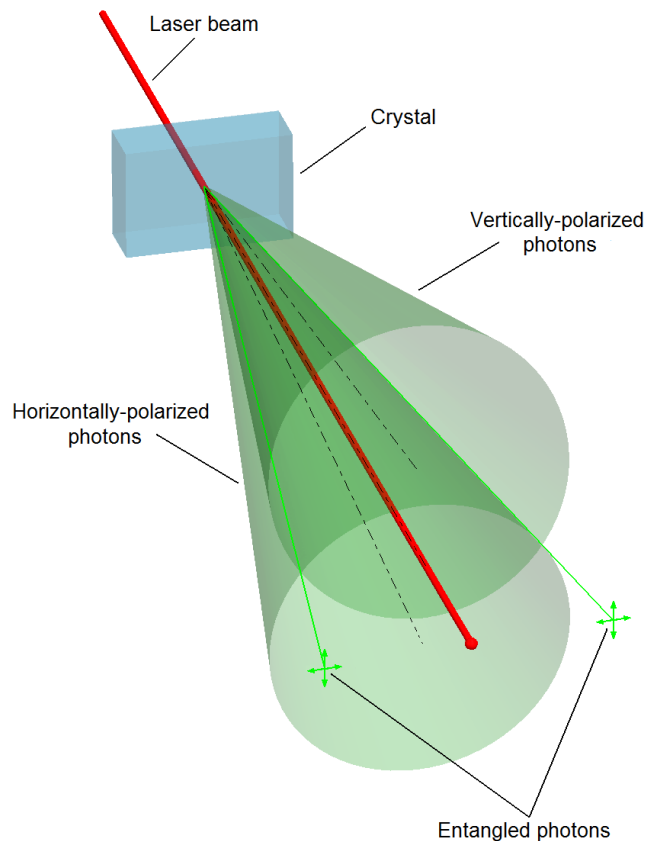


Foto allikas: [https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_entanglement#/media/File:SPDC\\_figure.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_entanglement#/media/File:SPDC_figure.png)

*Joonis 1 Osakeste vahel esineb kvantpõimumine ainult siis, kui need osakesed on tekkinud ühes ja samas protsessis.*

Lainefunktsioon ise ju tulenes osakeste lakkamatust teleportreerumistest ajas ja ruumis ning osakeste vahel esineb kvantpõimumine ainult siis, kui need osakesed on tekkinud ühes ja samas protsessis ( näiteks footonid võivad olla kiiratud üheskoos välja mõnest aatomist ). See kattub üsna täpselt sellise mõttelise katsega, et kui üks lainefunktsioon

$$\psi = \psi(x, y, z, t) = \psi(\vec{r}, t)$$

„eraldada“ ruumiliselt kaheks lainefunktsiooniks

$$\psi(\vec{r}, t) = c_1\psi_1(\vec{r}, t) + c_2\psi_2(\vec{r}, t)$$

siis peaksid need jääma omavahel „teleportatsiooniliselt seotuks“, mis võib seisneda selles, et näiteks ühe osakese mõõtmise tulemus mõjutab teist osakest kõigest 0 sekundiga:

$$|\psi\rangle = c_1|00\rangle + c_2|11\rangle$$

ja see ei sõltu osakeste vahekaugusest, kuna teleportatsioon väljendub füüsikaliselt lõpmata suure kiirusena:

$$v = \infty$$

Kui üks lainefunktsioon „eraldada“ ruumis kaheks erinevaks lainefunktsiooniks, siis peaksid need jääma omavahel „teleportatsiooniliselt seotuks“. Järgnevalt näitamegi seda, et mida selline lause sisuliselt tähendab ja kuidas selline „asi“ üldse võimalik on:

1. KORDAME. Kui osake teleportreerub ajas ja ruumis pidevalt/lakkamatult, siis seega ei ole võimalik täpselt ette teada seda, et millisesse ruumipunkti ja millisesse ajahetke osake teleportreerub. Seetõttu arvutatakse välja tõenäosused iga võimaliku ruumipunkti ja iga võimaliku ajahetke kohta, kuhu osake ( lakkamatu teleportreerumise tõttu ) jõuda võib. Kõik need tõenäosused on nullist erinevad ja summeerides kõik need tõenäosused, saame tulemuseks 100 %. Osakese tõenäosusjaotust ajas ja ruumis mõjutavad teised füüsilised kehad, nagu näiteks pilu, millest osake võib läbi minna. Seda tõenäosusjaotust ajas ja ruumis võib ettekujutada kui vee lainena, millel on lainelised omadused. Seetõttu võib öelda, et tegemist on osakese tõenäosuslainega, mis levib ajas ja ruumis ning mille lainepikkus  $\lambda$  võrdubki de Broglie valemiga. See, mis juhtub vee lainega pilu läbimisel, juhtub sama ka osakese tõenäosuslainega, kui see läbib pilu. Tulemuseks on osakese laineline käitumine.
2. Kui üks lainefunktsioon „eraldada“ ruumis kaheks erinevaks lainefunktsiooniks, siis sellisel juhul teleportreerub üks osake korraga kahes erinevas ruumiipiirkonnas ( mitte enam ühes ruumiipiirkonnas ) ja seda pidevalt/lakkamatult. Sellisel juhul moodustab üks ja sama osake ruumis kaks erinevat tõenäosusvälja, mis võivad olla ruumiliselt eraldatud mistahes vahemaa korral. Ruumis eksisteerivad kaks erinevat tõenäosusvälja tähendab füüsikaliselt ka kaks erinevat osakest ( näiteks kaks identset footonit või kaks identset elektroni ).
3. Sellisel juhul mõjutab näiteks ühe osakese mingisuguse oleku või füüsikalise suuruse muutus teist osakest kõigest 0 sekundiga ja see ei sõltu osakeste vahekaugusest, kuna teleportatsioon väljendub füüsikaliselt lõpmata suure kiirusena. Näiteks ühe osakese massi, kvandenergia või lainepikkuse muutuse tõttu muutub silmapilkselt ka teise osakese mass, kvandenergia või lainepikkus ja seda mistahes vahemaa korral.
4. Kuid lainefunktsiooni matemaatilise analüüsi tulemusena võib väita, et ainult spinni oleku mõõtmise tulemus mõjutab teise osakese spinni olekut kõigest 0 sekundiga, mis ei sõltu osakeste vahekaugusest. See tähendab seda, et osakeste kvantpõimumine esineb ainult osakeste spinnide olekute vahel.
5. Kuna osakeste kvantpõimumine esineb ainult osakeste spinnide olekute vahel, mis on omakorda seotud osakeste omamagnetmomendiga ehk osakeste magnetväljaga ( mitte osakeste massi, kvandenergia või lainepikkustega ), siis kvantpõimumine võib põhimõtteliselt esineda ka erinevate liikide osakeste vahel, näiteks elektroni ja footoni vahel.

Osakese käitumine aegruumis on tõenäosuslik ja sellest tulenevalt on osakesel lainelised omadused. Osakest kirjeldab tõenäosuslaine, mis „koosneb“ erinevate arvvaartustega leiutõenäosustest. Tõenäosuslaine amplituud määrab ära osakese maksimaalse leiutõenäosuse. Kvantmehaanika seaduste järgi võib osakeste tõenäosuslained olla omavahel seotud läbi kvantpõimumise. Matemaatiliselt kirjeldab osakest olekufunktsioon:

$$\psi(x, y, z, t)$$

milles koordinaadid on olekufunktsiooni argumendiks. Olekufunktsioon võib avalduda ka

järgmiselt:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

milles  $c$  kordajad on võrdsed tõenäosusega. Tõenäosus ise avaldub ainult ruudus:  $|c_1|^2$  ja  $|c_2|^2$ . Kirjeldamiseks just kvantpõimumist peame  $c$  kordajate ja  $\psi$  lainefunktsioonide väärtuste saamiseks lahendama ära osakeste spinnide maatriksoperaatorite omaväärtusülesanded:

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = s_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ja

$$\hat{S}_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

milles avalduvad spinnide maatriksoperaatorid vastavalt koordinaatidele:

$$\hat{S}_z = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\hat{S}_x = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spinnide operaatorite omaväärtusülesande lõpplahenduse tulemuseks saadakse järgmine avaldis:

$$\varphi_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c^+ \varphi_z^+ + c^- \varphi_z^- = c^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mis tähendab seda, et mõõta saab spinni ühe projektsiooni tõenäosust teise projektsiooni kaudu. Kui me nüüd võrdleme viimast saadud avaldist olekufunktsiooni võrrandiga:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

siis me näeme, et  $c$  kordajad võrduvad:

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ja  $\psi$  funktsioonid avalduvad vastavalt:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ning

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kuna maatriksid avalduvad ka niimoodi:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle = |\uparrow\rangle$$

ja

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle = |\downarrow\rangle$$

siis saame olekufunktsiooni võrrandi lõplikuks kujuks:

$$c_1|0\rangle + c_2|1\rangle = |\psi\rangle$$

milles „normeerimistingimus“ peab võrduma ühega:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Kuna tegemist on ainult ühe osakese spinni oleku kirjeldamisega:

$$\varphi_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \hat{H}|0\rangle = H|0\rangle$$

siis kahe osakese spinni olekut kirjeldaks võrrand:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

Kuid matemaatilise ranguse tõttu tuleb kahe osakese oleku kirjeldamiseks teha „transformatsioon“, mis annabki meile viimase võrrandi:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle \xrightarrow{(C-NOT)gate} \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

ehk

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle$$

kusjuures

$$\text{conc}(\psi) = 2|\sin(\theta) \cos(\theta)| = |\sin(2\theta)|$$

Saadud võrrandid ongi osakeste spinnide kvantpõimumiste „matemaatilised põhidefinitsioonid“ ehk põhivõrrandid.

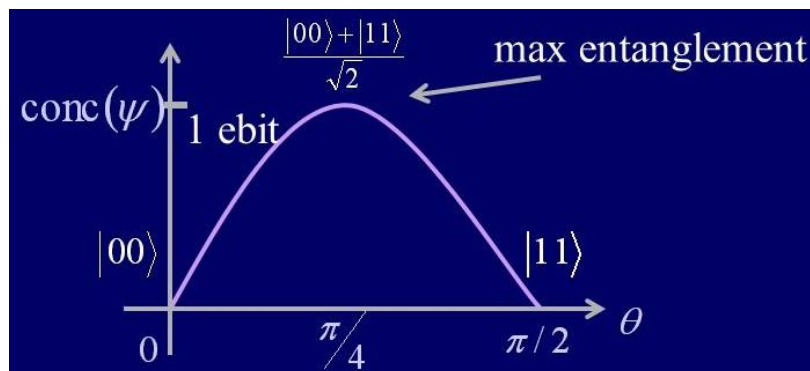


Foto allikas: [http://images.slideplayer.com/26/8717367/slides/slide\\_7.jpg](http://images.slideplayer.com/26/8717367/slides/slide_7.jpg)

Joonis 2 Saadud võrrand näitab maksimaalset põimumist.

Ühe osakese spinni olekut kirjeldavas võrrandis:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{|0\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

ehk

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

näitavad kordajate  $a$  ja  $b$  ruudud tõenäosust  $P$ :

$$|a|^2 = P_{|0\rangle}$$

ja

$$|b|^2 = P_{|1\rangle}$$

kuna tõenäosus avaldub kvantmehaanikas ainult ruudus ja normeerimistingimus võrdub alati ühega:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Kuid kahe osakese spinni oleku „põimumist“:

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$$

on sellisel juhul võimalik kirjeldada matemaatiliselt järgmiselt:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = \\ &= ac|0\rangle + ad|1\rangle + bc|2\rangle + bd|3\rangle = \\ &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle \end{aligned}$$

kuid seda ainult juhul, kui kehtib mittevõrdus:

$$\alpha\delta \neq \beta\gamma$$

Võrduse korral osakeste põimumist aga ei esine:

$$\alpha\delta = \beta\gamma$$

Põhimõtteliselt võib teha ka sellise „transformatsiooni“ ( $\rightarrow$ ):

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \rightarrow |00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$$

mis annab meile eespool oleva võrrandi kujuks:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle \rightarrow |\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

Sellisel juhul avaldub normeerimistingimus järgmiselt:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$$

Üle-eelmisest võrrandist

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

saame tegelikult ka lühema „versiooni“:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \rightarrow |\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \delta|11\rangle$$

mis võib kattuda eespool tuletatud võrrandiga:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

milles

$$\alpha = \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Selline võrrand kirjeldab väga hästi kahe osakese spinni oleku põimumist, kuna ühe osakese spinni oleku mõõtmine mõjutab teise osakese spinni olekut silmapilkselt. Kuid mittepõimunud olekut kirjeldab võrrand:

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2}$$

ja seda sellepärast, et ühe osakese spinni oleku mõõtmisel jääb teise osakese spinni olek määramatuks.

Siinkohal on huvitav märkida seda, et kui me kahe osakese olekut kirjeldavale lainefunktsioonile

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2} \rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)$$

ehk

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)$$

tahame „lisada“ ka kolmanda osakese olekut kirjeldava lainefunktsiooni:

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow |\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

siis saame tulemuseks järgmise matemaatilise avaldise:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle &= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (|00\rangle + |11\rangle) \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) \end{aligned}$$

See tähendab seda, et kolme osakese spinni olekut kirjeldaks nagu üks lainefunktsioon.

Eelnevalt esitatud matemaatilised avaldised kattuvad ka selliste avaldistega, milles esinevad ka Pauli maatriksid ja EPR:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \rightarrow |\psi\rangle$$

$$(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \rightarrow \sigma_z|\psi\rangle$$

$$(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) \rightarrow \sigma_x|\psi\rangle$$

$$(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) \rightarrow -i\sigma_y|\psi\rangle$$

$$(|00\rangle + |11\rangle)\frac{1}{2} \rightarrow |EPR\rangle$$

Spinn on osakese omaimpulsimoment, millega on seotud vastav magnetmoment. Aatomituuma ümber tiirleva elektroni magnetmomendi ja impulsimomendi vahel esineb seos:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2M}\vec{L}$$

Täpselt samasugune seos tuletatakse ka kvantmehaanikas vastavate operaatoritega:

$$\hat{\mu} = -\frac{e}{2M}\hat{L}$$

Elektroni spinn  $\vec{s}$  ja impulsimoment on ühesuguste matemaatiliste omadustega. Seetõttu on võimalik lainefunktsioonid, mis kirjeldavad elektroni spinni, leida omaväärtusülesandest:

$$\hat{s}^2\chi = h^2s(s+1)\chi$$

ehk

$$\hat{s}_z\chi = h\sigma\chi$$

milles spinni kirjeldav kvantarv on  $s$  ja spinni projektsiooni  $z$ -teljele kirjeldab  $\sigma$ , kusjuures:

$$\sigma = +s, \dots, -s$$

Elektroni spinn ehk spinni kirjeldav kvantarv on:

$$s = \frac{1}{2}$$

kuid spinni projektsiooni väärtused on:

$$\sigma = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Kvantmehaanikas ongi võimalikud nii täis- kui ka poolarvulised spinni väärtused:

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

Kuna magnetmoment ja elektroni spinn on omavahel seotud, siis Sterni-Gerlachi katse tõttu saame seose:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{M}\vec{s}$$

Saadud tulemus on sarnane orbitaalse magnetmomendi ja orbitaalse momendi seosega. Selle järgi saame spinni magnetmomendi projektsiooni  $z$ -teljele:

$$(\vec{\mu}_s)_z = -\frac{eh}{M}\sigma$$

Vastava magnetmomendi väärtus tuleb seega:

$$\mu_s = \frac{eh}{2M} = \mu_B$$

Selline tulemus näitab, et elektroni magnetmoment on aatomis võrdne Bohri magnetroniga, mille väärtuseks on:

$$\mu_B = \frac{eh}{2M} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$$

Viimast elektroni magnetmomendi võrrandit on tegelikult võimalik ka matemaatiliselt tuletada ja näidata ka selle otsest seost kvantmehaanikaga. Osakese omamagnetmoment on rangelt kvantmehaaniline ja seega ei ole sellel klassikalist analoogi. Elektroni omamagnetmomendi avaldist võime põhimõtteliselt tuletada elektrivälja energia E

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

ja eespool tuletatud seisuenergia E

$$E = -\frac{mc^2}{2} = mc^2 = hf$$

valemite omavahelisest võrdusest:

$$-\frac{mc^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

Näiteks võtame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\frac{m^2 c^4}{4} = \frac{q^2 \varphi^2}{4}$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled kahega ( 2 ) ning arvestame kvantväljade teoorias tuletatud valguse kiiruse c ja Plancki konstandi h vahelise seosega:

$$\frac{1}{c^4} \approx \bar{h} = \frac{h}{2\pi}$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{m^2}{2} = \bar{h} \frac{q^2}{2} \varphi^2$$

Järgnevalt oletame, et elektrilaeng q võrdub elementaarlaenguga ehk konstandiga e:

$$\frac{m^2}{2} = \bar{h} \frac{e^2}{2} \varphi^2$$

ja pärast matemaatilisi teisendusi saamegi elektroni omamagnetmomendi avaldise:

$$\frac{M}{2e\varphi^2} = \bar{h} \frac{e}{2M}$$

milles



$$\frac{eh}{2M} = \mu_s = \mu_B$$

Selles on elektroni spinn poolearvuline, mida kirjutatakse välja kvantarvuna. Osakese spinnist sõltub statistika ehk need osakesed alluvad Pauli keeluprintsiibile.

Pauli keeluprintsiip seisneb selles, et ühes ja samas aatomis ei saa olla kahte ühesuguste „kvantarvudega“ elektroni. Pauli keeluprintsiipi tuletatakse matemaatiliselt relativistlikust kvantväljateooriast.

Pauli keeluprintsiip ei kehti 1 spinniga osakeste kohta. Kui spinni ei oleks, siis näiteks kaks osakest saavad aatomis olla korraga ühes olekus. Footonil on spinn 1, kuid bosonil saab olla spinn 0 või 1. Kahekomponendise elektroni olekufunktsioon on spiinor.

Täisarvulist spinnkvantarvu  $s$  omavad osakesed ( näiteks footonid, neutriinod jne ) on kirjeldatavad sümmeetriliste lainefunktsioonidega. Need on bosonid, kuna nende osakeste statistilised ansamblid alluvad Bose-Einsteini statistikale.

Antisümmeetrilised lainefunktsioonid kirjeldavad murdarvulise spinnkvantarvuga osakesi ( näiteks elektronid, prootonid, neutronid jne ). Need on fermionid, kuna nad alluvad Fermi-Diraci statistikale.

$n$  osakese antisümmeetriline lainefunktsioon on avalduv  $n$  järku ( Slateri ) determinandina, mille veeru indeks vastab üheelektroonse spinnorbitali indeksile ning rea indeks osakese järjenumbrile. Suurus  $N$  on võrrandites normeerimiskordaja. Antisümmeetriliste lainefunktsioonide tähtsamad omadused on kooskõlas determinantide omadustega:

1. Näiteks antisümmeetria printsiip seisneb selles, et lainefunktsiooni märk muutub kahe osakese koordinaatide vahetamisel. Determinandi märk muutub determinandi kahe rea vahetamisel.
2. Pauli printsiip ütleb, et ühel spinnorbitalil ei tohi olla rohkem kui üks osake. Determinant on võrdne nulliga, kui determinandi kaks veergu on omavahel võrdsed.
3. Determinandi ortogonaalne transformatsioon ( s.t. determinandi maatriks, korrutis vasakult ja paremalt mingi unitaarse maatriksiga ) ei muuda determinandi väärtust. Sellest järeldub, et Slateri determinandiga kirjeldatud süsteemi kirjeldab ka unitaarset maatriksit sisaldav determinant. See tähendab, et süsteemi on võimalik kirjeldada omavahel ortogonaalse transformatsiooni kaudu seotud erinevate spinnorbitalide komplektidega.

**MÄRKUS.** Siinkohal tasub märkida seda, et eelnevalt saadud elektroni omamagnetmomendi võrdus:

$$\frac{M}{2e\varphi^2} = \hbar \frac{e}{2M}$$

„sisaldab“ selliseid seoseid nagu näiteks seisuenergia ja elektrivälja energia omavahelist võrdust:

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{e\varphi}{2}$$

tuntud seisuenergia avaldist  $E = mc^2$  ja Plancki konstandi  $h$  seost valguse kiirusega  $c$ :

$$\frac{1}{c^4} \approx \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Sellest tulenevalt saab elektroni magnetmomendi võrrandit matemaatiliselt teisendada niimoodi

$$\frac{M}{2E\varphi} = \frac{1}{2c^2\varphi} = \bar{h} \frac{e}{2M}$$

ehk

$$\frac{1}{2c^2} = \bar{h} \frac{E}{M} \approx \frac{1}{c^4} \frac{E}{M}$$

mille tulemusena on võimalik saada tagasi võrrandi esialgne kuju:

$$\frac{mc^2}{2} = E$$

ehk

$$E = -\frac{mc^2}{2}$$

Elektroni poolearvulist spinni saab näidata ka palju rangema matemaatikaga, mis sisaldab endas kvantmehaanikast tuntud operaatorite kommuteeruvust ja omaväärtusülesandeid. Näiteks elektroni spinni kirjeldas omaväärtusülesanne:

$$\hat{s}_z \chi = h\sigma \chi$$

ehk

$$\hat{s}_z \chi = \pm \frac{h}{2} \chi$$

kuid sellist võrrandit võib avaldada ka maatriksite kujul:

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \pm \frac{h}{2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ehk

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = s_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

milles

$$\chi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Viimane võrrand on tegelikult võrdne ka avaldisega:

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} = s_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ja seda ainult juhul, kui spinni operaator avaldub maatriksina:

$$\hat{S}_z = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ning seejuures peab kehtima jääma ka võrdus:

$$s_z = \pm \frac{h}{2}$$

Sarnane analüüs kehtib ka elektroni spinni x-koordinaadi omaväärtusülesande korral:

$$\hat{s}_x \chi = \pm \frac{h}{2} \chi$$

ehk

$$\hat{S}_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

milles

$$\chi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

See tähendab, et viimane võrrand on võrdne ka avaldisega:

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ja seda ainult juhul, kui antud spinni operaator avaldub:

$$\hat{S}_x = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ning seejuures peab kehtima jääma ka võrdus:

$$s_x = \pm \frac{h}{2}$$

Kui me aga tahame teada, et kas operaatorid  $\hat{S}_i$  ja  $\hat{S}_j$  on samaaegselt mõõdetavad, siis tuleb leida nende kommutaator:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \hat{S}_k$$

või

$$S_i = i\hbar [S_j, S_k]$$

Kui  $i = j$ , siis operaatorite kommutaator võrdub nulliga ehk operaatorid kommuteeruvad omavahel. Spinni operaatorid avalduvad kvantmehaanikas maatriksoperaatoritena vastavalt koordinaatidele järgmiselt:

$$\hat{S}_x = \frac{h}{2} \sigma_x = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{h}{2} \sigma_y = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z = \frac{h}{2} \sigma_z = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

Näiteks spinni maatriksoperaatorite:

$$S_x = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

kommutaatori väärtuseks saame

$$[S_x, S_y] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Siinkohal tuleb mainida, et spinni operaatorid:

$$\hat{S}_j = \frac{h}{2} \sigma_j$$

sisaldavad „Pauli maatrikseid“ vastavalt koordinaatidele:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spinni maatriksid võivad avalduda ka kolmerealiste maatriksitena:

$$S_x = \frac{h}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{h}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kuid järgnevalt lahendame ära spinni omaväärtusülesande z-koordinaadi näitel:

$$\hat{S}_z v = s_z v$$

ehk

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = s_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

milles sulgudes olevad avaldised ehk omavektorid ei ole ruumikoordinaadid/ruumivektorid, vaid need on „isotoopilise ruumi vektorid“ ehk „spiniorid“. Spinni omaväärtusülesanne laheneb järgmiselt:

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = s_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ehk

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} = s_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{h}{2} u_1 = s_z u_1 \\ -\frac{h}{2} u_2 = s_z u_2 \end{cases}$$

Viimasest võrrandsüsteemist saame täpselt kaks lahendit. Näiteks kui  $u_1 \neq 0$ , siis saame võrrandist:

$$\frac{h}{2} u_1 = s_z u_1$$

$s_z$  väärtuse:

$$s_z = \frac{h}{2}$$

Eespool olevast võrrandist:

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} = s_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

saame aga sulu väärtuse:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi^+ = u^+ = \varphi$$

kuna normeerimistingimus võrdub ühega:

$$u_1^2 + u_2^2 = 1$$

milles  $u_1 \neq 0$  ja  $u_2 = 0$ . Seega on  $\varphi$  „normeeritud“. Kui  $u_2 \neq 0$ , siis saame võrrandist:

$$-\frac{h}{2}u_2 = s_z u_2$$

$s_z$  väärtuse:

$$s_z = -\frac{h}{2}$$

Võrrand võib põhimõtteliselt võrduda ka:

$$-\frac{h}{2}u_2 = \frac{h}{2}u_2$$

kuna eelnevalt saime:

$$s_z = \frac{h}{2}$$

Eespool tuletatud võrrandis:

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} = s_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

saame sulu väärtuseks:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi^- = u^-$$

kuna normeerimistingimus võrdub ühega:

$$u_1^2 + u_2^2 = 1$$

milles  $u_2 \neq 0$  ja  $u_1 = 0$ . Siinkohal tuleb märkida seda, et sulgudes olevad avaldised on „omavektorid“ ja murruga avaldised on „omaväärtused“:

$$s_z = \begin{cases} \frac{h}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{h}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Kui me aga lahendame spinni omaväärtusülesande x-koordinaadi kaudu:

$$\hat{S}_x u = s_x u$$

siis see laheneb analoogselt eelnevaga järgmiselt:

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ehk

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{h}{2} u_2 = s_x u_1 \\ \frac{h}{2} u_1 = s_x u_2 \end{cases}$$

Kui  $u_2 \neq 0$ , siis saadud võrrandsüsteemis näeme, et  $u_1$  võrdub:

$$u_1 = \frac{h}{2} u_2 \frac{1}{s_x}$$

Sellest tulenevalt saame matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$\frac{h^2}{4} \frac{1}{s_x} u_2 = s_x u_2$$

$$\frac{h^2}{4} u_2 = s_x^2 u_2$$

$$\frac{h^2}{4} = s_x^2$$

$$s_x = \pm \frac{h}{2}$$

Kui  $s_x = \frac{h}{2}$ , siis seega  $u_1 = u_2$ . Sellest järeldub omakorda võrrandis:

$$\frac{h}{2} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = s_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

oleva sulu väärtus:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u^+ = \varphi = \varphi_N^+$$

kuna normeerimistingimusest:

$$|u_1|^2 + |u_1|^2 = 1$$

saame

$$|u_1|^2 = \frac{1}{2}$$

ehk

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kui  $s_x = -\frac{h}{2}$ , siis saame analoogselt eelnevaga:

$$u^- = \varphi_N^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Spinni omaväärtusülesande lahendid z-koordinaatide korral olid:

$$s_z = \frac{h}{2}; \quad u_z^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_z = -\frac{h}{2}; \quad u_z^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja x-koordinaatide korral:

$$s_x = \frac{h}{2}; \quad u_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s_x = -\frac{h}{2}; \quad u_x^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ning y-koordinaatide korral:

$$s_y = \frac{h}{2}; \quad u_y^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$s_y = -\frac{h}{2}; \quad u_y^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

See tähendab seda, et spinni x-suunaline komponent avaldub võrrandina:

$$u_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ehk

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi_x^+ = c^+ \varphi_z^+ + c^- \varphi_z^- = c^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

milles c on mingi kordaja ja

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spinni x-suunalise komponendi võib avaldada ka z-koordinaadi järgi:

$$u_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} u_z^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} u_z^-$$

kuid spinni z-suunalise komponendi saab avaldada omakorda x-koordinaadi järgi:

$$u_z^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} u_x^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} u_x^-$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et mõõdame ühe projektsiooni tõenäosust teise projektsiooni kaudu:

$$T_{\text{öen}}^+ = |c^+|^2 = \frac{1}{2}$$

ja

$$T_{\text{öen}}^- = |c^-|^2 = \frac{1}{2}$$

Tõenäosus avaldub ainult ruudus:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

ja spinn ise ongi poolearvuline. Kui spinn võrdub 1-ga, siis kirjeldab seda kolmekomponendiga vektor.

Eespool tuletasime spinni x-suunalise positiivse komponendi võrrandi, mida on tegelikult võimalik avaldada ka järgmiselt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha + \beta|0\rangle + \alpha - \beta|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

ehk

$$\varphi_x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \hat{H}|0\rangle = H|0\rangle$$

ehk

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \oplus |0\rangle + |1\rangle \oplus |0\rangle)$$

ja

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \hat{H}|1\rangle$$

milles „Hadamard'i transformatsiooniks“ nimetatakse:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sellest saame omakorda vähemalt kahe osakese spinni põimunud oleku kirjeldava üldise võrrandi:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) (|0\rangle \oplus |0\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle \stackrel{(C-NOT)gate}{\rightsquigarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

ehk

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = |\psi\rangle$$

ehk

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + F|10\rangle \right)$$

milles F on „Control-NOT gate“:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kusjuures:

$$|00\rangle + |11\rangle \neq (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$$

ja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = a|00\rangle + b|01\rangle + d|10\rangle + c|11\rangle$$

Viimasest on võimalik saada või juba kirjeldabki kahe osakese vahelisi spinnide olekuid erinevate koordinaatide jaoks:



$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{NOT(X)gate} \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$$

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{(iY)gate} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{(Z)gate} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

Viimaseid avaldiseid võib tähistada järgmiselt:

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Osakeste põimunud olekuid kirjeldavas võrrandis:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

võib tähistada  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$  asemel ka järgnevaid kombinatsioone:

$$|+\rangle \text{ ja } |-\rangle$$

ja

$$|\uparrow\rangle \text{ ja } |\downarrow\rangle$$

Viimane tähendab seda, et kas osakese spinn on suunatud üles või alla:

$$|0\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

või

$$|1\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kahe spinni korral kasutatakse seda „topelt“:

$$|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$$

ning seetõttu on sellel täpselt neli võimalikku „variatsiooni“:

$$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \quad |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$$

kusjuures „triplet`iks“ nimetatakse:

$$\begin{cases} |11\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |10\rangle = \frac{(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{(|+\rangle_x - |-\rangle_x)}{\sqrt{2}} = \frac{(|+\rangle_y - |-\rangle_y)}{i\sqrt{2}} = |\psi\rangle \\ |1-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$$

ja „singlet`iks“:

$$|00\rangle = \frac{(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{2}} = \frac{(|+\rangle_x - |-\rangle_x)}{\sqrt{2}} = \frac{(|+\rangle_y - |-\rangle_y)}{i\sqrt{2}} = |\psi\rangle$$

Need on „nelja-mõõtmelise vektorruumi baasvektorid“. Kvantmehaanikas tähistataksegi kahe osakese spinnide olekute põimumist võrrandina:

$$|\psi_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$$

kuid samas kirjeldatakse mittepõimunud olekuid järgmiselt:

$$|\psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)$$

Mittepõimunud spinnide olekuid tähistatakse ka palju lihtsamalt:

$$|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)|\downarrow\rangle$$

ja samas ka põimunud olekuid:

$$|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$$

$$|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$$

Lainefunktsioonidena avalduvad mittepõimunud olekud võrrandina:

$$\Psi = |\psi_1\rangle|\varphi_1\rangle$$

ja niisamuti ka põimunud olekud:

$$\Psi_P = |\psi_1\rangle|\varphi_1\rangle + |\psi_2\rangle|\varphi_2\rangle$$

Kuid eelnevalt esitatud võrrand:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

on põhimõtteliselt osakeste kvantpõimumise põhivõrrand, kuna seda kasutatakse üsna sageli kvant-teleportatsiooni kirjeldamiseks. Kvantteleportatsiooni kirjeldatakse füüsikas enamasti järgmiste lainefunktsioonidega:

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle))$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)]$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + (|1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - (|1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle))]$$

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2} [ |00\rangle(\alpha|0\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle) + \\ &\quad + |01\rangle(\beta|0\rangle) + |00\rangle(\beta|1\rangle) - |11\rangle(\beta|0\rangle) - |10\rangle(\beta|1\rangle) ] = \\ &= \frac{1}{2} [ |00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) ] \end{aligned}$$

Ühe osakese spinni olekut kirjeldab lainefunktsioon:

$$X|\psi_{01}\rangle = X\alpha|1\rangle + X\beta|0\rangle = \alpha X|1\rangle + \beta X|0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi_{00}\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

kuna

$$X * \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

milles normeerimistingimus avaldub:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Kui me aga lainefunktsiooni „transformeerime“ H-ga, siis saame tulemuseks:

$$\begin{aligned} H|\psi\rangle &= H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (|1\rangle))\right) + \beta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - (|1\rangle))\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(|0\rangle + (|1\rangle)) + \beta(|0\rangle - (|1\rangle))] \end{aligned}$$

## 1.7 Universumi singulaarsused ja termodünaamika

Universumi materia põhivormideks on aine ja väli, kuid materia eksisteerimise põhivormideks on aeg ja ruum. Kui Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ oli Universumi ruumala  $V$  ja massi/energia tihedus  $\rho$  mõlemad lõpmata suured, siis ainuvõimalik füüsikaline tõlgendus oleks sellele see, et see võib näidata mingisuguse ürgse energiavälja olemasolu Universumi pindsingulaarsuse ajal, mille korral ei eksisteerinud Universumis praegu tuntavat vaakumit.

Kuna Universumi ruumala  $V$  on kohe pärast inflatsioonilist paisumist ehk pindsingulaarsuse

„ajal“ lõpmata suur ja seega selles sisalduv massi/energia kogus on samuti lõpmata suur ( NÄI-TEKS galaktikaid oleks Universumis lõpmata palju ), siis seega on Universumi aine-energia tihedus  $\rho$  igal kosmoloogilisel ajahetkel tegelikult konstantne ( väljaarvatud Universumi alg- ehk punkt-singulaarsuse korral ):

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1 = \text{const}$$

See näib olevat kooskõlas üldise massi/energia jäävuse seadusega. Kui aga viimases Universumi tiheduse võrrandis käsitleksime massi/energiat suvalises Universumi asukohas eksisteeriva punkti suhtes, siis saame Universumi aine-energia tiheduseks:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{x}{0} = \infty$$

milles vaadeldav ruumala  $V$  Universumis võrdub nulliga ehk tegemist on Universumi aegruumis eksisteeriva/vaadeldava punktiga:

$$V = 0$$

ja selle punkti suhtes ei võrdu mass/energia enam lõpmatusega:

$$M \neq \infty$$

ega isegi mitte nulliga, vaid mingi kindla arvvaartusega:

$$M = x$$

Näiteks võib mass  $M$  võrduda:

$$M = 10^{-43} \text{ kg}$$

Sellisel juhul ei saa mass  $M$  võrduda lõpmatusega ega nulliga, kuna see pole antud juhul füüsikaliselt reaalne ega usutav. See tähendab seda, et:

1. lõpmata suure ruumalaga  $V$  Universumi suhtes on ka selles sisalduv mass  $M$  lõpmata suur ( näiteks galaktikaid oleks lõpmata suures Universumis lõpmata palju )
2. kuid Universumi aegruumis eksisteeriva/vaadeldava punkti suhtes ei saa mass/energia enam olla lõpmata suur ega isegi mitte null

Sellest tulenevalt võrdub massi/energia tihedus lõpmata suure ruumalaga Universumi suhtes ühega, kuid Universumi aegruumis eksisteeriva lõpmata väikese punkti suhtes aga lõpmatusega. Punktil ei ole mõõtmeid ehk see võrdub füüsikalises mõttes lõpmata väikese ruumalaga. Massi/energia tiheduse klassikalise valemi järgi saaksime aegruumi punkti suhtes mistahes massi/energia arvvaartuse korral ( väljaarvatud nulli korral ) tiheduseks ikkagi lõpmata suure väärtuse, mis eespool oleva analüüsi järgi esines vahetult kohe pärast Universumi inflatsioonilist paisumist ehk Universumi pingsingulaarsuse „ajal“.

Lühidalt võib järeldada seda, et eespool tuletatud Universumi ruumala ja tiheduse suhet kirjeldavast võrrandite süsteemist

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0 \\ r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3 \end{cases}$$

tuleneb omakorda Universumi pindsingulaarsust kirjeldav võrrandite süsteem:

$$\begin{cases} r = \infty \\ \rho = \infty \end{cases}$$

milles me näeme väga selgelt seda, et Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala lõpmata suur ja Universumi massi/energia tihedus samuti lõpmata suur. Selline pealtnäha füüsikaliselt ebareaalne tulemus viitab tegelikult väga selgelt mingisuguse ürgse energiavälja olemasolule, mis antud juhul eksisteeris Universumi pindsingulaarsuse ajal. Näiteks viimasest võrrandite süsteemist võib välja lugeda selle, et:

1. lõpmata suure ruumalaga Universumi korral peab massi/energiat olema selles samuti lõpmata hulk ja see annab massi/energia tiheduseks lõpmata suure Universumi ruumala suhtes ühe:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1 = \text{const}$$

2. kuid samas Universumi aegruumis eksisteeriva punkti suhtes ei saa massi/energiat olla lõpmata hulk ega isegi mitte null ja sellest tulenevalt saame punkti suhtes oleva massi/energia tiheduse lõpmata suure väärtuse:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{x}{0} = \infty$$

Kuid eespool tuletatud Universumi ruumala ja tiheduse suhet kirjeldavast võrrandite süsteemist

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} \rho_0 \\ r^3 = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho}}} R^3 \end{cases}$$

tulenevat Universumi pindsingulaarsust kirjeldavat võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} r = \infty \\ \rho = \infty \end{cases}$$

on põhimõtteliselt võimalik tõlgendada ka teisiti. Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala lõpmata suur ja Universumi massi/energia tihedus samuti lõpmata suur. See viitab väga selgelt mingisuguse ürgse energiavälja olemasolule, mis antud juhul eksisteeris Universumi pindsingulaarsuse „ajal“. Näiteks viimasest võrrandite süsteemist on võimalik tõlgendada ka järgmine Universumi füüsikaline olek ( mis tegelikult sobiks matemaatikaga rohkem kokku ):

1. Lõpmata suure ruumalaga Universumi korral peab massi/energiat olema selles samuti lõpmata hulk ja see annab massi/energia tiheduseks lõpmata suure Universumi ruumala suhtes ühe:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1 = \text{const}$$

2. Mistahes Universumi aegruumi lokaalse piirkonna suhtes ( isegi Universumi aegruumis olevas punktis ) on massi/energiat samuti lõpmata hulk ja sellest tulenevalt saamegi Universumis oleva massi/energia tiheduseks  $\rho$  lõpmata suure väärtuse:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{x} = \infty$$

milles  $x = x$  või  $x = 0$ , kuid  $x \neq \infty$ .

Sellest on võimalik otseselt järeldada, et Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ eksisteeris „ürgne energiaväli“, mis täitis ühtlaselt kogu Universumi aegruumi ( mille tõttu praegu tuntavat vaakumit ei eksisteerinud ) ja ei olnud tsentraalsümmeetriline ( nagu seda on näiteks elektriväli ). Seepärast võib ürgset „energiavälja“ mõista ka kui „energiaruumina“, kuna energiavälja kui materiaa füüsikaliseks eksisteerimiseks on vaja just aega ja ruumi.

Kusjuures kvantelektrodünaamika hajuvad integraalid annavad vaakumi energiaks ja massi tiheduseks samuti lõpmata suured väärtused. Kuid renormeerimine annab neile väärtuseks nulli, kuna mistahes kohta energiaskaalal võime väärtuse lugeda nulliks. Kogu ruumi ühtlaselt täitev energianivoo ei ole reaalselt avaldub. Renormeerimine võimaldab kvantelektrodünaamikas ilmnevad hajuvused ehk lõpmatused omavahel vastuoludeta kompenseerida ehk teooria on konstantide ümberhindamise teel renormeeritav, kuna Feynmani graafikutes esinevad kolme joonega seotud tipud ja footonjoon vastab sellisele osakesele, mille seisumass on null.

Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ oli ( ja on tegelikult ka praegugi ) Universumi ruumala lõpmata suur ja mistahes Universumi aegruumi lokaalses piirkonnas ( isegi Universumi aegruumis eksisteerivas punktis ) oli massi/energiat samuti lõpmata hulk, mille tõttu saame Universumis eksisteeriva massi/energia tiheduseks  $\rho$  ( ja ka ruumalaks  $V$  ) lõpmata suured väärtused:

$$\begin{cases} r = \infty \\ \rho = \infty \end{cases}$$

Kogu Universumi aegruumi täitev energiaväli omab energiat ja massi vastavalt seisuenergia valemile:

$$E = mc^2$$

See energiaväli ei olnud tsentraalsümmeetriline nii nagu seda on näiteks tsentraalsümmeetriline elektrostaatiline väli. See tähendab, et ürgsel energiaväljal puudus ruumis allikas. Energiaväli täitis ühtlaselt kogu Universumi aegruumi, mis oli lõpmata ulatusega ja lõpmata suure energiaga. Sellest tulenevalt oli lõpmata suures Universumis massi/energiat samuti lõpmata palju.

On alust arvata, et sellel „ürgsel energiaväljal“ olid kõik tuntud interaktsioonid Universumis liitunud üheks superjõuks, kuna aegruumi lõkspinnal on näiteks gravitatsioonijõud ja elektrijõud omavahel täiesti võrdsed:

5. Mustade aukude füüsikast tuntud aegruumi lõkspinna füüsikaline olemus kattub täielikult Universumi punkt- ja pindsingulaarsuse füüsikaga.
6. Aegruumi lõkspinnal ei eksisteeri enam aega ega ruumi, täpselt nii nagu Universumi punktsingulaarsuse korralgi, kuna Universumi mõõtmelised olid siis lõpmata väikesed.
7. Kuna Universum paisus punktsingulaarsusest pindsingulaarsuseks lõpmata suure kiirusega ehk praktiliselt „silmapilkselt“, siis seega olid Universumi erinevad interaktsioonid liitunud

ühiks superjõuks ka Universumi pindsingulaarsuse korral.

8. Kuid Universumi pindsingulaarsuse korral eksisteeris Universumis juba ürgne energiaväli, mille korral ei olnud Universumis vaakumit. Sellest järeldub, et ka kõrgetel energiatel ühinevad omavahel erinevad interaktsioonid üheks jõuks.

Näiteks gravitatsioonijõud ja elektri jõud on aegeuumi lõkspinnal omavahel täiesti võrdsed, kusjuures gravitatsiooniväli ei ole energiaväli. Aegeuumi kõverus põhjustab gravitatsioonijõu olemasolu Universumis. Ülejäänud interaktsioonid on oma olemuselt energiaväljad. Aegeuumi lõkspinna raadiust  $R$  kirjeldab tuntud Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrand:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \frac{G}{c^2} \frac{E}{c^2} = \frac{GE}{c^4} = \frac{G}{c^4} E = \frac{G}{c^4} k \frac{q^2}{r} = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

ehk

$$R = \frac{G}{c^4} k \frac{q^2}{R}$$

mis esineb näiteks gravitatsioonilises aja dilatatsiooni valemis „aegeuumi lõkspinna näitel“:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

Eelviimasest nähtub „Plancki jõu  $F_p$  definitsioon“:

$$F_p = \frac{Gm^2}{r^2} = \frac{Gm^2}{\left(\frac{Gm}{c^2}\right)^2} = \frac{Gm^2 c^4}{G^2 m^2} = \frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} = 1,2 * 10^{44} \text{ N}$$

Selle järgi on aegeuumi lõkspinnal gravitatsioonijõud ja elektri jõud omavahel täiesti võrdsed:

$$F_g = G \frac{m^2}{R_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R_2^2} = F_{el}$$

milles esineb Schwarzschildi raadius:

$$R_1 = \frac{Gm}{c^2}$$

ja „Nordströmi raadius“:

$$R_2 = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Kuna „Plancki jõu“ võrrandis:

$$F_p = \frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2}$$

esineb  $c^4$  ja  $G$ , siis vastavalt seisueenergia ruudu seosele  $E^2 = m^2 c^4$  ja Newtoni gravitatsioonijõule  $F = \frac{Gm^2}{r^2}$  saame võrrandit matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$F_p = \frac{c^4}{G} = \frac{E^2}{m^2} \frac{m^2}{Fr^2}$$

Tulemuseks saamegi elektrijõu ja gravitatsioonijõu täieliku võrduse:

$$F^2 = \frac{E^2}{r^2} = F^2$$

ehk  $F = F$ .

Vesiniku aatomist on teada, et kaks elementaarset elektrilaengut vahekaugusega  $r$ :

$$r = 5,3 * 10^{-11} \text{ m}$$

mõjutavad üksteist elektrijõuga  $F$ :

$$F = 8,2 * 10^{-8} \text{ N}$$

Sellise vahekauguse korral oleks kahe prootoni vaheline gravitatsioonijõud  $F$ :

$$F = 6,6480 * 10^{-44} \text{ N}$$

Sellest tulenevalt on elektrijõud suurem gravitatsioonijõust

$$\frac{c^3}{G} \pi = \frac{F_{el}}{F_g} = 1,233 * 10^{36}$$

korda. Viimane võrrand „tuletatakse“ avaldisest:

$$\frac{c^4}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}$$

ehk

$$\frac{c^2}{G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^2}{R^2}$$

Kui me arvestame seisueenergia seosega erirelatiivsusteooriast:

$$E = mc^2$$

ja gravitatsioonijõu definitsiooniga Newtoni mehaanikast:

$$F_g = \frac{Gm}{r^2}$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$\frac{c^2}{G} = \frac{E}{m} \frac{m}{F_g r^2}$$

ehk

$$\frac{c^2}{G} = \frac{E}{F_g r^2} = \frac{1}{F_g r} \frac{1}{r} E = \frac{1}{F_g r} \frac{1}{r} \left( k \frac{q^2}{r} \right) = \frac{1}{F_g r} \frac{1}{r} k \frac{q^2}{r^2} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{r}$$

Saadud lihtsat seost:

$$\frac{c^2}{G} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{r}$$

võib avaldada ka järgmiselt:



$$\frac{c^2}{G} = \frac{c^4}{G} \frac{1}{c^2} = \frac{F_p}{c^2} = \frac{F_{el}}{F_g} \frac{1}{r}$$

millest nähtub, et see võrdub tegelikult ühega:

$$\frac{F_p r}{c^2} = \frac{U}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 = \frac{F_{el}}{F_g}$$

See tuleneb otseselt sellest, et aegruumi lõkspinnal on gravitatsioonipotentsiaal  $U$  „piiratud“ maksimaalse võimaliku väärtusega Universumis:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{U}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

milles:

$$U = c^2$$

See tähendab seda, et aegruumi lõkspinnal on elektrijõud ja gravitatsioonijõud omavahel võrdsed. Kuna Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse  $l$ “ skaalast alates:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

siis õigem oleks eeldada, et reaalne Universum ei saanud tegelikult alguse lõpmata väikesest ruumalast ehk punktist, vaid hoopis läbimõõdust, mis vastab Plancki pikkusele  $10^{-35}$  m. Plancki pikkuse läbimõõduga Universumisse ei mahuks absoluutselt mitte ükski teadaolev osake. Samasugune põhimõte kehtib tegelikult ka Universumi vanuse kohta, mille korral Universumi eksisteerimise aeg ei hakka „käima“ 0 sekundist, vaid hoopis ajahetkest, mis vastab „Plancki ajale“  $t$ :

$$t = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

See tähendab seda, et Universumi ruumala vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} \text{ m}$$

ja eksisteerimise aeg vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} \text{ s}$$

ei ole füüsikaliselt absoluutselt mõtet, küll aga omab matemaatilist mõtet. See viib järelduseni, et Universum paisus  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga „ruumalalt“ lõpmata suureks kõigest 0 sekundiga ja Universumi eksisteerimise aeg ehk „Universumi kell hakkas käima“ alates  $10^{-44}$  sekundist, mitte aga 0 sekundist.

Aegruumi lõkspinnal on elektrijõud ja gravitatsioonijõud omavahel võrdsed. Selle võrduse valemi tuletamise võrrandist:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

milles  $e$  on elementaarne elektrilaeng:

$$e = 1,602 * 10^{-19} \text{ C}$$

ja raadius  $R$  näitab sfäärilise kujuga aegruumi lõkspinna raadiust:

$$R = 1,3807 * 10^{-36} m$$

Kui me korrutame viimase avaldise  $4\pi$ -ga:

$$4\pi R = 1,73415 * 10^{-35} m$$

siis algebraline tulemus kattub „peaaegu“ Plancki pikkuse  $l$  väärtusega:

$$l_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616 * 10^{-35} m$$

$4\pi R$  korral saaksime ka massi  $M$  väärtuse:

$$\frac{4\pi R}{G} c^2 = M = 2,3 * 10^{-8} kg$$

mis kattub „peaaegu“ Plancki massi  $m$  väärtusega:

$$m_p = \sqrt{\frac{hc}{G}} \approx 2,2 * 10^{-8} kg$$

Elementaarlaengu  $e$ , Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki massi  $m$  omavahelised seosed näitavad seda, et mustade aukude füüsikast tuntud aegruumi lõkspinna füüsikaline olemus kattub tõepoolest Universumi punkt- ja pindsingulaarsuse füüsikaga.

Kuna ürgsel energiaväljal on kõik Universumi interaktsioonid liitunud üheks jõuks ja energia- välja potentsiaali langus põhjustab „ilmselt“ interaktsioonide lahutuse üksteisest, siis seega võib ürgset energiavälja kirjeldada väga edukalt ka skalaarse välja lagranžiaani  $L$  võrrand:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4\right)$$

milles  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ . Selle järgi on energiavälja potentsiaalil kaks minimaalset väärtust:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

mida me näeme ka lagranžiaani  $L$  võrrandit kirjeldaval joonisel:

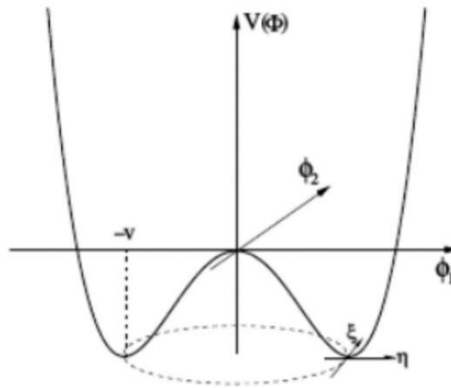
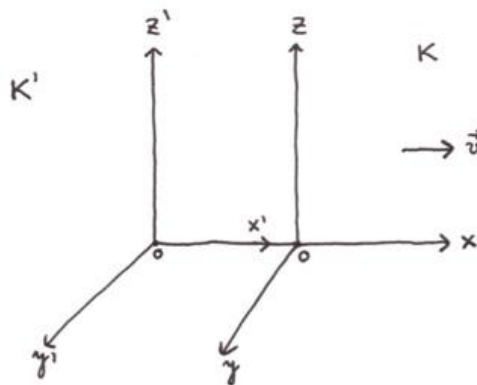


Foto allikas: [https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking\\_fig1\\_330116851](https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking_fig1_330116851)

Jooniselt me näeme, et energiavälja potentsiaali maksimaalne väärtus ulatub lõpmatusse, mis langeb väga täpselt kokku Universumi pingsingulaarsuse „ajal“ eksisteeriva energiavälja potentsiaaliga, mille väärtus oli samuti lõpmata suur. Vaakumit sellisel ajal ei eksisteerinud. Kui aga energiavälja potentsiaal langeb lõpmatusest nulli ( antud juhul väikseimasse olekusse ), siis tekib tänapäeval tuntud Higgsi väli koos kogu meie tajutava materiaalse maailmaga.

Siinkohal võib tekkida põletav küsimus, et miks kaasnes Universumi aja ja ruumi tekkimisega ka energiavälja kui materiaali tekkimine? Universumi aja ja ruumi tekkimisega oleks võinud lihtsalt kaasneda „tühi ruum“ ehk vaakum. Vastuse leidmine sellele fundamentaalsele küsimusele algab sellest, et kui Albert Einsteini relatiivsusteooria ühendas omavahel „aja“ ja „ruumi“ ühtseks „aegruumiks“ ehk aeg ja ruum on üksteisest lahutamatud, siis ajas rändamise teooria näitas, et ka „liikumine“ on tegelikult lahutamatult seotud aegruumiga. Aegruumi ja liikumise omavaheline „lahutamatus“ väljendub Universumis kosmoloogilise paisumisena ehk hyperruumi  $K^+$  ja tavaruumi  $K$  füüsikalise süsteemina:



Kuid antud juhul näitame seda, et „materiale“ ( ehk aine ja väli ) on samuti aegruumist lahutamatu. Selleks vaatame korra uuesti tuntud Friedmanni võrrandit, mis on tänapäeva kosmoloogia õpetuse põhialuseks:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

Selles me näeme liiget:

$$\frac{4\pi G}{3}\rho a^2$$

ehk

$$\frac{GM}{R^3}a^2$$

mis sisaldab endas Universumi massitiheduse  $\rho$  avaldist:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

Sellisel juhul kirjeldatakse Universumi ruumala kera ruumalaga  $V$ :

$$\frac{4\pi R^3}{3} = V$$

Massitiheduse klassikalisest valemist:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

saame massi definitsiooniks:

$$M = V\rho$$

Igasugune aine esineb massi/energia vormina:

$$E = mc^2$$

ja see annab meile energia definitsiooniks:

$$E = V\rho c^2$$

Viimasest ongi selgesti näha seda, et kui ruumala võrduks nulliga ehk aegruumi ei eksisteeriks:

$$V = 0$$

siis seega ei eksisteeriks ka energiat kui ainet:

$$E = 0$$

ehk

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{0}{0} = 0$$

Kui aga aeg ja ruum eksisteeriksid:

$$V \neq 0$$

siis eksisteeriks ka aine:

$$E \neq 0$$

Analüüsime seda pisut lähemalt. Näiteks kui Universumis eksisteeriksid aeg ja ruum:

$$V \neq 0$$

siis põhimõtteliselt võib energiatihedus samal ajal võrdsuda ka nulliga:

$$\rho = 0$$

See annab meile aine mitte-eksisteerimise:

$$E = 0$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et Universumis saab eksisteerida ka „tühi ruum“ ehk vaakum, kuid kvantmehaanika järgi ei ole tühja ruumi tegelikult olemas, vaid selles tekivad ja kaovad osakeste paarid kõikjal ja pidevalt. Selles mõttes võtab vaakumis osakeste paaride tekkimine ja kadumine ju samuti aega ja ruumi. Osakeste paaride tekkimine ja kadumine vaakumis nimetatakse kosmoloogias enamasti „kvantfluktuatsioonideks“.

Reaalsete osakeste tekkimiseks võetakse energia vaakumist. See tähendab potentsiaali languse tõttu lagunes vaakumväli tavaliseks aine-energia väljaks. Vaakumis tekivad pidevalt virtuaalsed osakesed Heisenbergi määramatuse relatsiooni tõttu. Täpsemalt on need osakeste-antiosakeste paarid, mis lühiajaliselt tekivad.

Kui aga energiatihedus ei võrdu nulliga:

$$\rho \neq 0$$

siis seega eksisteerib ka mateeria:

$$E \neq 0$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et Universumis eksisteerib vaakumi asemel mateeria, antud juhul energiaväli. Selline energiaväli ei ole tsentraalsümmeetriline ehk sellel puudub ruumis allikas. Sellisel juhul täidab energiaväli ühtlaselt kogu Universumi (aeg)ruumi, mille korral ei eksisteeri vaakumit ehk „tühja ruumi“. Mateeria ( energiavälja ) eksisteerimiseks on vaja samuti aega ja ruumi täpselt nii nagu vaakumi eksisteerimiseks on vaja aega ja ruumi. Aja ja ruumi tekkimine põhjustas ürgse energiavälja eksisteerimise ehk aja ja ruumi tekkimisega kaasnes energiavälja kui mateeria eksisteerimine, kuna aine ja väli „võtab“ alati ruumi ja nende eksisteerimiseks „kulub“ alati mingisugune ajaperiood.

Universumi aegruum ja mateeria on üksteisest lahutamatult seotud. Näiteks klassikalises füüsikas mõistetakse „ruumi“ kui „mateeria mahutit“. Mateeria põhivormideks on aine ja väli, kuid eksisteerimise põhivormideks ongi aeg ja ruum. Näiteks üldrelatiivsusteoorias tuuakse välja selline näide, et kui kõik kehad peaksid Universumist järsku ära kaduma, siis lakkaksid eksisteerimast ka aeg ja ruum. Ruum oleks „mateeria mahutiks“, kuid aeg oleks „mateeria eksisteerimiseks“. Mateeria põhivormideks on küll aine ja väli, kuid kvantväljadeteooria järgi eksisteerivad Universumis tegelikult ainult väljad.

Kui Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala  $r$  ja energia/massi tihedus  $\rho$  mõlemad lõpmata suured:

$$\begin{cases} r = \infty \\ \rho = \infty \end{cases}$$

siis sellest järeldus, et mistahes Universumi ruumpunktis oli energia/mass lõpmata suur:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{E}{c^2 V} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

Saadud viimasest seosest

$$\rho = \frac{\infty}{0} = \infty$$

on näha seda, et peab kehtima võrdus:

$$V * \rho = 0 * \infty = \infty$$

mis range matemaatika järgi tegelikult olla ei saa:

$$0 * \infty \neq \infty$$

kuna tulemus peab võrduma nulliga:

$$0 * \infty = 0$$

Sarnast „matemaatilist paradoksi“ näeme ka võrduses:

$$\frac{x}{0} = \frac{3}{0} = \infty$$

mille järgi saame hoopis positiivse täisarvu:

$$x = 3 = 0 * \infty$$

Näiteks ka sellise võrduse loogika järgi

$$\frac{3}{3} = 1$$

peaks kehtima:

$$\frac{0}{0} = 0$$

kuid osutub, et viimane võrdus võib esineda ka järgmiselt:

$$\frac{0}{0} = 1$$

kuna seda on võimalik matemaatiliselt ka tõestada:

$$0 = 1 * 0$$

Neid kummalisi matemaatilisi paradokse arvesse võttes võrdub nulli ja lõpmatuse korrutis kolme erineva matemaatilise võimalikkusega:

$$0 * \infty = \begin{cases} \infty \\ x \\ 0 \end{cases}$$

millest reaalse füüsika jaoks oleks kõige sobivam pigem selline võrdus:

$$0 * \infty = x$$

ehk

$$\infty = \frac{x}{0} = \frac{M}{V} = \rho$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et mistahes Universumi ruumipunktis oli energia/mass tegelikult mingi kindla suurusega, mitte lõpmata suur ega null.

**MÄRKUS:** Eespool saime Universumi pindsingulaarsuse korral Universumi aine-energia tiheduseks lõpmata suure väärtuse:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{E}{V c^2} = \frac{E}{V 0} = \frac{\infty}{\infty 0} = \infty$$

kuna viimases võrrandis on Universumi paisumiskiirus  $c = H = 0$  ja Universumi ruumala on lõpmata suur. Kuna Universumi ruumala on lõpmata suur, siis seega massi/energiat on selles lõpmata palju. See annab meile massi tiheduseks:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Küsimus on nüüd selles, et milline oli Universumi pindsingulaarsuse korral Universumi aine-energia tihedus ühe kuupmeetri kohta:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{x}{1m^3}$$

mitte enam Universumi lõpmata suure ruumala suhtes.

Siinkohal peab märkima seda, et kuna Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse“ skaalast alates:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

siis õigem oleks eeldada, et lõpmata väikest ruumala ehk ruumipunkti ei saa tegelikult olemas olla, vaid reaalselt saab eksisteerida selline ruumala  $V$ , mille läbimõõt vastab Plancki pikkusele  $10^{-35}$  m. Plancki pikkuse läbimõõduga ruumalasse ei mahuks absoluutselt mitte ükski teadaolev osake.

Selle järgi oli väljapotsentsiaal mingi kindla suurusega. See tähendab, et Universumi energia/massi lõpmata suure väärtusega tihedus „peidab endas“ tegelikult lõpliku suurusega väljapotsentsiaali. Kuid energiavälja potentsiaalne energia  $V$  oli kogu Universumi ruumala suhtes lõpmata suure väärtusega, kuna Universumi ruumala on ise lõpmata suur. Selline „pilt“ või arusaam langeb väga täpselt kokku skalaarset välja kirjeldava lagranžiaani võrrandiga  $L$ :

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4\right)$$

mille järgi ongi väljapotsentsiaal  $\phi$  lõpliku suurusega, kuid välja potentsiaalne energia  $V$  ulatub lõpmatusse. Kogu Universumi aegruumi täitva energiavälja potentsiaali kirjeldavat võrrandit on võimalik matemaatiliselt tuletada energia ja massi ekvivalentsuse võrrandist:

$$E = mc^2$$

Näiteks see viimane võrrand avaldub tegelikult järgmiselt:

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

millest ongi võimalik otseselt tuletada väljapotsentsiaali võrrand:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Viimane on matemaatiliselt tuletatav ka sellisest diferentsiaalvõrrandist:

$$\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4 = 0$$

mis omakorda kirjeldab füüsikalise välja potentsiaalset energiat  $V$  skalaarse välja lagranžiaani  $L$  võrrandis:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left( \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \right)$$

Kuna energiavälja potentsiaalil on kaks minimaalset väärtust:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

siis seega on viimases võrrandis olevad suurused järgmised:

$$\begin{cases} \mu^2 < 0 \\ \lambda > 0 \end{cases}$$

Selle järgi tuleb lagranžiaani L võrrandit kirjeldav joonis:

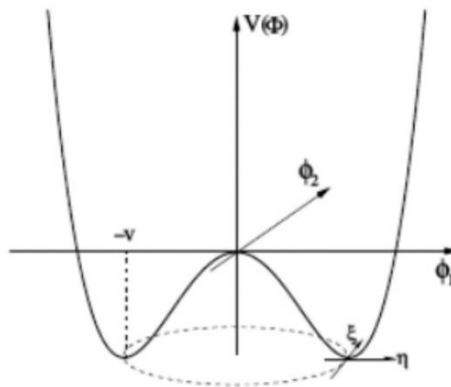


Foto allikas: [https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking\\_fig1\\_330116851](https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking_fig1_330116851)

Jooniselt me näeme, et:

1. Energiavälja potentsiaali  $\phi$  maksimaalne väärtus ei ulatu lõpmatusse, mis langeb väga täpselt kokku Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ eksisteeriva ürgse energiavälja potentsiaaliga  $\phi$ , mille väärtus ei olnud tegelikult samuti lõpmata suur.
2. Kuid ürgse energiavälja potentsiaalne energia  $V$  oli lõpmata suur, kuna see täitis kogu Universumi ruumala, mis oli lõpmata ulatusega. Vaakumit sellisel korral ei eksisteerinud.
3. Energiavälja potentsiaal  $\phi$  on „sümmeetriline“:

$$\phi = \pm v$$

4. Kui aga energiavälja sümmeetriline potentsiaal muutub ebasümmeetriliseks ehk potentsiaal langeb nulli ( antud juhul väikseimasse olekusse ), siis toimub „sümmeetria spontaanne rikkumine“, mille tagajärjel tekib Universumis vaakum ja tänapäeval tuntud Higgsi väli koos elektromagnetilise, tugeva ja nõrga interaktsiooniga. Higgsi väli on „kahekomponendiline“ ehk „kompleksne“ väli.



Küsimus on nüüd selles, et mis põhjustas energiavälja potentsiaali languse maksimaalsest olekust minimaalsele olekule?

Universumi punkt- ehk algsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala lõpmata väike:

$$r = 0$$

ja energia/massi tihedus oli samuti lõpmata väike:

$$\rho = 0$$

See tähendab seda, et aega ja ruumi ning materiat tegelikult ei eksisteerinudki. Kuid Universumi paisumiskiirus  $H$  oli lõpmata suur:

$$H = \infty$$

mida on võimalik tõlgendada ka Universumi inflatsioonilise paisumisena, mille tagajärjel paisus Universum lõpmata suureks kõigest 0 sekundiga.  $H$  on Hubble'i konstant, mis muutub ainult ajas. Selle järgi saame tuntud Hubble'i seaduse:

$$v = HR$$

avaldada järgmiselt:

$$\frac{v}{R} = H$$

milles  $R = 0$  ja  $H = \infty$ . Seetõttu  $v = \infty$ , mille korral ei saa kehtida võrdused:  $v \neq x$  ja  $v \neq 0$ .

Universumi pidsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala lõpmata suur, kuid aegruum ise oli üle terve Universumi lõpmatult teisenenud ehk kõverdunud. Seetõttu on Universumi pidsingulaarsust võimalik füüsikaliselt tõlgendada ka kui „*musta augu kahemõõtmelise pinna kolmemõõtmelise versioonina*“, kuna musta augu pinnal on aeg ja ruum kõverdunud ehk teisenenud samuti lõpmatuseni. Musta augu suurust Universumis kirjeldab Schwarzschildi raadius  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Kui musta augu pind on lõpliku suurusega ( näiteks ringjoon ei ole lõpmata suur ), siis Universumi ruumala on lõpmata suurusega ( kujuteldav ringjoon on lõpmata suur ). Universumi pidsingulaarsuse „ajal“ oli kogu Universumi ruumala lõpmata suur ( täpselt nii nagu tänapäevalgi ):

$$r = \infty$$

ja Universumi energia/massi tihedus oli samuti lõpmata suur:

$$\rho = \infty$$

See viimane tähendab tegelikult seda, et mistahes Universumi ruumi punktis oli energia lõpliku suurusega  $x$ :

$$E = x$$

Energiaväli tekkis seega Universumis koos aja ja ruumiga silmapilkselt ehk 0 sekundiga. Universumi pidsingulaarsuse „ajal“ võrdus Universumi paisumiskiirus nulliga ehk  $H = 0$ . Kuna praegusel ajal domineeriv Universumi paisumise kiirenemine sai tegelikult „alguse“ just pidsingulaarsusest, siis seega Universumi paisumiskiiruse algkiirus oligi 0 m/s ( ehk  $H = 0$  ) ja selline „hetkkiirus“ kestis 0 sekundit. Kiirenduse hetkkiirus kestab 0 sekundit, kuna üks hetk on väikseim ajaperiood. Sellisel juhul omas ürgne energiaväli ainult potentsiaalset energiat. Kui aga

Universumi paisumiskiirus ei võrdu enam nulliga:

$$H \neq 0$$

siis seega omas energiaväli sellisel juhul ainult kineetilist energiat:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

mille väärtus oli lõpmata suur. Enne seda oli ürgse energiavälja potentsiaalne energia lõpmata suur. Vaakumit sellisel korral ei eksisteerinud. Ürgse energiavälja potentsiaal  $\phi$  langes nulli ( ehk väikseimasse olekusse ) ja seda just välja potentsiaalse energia muundumise tõttu kineetiliseks energiaks. Kuid Universumit täitva energiavälja koguenergia jääb igaljuhul samasuguseks.

Universumi kosmoloogilise paisumise tõttu tekkis ürgsel energiaväljal potentsiaalse energia asemele nüüd hoopis kineetiline energia. Potentsiaalse energia eksponentsiaalse languse tõttu tekkiski Universumis vaakum ja tänapäeval tuntud Higgsi väli koos kogu meie tajutava materiaalse maailmaga, millesse tegelikult läkski kogu kineetiline energia.

Kusjuures vaakumi eksisteerimiseks on vaja samuti aega ja ruumi täpselt nii nagu energiavälja eksisteerimiseks on vaja aega ja ruumi. Aja ja ruumi tekkimine põhjustas ürgse energiavälja eksisteerimise ehk aja ja ruumi tekkimisega kaasnes energiavälja kui mateeria eksisteerimine, kuna aine ja väli „võtab“ alati ruumi ja nende eksisteerimiseks „kulub“ alati mingisugune ajaperiood.

Universumi punkt- ehk algsingulaarsuse korral oli kogu Universumi ruumala lõpmata väike:

$$r = 0$$

ja Universumi energia/massi tihedus oli samuti lõpmata väike:

$$\rho = 0$$

See tähendab füüsiliselt seda, et aega ja ruumi ning ka materiat tegelikult ei eksisteerinudki. Kuid Universumi paisumiskiirus  $H$  oli lõpmata suur:

$$H = v = \infty$$

mida on võimalik füüsiliselt tõlgendada ka Universumi „*inflatsioonilise paisumisena*“, mille tagajärjel paisus Universum lõpmata suureks kõigest 0 sekundiga. Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala lõpmata suur, kuid aegruum ise oli üle kogu Universumi *teisenenud* ehk *kõverdunud* lõpmatuseni:

$$y = \infty$$

Lõpmata kauges tulevikus võrdub see aga ühega. Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ oli kogu Universumi ruumala lõpmata suur ( täpselt nii nagu tänapäevalgi ):

$$r = \infty$$

Universumi ruumala on lõpmata suur tegelikult kogu Universumi eksisteerimise ajaperioodi jooksul, välja arvatud Universumi punktisingulaarsuse korral. Universumi energia/massi tihedus oli pindsingulaarsuse korral samuti lõpmata suur:

$$\rho = \infty$$

kuid lõpmata kauges tulevikus võrdub see nulliga. Lõpmata suur energia/massi tihedus tähendab tegelikult seda, et mistahes Universumi ruumi punktis oli energia lõpliku suurusega  $x$ :

$$E = x$$

Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ võrdus Universumi paisumiskiirus nulliga:

$$H = 0$$

( mis „kestis“ 0 sekundit ), kuid lõpmata kauges tulevikus võrdub see aga valguse kiirusega  $c$ . Sellest järeldub, et Universumi energia/massi tihedus aja jooksul väheneb, kuid Universumi paisumiskiirus aja jooksul suureneb ( s.t. Universumi paisumiskiirus läheneb aja jooksul valguse kiirusele  $c$  ja seda mistahes ruumimastaabis ). Sellisel juhul omas ürgne energiaväli Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ ainult potentsiaalset energiat. Kui aga Universumi paisumiskiirus ei võrdu enam nulliga:

$$H \neq 0$$

siis seega omas energiaväli sellisel juhul ainult kineetilist energiat:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

mille väärtus oli samuti lõpmata suur. Enne seda oli ürgse energiavälja potentsiaalne energia lõpmata suur, mille korral vaakumit ei eksisteerinud. Ürgse energiavälja potentsiaal  $\phi$  langes nulli ( ehk väikseimasse olekusse ) ja seda just potentsiaalse energia muundumise tõttu kineetiliseks energiaks. Kuid Universumit täitva energiavälja koguenergia jääb igaljuhul samasuguseks. Universumi paisumise tõttu tekkis energiaväljal potentsiaalse energia asemele nüüd hoopis kineetiline energia. Potentsiaalse energia eksponentsiaalse languse tõttu tekkiski Universumis vaakum ja tänapäeval tuntud Higgsi väli koos kogu meie tajutava materiaalse maailmaga, millesse tegelikult läkski kogu ürgne kineetiline energia.

Lõpmata kauges tulevikus on kogu meie tajutav Universumi ruumala lõpmata suur:

$$r = \infty$$

Universumi ruumala on lõpmata suur tegelikult kogu meie Universumi eksisteerimise ajaperioodi jooksul, välja arvatud Universumi punktsingulaarsuse korral. Universumi energia/massi tihedus võrdub lõpmata kauges tulevikus nulliga:

$$\rho = 0$$

Lõpmata kauges tulevikus võrdub Universumi paisumiskiirus valguse kiirusega  $c$ :

$$H = c$$

Sellest järeldub, et Universumi energia/massi tihedus aja jooksul väheneb ja Universumi paisumiskiirus aja jooksul suureneb ( s.t. Universumi paisumiskiirus läheneb aja jooksul valguse kiirusele  $c$  ja seda mistahes ruumimastaabis ). Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala samuti lõpmata suur, kuid aegruum ise oli üle kogu Universumi *teisenenud* ehk *kõverdunud* lõpmatuseni:

$$y = \infty$$

Lõpmata kauges tulevikus võrdub see aga ühega:

$$y = 1$$

Universumi energia/massi tihedus oli Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ lõpmata suur:

$$\rho = \infty$$

mis tähendab seda, et mistahes Universumi (aeg)ruumi punktis oli energia lõpliku suurusega  $x$ :

$$E = x$$

Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ võrdus Universumi paisumiskiirus nulliga:

$$H = 0$$

mis „kestis“ 0 sekundit. Sellisel juhul omas ürgne energiaväli Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ ainult potentsiaalset energiat. Kui aga Universumi paisumiskiirus ei võrdu enam nulliga:

$$H \neq 0$$

siis seega omas energiaväli sellisel juhul ainult kineetilist energiat:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

mille väärtus oli samuti lõpmata suur. Enne seda oli ürgse energiavälja potentsiaal lõpliku suurusega  $x$ :

$$\varphi = x$$

mille suurust ei ole võimalik teada ja mille korral ei eksisteerinud vaakumit. Ürgse energiavälja potentsiaal langes lõplikust väärtusest nulli ( ehk väikseimasse olekusse ):

$$\varphi = 0$$

ja seda just potentsiaalse energia muundumise tõttu kineetiliseks energiaks. Kuid Universumit täitva energiavälja koguenergia jääb igaljuhul samasuguseks. See tähendab seda, et Universumi paisumise tõttu tekkis energiaväljal potentsiaalse energia asemele nüüd hoopis kineetiline energia.

Ürgne energiaväli ei olnud tsentraalsümmeetriline ehk ürgsel energiaväljal puudus ruumis allikas. Energiaväli täitis ühtlaselt kogu Universumi aegruumi, mis oli lõpmata ulatusega ja lõpmata suure energiaga. Sellest tulenevalt oli lõpmata suures Universumis massi/energiat samuti lõpmatult palju. Kogu Universumi aegruumi täitev „potentsiaalne“ energiaväli omas energiat ja massi vastavalt seisuenergia valemile:

$$E = mc^2$$

Kuid see viimane võrrand avaldub ka järgmiselt:

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

millest omakorda tuletasime väljapotentsiaali võrrandi:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Viimane on matemaatiliselt tuletatav ka diferentsiaalvõrrandist:

$$\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 = 0$$

mis kirjeldab välja potentsiaalset energiat  $V$  skalaarse välja lagranžiaani  $L$  võrrandis:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$$

$\mu$  on energiavälja mass või energiavälja osakese mass ja  $\lambda$  on „teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp )“, mis ei ole mõõdetav. Kuna  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ , siis seega on energiavälja potentsiaalil  $\phi$  kaks minimaalset väärtust:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

mida me nägime ka lagranžiaani  $L$  võrrandit kirjeldaval joonisel:

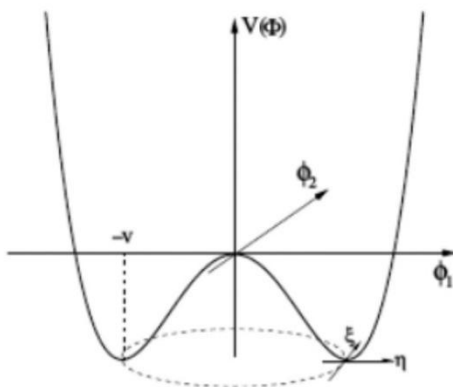


Foto allikas: [https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking\\_fig1\\_330116851](https://www.researchgate.net/figure/Higgs-potential-before-left-and-after-right-spontaneously-symmetry-breaking_fig1_330116851)

Jooniselt me näeme, et energiavälja potentsiaalse energia  $V$  maksimaalne väärtus ulatub lõpmatusse, mis langeb väga täpselt kokku Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ eksisteeriva ürgse energiavälja potentsiaalse energiaga, mille väärtus oli samuti lõpmata suur. Vaakumit sellisel „ajal“ ei eksisteerinud.

Siinkohal tasub mainida seda, et Higgsi välja potentsiaali  $U$  saab seostada ka Universumi temperatuuriga  $T$ . 1980.ndate aastate alguses esitas Alan Guth Suure Ühendteooria ( Grand Unified Theory ), mille järgi erinevad jõud ehk vastastikmõjud lahknivad ühest ja samast jõust temperatuuri juures, mille väärtus on  $10^{15} - 10^{16}$  GeV. Sellise temperatuuri juures muutub Higgsi välja sümmeetria ebasümmeetriliseks. Higgsi väli on väli, mille taustal liikudes tekib osakestele mass. Higgsi välja vastastikmõju vahendab Higgsi boson. Sellise arusaama järgi kirjeldab Higgsi välja potentsiaali  $U$  võrrand:

$$U(\phi) = \alpha\phi^2 + \lambda\phi^4$$

milles

$$U(\phi) = U(-\phi)$$

Tegur  $\alpha$  sõltub Universumi temperatuurist:

$$\alpha = \alpha_0(T - T_c)$$

milles  $\alpha_0$  on konstant ja  $T_c$  on teatav kriitiline temperatuur. Kui  $T > T_c$ , siis on Higgsi välja potentsiaalil ainult üks ekstreemum, see on miinimum punktis  $\phi_0 = 0$ . Kui aga  $T < T_c$ , siis ilmneb potentsiaalil kolm ekstreemumi:

$$\phi_{max} = 0$$

$$\phi_{\pm min} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda}}$$

See tähendab seda, et kui Universumi temperatuur langeb, siis algne potentsiaali miinimumiga olek muutub lokaalse maksimumiga olekuks. Kui kogu süsteem läheb minimaalse potentsiaaliga olekusse, siis potentsiaal on  $\phi_+$  või  $\phi_-$  ning algne sümmeetria on rikutud.

Temperatuuri mõiste on seotud eelkõige osakestega. Näiteks mida kiiremini liiguvad osakesed või mida suurema amplituudiga võnguvad osakesed ruumis, seda suurem on aine või keskkonna ( gaasi, vedeliku, tahkise või plasma ) temperatuur. Temperatuuri mõistet ei saa kasutada energiaväljade korral. Näiteks elektrivälja korral ei saa kasutada temperatuuri mõistet, niisamuti ka Higgsi välja korral. Energiaväli ei saa olla „soe“ või „külm“. Energiaväljade kirjeldamiseks kasutatakse ainult „energia“ mõistet.

Kui Universumi punktsingulaarsuse korral oli kogu Universumi ruumala  $r$  lõpmata väike ja energia/massi tihedus  $\rho$  võrdus nulliga:

$$\begin{cases} r = 0 \\ \rho = 0 \end{cases}$$

siis füüsikaliselt tähendab see seda, et aegruumi ja seega ka materiat Universumi punktsingulaarsuse korral ei eksisteerinud. Kuid Universumi ( antud juhul „punkti“ ) paisumiskiirus oli lõpmata suur:  $H = v = \infty$ , mis viitab asjaolule, et Universumi aeg ja ruum ning koos sellega ka energiaväli ( s.t. materia ) tekkisid „hüppeliselt“ ehk kõigest 0 sekundiga. Kuna Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse“ skaalast alates:

$$1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

siis õigem oleks eeldada, et reaalne Universum ei saanud tegelikult alguse lõpmata väikesest ruumalast ehk punktist, vaid hoopis läbimõõdust, mis vastab Plancki pikkusele  $10^{-35}$  m. Plancki pikkuse läbimõõduga Universumisse ei mahuks absoluutselt mitte ükski teadaolev osake. Samasugune põhimõte kehtib tegelikult ka Universumi vanuse kohta, mille korral Universumi eksisteerimise aeg ei hakka „käima“ 0 sekundist, vaid hoopis ajahetkest, mis vastab „Plancki ajale“  $t$ :

$$t = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

See tähendab seda, et Universumi ruumala vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} \text{ m}$$

ja eksisteerimise aeg vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} \text{ s}$$

ei ole füüsikaliselt absoluutselt mõtet, küll aga omab matemaatilist mõtet. See viib järelduseni, et Universum paisus  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga „ruumalalt“ lõpmata suureks kõigest 0 sekundiga ja Universumi eksisteerimise aeg ehk „Universumi kell hakkas käima“ alates  $10^{-44}$  sekundist, mitte aga 0 sekundist. Plancki pikkuse  $l$  ja Plancki aja  $t$  saame otseselt tuletada gravitatsiooni-potentsiaali  $U$  võrrandist:

$$U = \frac{GM}{R}$$

Näiteks saame massi  $M$  avaldada seisuenergia seosest:

$$M = \frac{E}{c^2}$$

ja energia  $E$  omakorda määramatuse relatsioonist aja  $t$  ja energia  $E$  vahel:

$$E = \frac{h}{2t}$$

Gravitatsioonipotentsiaali võrrand tuleb seega kujul:

$$U = G \frac{h}{2} \frac{1}{c^2 t} \frac{1}{R} = G \frac{h}{2} \frac{1}{l^2 c}$$

Gravitatsioonipotentsiaal on Schwarzschildi raadiusega  $R$  seotud järgmiselt:

$$c^2 = \frac{2GM}{R} = 2U$$

millest saame omakorda suurima võimaliku gravitatsioonipotentsiaali kogu Universumis:

$$\frac{c^2}{2} = U$$

Sellest tulenevalt saame võrrandi  $U$ :

$$U = G \frac{h}{2} \frac{1}{l^2 c}$$

kirjutada kujule:

$$l^2 = \frac{Gh}{c^3}$$

Tegemist ongi juba Plancki pikkusega:

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616\,229(38) \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

millest väiksematel ruumi skaaladel ei ole enam füüsikalist reaalsust ehk Universumi eksistentsi. Teades aja  $t$  definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$t = \frac{l}{v}$$

saame tuletada ka Plancki ajaperioodi:

$$t^2 = \frac{l^2}{c^2} = \frac{Gh}{c^5}$$

ehk

$$t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5,39121 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

millest väiksematel ajaperioodidel ei ole Universumis enam füüsikalist mõtet. Plancki pikkuse ja Plancki aja jagatis annab meile valguse kiiruse  $c$  ehk „Plancki kiiruse  $v$ “:

$$v^2 = \frac{l^2}{t^2} = \frac{Ghc^5}{c^3 Gh} = c^2$$

ehk

$$c = \frac{l}{t}$$

Siinkohal on oluline märkida, et Plancki aja ja pikkuse valemite matemaatilisel tuletamisel kasutasime Schwarzschildi raadiuse  $R$  avaldist:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Selline võrrand on tuntud eelkõige Schwarzschildi meetrikast:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ehk

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2$$

ja

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = dl^2$$

mille korral näitab Schwarzschildi raadius  $R$  ( geomeetrilise ) kerakujulise pinna raadiust, mille pinnal ( ja tegelikult ka sees ) on aeg ja ruum „kõverdunud“ lõpmatuseni ehk aja ja ruumi eksisteerimised lakkavad olemast. See väljendub gravitatsioonilises aja dilatatsioonis:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

ja gravitatsioonilises ruumi kontraktsioonis:

$$ds^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2$$



ehk

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{R}} = 0$$

See tähendab seda, et Universumi punktisingulaarsuse füüsikaline olemus langeb väga täpselt kokku Schwarzschildi pinna

$$4\pi R^2 = 4\pi \left( \frac{2GM}{c^2} \right)^2$$

füüsikalise olemusega, mille korral ei eksisteerinud aega ega ruumi, kui Universumi läbimõõtu vastas Plancki pikkusele:

$$2R = l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616\,229(38) \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

Universumi „läbimõõdu“ mõiste kattubki siinkohal Schwarzschildi kerakujulise pinna läbimõõdu mõistega ja seetõttu on Universumi punktisingulaarsust võimalik füüsikaliselt tõlgendada ka kui „Schwarzschildi ehk musta augu kahemõõtmelise pinna kolmemõõtmelise versioonina“, mille läbimõõtu vastabki Plancki pikkusele. See tähendab seda, et Universumi ruumalal vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} \text{ m}$$

ja eksisteerimise ajaperioodil vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} \text{ s}$$

ei ole füüsikalist eksistensi. See viib järelduseni, et Universum paisus  $10^{-35}$  meetrise läbimõõduga „ruumalalt“ lõpmata suureks kõigest 0 sekundiga ja Universumi eksisteerimise aeg ehk „Universumi kell hakkas käima“ alates  $10^{-44}$  sekundist, mitte aga 0 sekundist. Universumi pindsingulaarsuse korral oli kogu Universumi ruumala  $r$  ja Universumi energia/massi tihedus  $\rho$  mõlemad lõpmata suured:

$$\begin{cases} r = \infty \\ \rho = \infty \end{cases}$$

Sellisel juhul oli Universumi paisumiskiirus võrdne nulliga:  $H = 0$ . Kuna Universumi paisumiskiirus ei saa tegelikult võrduda nulliga ehk Universum hakkas kohe uuesti paisuma, siis selline võrdus „muutus“ mitte-võrduseks ( $H \neq 0$ ) „hüppeliselt“ ehk kõigest 0 sekundiga.

Näiteks kui kivi maa pinnalt üles visata, kukub ta varsti tagasi ja maandumisel on kiirus viskamise suunaga vastupidine. Üles viskamisel on kivi liikumine aeglenev, kuid langemisel on see kiirenev. Lennu kõrgeimas punktis kivi hetkeks peatub. Sellisel juhul on kivi liikumiskiirus võrdne nulliga:  $v = 0$ . Kuna kivi liikumiskiirus ei saa tegelikult võrduda nulliga ehk üles visatud kivi ei saa jääda õhku seisma, siis selline võrdus „muutub“ mitte-võrduseks ( $v \neq 0$ ) „hüppeliselt“ ehk kõigest 0 sekundiga.

Sellest võiks järeldada, et ürgse energiavälja potentsiaalne energia  $V$  pidi muutuma kineetiliseks energiaks samuti hüppeliselt ehk kõigest 0 sekundiga. Kuid kuna ürgne energiaväli omab energiat ja massi vastavalt valemile:

$$E = mc^2$$

siis peab see siiski alluma relatiivsusteooria seadustele, mis tähendab seda, et energiavälja potentsiaalne energia ei saanud langeda 0 sekundiga, vaid selleks pidi siiski kuluma mingisugune ajaperiood. See tähendab, et siin peab arvestama kiiruse piiranguga, milleks on meile tuntud valguse

kiirus  $c$  vaakumis:

$$c = \frac{l}{t} \approx 3 * 10^8 \text{ m/s}$$

Selle järgi läbib valgus ruumis ühe meetrise vahemaa järgmise ajaperioodi  $t$  jooksul:

$$t = \frac{l}{c} = \frac{1(m)}{3 * 10^8(\frac{m}{s})} = 3,33 * 10^{-9} \text{ s} \approx 10^{-9} \text{ s}$$

ehk

$$t \rightarrow 10^{-44} \text{ s} \dots 10^{-9} \text{ s}$$

Sellest tulenevalt võib mõista, et ka energiavälja potentsiaalse energia langemine „võtab“ ligikaudu sama palju aega. Kuna Universumi vanuse korral ei hakka Universumi eksisteerimise aeg ( s.t. kell ) „käima“ 0 sekundist, vaid hoopis ajahetkest, mis vastab „Plancki ajahetkele“:

$$t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s} \approx 10^{-43} \text{ s}$$

siis võib mõista, et ürgse energiavälja potentsiaalse energia  $V$  langus ja sellest tulenevalt ka sümmeetria spontaanne rikkumine ( s.t. kõikide interaktsioonide eraldumine ühest väljast ) toimus pärast Universumi sündi „kõikjal ruumis korraga“ ajavahemikul  $t$ :

$$t \rightarrow 10^{-44} \text{ s} \dots 10^{-9} \text{ s}$$

ehk

$$10^{-44} \text{ s} < t < 10^{-9} \text{ s}$$

Selline ajaperiood langeb suures osas kokku nüüdisaegsete kosmoloogiliste mudelitega, mis käsitlevad sümmeetria spontaanse rikkumise ajaperioodi:

$$10^{-43} \text{ s} < t < 10^{-10} \text{ s}$$

1. Näiteks kui Universumi vanus on ajavahemikul  $t$ :

$$10^{-43} \text{ s} < t < 10^{-34} \text{ s}$$

mille korral oli Universumi temperatuur kõrgem kui  $10^{27} \text{ K}$ , siis arvatakse, et sellise ajaperioodi alguses (  $10^{-43} \text{ s}$  ) eksisteeris universaalne vastastikmõju ( nn „Supergravitatsioon“ ), milles sisaldasid „potentsiaalselt“ kõik tänapäeval teadaolevad interaktsioonid: gravitatsiooniline, tugev, nõrk ja elektromagnetiline interaktsioon. Arvatakse, et sellise ajaperioodi jooksul eraldub gravitatsiooniline vastastikmõju nn Suurest Ühendusest, mille tulemusena oli gravitatsioon vastastikmõjudest olemas esimesena. Suur Ühendus ühendab omavahel tugevat, nõrka ja elektromagnetilist interaktsiooni.

Oletatakse, et gravitatsiooni eraldumine Suurest Ühendväljast toimub temperatuuril:

$$T_{SUT} \sim 10^{29} \text{ K}$$

ja see vastab ka Higgsi energiale. Näiteks sellele vastav energia on järgmine:

$$E_{SUT} \sim 10^{16} \text{ GeV}$$

ja ajaperiood:

$$t \sim 10^{-36} \text{ s}$$

Kuna kvantväljateoorias on pikkusühik ja energia seotud järgmiselt:

$$hc = 1,97 * 10^{-16} \text{ GeV} * m$$

siis vaakumi energiatihedus tuleb seega:

$$\rho_{\Lambda} c^2 = \frac{E_{SUT}}{(hc)^3} \approx 10^{100} \frac{J}{m^3}$$

Sellest omakorda saadakse:  $\Delta\tau \approx 10^{-37} \text{ s}$ .

2. Kui aga Universumi vanus on vahemikul:

$$10^{-34} \text{ s} < t < 10^{-10} \text{ s}$$

mille korral oli Universumi temperatuur kõrgem kui  $10^{15} \text{ K}$ , siis arvatakse, et sellise ajaperioodi alguses ( $10^{-34} \text{ s}$ ) tekib Universumis aine ja antiaine asümmeetria ning selle ajaperioodi jooksul laguneb Suur Ühendus elektronõrgaks vastastikmõjuks ja tugevaks (värvi) vastastikmõjuks.

Kui aga energiavälja sümmeetriline potentsiaal muutub ebasümmeetriliseks ehk potentsiaal langeb lõplikult väärtusest nulli (antud juhul väikseimasse olekusse), siis toimub „sümmeetria spontaanne rikkumine“, mille tagajärjel tekib Universumis vaakum ja tänapäeval tuntud Higgsi väli koos elektromagnetilise, tugeva ja nõrga interaktsiooniga:

1. Higgsi välja vahendavad Higgsi bosonid, elektromagnetilist välja vahendavad footonid, tugevat jõudu gluuonid ja nõrka jõudu väga rasked vahebosonid. See tähendab eelkõige seda, et sümmeetria spontaanse rikkumise tõttu tekivad Universumis kõik tuntud vahebosonid ja ka veel vaakum.
2. Interaktsioonid (s.t. vahebosonid) on lahutamatult seotud ka elementaarosakestega. Näiteks gluuonid on seotud kvarkidega,  $\pi$ -mesonid on seotud nukleonidega (prootonite ja neutronitega) ja virtuaalsed footonid on seotud näiteks elektroni elektrilaenguga. Antud juhul tähendab see seda, et interaktsioonide ehk vahebosonite tekkimisega Universumis kaasneb ka elementaarosakeste tekkimine. Väljaosakeste tekkimisega kaasneb ka aineosakeste tekkimine Universumis.
3. Elementaarosakeste massidega kaasneb ka gravitatsiooniväljade tekkimine Universumis, kuna mass kõverdab aega ja ruumi. Kuid kvanttasandil on gravitatsioonijõu mõju lihtsalt väga väike.

Ürgse energiavälja potentsiaali eksponentsiaalne langus lõplikult väärtusest nulli tulenes otseselt sellest, et energiavälja potentsiaalne energia muundus üle kineetiliseks energiaks, kuna Universum hakkas uuesti paisuma. Nii potentsiaalne energia kui ka kineetiline energia on mõlemad lõpmata suured. Seega on kineetilise energia „roll“ aga järgmine:

1. Lõpmata suureks kineetiliseks energiaks muundumisega ei kaasnenud lõpmata suurte massidega elementaarosakeste olemasolu, vaid elementaarosakesed ja interaktsioonide vahebosonid on siiski kõik kindlate (lõplike) massidega.

2. Lõpmata suure kineetilise energiaga kaasneb lihtsalt lõpmata hulk osakesi Universumis. Lõpmata suure ruumalaga Universumis peab ka osakesi olema selles lõpmata hulk.
3. Tekkivatel osakestel endil ei saa olla lõpmata suur kineetiline energia. See saab olla maksimaalselt ainult nii suur, et osakeste keskmised liikumiskiirused „lähenevad“ valguse kiirusele  $c$  vaakumis.
4. Kuna enne vaakumi eksisteerimist täitis Universumi (aeg)ruumi ürgne energiaväli, mille potentsiaali langemine nulli põhjustaski vaakumi ja kõikvõimalike osakeste tekkimise Universumis, siis ainetihedus pidi algselt olema maksimaalselt väga suur.

Kui aine temperatuur on väga suure aine-energia tiheduse korral niivõrd kõrge, et osakeste keskmised liikumiskiirused lähenevad valguse kiirusele  $c$  vaakumis, siis sellisel juhul võib osakeste seisumassid jätta arvestamata ja kõik osakesed Universumis käituvad sarnaselt footonitega. Seda kirjeldab Universumi „ultrarelativistlik olekuvõrrand“:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

milles  $\rho c^2$  on energiatihedus ja  $p$  on rõhk. Suurimat aine temperatuuri, mis Universumis reaalselt eksisteerida saab, näitab Plancki temperatuur  $T$ . Seda on võimalik matemaatiliselt tuletada ainult Plancki massi ja Plancki energia kaudu. Näiteks kui me kvandienenergia valemi:

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{r}$$

paneme võrduma gravitatsioonivälja potentsiaalse energiaga:

$$E = \frac{GMm}{r} = \frac{Gm^2}{r} = \frac{hc}{r}$$

siis saamegi kohe Plancki massi väärtuse:

$$m = \sqrt{\frac{hc}{G}} = 2,176435 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$$

Viimasest avaldisest saame otsekohe kätte ka Plancki energia  $E$  avaldise:

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} = \frac{hc}{G}$$

millega väärtuseks on:

$$E = \sqrt{\frac{hc^5}{G}} \approx 1,956 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Universumi suurimat võimalikku temperatuuri ehk Plancki temperatuuri  $T$ :

$$E = kT = mc^2$$

saamegi tuletada läbi Plancki massi  $m$  ja Boltzmanni konstandi  $k$ :

$$T = \frac{mc^2}{k}$$

ehk

$$T^2 = \frac{m^2 c^4}{k^2} = \frac{hc}{G} \frac{c^4}{k^2}$$

mille väärtus on aga järgmine:

$$T = \sqrt{\frac{hc^5}{Gk^2}} \approx 1,416 * 10^{32} K$$

Plancki massi ja Plancki pikkuse järgi saame tuletada ka Universumi massitiheduse suurima võimaliku väärtuse:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{m}{l^3} = \frac{c^5}{hG^2} = 5,155 * 10^{96} \frac{kg}{m^3}$$

ja läbi selle ka suurima energiatiheduse väärtuse Universumis:

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{mc^2}{l^3} = \frac{c^7}{hG^2} = 4,633 * 10^{113} \frac{J}{m^3}$$

Kuna Universumi ruumalal vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} m$$

ja eksisteerimise ajaperioodil vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} s$$

ei ole füüsikalist eksistensi ehk aega ja ruumi ei eksisteeri, siis eelnevalt mainitud massi- ja energiatihedus ei oma tegelikult füüsikalist mõtet.

Plancki temperatuur, rõhk, energia ja tihedus eksisteerisid kõik Universumi pindsingulaarsuse ajal, mitte Universumi punktisingulaarsuse korral. See tähendab seda, et need ei võrdu lõpmatusena nagu seni oli arvatud.

Massitiheduse avaldisest:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

saame kätte ka energiatiheduse avaldise:

$$\rho c^2 = \frac{mc^2}{V} = \frac{E}{V}$$

Kuna gaasi rõhk  $p$  on termodünaamikas võrdne ühe kolmandikuga energiatihedusest, siis saame:

$$\frac{\rho c^2}{3} = p$$

Selline tulemus kirjeldab juba Universumi ultrarelativistlikku olekut. Kuid Universumi ultrarelativistlikku ehk kiirgusdominantset olekut kirjeldavat matemaatilist süsteemi on võimalik tuletada ka eespool tuletatud Friedmann'i võrrandist:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \rho$$

mille tegelik kuju on:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3}(\rho + \rho) = -\frac{4\pi G a}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

Viimasest võrrandist on selgesti näha seost:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

mis tegelikult juba kirjeldabki Universumi kiirgusdominantset olekut. Näitame seda järgnevalt palju põhjalikumalt. Näiteks Friemann'i võrrandid avalduvad teatavasti järgmiselt:

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \\ \frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2} \end{cases}$$

milles aegruumi kuju on määratud  $k = 1, 0, -1$ . Kui Universumi aegruum on tasane  $k = 0$ , siis saame Friemann'i võrrandite kujuks:

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{8\pi G a}{3}\rho \\ (\dot{a})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \end{cases}$$

Friedman'i tasane mudel ( $k = 0$ ) käitub ligikaudu sarnaselt negatiivse kõverusega mudeli ( $k = -1$ ) korral. Viimaste võrrandite lahendamiseks on aga järgmised avaldised:

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{2ca_m}{3}} * \sqrt{t} \\ \rho = \frac{3}{32\pi G t^2} \end{cases}$$

milles me näeme näiteks tiheduse  $\rho$  võrrandit:

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}$$

Saadud tiheduse  $\rho$  võrrand on ligikaudu õige ka positiivse kõverusega ( $k = 1$ ) ja negatiivse kõverusega ( $k = -1$ ) mudelite korral, kuna ultrarelativistlik olekuvõrrand

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

on kõigi mudelite korral rakendatav ainult Universumi sünnimomendi läheduses ( ehk Universumi vanuse  $t$  väikestel väärtustel ). Sarnaselt tasase mudeliga ( $k = 0$ ) käituvad kõik mudelid Universumi varajases nooruses ühtemoodi. Energiatihedus avaldub järgmiselt:

$$\rho c^2 = \frac{3c^2}{32\pi G t^2} = \rho_E$$

Varajasel Universumil oli palju ühiseid jooni „absoluutselt musta keha kiirgusega“, mida me siin ei hakka pikemalt lahkama. Absoluutselt musta keha kiirgus allub „Planck'i jaotusele“, mis annab kiirgusenergia ühikruumalas sageduste vahemikus  $\omega$  kuni  $\omega + d\omega$ :

$$W(\omega)d\omega = \frac{h}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} d\omega$$

Selles on  $W(\omega)$  kiirgusenergia spektraaltihedus ehk ühikulise sageduste vahemiku kohta tulev energiatihedus,  $T$  on absoluutne temperatuur,  $k$  on Boltzmann'i konstant,  $c$  on valguse kiirus ja  $h$  on Planck'i konstant. Kõigest sellest tulenevalt saame kasutada termodünaamikast tuntud Stefan-Boltzmann'i seadust:

$$J = \frac{1}{4} c \rho = \sigma T^4$$

ehk

$$\rho = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

ehk

$$\rho_E = \alpha \frac{4\sigma}{c} T^4$$

mille tulemusena saame sellise matemaatilise avaldise

$$T = \left( \frac{3c^3}{128\pi G\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

mis kirjeldab kõrgtemperatuurilist Universumit. Selle järgi on ürgplasma temperatuur pöördvõrdeline ruutjuurega Universumi vanusest. Ürgplasma domineerivate ülirelativistlike osakeste eriliikide arvu näitabki  $\alpha$ . Kui oletame, et  $\alpha = 100$ , siis saame viimase valemi kujuks:

$$T \approx 10^{10} t^{-\frac{1}{2}}$$

milles temperatuur  $T$  on Kelvini kraadides ja Universumi vanus  $t$  sekundites. Tegemist on Universumi temperatuuri ja vanuse omavahelise seose võrrandiga. Korrutades viimase valemi mõlemad pooled Boltzmann'i konstandiga  $k$ , saame seose kujuks:

$$kT \approx 0,95 \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ [MeV]}$$

Selline seos näitab ühe osakese keskmise soojusliikumise energia  $kT$  ja Universumi vanuse  $t$  omavahelist seost ehk sõltuvust. Universumi vanus  $t$  on sekundites ja energia  $kT$  on megaelektronvoltides. Siinkohal on tähelepanuväärne märkida seda, et kui me Universumi vanuse  $t$  ja temperatuuri  $T$  omavahelise seose võrrandis:

$$T \approx 10^{10} t^{-\frac{1}{2}}$$

avaldame Universumi vanuse Plancki aja  $t$  väärtusena:

$$t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5,39121 * 10^{-44} \approx 10^{-44} \text{ s}$$

siis me saame sellise temperatuuri  $T$ :

$$T \approx 10^{10} \frac{1}{\sqrt{t}} \approx 10^{10} \frac{1}{\sqrt{10^{-44}}} \approx 10^{32} K$$

mis langeb kokku vähemalt suurusjärgus Plancki temperatuuriga T:

$$T = \sqrt{\frac{hc^5}{Gk^2}} \approx 1,416 * 10^{32} \approx 10^{32} K$$

See on erakordne kokku langevus, mis näitab kogu eelneva füüsikalise ja matemaatilise analüüsi õigsust ehk paikapidavust. Eespool tuletatud võrrand:

$$kT \approx 0,95 \frac{1}{\sqrt{t}} [MeV]$$

võimaldab hinnata vähemalt suurusjärgu täpsusega Universumi vanust, mil võis toimuda näiteks prootonite ja antiprootonite annihilatsioon, elektronide ja positronide annihilatsioon ning vesiniku rekombineerumine:

1. Näiteks kui footonite energia on:

$$kT > 2m_p c^2 \approx 1840 MeV$$

( mis vastab kahekordsele prootoni seisumassile ), siis võivad need footonid ja ka teised osakesed vaakumist välja lüüa prootoni ja antiprootoni paare, kui footonid põrkuvad teiste osakestega. Ürgplasma on footoneid ja prooton-antiprooton paare peaaegu võrdselt ja seda just termodünaamilise tasakaalu tõttu. See tähendab, et osakeste ja antiosakeste paare, mis tekivad soojustasakaalu olekus footonite põrgete tõttu, on peaaegu võrdne hulk footonitega, mis tekivad nende paaride annihilatsioonil. Kui Universumi paisumise tõttu on temperatuur:

$$kT < kT_p = 2m_p c^2 \approx 1840 MeV$$

siis prooton-antiprooton paare juurde enam ei teki. Tekivad aga hoopis footonite paarid, kuna olemasolevad prooton-antiprooton paarid annihileeruvad üsna kiiresti. Prootonite ja antiprootonite paarid „kaovad“ ürgplasmast umbes sellisel ajal, mil Universumi vanus on:

$$kT \approx 0,95 \frac{1}{\sqrt{t}} [MeV]$$

ehk

$$t_p \approx \left( \frac{0,95}{1840} \right)^2 \approx 2,7 * 10^{-7} s$$

Selle järgi on Universumi temperatuur:

$$T \approx 10^{10} t^{-\frac{1}{2}} \approx 2 * 10^{13} K$$

Tähelepanuväärne asjaolu on see, et ürgses plasmas oli prootoneid natuke rohkem kui antiprootoneid. Praegusel ajal on umbes miljardi footoni kohta üks prooton. Ürgplasma oli iga miljardi prooton-antiprootoni paari kohta olemas üks üleliigne prooton. Sellest ajast peale ( Universumi vanus ca  $10^{-7} s$  ) ehk prootonite ja antiprootonite annihilatsioonist



alates ei ole footonite koguarv Universumis väga palju muutunud. See tähendab ka seda, et ühe footoni kohta on osakeste summaarne bariionarv umbes üks miljardik. Osakeste väga väike ülekaal antiosakestega võrreldes moodustab kogu meie tajutava materiaalse maailma. Tegelikult ka elektron-positroni paaride tekkimisel on elektrone natuke rohkem. Negatiivselt laetud elektrone ja positiivselt laetud prootone on aga võrdselt.

2. Temperatuur, mille korral saavad tekkida elektron-positroni paarid, on:

$$kT_e = 2m_e c^2 \approx 1 \text{ MeV}$$

ehk

$$T_e = 10^{10} \text{ K}$$

Kui Universumi vanus on väiksem kui 1 sekund, siis oli ürgplasmas elektrone ja positrone peaaegu sama palju kui footoneid. Elektron-positroni paarid kaovad ehk annihileeruvad umbes siis, kui Universum on ca 1 sekund vana.

3. Neutraalsed aatomid ( näiteks vesiniku aatomid ) moodustusid umbes 300 000 aastat pärast Universumi sündi. Stabiilsed vesiniku aatomid ei ioniseeru footonitega või teiste osakestega põrgete tagajärjel. Sellisel juhul peab põrke energia olema aatomis väiksem elektroni seoseenergiast:

$$E \approx 13,6 \text{ eV}$$

Kuid tegelikult peab energia olema:

$$kT_v \approx 0,34 \text{ eV}$$

ehk

$$T_v \approx 4000 \text{ K}$$

See tuleneb sellest, et aatomid ioniseeruvad ka selliste footonite põrgete tagajärjel, mille energia ehk sagedus on absoluutse musta keha kiirgusspektris keskmisest suurem. Selliseid kõrge energiaga footoneid on aatomite arvuga võrreldes üsna palju. Iga aatomi tuuma kohta on ca  $10^9$  footonit. Stabiilsete vesiniku aatomite moodustumise ajajärku ehk sellele vastavat Universumi vanust on võimalik välja arvutada eespool tuletatud valemist:

$$kT \approx 0,95 \frac{1}{\sqrt{t}} [\text{MeV}]$$

Selle järgi saamegi Universumi vanuseks ligikaudu 300 000 aastat. Pärast vesiniku rekombineerimist ei liigu elektronid enam vabalt. See põhjustab omakorda Universumi läbipaistvust kiirgusele. Aine ei sõltunud enam kiirgusest ja see võimaldas ainel moodustada tähti ja galaktikaid. Footonid, mis said vesiniku rekombineerimisel vabaks, jäid paisuvas Universumis vabalt liikuma. Iga aatomi kohta oli ca  $10^9$  footonit. Nende spektraaljaotus vastas Planck`i jaotusele temperatuuril ligikaudu 4000 K, mis samastub absoluutselt musta keha kiirgusega. Selle üldkuju aja jooksul suuresti ei muutunud, kuid selle temperatuur muutus väiksemaks:

$$T \approx \frac{1}{a(t)}$$

Viimases on  $a(t)$  Universumi mastaabi tegur. Praegusel ajal on see vaadeldav reliktkiirgusena, mille temperatuur on 2,7 K ja millel on absoluutse musta keha kiirguse spekter. Sellel on väga väikesed kõrvalekalded Planck`i jaotusest ja sellel on avastatud ka

mitteisotroopsus.

Järgnevalt hindamegi vähemalt suurusjärgu täpsusega Universumi vanuse ja temperatuuri omavahelist seost esimese 300 000 aasta jooksul, mil Universumi arengus muutus üks või teine elementaarosakeste vaheline protsess oluliseks:

1. Kui Universumi vanus on  $10^{-43} < t < 10^{-34}$  s, siis võis temperatuur olla kõrgem kui  $10^{27}$  K. Sellisel temperatuuril ilmselt puudusid tuumaosakesed (prootonid ja neutronid), kuid eksisteerisid leptonid nagu näiteks neutriinod, samuti ka vabad kvargid, footonid ja võib olla ka veel seni avastamata osakesed.
2. Kui Universumi vanus on  $10^{-34} < t < 10^{-10}$  s, siis võis temperatuur olla kõrgem kui  $10^{15}$  K. Sellisel temperatuuril tekib aine ja antiaine asümmeetria ehk kvarke ja leptoneid on ühe miljardiku võrra rohkem kui antikvarke ja antileptoneid.
3. Kui Universumi vanus on  $10^{-10} < t < 10^{-6}$  s, siis võis temperatuur olla kõrgem kui  $10^{13}$  K. Sellisel temperatuuril on ainetihedus suurem aatomituuma tihedusest:

$$\rho = 10^{14} \frac{kg}{cm^3}$$

Kvargid ühinevad prootoniteks ja neutroniteks ning teisteks barüonideks. Tekivad ka vastavad antiosakesed. Osakesed ja antiosakesed annihileeruvad. Suhteliselt väike osa barüonidest säilib, kuna barüone on natuke rohkem kui antibarüone (üks miljardik osa).

Barüonaine on prootonitest, neutronitest ja elektronidest koosnev aine.

Sellisel ajaperioodil on Universumis umbes 300 erinevat liiki osakest ja seda nimetatakse „hadronite staadiumiks“.

4. Kui Universumi vanus on vahemikus  $10^{-6} < t < 10$  s, siis temperatuur võis olla vahemikus  $10^{13} K > T > 5 \cdot 10^9$  K ja ainetihedus:

$$10^{14} \frac{kg}{cm^3} > \rho > 1 \frac{kg}{cm^3}$$

Sellisel juhul on tegemist „leptonite staadiumiga“, mis tähendab seda, et footoneid ja leptoneid (elektronid, positronid, neutriinod, antineutriinod jms) on umbes  $10^9$  korda rohkem kui barüone. Nukleonide koguarvust on esimese sekundi lõpus prootoneid 84% ja neutroneid 16%. Elektronid ja positronid annihileeruvad ajavahemikus 1 – 10 s. Lõpuks on prootoneid ja elektrone võrdselt, kuna elektrone on üks miljardik osa rohkem kui positrone. Neutriinod ja antineutriinod käituvad nüüd vabade osakestena ehk need pole enam teiste osakestega soojustasakaalus. Niiöelda „relikt-neutriinod“ täidavad ka praegusel ajal kogu Universumit. Sellisel ajaperioodil toimuvad esimesed termotuumareaktsioonid, mille käigus moodustuvad raskemate aatomite tuumad. Need tuumad on raskemad vesiniku tuumast (näiteks He ja natuke ka Li ning Be), kuid need pole paraku stabiilsed ehk need lagunevad, kuna need pörkuvad teiste osakestega kokku kõrge temperatuuri ja ülisuure tiheduse tõttu.

5. Kui Universumi vanus on vahemikus  $10s < t < 100$  s, siis temperatuur võis olla kõrgem kui  $5 \cdot 10^8$  K. Ainetihedus on langenud väärtuseni:

$$10 \frac{g}{cm^3}$$

Sellisel juhul on tegemist heeliumi ja deuteeriumi tuumade sünteesi staadiumiga. Footoneid ja neutriinosid on endiselt kõige rohkem. Prootonid, elektronid ja neutronid moodustavad ainult ühe miljardiku osa. Neutriinod liiguvad Universumis vabalt ja seetõttu samastub Universumi temperatuur absoluutse musta keha temperatuuriga, mis vastab footonite energiale. Sellisel ajaperioodil tekivad vesinikust raskemad tuumad, mis on juba stabiilsed. Põhilised tuumad on heeliumi ja deuteeriumi aatomituumad.

Deuteerium ehk raske vesinik on vesiniku isotoop, mille aatomituumas on üks prooton ja üks neutron.

Deuteeriumi tuumad moodustavad Universumis pärast tuumareaktsioonide toimumist väga väikese osa ( umbes alla 1%-i ). Lõpuks moodustub Universumis 27% heeliumi tuumad ja 73% vesiniku tuumad ehk lihtsalt prootonid. Sellise ajaperioodi lõppedes ei toimu enam tuumareaktsioone, kuna Universumi tihedus ja temperatuur on siis lihtsalt väga väikesed.

6. Kui Universumi vanus on vahemikus  $10^2 s < t < 10^{13} s$ , siis seda ajaperioodi nimetatakse „kiirgusdominantseks Universumiks“. Kogu sellise ajaperioodi jooksul on kõige rohkem footoneid, mille energia vastab absoluutse musta keha kiirguse energiale ja mis on soojustasakaalus ülikõrge temperatuuriga plasmaga. See kuum plasma koosneb põhiliselt elektronidest, prootonitest ja heeliumi aatomituumadest. Footonite energiatihedus on palju kordi suurem tavaaine energiatihedusest ja seetõttu kirjeldab Universumi kiirgusdominantset olekut võrrand:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

milles  $\rho c^2$  on energiatihedus ja  $p$  on rõhk. Footonite energiatihedus väheneb palju kordi kiiremini tavaaine energiatihedusest just Universumi paisumise tõttu. Seepärast toimus umbes 300 000 aastat pärast Universumi sündi ( mil Universumi temperatuur oli umbes 4000 K ) üleminek kiirgus-dominantselt ajastult aine-dominantsele ajastule. Praegusel ajal ehk ainedominantsel ajastul on Universumi peamine energia koondunud just aatomituumade osakeste massi. Ülemineku ajal muutus Universum kiirgusele läbipaistvaks, mille korral oli temperatuur umbes 3000 K. Umbes  $6 \cdot 10^{12} s$  ehk ligikaudu 200 000 aastat pärast Universumi sündi oli temperatuur langenud 3600 K-i. Pärast seda võisid tekkida sellised aatomid, mis olid juba elektriliselt neutraalsed ja ka stabiilsed. Tegemist on niiöelda „vesiniku rekombinatsiooniga“, mille korral osakeste vahelised põrked ei rebinud enam aatomitest välja elektrone.

Vikipeedia ütleb, et plasma on osaliselt või täielikult ioniseerunud gaas, milles positiivsete ja negatiivsete laengute ruumitihedus on praktiliselt ühesugune.

Kogu Universumit täitev ülikuum plasma muutus kiiresti elektriliseks neutraalseks keskkonnaks, milles said juba vabalt liikuda footonid. Soojusliku ehk termodünaamilise tasakaalu kadumine aine ja footonite vahel põhjustas Universumi muutumise kiirgusele läbipaistvaks. Need footonid moodustavadki tänapäeval vaadeldava reliktkiirguse.

7. Universumi entroopia tervikuna ajas ainult kasvab, mille käigus tekivad ka lokaalsed keerulised korrapärased struktuurid ( näiteks tähed, elu, planeedid jne ). Korrapäraste struktuuride tekkimine tähendab Universumi entroopia lokaalset kahanemist, mis toimub sellise energia kvaliteedi arvel, mis saadakse väljaspoolt või äraandmisel. See põhjustab

kusagil mujal suuremat entroopia kasvamist. Entroopia kasvamise seadus ilmneb ainult küllalt suure osakeste kogumi korral, s.t. üksiku molekuli korral see ei ilmne. Seetõttu on termodünaamika teine seadus statistilise iseloomuga, mis tegelikult märgibki entroopia seost suure osakeste hulgaga.

Entroopia aitab füüsikas leida temperatuuri, keemilist potentsiaali, rõhku ja teisi termodünaamilisi parameetreid. Seetõttu on entroopia statistilise termodünaamika üks põhimõisteid, millel on väga palju erinevaid definitsioone:

Termodünaamika teise printsiibi definitsioon entroopia mõistet kasutades kõlab nii, et “isoleeritud süsteemi entroopia kasvab seni, kuni saavutab oma suurima väärtuse antud tingimustel”. Selline asjaolu vihjab, et entroopiat võib mõista ka protsesside pööramatuse mõõduna.

Soojuslikult isoleeritud süsteemi entroopia saab ainult kasvada või jääda konstantseks.

Soojus ei saa iseenesest üle minna külmemalt kehalt soojemale kehale.

Energia jäävuse seadus toimib sõltumatult termodünaamika teisest seadusest.

8. Universumi soojussurma teooriat löid termodünaamika rajajad juba 20. sajandil. Selle teooria järgi on umbes ca  $10^{100}$  aasta pärast kõik Universumi tähed muutunud mustadeks aukudeks oma termotuumakütuse varude ammendamise tõttu. Mustad augud on omakorda aurustunud ja lagunened on ka kõik „rasked“ elementaariosakesed Universumis. Nende asemele on jäänud selline „gaas“, mis koosneb ainult kergetest osakestest nagu näiteks footonitest, elektronidest, positronidest, neutriinodest jm. See „gaas“ on niivõrd hõre, et see on võrreldav sellega, kui kogu praeguse Universumi horisondi sisse jääv ruumala korrutada  $10^{185}$  korda suuremaks, siis saame sellise ruumala, mille sisse jääb ainult üks osake.

Vastavalt Suure Paugu teooriale peab kosmoses levima foonkiirgus. Selline kosmiline reliktkiirgus avastatigi A. Penziase ja R. Wilsoni poolt 1964. aastal. Reliktkiirguse avastamisega oli Suure Paugu teooria leidnud eksperimentaalse (s.t. empiirilise) kinnituse. Suure Paugu teooria järgi sai meie Universum alguse ühte punkti kokku surutud materias, mis plahvatas. Selle järgi pidi materia tihedus olema Universumi alghetkel selline, mida me ei oska praegu ettekujutada. Praegu loetakse aine suurimaks võimalikuks tiheduseks aatomituumade tihedust.

Universum on kunagi olnud soojusliikumises. Universumi ruumi paisudes väheneb aja jooksul sellele vastava kiirguse temperatuur, mida näitabki praegu mõõdetav foonkiirguse olemasolu.

Universumit täitev foonkiirguse ehk reliktfooni spekter määrab ära Universumi temperatuuri, milleks on praegu 2,7 K. Kosmilise foonkiirguse spektri intensiivsuse maksimum on lainepikkusel  $\lambda = 1,07$  mm ja Wieneri valemi järgi on selle temperatuur 2,7 K ehk  $-270$  °C.

Mikrolaineline kosmiline taustkiirgus pärineb väga varajasest ja kuumast Universumist. Kogu Universumit täitnud kiirgus ja ülikõrge temperatuuriga ning tihe plasma olid omavahel soojuslikus tasakaalus vahetult pärast inflatsioonilise Universumi staadiumit. Aine ja kiirgus jahtusid Universumi paisudes ning kiirguse lainepikkus aja jooksul suurenes. Universumi jahtudes eraldus lõpuks kiirgus ainest. Kuna Hubble'i konstant  $H$  avaldus:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

siis seega saame Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandist:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho H$$

sellise diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} = -3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

mille üldlahendiks on avaldis:

$$\rho(t) = \frac{C}{a^3(t)}$$

C on ajast sõltumatu konstant. Saadud tulemus näitab Universumi ainetiheduse  $\rho(t)$  sõltuvust mastaabi tegurist a. Kuid sellist sõltuvust on võimalik leida ka Friedman'i võrrandist:

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

Näiteks diferentseerime viimase võrrandi mõlemad pooled aja t järgi ja saadud tulemuse jagame suurusega  $\dot{a}(t)$ . Tulemuseks saame:

$$\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho a + \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho} \frac{a^2}{\dot{a}}$$

Saadud võrrandist lahutame Friedman'i võrrandi:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

milles rõhk p avaldub:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

See annab meile sellise diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} = -4 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

mille üldlahendiks on avaldis:

$$\rho(t) = \frac{C^*}{a^4(t)}$$

$C^*$  on integreerimiskonstant. Saadud avaldis näitab, et Universumi kiirgusdominantsel ajastul on ainetihedus pöördvõrdeline mastaabi teguri neljanda astmega. Selle füüsikaline sisu on seletatav „kosmoloogilise punanihkega“. Näiteks tuntud Doppler'i efekt:

$$\omega_1 - \omega = -\omega \frac{v}{c}$$

ehk

$$\omega_1 = \omega - \omega \frac{v}{c} = \omega + d\omega$$

põhjustab vaateleja footonil väiksemat sagedust kui seda on väljakiiratud footonil.  $\omega_1$  on registreeritud footoni sagedus. Galaktikate vahelises ruumis mõjutab valguse kiirusega c

$$\frac{1}{c} = \frac{dt}{dl}$$

liikuvat footonit Hubble'i seadus:

$$v = H(t)dl = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dl$$

ja seetõttu tuleb Doppleri efekti võrrand kujul:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt$$

Viimasest avaldisest saame omakorda aja momendil  $t$  registreeritud footoni sageduse:

$$\omega(t) = \frac{\omega(t_0)a(t_0)}{a(t)}$$

mis on kvantfüüsikas väljendatav ka de Broglie lainepikkuse kaudu:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(t_0)a(t)}{a(t_0)}$$

Selle järgi saame footoni energia valemiks:

$$E = h\omega = h \frac{\omega(t_0)a(t_0)}{a(t)}$$

Viimane avaldis tähendab seda, et kosmoloogiline punanihe vähendab Universumi paisumise tõttu iga üksiku footoni energiat. Universumi paisumise tõttu suureneb mistahes elementaariosakese de Broglie lainepikkus ja väheneb nende impulss.

Järgnevalt esitame „kiirgusdominantse Universumi ajastule“ omased põhijooned, mida me siin matemaatiliselt pikemalt ei hakka käsitlema ega tõestama:

1. Universumi paisumiskiirus oli palju väiksem osakeste keskmisest kiirusest kahe omavahelise pörke vahel. Seetõttu on Universumi paisumist võimalik käsitleda termodünaamikast tuntud „adiabaatilise protsessina“.
2. Universumi paisumise tõttu suureneb mistahes elementaariosakese de Broglie lainepikkus ja väheneb nende impulss. Kuna Hubble'i seadus avaldub:

$$v = H(t)dl = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dl$$

ja footon liigub valguse kiirusega  $c$ :  $dl = cdt$ , siis saadakse selline diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt$$

mille üldlahendiks on avaldis:

$$\omega(t)a(t) = \text{const}$$

Sellest tulenevalt on ajamomendil  $t$  registreeritud footoni sagedus  $\omega$ :

$$\omega(t) = \frac{\omega(t_0)a(t_0)}{a(t)}$$

mis oli ajamomendil  $t_0$  sagedusega  $\omega(t_0)$ . Sagedus on seotud osakese lainepikkusega:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(t_0)a(t)}{a(t_0)}$$

ja osakese energiaga  $E$ :

$$E = \omega h = \frac{\omega(t_0)a(t_0)}{a(t)} h$$

Seetõttu võibki öelda, et Universumis rändava footoni sagedus ja energia aja jooksul vähenevad just Universumi paisumise tõttu.

3. Universumi paisumine vähendab footonite arvu tihedust ja kosmoloogiline punanihe vähendab iga üksiku footoni energiat.
4. Kosmoloogiline punanihe ei avalda seisumassiga osakeste massitihedusele olulist mõju.
5. Universumi paisumise tõttu väheneb seisumassita osakeste massitihedus palju kordi kiiremini kui seisumassiga osakeste massitihedus.
6. Universumi kiirgusdominantsel ajastul on ainetihedus pöördvõrdeline mastaabi teguri neljanda astmega.
7. Kuna Universumi horisont paisub/suureneb ajas valguse kiirusega  $c$ , siis mida varasemat kosmoloogilist aega vaatleme, seda enam Universumi kui terviku kõverus muutub vähem oluliseks.

Kui Universumi kiirgusdominantset ajastut kirjeldas Universumi ultrarelativistlik olekuvõrrand:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

siis pärast seda ajastut võib Universumi rõhku  $p$  arvestada nulliga:

$$p = 0$$

kuna galaktikate omavahelised põrked toimuvad äärmiselt harva.

## 1.8 Relativistliku mehaanika ja kvantmehaanika suhe ( kvantgravitatsioon )

### 1.8.1 Gravitatsioonivälja meetriline võrrand

Järgnevalt tuletame tensormatemaatikat kasutamata meetrilise võrrandi, mis kirjeldab matemaatiliselt gravitatsioonivälja ehk tsentraalsümmeetrilist aegruumi kõverust, mis ajas ei muutu. Näiteks erirelatiivsusteoorias tuletatav aegruumi intervalli võrrand

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

ehk

$$s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l^2}$$

näitab sündmuste A ja B vahelist intervalli. Kuna  $\tau$  ei sõltu inertsiaalsüsteemist, siis kahe vaadeldava sündmuse A ja B vaheline intervall on kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugune. Intervall  $s$  on invariant, kuid ajavahemik ja lõigu pikkus ei ole invariantid. Valguse korral on intervall:  $\tau = 0$  ja seega:

$$0 = c^2 \Delta t^2 - l^2$$

Kahe punkti vahelist kaugust neljamõõtmelises aegruumis kirjeldab aegruumi intervall:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ehk

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Aegruumi intervallist me järgnevalt lähtume, et kirjeldada kahe punkti vahelist kaugust kõveras aegruumis ehk tsentraalsümmeetrilises gravitatsiooniväljas. Tuletatud aegruumi intervalli meetrilisel võrrandil:

$$ds^2 = c^2 \tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt^2 - dl^2$$

on olemas ajaline osa

$$ds_1^2 = c^2 dt^2$$

ja ruumiline osa

$$-ds_2^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2) = -dl^2$$

See tähendab seda, et nende kahe osa liitmisel saamegi aegruumi intervalli meetrilise võrrandi:

$$ds_1^2 + (-ds_2^2) = ds_1^2 - ds_2^2 = ds^2$$

ehk

$$ds_1^2 - ds_2^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2$$

Aegruumi intervall  $ds$  on valguse kiiruse  $c$  ja „omaaja“  $\tau$  korrutis:

$$ds^2 = c^2 \tau^2$$

milles  $\tau^2 \neq dt^2$ . Mida lähemale gravitatsioonivälja tsentrile, seda enam teiseneb aeg välisvaatleja suhtes ehk esineb gravitatsiooniline aja dilatatsioon:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

ehk

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} dt$$



ja seetõttu võime aegeumi intervalli avaldada järgmiselt ( koos aja dilatatsiooniga ):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Kuid peale ajalise osa on aegeumi intervalli võrrandis olemas ka ruumiline osa:

$$ds^2 = d\tau^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Kuna gravitatsiooniväli on enamasti tsentraalsümmeetriline, siis avaldame selle ruumilise osa sfäärilistes koordinaatides:

$$ds^2 = dr^2 - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Antud võrrandis arvestame ainult raadiuse muutumist:

$$ds^2 = dr^2$$

ehk

$$d\tau^2 = dr^2$$

kuna kahe ruumipunkti vaheline kaugus ehk pikkus muutub ainult gravitatsioonivälja tsentri poole liikudes, mitte aga risti välja raadiusega:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

ehk

$$dr = d\tau \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

Võttes aga viimase avaldise ruutu

$$dr^2 = d\tau^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

saamegi pikkuse teisenemise avaldise ainult välja tsentri suunas

$$d\tau^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

Aegeumi intervalli võrrandi ruumilise osa saame seetõttu avaldada järgmiselt:

$$ds^2 = d\tau^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

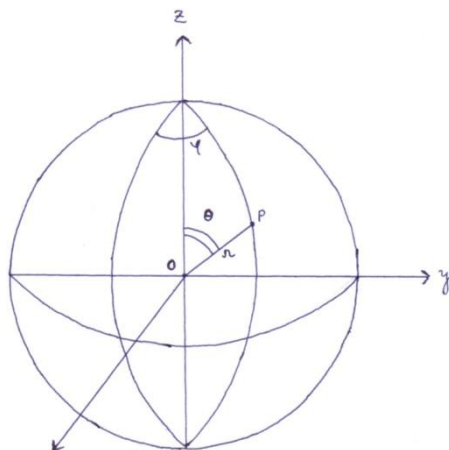
Kui me arvestame ajalist ja ruumilist osa samaaegselt ehk liidame need kaks poolt omavahel kokku, saamegi meetrilise võrrandi, mis kirjeldab matemaatiliselt puhast gravitatsioonivälja ehk tsentraalsümmeetrilist aegeumi kõverust:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

milles

$$\alpha = \frac{2Gm}{c^2}$$

nimetatakse Schwarzschildi raadiuseks, mis näitab välja tsentris eksisteeriva aegruumi augu suurust.



Joonis 10 Sfäärilised koordinaadid.

1916. aastal leidis sellise lahendi teadlane nimega Schwarzschild ja seetõttu nimetatakse seda ka Schwarzschildi meetrikaks. Kui aga võtta viimases võrrandis  $\alpha$  ja  $r^2$  asemele

$$r + \frac{R}{2}$$

ja tehes mõningaid matemaatilisi teisendusi, saame aga järgmise meetrilise kuju:

$$ds^2 = \frac{r - \frac{R}{2}}{r + \frac{R}{2}} dt^2 - \frac{r + \frac{R}{2}}{r - \frac{R}{2}} dr^2 - \left(r + \frac{R}{2}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Saadud avaldist peetakse Foki gravitatsioonivälja põhivormiks. Antud võrrand kirjeldab sellist välja, mis ajas ei muutu ja on tsentraalsümmeetriline. Selline vorm on esitatud harmoonilistes koordinaatides.  $R$  on Schwarzschildi raadius.

Pikkuse lühenemist on mõeldud füüsikalist kaugust kahe ruumipunkti A ja B vahel (näiteks kaugust gravitatsioonivälja kahe punkti vahel). Need punktid asetsevad tsentrist 0 tõmmatud raadiusel:

$$s = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}.$$

Kui välja tsentrist eemalduda, siis kaugus välja kahe ruumipunkti vahel suureneb.

### 1.8.2 Gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrand

Enne relatiivsusteooria ja kvantmehaanika omavahelise seose põhjalikku analüüsimist tuletame järgnevalt illustratiivselt Einsteini gravitatsioonivälja põhivõrrandid, mille korrektse tuletuse esitas David Hilbert 1915. aastal. See tuletus saab alguse Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaali võrrandist:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2k^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right]$$

milles meetrilise tensori determinant avaldub

$$g \equiv \det (g_{\mu\nu})$$

$R$  on Ricci skalaar,  $\mathcal{L}_M$  on aineenergia tihedus ja  $\Lambda$  on nn kosmoloogiline konstant.  $G$  on Newtoni gravitatsioonikonstant seoses

$$k^2 \equiv 8\pi G$$

ja integreerimispiirkond võetakse üle kogu aegruumi. Kuna fundamentaalses füüsikas kehtib vähima mõju printsiip ( $\delta S = 0$ ) ja järgides pöördmeetrika kontravariantseid komponente  $g^{\mu\nu}$ , siis saame Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaali võrrandi esitada ka kujul:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \left[ \frac{1}{2k^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = \\ &= \int \left[ \frac{1}{2k^2} \left( R \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - 2\Lambda \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} - 2\sqrt{-g} \frac{\delta \Lambda}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \end{aligned}$$

Nurksulgudes olev osa on võrdne nulliga, kuna viimane võrdus peab kehtima igasuguse  $\delta g^{\mu\nu}$  variatsiooni korral. Järgnevalt jagame sulgudes oleva liikme  $\sqrt{-g}$ -ga, tulemuseks saame:

$$\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{2\Lambda}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} - 2 \frac{\delta \Lambda}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2k^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Saadud võrrand ongi sisuliselt Einsteini gravitatsioonivälja põhivõrrand. Näiteks viimase võrrandi esimeses ja kolmandas liikmes avaldub „meetrika definitsiooni variatsioon“ kujul:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})$$

millega saame Einsteini võrrandi esimese liikme kujuks

$$\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}$$

ja kolmanda liikme kujuks

$$\frac{2\Lambda}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = \Lambda g^{\mu\nu}$$

Kuna Ricci skalaari definitsioon avaldub seosena:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

siis seega saame Einsteini võrrandi teise liikme avaldada kujul:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} + 0 = R_{\mu\nu}$$

Kosmoloogiline konstant ei sõltu kontravariantsetest komponentidest ja Einsteini võrrandi viies liige on võrdeline energia-impulsi tensoriga:

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}$$

Einsteini gravitatsioonivälja põhivõrrand tuleb seega kujul:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu}$$

Viimast võrrandit on võimalik esitada ka Einsteini tensori  $G_{\mu\nu}$  kaudu:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

milles Einsteini tensor kirjeldab aegruumi geomeetriat. Viimane võrrand sisaldab tegelikult 16 võrrandit, millest omakorda jääb järele 10 sõltumatut võrrandit tensorite sümmeetriate tõttu. Kuid veel neli seost lisab Bianci identsus:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

Kuus võrrandit, mis järele jäävad, ei ole lineaarsed ja seepärast ei saa rakendada nende võrrandite lahenditele superpositsiooni printsiipi.

Einsteini gravitatsioonivälja põhivõrrand on otseselt tuletatav ka Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandist, mille läbi ongi see seotud kvantmehaanikaga. Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrand tuletatakse füüsikas mehaanilise energia jäävuse seaduse valemist, mille korral on kineetiline energia ja potentsiaalne energia  $U$  omavahel võrdsed:

$$\frac{mv^2}{2} = U = -\frac{GMm}{R}$$

Gravitatsioonipotentsiaal  $U$  on füüsikas enamasti negatiivne. Viimases võrduses taanduvad massid  $m$  ilusti välja:

$$\frac{c^2}{2} = -\frac{GM}{R}$$

ja mõningate lihtsate matemaatiliste teisendustega saamegi Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandi:

$$R = -\frac{2GM}{c^2}$$

milles me antud juhul jätame miinusmärgi võrrandisse sisse. Vastavalt seisuenergia  $E$  matemaatilisele definitsioonile:

$$E = mc^2$$

saame massi  $M$  avaldada puhtalt ka energia  $E$  kaudu:

$$\frac{E}{c^2} = m = M$$

mis annab meile raadiuse  $R$  võrrandi kujuks:

$$R = -\frac{2G}{c^4} E$$

Eespool tõestasime kvantmehaanikas kasutatava „taandatud“ Plancki konstandi  $\hbar$  seose valguse kiirusega  $c$ :

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

ja see annaks meile võrrandi kujuks:

$$R = -2GE \frac{1}{c^4} = -2GE\hbar$$

Korrutame saadud võrrandi

$$R = -\frac{2G}{c^4} E$$

mõlemad pooled  $-4\pi$ -ga:

$$-4\pi R = \frac{8\pi G}{c^4} E$$

Edaspidi on meil väga oluline, et selles võrrandis kehtiks seos:

$$-4\pi R = -R$$

milles

$$4\pi = 2(2\pi) = 1$$

See on oluline sellepärast, et meil on vaja lõpuks tuletada Einsteini gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrand. Viimaste võrduste kehtivust on põhimõtteliselt võimalik ka tõestada. Näiteks eespool tuletatud võrrandis:

$$R = -2GE \frac{1}{c^4} = -2GE\hbar$$

arvestame hoopis sellega, et Plancki konstant  $\hbar$  ei ole tegelikult „taandatud“:

$$\frac{2\pi}{c^4} \approx 2\pi\hbar = h$$

See annab meile võrrandi kujuks:

$$R = -2GEh = -2GE \frac{2\pi}{c^4} = -\frac{4\pi G}{c^4} E$$

ehk

$$R = -\frac{4\pi G}{c^4} E$$

Korrutame saadud võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$2R = -\frac{8\pi G}{c^4} E$$

ja viime ühe kahe võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} \frac{E}{2}$$

Universumi kosmoloogia osas tuletasime ja läbi selle ka tõestasime järgmise võrduse kehtivuse:

$$\frac{E}{2} = \frac{mc^2}{2} = mc^2 = E$$

mis annab meile uuesti esialgse kuju:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} E$$

ehk

$$-R = \frac{8\pi G}{c^4} E$$

Kui me oletame, et saadud võrrandis on tegemist Ricci skalaariga  $R$ , mis on omakorda seotud Einsteini tensoriga  $G_{ik}$  ja Ricci tensoriga  $R_{ik}$ :

$$g^{ik} G_{ik} = G = g^{ik} \left( R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = R - 2R = -R$$

ehk

$$G = -R$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$G = \frac{8\pi G}{c^4} E$$

või

$$G = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{E}{2}$$

Viimases võrrandis on muutujateks ainult  $G$  ja  $E$ . Energiat  $E$  kirjeldab üldrelatiivsusteoorias „energia-impulsstensor“  $T^{ik}$ :

$$T^{ik} = \frac{1}{2} M_i c^2 = \frac{E}{2}$$

või

$$T^{ik} = M_i c^2 = E$$

ja muutuja  $G$  tensori kuju on järgmine:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$$

Sellest tulenevalt võib muutujaid  $G$  ja  $E$  kirjeldada vastavate tensoritega, mille tõttu saame võrrandi lõplikuks kujuks:

$$G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ik}$$

ehk

$$G^{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ik}$$

mis tegelikult juba ongi Einsteini gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrand.

Einsteini gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrandini on võimalik jõuda ka eespool saadud raadiuse  $R$  võrrandi massi  $m$  kaudu:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^2} m$$

ehk

$$-R = \frac{8\pi G}{c^2} m$$

Sellisel juhul me näeme seda, et muutujateks on ainult raadius  $-R$  ja mass  $m$  ning ülejäänud võrrandi liikmed moodustavad kokku konstandi:

$$\frac{8\pi G}{c^2} = \text{const}$$

Järgnevalt avaldame muutujad  $-R$  ja  $m$  „tensoritena“, mis tulenevad üldrelatiivsusteooriast. Näiteks Albert Einsteini üldrelatiivsusteoorias on gravitatsioonivälja põhivõrrand defineeritud Einsteini tensoriga  $G$  järgmiselt:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$$

ja kui me korrutame selle võrrandi mõlemad pooled „meetrilise tensoriga“  $g$

$$g_{ik} = g^{ik}$$

siis saame tulemuseks negatiivse raadiuse  $-R$ :

$$g^{ik} G_{ik} = g^{ik} \left( R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = R - 2R = -R$$

Sellest tulenevalt võime kirjutada:

$$g^{ik} G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^2} m$$

Väljade kvantteoorias defineeritakse lagranžiaanide matemaatika kaudu „energia-impulsstensor“:

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \sum_A \frac{\partial L}{\partial u_{A,\nu}} u_{A,\mu}$$

milles

$$u_{A,\mu} = \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu}$$

Energia-impulsstensori kaudu defineeritakse lagranžiaanide matemaatikas ka „energia-impulssvektor“:

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3x$$

mille neljas komponent määrab energia E:

$$E = \int H d^3x = - \int T_{44} d^3x$$

milles Hamiltoniaani tihedus avaldub:

$$H(x) = \sum_A \frac{\partial L(x)}{\partial \dot{u}_A(x)} \dot{u}_A(x) - L(x)$$

Albert Einsteini üldrelatiivsusteooria tensormatemaatikas on energia tensor avaldatav järgmiselt:

$$T^{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} M_i c^2 = \frac{E}{2}$$

Selles me näeme seisuenergia avaldist:

$$E = mc^2$$

mis on jagatud kahega:

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{E}{2}$$

Kuid üldrelatiivsusteoorias ja ka tensormatemaatikas defineeritakse „energia-impulsstensor“ diferentsiaalvõrrandiga:

$$T^{ik} = m_0 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} + F^{ik}$$

mille mõlema poole korrutamisel meetrilise tensoriga g saame tulemuseks positiivse massi m:

$$g_{ik} T^{ik} = g_{ik} \left( m_0 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} + F^{ik} \right) = m_0 + g_{ik} F^{ik} = m$$

ehk

$$g_{ik} T^{ik} = m$$

Sellest tulenevalt võime eespool tuletatud võrrandis

$$g^{ik} G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^2} m$$

massi m asendada järgmiselt:

$$g^{ik} G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^2} g_{ik} T^{ik}$$

milles meetriline tensor g on sümmeetriline:

$$g^{ik} = g_{ik}$$

Seega meetriline tensor taandub võrrandist ilusti välja, mille tulemusena saamegi gravitatsioonivälja põhivõrrandi:

$$G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{ik}$$

ehk

$$G^{ik} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{ik}$$



Kuid siinkohal peab arvestama teatud parandustega. Näiteks kui eelnevalt kehtis võrdus:

$$g^{ik}G_{ik} = -R$$

siis Einsteini tensor  $G$  ise võrdub järgmiselt:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R$$

ehk seega

$$G_{ik} \neq -R$$

See aga annab gravitatsioonivälja põhivõrrandi kujuks:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^2}T^{ik}$$

ehk

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{ik}$$

Täpselt samasugune analüüs kehtib ka võrduse kohta:

$$g_{ik}T^{ik} = m$$

Näiteks kui selles võrrandis meetriline tensor  $g$  „välja taandub“, siis võrdus enam ei kehti:

$$T^{ik} \neq m$$

Võrdus kehtib ainult juhul:

$$T^{ik} = mc^2 = E$$

ja see annab meile gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrandi kujuks:

$$G^{ik} = \frac{8\pi G}{c^2}T^{ik}$$

Viimane võrrand on esitatud energia  $E$  kaudu.

Kuid järgnevalt analüüsime gravitatsioonivälja põhivõrrandi sellist kuju, mis oli saadud just esimesena:

$$G^{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{ik}$$

ehk

$$G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{ik}$$

Selline gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrand on esitatud massi  $m$  kaudu. Nendes võrrandites puudub liige  $+\Lambda g_{\mu\nu}$ , mis pidavat kirjeldama Universumi tume energiat. Viimases võrrandis võib meetriline tensor  $g$  avalduda ka determinandina:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Keha mass kõverdab ümbritsevat aegruumi ja aegruumi kõverdus omakorda mõjutab kehade liikumisi selles. See tähendab seda, et aine ja energia eksisteerimine mõjutavad aegruumi geomeetriat ehk meetrikat, niisamuti ka selle aine või energia liikumine aegruumis. Seda kirjeldabki matemaatiliselt A. Einsteini tensorvõrrand:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

ehk

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

milles  $G$  on Einsteini tensor, mis koosneb Ricci tensori  $R$  ja meetrilise tensori  $g$  kombinatsioonist. Materia liikumist gravitatsiooniväljas kirjeldab tensor  $T$ . Indeks  $\mu$  ja  $\nu$  on tensorite erinevad komponendid. Einsteini tensor  $G$  näitab seda, et kuidas füüsikalised kehad kõverdavad ümbritseva aegruumi geomeetriat ja kuidas sama aegruumi kõverus paneb kehad liikuma.

Kui kasutada Plancki jõu definitsiooni:

$$F_p = \frac{c^4}{G} = \frac{hc}{l_p^2}$$

siis saaksime Einsteini tensori kujuks:

$$G_{ik} = \frac{8\pi l_p^2}{hc} T_{ik}$$

milles avalduksid Plancki konstant  $h$ , Plancki pikkus  $l_p$ , Plancki aeg  $t_p$  ja Plancki pindala  $S_p$ :

$$\frac{h}{2} = \frac{S_p}{c} \frac{T_{ik}}{G_{ik}} = 4\pi l_p t_p \frac{T_{ik}}{G_{ik}}$$

Plancki gravitatsioonikonstanti kasutades saaksime Einsteini gravitatsioonivälja tensorvõrrandi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

viia kujule:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi \frac{l_p^2 c^3}{h}}{c^4} T_{\mu\nu}$$

ehk

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi l_p^2}{hc} T_{\mu\nu}$$

Kuna Plancki konstant  $h$  on enamasti taandatud:

$$h = \frac{h}{2\pi}$$

siis see annaks meile võrrandi lõplikuks kujuks:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{16\pi^2 l_p^2}{hc} T_{\mu\nu}$$

Kuna eespool saime kvantmehaanikas kasutatava Plancki konstandi  $\hbar$  definitsiooni:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

siis seega saame Einsteini võrrandid välja kirjutada järgmiselt:

$$G_{ik}(g(x)) = -8\pi G \hbar T_{ik} = -4G \hbar T_{ik}$$

ja

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G \hbar T_{\mu\nu} = 4G \hbar T_{\mu\nu}$$

Viimased võrrandid näitavad väga selgelt seda, et Einsteini võrrandid ehk seega gravitatsiooniväli on kuidagi seotud kvantmehaanikaga. Relatiivsusteooria ja kvantmehaanika omavahelise seose sügavamaks mõistmiseks lähme tensorformalismilt üle üldrelatiivsusteooria klassikalisele meetrilisele formalismile. Selleks teisendame eespool tuletatud gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrandid:

$$G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ik}$$

ehk

$$G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R$$

Korrutame võrrandi mõlemad pooled meetrilise tensoriga  $g$  järgmiselt:

$$g^{ik}G_{ik} = g^{ik}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) = R - 2R = -R$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$g^{ik}G_{ik} = -R$$

milles  $R$  on tuntud Schwarzschildi raadius. Meetriline tensor  $g$  on sümmeetriline:

$$g^{ik} = g_{ik}$$

ja niisamuti on sümmeetriline ka Einsteini tensor  $G$ :

$$G^{ik} = G_{ik}$$

Meetriline tensor  $g$  avaldub üldrelatiivsusteoorias ka neljarealise determinandina:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

millest tulenevalt võime võrrandi:

$$g^{ik}G_{ik} = -R$$

kirjutada ka kujule:

$$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} G_{ik} = -R$$

Edasiseks analüüsiks viime neljarealise determinandi võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$G_{ik} = -R \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{-1}$$

milles

$$R = \frac{h}{p}$$

Saadud Einsteini tensori  $G$  matemaatiline definitsioon on oluliselt lihtsam Albert Einsteini poolt esitatud tensormatemaatilisest formalismist:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = G_{\mu\nu} = \left[ \partial_\eta (\Gamma_{\mu\nu}^\eta) - \partial_\nu (\Gamma_{\eta\mu}^\eta) + \Gamma_{\eta\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\eta}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \right] - \\ - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left[ \partial_\eta (\Gamma_{\alpha\beta}^\eta) - \partial_\beta (\Gamma_{\eta\alpha}^\eta) + \Gamma_{\eta\lambda}^\eta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \Gamma_{\alpha\eta}^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\eta \right] g_{\mu\nu}$$

milles esinevad Christoffeli sümbolid. Sellist ülikeerulist matemaatikat me siin ei käsitle, vaid selle asemel kasutame palju lihtsamaid seoseid. Näiteks Einsteini tensor  $G$  võrdus meil järgmiselt:

$$G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

Kuid energia-impulssensori  $T$  avaldumise korral:

$$T_{ik} = E = mc^2 = Mc^2$$

saame Einsteini tensori  $G$  kirjutada kujul:

$$G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^2} M$$

ehk

$$G_{ik} = \frac{8\pi}{c^2} GM$$

Sellest tulenevalt saame neljarealist determinanti sisaldava võrrandi avaldada järgmiselt:

$$\frac{8\pi}{c^2} GM = -R \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{-1}$$

Viime Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi ja korrutame võrrandi mõlemad pooled  $-1$ -ga ning massiga  $m$ :

$$-\frac{8\pi}{c^2} \frac{GMm}{R} = m \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{-1}$$

Viime valguse kiiruse  $c$  ruudu võrrandi teisele poole võrdusmärgi ja jagame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$-4\pi \frac{GMm}{R} = \frac{mc^2}{2} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{-1}$$

Saadud võrrandis me näeme mehaanilise energia jäävuse seaduse avaldist:

$$-\frac{GMm}{R} = U = \frac{mc^2}{2}$$

Selline kuju avaldub ainult siis, kui

$$4\pi = 2(2\pi) = 1$$

( mis oli tegelikult „tõestatud“ juba eespool ) ja kui neljarealine determinant võrduks  $-1$ -ga:

$$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

( mille korral on Schwarzschildi raadius null ehk  $R = 0$  ). Sellist determinanti on matemaatiliselt väga lihtne välja arvutada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1(-1)(-1)(-1) = -1$$

mis annabki meile järgmise võrduse:

$$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Selle tulemusel saame alguses küll negatiivse kineetilise energia:

$$-\frac{GMm}{R} = -\frac{mc^2}{2}$$

kuid see negatiivsus taandub võrrandis tegelikult ilusti välja:

$$\frac{GMm}{R} = \frac{mc^2}{2}$$

Ainult gravitatsioonipotentsiaal  $U$  esitatakse tavaliselt negatiivsena:

$$-\frac{GMm}{R} = \frac{mc^2}{2}$$

Mehaanilise energia jäävuse seaduse võrrand on tuletatud Newtoni mehaanikast, mille korral on aegruum tasane. Kuid tegelikult on meie aegruum kõver, mille tasasus avaldub lihtsalt väga väikeses ruumimastaabis võrreldes kõvera aegruumi mastaabiga. See tähendab seda, et tasane aegruum on kõvera aegruumi erijuht sarnaselt nii nagu Newtoni mehaanika on üldrelativistliku mehaanika erijuht. Seda kogu eelnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs tõestabki.

Eespool tuletatud mehaanilise energia jäävuse seadust sisaldav võrrand:

$$-4\pi \frac{GMm}{R} = \frac{mc^2}{2} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}^{-1}$$

on esitatud kõvera aegruumi korral. Kuid tasase aegruumi korral on selle võrrandi kuju järgmine:

$$-\frac{GMm}{R} = \frac{mc^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Viimases võrrandis me näeme seda, et kõik taandub lõpuks -1-le:

$$-\frac{2GM}{Rc^2} = -\frac{R}{R} = -1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -1$$

Kui viia determinant võrrandi teisele poole võrdusmärgi, siis saame tulemuseks:

$$(-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)(-1) = 1$$

Viimast võib põhimõtteliselt lahendada ka niimoodi:

$$(-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

Meetriline tensor  $g$  väljendubki determinandina, mis kirjeldab antud juhul tasast aegruumi:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mõningatel andmetel kirjutatakse see ka kujul:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Meetriline tensor  $g$  on otseses seoses aegruumi intervalli meetrilise võrrandiga. Näitame seda nii, et viime eespool tuletatud Einsteini gravitatsioonivälja kirjeldavas diferentsiaalvõrrandis

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu}$$

ehk antud juhul

$$g_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -R$$

tensori  $G$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$g_{\mu\nu} = -\frac{R}{G^{\mu\nu}}$$

Kui me nüüd korrutame võrrandi mõlemad pooled tensoriga  $dr^\mu dr^\nu$

$$g_{\mu\nu} dr^\mu dr^\nu = -\frac{R}{G^{\mu\nu}} dr^\mu dr^\nu$$

siis see võrdubki aegruumi intervalli meetrilise võrrandiga:

$$g_{\mu\nu} dr^\mu dr^\nu = ds^2$$

mis pikemalt välja kirjutatuna näeb välja sellisena:

$$g_{\mu\nu}dr^\mu dr^\nu = dr^\mu dr_\mu = ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Kui aga aegruumi intervalli võrrandi koordinaadid on „märgiliselt vastupidised“:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

siis võib seda kirjeldada näiteks maatriks:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ehk

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu}$$

mis esineb samuti tasast aegruumi kirjeldavas meetrilises võrrandis:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Kui aga Cartesiuse ristkoordinaatide:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

asemel kasutada sfäärilisi koordinaate:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi)$$

ja tasase aegruumi asemel oleks meil tegemist hoopis kõvera aegruumiga, siis seda kirjeldab juba eespool esitatud meetriline tensor  $g$ :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Sellise determinandi korral tuleb aegruumi intervalli meetrilise võrrandi kuju järgmiselt:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Siinkohal tasub märkida seda, et kõik eelnevalt kasutatud tensorid tulenevad Riemanni geomeetrisest matemaatikast, mis uurib Riemanni ruume. Riemanni ruumid on „pärisekleidilise ruumi alamruumid“. Riemanni geomeetrias kirjeldabki Riemanni ruume eespool tuletatud meetrika:



$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Sellist meetrilist võrrandit on võimalik tuletada ka otse seisuenergia valemist:

$$E = mc^2$$

kuna kiiruse ruudule  $v^2$  vastab Riemanni geomeetrias tensorvõrrand:

$$\frac{E}{m} = c^2 = v^2 = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

ehk

$$\frac{E}{m} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Kui me viimase võrrandi mõlemad pooled jagame kiiruse  $c$  ruuduga:

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{E}{E} = 1 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{1}{c^2}$$

siis saamegi aegruumi intervalli meetrilise võrrandi:

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ehk

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

millest

$$\frac{ds^2}{g_{\mu\nu}} = dx^\mu dx^\nu$$

Sellist aegruumi intervalli meetrilist võrrandit on võimalik tuletada ka seisuenergia valemile:

$$E = mc^2$$

vastava energia-impulsstensori  $T$  võrrandi kaudu:

$$T^{\mu\nu} = m_0 \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + F^{\mu\nu}$$

milles  $F^{\mu\nu} = 0$  ja kiirus  $c$  ruudus avaldub:

$$c^2 = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

Energia-impulsstensori  $T$  võrrandit

$$T^{\mu\nu} = m_0 \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$ds ds = \frac{m_0}{T^{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu$$

Kuna massi  $m$  on võimalik defineerida ka ainult tensorite kaudu:

$$g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\left(m_0\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + F^{\mu\nu}\right) = m_0 + g_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = m$$

millest omakorda saame meetrilise tensori  $g$  definitsiooni:

$$g_{\mu\nu} = \frac{m}{T^{\mu\nu}}$$

ehk

$$g_{\mu\nu} = \frac{m}{T^{\mu\nu}} = \frac{m}{E} = \frac{m}{mc^2} = \frac{1}{c^2}$$

siis seega saamegi aegruumi intervalli meetrilise võrrandi:

$$dsds = \frac{m_0}{T^{\mu\nu}}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = ds^2$$

ehk

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Riemanni geomeetrias kirjutatakse see võrrand välja ka niimoodi:

$$ds^2 = drdr = u_\mu u_\nu dx^\mu dx^\nu$$

mis kirjeldab joonelemendi ruutu alamruumis. Selles alamruumis avaldub elementaarne kohavektor:

$$ds = dr = u_\mu dx^\mu$$

ehk

$$dr = dx^\mu u_\mu$$

Selles esinev liige  $u$  tähistab alamruumi baasivektoreid:

$$\frac{dr}{dx^\mu} = u_\mu$$

ja Riemanni geomeetrias võrdub see järgmiselt:

$$\frac{dr}{dx^\mu} = \frac{\partial r}{\partial x^\mu}$$

Viimasest saame omakorda:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

Kohavektor  $r$  asendatakse Riemanni geomeetrias järgmise diferentsiaaliga:

$$dr = dy^\alpha e_\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu e_\alpha$$

mille tulemusena saame:

$$dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

ehk

$$\frac{dy^\alpha}{dx^\mu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$$

Viimane võrrand saadakse Riemanni geomeetrias sellise võrrandi diferentseerimisel, mis võrdub:

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

Tegemist on Riemanni geomeetrias n-mõõtmelise alamruumi parameetrilise võrandiga, milles olevad parameetrid on n-mõõtmelise alamruumi koordinaadid ja milles

$$\alpha = 1, 2, \dots, v$$

Kõikides nendes võrandites tähistab  $y$  täisnurkseid Cartesiuse koordinaate,  $\alpha$  on kreeka täheline indeks,  $v$  on ruumi mõõtmete arv,  $e$  on „ort“,  $n$  alamruumi mõõtmete arv,  $x$  parameetrid ehk koordinaadid ja  $u$  baasivektorid.

Ajas muutumatut tsentraalsümmeetrilist gravitatsioonivälja ehk aegruumi kõverust kirjeldabki meetriline võrrand:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

1916. aastal leidis sellise lahendi teadlane nimega Schwarzschild ja seetõttu nimetataksegi seda ka Schwarzschildi meetrikaks. Sellises meetrilises võrandis avaldus gravitatsiooniline aja dilatatsioon valemiga:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

ja gravitatsioonilise pikkuse kontraktsioon:

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ehk

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2$$

ehk

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

millest sõltus masside poolt kõverdatav aegruumi meetrika.

Nende võrrandite juures on tähelepanuväärne tõsiasi see, et näiteks ainuüksi gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrandist

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2U}{c^2}}}$$

järeldub väga selgelt gravitatsioonipotentsiaali  $U$  „ülempiir“:

$$U = \frac{c^2}{2} = \text{const}$$

ja sellest tulenevalt ka gravitatsioonijõu  $F$  „maksimaalne võimalikkus“ Universumis. See tähendab seda, et näiteks musta augu tsentris oleval Schwarzschildi pinnal ei küündi gravitatsioonijõud  $F$  tegelikult lõpmata suureks ehkki aegruum ise on kõverdunud lõpmatuseni. Kuid gravitatsioonijõud  $F$  ja sellest tulenevalt ka gravitatsioonipotentsiaal  $U$  saavad olla kuitahes väikesed.

### 1.8.3 Kvantgravitatsiooni analüüs

Edasiseks analüüsiks teisendame näiteks aja dilatatsiooni võrrandi järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

ja võtame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$1 - \frac{R}{r} = \left(\frac{t}{t'}\right)^2$$

Teisendame jälle:

$$1 - \left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \frac{R}{r}$$

Viimases võrrandis avaldub Schwarzschildi raadius  $R$  võrrandina:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Teades seisuenergia võrrandi definitsiooni:  $E = mc^2$ , millest omakorda saame massi  $M$  matemaatilise definitsiooni energia  $E$  kaudu:

$$\frac{E}{c^2} = m = M$$

saame Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandi kujuks:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2GE}{c^4}$$

Eespool tõestasime kvantmehaanikas kasutatava Plancki konstandi  $h$  ligikaudse seose:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

ja impulssi  $p$  kehtivuse:

$$\frac{1}{2GE} = p$$

Siinkohal tuleb märkida seda, et Einsteini gravitatsioonivälja diferentsiaalvõrrandi tuletamisel

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

arvestasime taandamata Plancki konstandiga  $h$ :

$$\frac{2\pi}{c^4} \approx h \neq \bar{h}$$

Põhimõtteliselt võime samasugust võtet teha ka siin, kuid lihtsuse huvides arvestame järgnevalt siiski ainult taandatud Plancki konstandiga:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = \bar{h}$$

Sellest tulenevalt saame Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandi kujuks:

$$R = \frac{2GE}{c^4} = \frac{h}{p} = \lambda$$

mis annab omakorda gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemi kujuks:

$$1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2 = \frac{R}{r} = \frac{h}{xp}$$

ehk

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] = \frac{h}{xp}$$

Schwarzschildi raadiuse  $R$  valem avaldub niisamuti ka gravitatsioonipotentsiaali  $U$  kaudu:

$$\frac{R}{r} = \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{2U}{c^2}$$

mis annab meile järgmise seoste ahela:

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] = \frac{h}{xp} = \frac{2U}{c^2}$$

Edasiseks analüüsiks arvestame ainult kahe võrrandiga, mida me nüüd järgnevalt esitame võrrandite süsteemina:

$$\begin{cases} xp \left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] = h \\ \frac{h}{xp} = \frac{2U}{c^2} \end{cases}$$

Selles võrrandite süsteemis oleva valemi:

$$\frac{h}{xp} = \frac{2U}{c^2}$$

teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$pxU = \frac{hc^2}{2}$$

Kvantmehaanikast teame kindlalt seda, et kaks erinevat määramatuse seost on omavahel võrdsed:

$$px = Et$$

ja see annab meile võrrandi kujuks:

$$EtU = \frac{hc^2}{2}$$

Ajaperioodi  $t$  viime võrrandi teisele poole võrdusmärgi, tulemuseks saame:

$$EU = \frac{hc^2}{2} \frac{1}{t} = hf \frac{c^2}{2}$$

Saadud võrrandis taanduvad energiad  $E$  matemaatiliselt ilusti välja:

$$EU = hf \frac{c^2}{2} = E \frac{c^2}{2}$$

mille tulemusena saame tuntud mehaanilise energia jäävuse seaduse võrrandi:

$$U = \frac{GM}{R} = \frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{GMm}{R} = \frac{mc^2}{2}$$

See näitab kogu eelneva analüüsi õigsust, kuna energia jäävuse seadusega peavad olema kooskõlas ( ehk sellele peavad lõpuks taanduma ) absoluutselt kõik loodusseadused. Kuid edasiseks analüüsiks teisendame eespool saadud võrrandi

$$EU = hf \frac{c^2}{2}$$

hoopis nii, et korrutame võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ :

$$EU m = hf \frac{mc^2}{2} = hf \frac{E}{2}$$

Näeme seda, et energiad  $E$  taanduvad jälle matemaatiliselt ilusti välja:

$$Um = \frac{hf}{2}$$

Kuna gravitatsioonipotentsiaal  $U$  avaldub niisamuti ka:

$$Um = \frac{GMm}{R} = U$$

millest nähtub omakorda „dimensioon“

$$m = \frac{U}{U} = 1$$

siis saame võrrandi kujuks ka:

$$U = \frac{hf}{2}$$

Järgnevalt tuletame meelde eespool saadud seose:

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] = \frac{2U}{c^2}$$

milles avaldub gravitatsioonipotentsiaal U:

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] \frac{c^2}{2} = U$$

Kui me aga nüüd arvestame hiljuti tuletatud gravitatsioonipotentsiaali U definitsiooniga:

$$U = \frac{hf}{2}$$

siis saame järgmise võrduse:

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] \frac{c^2}{2} = \frac{hf}{2}$$

Viimane on võrdne M. Plancki kvandienenergia E võrrandiga:

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] c^2 = hf = E$$

millest nähtub, et võrrandi gravitatsioonilise aja dilatatsiooni osa võrdub massiga m:

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] = m$$

kuna kvantmehaanikast kehtib seos:

$$E = mc^2 = hf$$

Tähelepanuväärne asjaolu on sellejuures see, et saadud kummaline massi võrrand

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] = m$$

on tegelikult sellise aja dilatatsiooni võrrandi matemaatiline teisendus:

$$t^* = \frac{t}{\sqrt{1 - m}}$$

millel ei ole füüsikalist tähendust. Mass m ei ole gravitatsioonivälja vaheosakese mass. Kui aga viimases võrrandis arvestada eespool tuletatud gravitatsioonivälja tensorvõrrandiga:

$$g_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = -R$$

siis saame gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrandi kujuks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 + (-R)\frac{1}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 + g_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\frac{1}{r}}}$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{g_{\mu\nu}G^{\mu\nu}}{r}}}$$

millel on juba olemas füüsikaline sisu ja tähendus. Kuid massi  $m$  võrrandi

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t'}\right)^2\right] = m$$

füüsikaline tähendus ja „mõttekus“ tuleb ilmsiks ainult siis, kui selle sama võrrandi tuletuse tõestust hakata põhjalikumalt analüüsima. Seda on väga lihtne näidata. Näiteks saame eelneva analüüsi põhjal sellise seose:

$$m = \frac{2U}{c^2} = \frac{2GMm}{c^2 r}$$

millest nähtubki see, et mass  $m$  on tegelikult „dimensiooniga“ üks:

$$1 = \frac{2GM}{c^2 r}$$

Viimasest saame omakorda mehaanilise energia jäävuse seaduse:

$$\frac{c^2}{2} = U = \frac{GM}{r}$$

Kineetilise energia avaldises tähistab  $c^2 = v^2$  planeedi paakiirust. Huvitav on seejuures märkida seda, et eespool tuletatud võrdusest:

$$\frac{h}{xp} = \frac{2U}{c^2} = m$$

saame de Broglie lainepikkust  $\lambda$  defineerida ka koordinaadi  $x$  ja massi  $m$  korrutisena:

$$\frac{h}{p} = xm = \lambda$$

mille järgi peab mass  $m$  olema samuti „dimensiooniga“ üks:

$$m = 1$$

Seda on väga lihtne tõestada. Näiteks korrutame võrrandi:



$$\frac{h}{xp} = m$$

mõlemad pooled valguse kiiruse ruuduga:

$$c^2 \frac{h}{xp} = mc^2 = E$$

Tulemuseks saame energia E võrrandi:

$$c \frac{h}{xm} = E$$

ehk

$$h \frac{c}{xm} = E$$

mis kattub Max Plancki kvandienergia E võrrandiga:

$$hf = E$$

Selle järgi peab kvandi sagedus f võrduma järgmiselt:

$$\frac{c}{xm} = \frac{v}{xm} = f$$

millest nähtubki lainepikkuse  $\lambda$  definitsioon:

$$xm = \lambda$$

kuna mehaanikas võrdub sagedus f kiiruse v ja lainepikkuse  $\lambda$  jagatisega:

$$\frac{v}{\lambda} = f$$

Eelnevalt saime tuletada massi m võrduse:

$$m = \left[ 1 - \left( \frac{t}{t'} \right)^2 \right]$$

mis annab võrrandi  $xm = \lambda$  kujuks järgmise avaldise:

$$\lambda = x \left[ 1 - \left( \frac{t}{t'} \right)^2 \right]$$

Kui me viimases teeme järgmised relatiivsusteooriale omased matemaatilised teisendused:

$$\frac{t}{t'} = \frac{ct}{ct'} = \frac{l}{l'} = \frac{l}{l_0}$$

ja

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{R}{r}$$

siis saame tuletada üldrelatiivsusteoorias tuntud gravitatsioonilise pikkuse kontraktsiooni valemi:

$$R = r \left[ 1 - \left( \frac{l}{l'} \right)^2 \right]$$

ehk

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

mis samuti kirjeldab aegruumi kõverust.

Üldrelatiivsusteooria järgi on gravitatsiooniväli aegruumi kõverus. Aegruumi kõverust näitab näiteks gravitatsiooniline aja dilatatsioon, mille kehtivust on ka eksperimentaalselt tõestatud. Eespool oleva analüüsi järgi saame selle valemi kujuks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{xp}}}$$

Kuna  $xp$  korrutis saab olla ainult võrdne Plancki konstandiga  $h$ :

$$xp = h$$

siis saame tulemuseks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{h}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{t}{0} = \infty$$

Sellest järeldub, et kui aeg ja ruum on kõverdunud ehk teisenenud lõpmatuseni (s.t. kui aja ja ruumi eksisteerimine lakkab olemast), siis hakkab avalduma kvantmehaanika seaduspärasused. Aeg ja ruum on kõverdunud näiteks musta augu tsentris oleva Schwarzschildi pinnal ehk aegruumi lõkspinnal. Sellest tulenevalt avaldub kvantgravitatsioon AINULT gravitatsioonivälja tsentris oleva Schwarzschildi pinnal ehk aegruumi lõkspinnal.

Kui me aga teisendame valemit

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{xp}}}$$

järgmiselt:

$$xp \left[ 1 - \left( \frac{t}{t'} \right)^2 \right] = h$$

siis see annab meile omakorda järgmise väga olulise võrduse:

$$xp - xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 = h$$

Viimasest valemist on selgesti näha seda, et kui aegruumi kõverust ei eksisteeriks ehk aegruum oleks täiesti tasane:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{xp}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{\infty}}} = t$$

siis saame tulemuseks järgmist:

$$xp - xp = 0 = h$$

Saadud tulemus on aga vastuolus kvantmehaanika reeglitega:

$$0 \neq h$$

kuna  $xp$  korrutis ei saa olla väiksem Plancki konstandi  $h$  väärtusest ja seetõttu ei saa see olla võrdne ka nulliga. Sellest jäeldub, et gravitatsioonivälja ehk aegruumi kõverust ei saa tegelikult kvantiseerida. Kvantgravitatsiooni ei ole seega olemas. Kui aga aegruumi kõverus on lõpmatu:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{xp}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

siis saame tulemuseks:

$$xp - xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 = xp - xp \left( \frac{t}{\infty} \right)^2 = xp - 0 = xp = h$$

Selline tulemus on juba kooskõlas kvantmehaanikast tuntud määramatuse relatsiooniga koordinaadi  $x$  ja impulssi  $p$  vahel:

$$xp = h$$

kuna  $xp$  korrutis saab olla võrdne Plancki konstandiga  $h$ . Sellest jäeldub, et kui aeg ja ruum on kõverdunud ehk teisenenud lõpmatuseni ( s.t. kui aja ja ruumi eksisteerimine lakkab olemast ), siis hakkab avalduma kvantmehaanika seaduspärasused. Aeg ja ruum on kõverdunud näiteks musta augu tsentris oleva Schwarzschildi pinnal ehk aegruumi lõkspinnal.

Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverdus, mida põhjustavad väga suured massid. See aegruumi kõverdus väljendub selles, et mida enam gravitatsioonivälja tsentri poole minna, seda enam aeg aegleneb ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus väheneb välisvaatleja suhtes. Selline aja ja ruumi teisenemine jätkub kuni teatud kauguseni gravitatsioonivälja tsentrist. Seda kaugust kirjeldab füüsikas Schwarzschildi raadius  $R$ . See raadius näitab kaugust gravitatsioonivälja tsentrist, et kust alates on aegruum teisenenud lõpmatuseni ehk kust alates avaldub aegruumi lõpmatu kõverdumine ehk aegruumi eksisteerimise absoluutne lakkamine. Seetõttu ei saa midagi eksisteerida musta augu kui aegruumi augu Schwarzschildi raadiuse  $R$  sissepoole jäävas “piirkonnas”, mida vahel nimetatakse ka Schwarzschildi “pinnaks”. See tähendab ka seda, et mingisugust aegruumi singullaarsust musta augu tsentris ei saa olemas olla. Singullaarsus on lihtsalt üks punkt, kust alates mõõdetakse Schwarzschildi raadius  $R$ , mis määrab ära musta augu ehk aegruumi augu „suuruse“ ehk sellise kujuteldava sfääri suuruse ruumis, kust alates aegruumi lõpmatu kõverus muutub tsentrist kaugenedes järjest tasasemaks. Seepärast ei saa musta augu mass eksisteerida Schwarzschildi pinna sees, vaid on sellest väljapool nii nagu tähtede ja planeetide korral. Musta augu Schwarzschildi pind on täiesti kerakujuline ja see ei pöörle. See võib ainult tiirelda mõne teise taevakeha ümber.

Eespool esitatud analüüsis me nägime seda, et kui tuletatud võrrandis

$$xp - xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 = h$$

kehtis võrdus  $t' = \infty$  ehk aeg ( ja koos sellega ka ruum ) on teisenenud lõpmatuseni:

$$xp - xp \left( \frac{t}{\infty} \right)^2 = h$$

siis saime tulemuseks tegelikkuses kehtiva määramatuse seose:

$$xp = h$$

Kui aga tegemist oleks Eukleidilise ( s.t. mittekövera ) aegruumiga ehk  $t' = t$ , siis sellistel võrran-

ditel nagu

$$xp - xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 = h$$

ja

$$xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 - xp = h$$

ei ole enam sisulist erinevust, kuna mõlemad annavad võrrandi:

$$xp - xp = h$$

millest järeldub tegelikkuses mittekehtiv seos:

$$0 = h = \text{const}$$

Plancki konstant  $h$  ei saa võrduda nulliga. Kui aga eespool tuletatud võrrandis

$$xp - xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 = h$$

panna  $xp$  võrduma nulliga, siis saame võrrandi

$$-xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 = h$$

millest järeldub samuti tegelikkuses mittekehtiv seos:

$$-xp = h$$

kuna määramatuse seos ei saa olla negatiivne. Kui aga võrrandis

$$xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 - xp = h$$

võrdub  $xp$  nulliga, siis saame sellise võrrandi

$$xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 = h$$

millest järeldub tegelikkuses kehtiv määramatuse seos:

$$xp = h$$

kuna sellisel juhul on see positiivne. Edasiseks analüüsiks arvestamegi just viimasena kasutatud seost:

$$xp \left( \frac{t}{t'} \right)^2 = h$$

milles  $t' = t$ . Teisendame matemaatiliselt viimast võrrandit järgnevalt:

$$x \left( \frac{t}{t} \right)^2 = x \frac{t}{t} \frac{t}{t} = \frac{h}{p} = \lambda$$

millest omakorda saame:

$$x \frac{t}{t} \frac{t}{t} = \lambda$$

Viimasest järeldub lainepikkuse  $\lambda$  definitsioon:

$$x \frac{t}{t} \frac{t}{t} = vt \frac{t}{t} = x \frac{t}{t} = vt = \lambda$$

ehk

$$vt = \lambda$$

Oletame, et kiirus  $v$  võrdub valguse kiirusega  $c$ :

$$ct = \lambda$$

Saadud seos on tähelepanuväärne seetõttu, et see kattub täielikult eespool olevas kvantmehaanika osas tuletatud lainepikkuse  $\lambda$  võrrandiga:

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda$$

ehk

$$ct = \lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Viimases võrrandis peab kiirus  $v$  võrduma nulliga, mis annabki meile täpselt samasuguse seose:

$$ct = \lambda$$

Tähelepanuväärne tõsiasi on eelneva analüüsi juures see, et kui meie tuletatud võrrandis

$$xp - xp \left( \frac{t}{t} \right)^2 = h$$

on aeg(ruum) teisenenud lõpmatuseni ehk  $t = \infty$ :

$$xp - xp \left( \frac{t}{\infty} \right)^2 = h$$

siis saame tulemuseks tegelikkuses kehtiva määramatuse seose:

$$xp = h$$

Kui aga võrrandis:

$$xp \left( \frac{t}{t} \right)^2 - xp = h$$

ei ole aeg(ruum) teisenenud ehk  $t = t$  ja  $xp$  võrdub nulliga:

$$xp\left(\frac{t}{t}\right)^2 = h$$

siis saame tulemuseks samuti reaalsuses kehtiva määramatuse seose:

$$xp = h$$

Sellisest analüüsist järeldub väga selgelt, et kvantmehaanika põhialuseks olev määramatuse seos tuleneb aegruumi lõpmatusest teisenemisest ehk aja ja ruumi eksisteerimise lakkamisest:

$$t' = \infty$$

kuid määramatuse seos avaldub samas ka meie tavalises eukleidilises ehk mitte-teisenenud aegruumis:

$$t' = t$$

See tähendab füüsikateaduslikult seda, et meie tavalises eukleidilises aegruumis eksisteeriva osakese laineline olemus tuleneb otseselt aegruumi eksisteerimise lakkamisest ehk selle lõpmatusest teisenemisest, mis eksisteeriks nagu „meile mitte-tajutava paralleel-aegruumina kogu meie tajutava eukleidilise aegruumi kõrval“. Näiteks muutused „paralleel-aegruumis“ toovad kaasa muutused ka meie tavalises eukleidilises aegruumis ja vastupidi. Seda „paralleel-aegruumi“ on ajas rändamise teoorias tavaks nimetada „hyperruumiks“ ja meie tavalist tajutavat eukleidilist aegruumi „tavaruumiks“. Sellisel juhul eksisteerib kvantosake korraga nii hyperruumis kui ka tavaruumis.

Albert Einsteini üldrelatiivsusteooria on ainuke füüsikateooria, mis kirjeldab kõveraid aegruume ja seega on Einsteini üldrelatiivsusteooria aluseks ka kogu tänapäeva kosmoloogia õpetusele, kuna traditsioonilises kosmoloogias võetakse Universumi paisumise mudeliks kõver aegruum, eelkõige just kõver ruum. Aegruumi kõveruse kirjeldamiseks on kõige levinumaks matemaatiliseks vormiks just meetriline formalism:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dl^2$$

millest on võimalik matemaatiliselt tuletada tuntud Robertson-Walkeri meetrikad, mis kirjeldab matemaatiliselt Universumi aegruumi paisumist. Selleks aga esitame Cartesius'e ristkoordinaatistiku

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

asemel sfäärilised koordinaadid

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

kuna Universumi paisumise mudeliks on kosmoloogias enamasti kera paisumine ruumis. Sellest tulenevalt saamegi järgmise võrrandi:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Kuna kera paisub, siis selles viimases võrrandis on suurus  $r$  koordinaadisüsteemiga kaasasliikuv radiaalkoordinaat:

$$R = r = a(t)\chi$$

Radiaalne kaugus  $R = r = a(t)\chi$  võib olla ka kahe galaktika vaheline kaugus Universumis. Sellest tulenevalt saame sfäärilised koordinaadid kirja panna järgmiselt:

$$(dl)^2 = a^2(t)\{(d\chi)^2 + K[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2]\}$$

ja Robertson-Walkeri meetrika võtab kuju:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \{ (d\chi)^2 + K[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] \}$$

milles K väärtused võivad olla:

$$K = \begin{cases} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ sh^2 \chi \end{cases}$$

Vahel esitatakse Robertson-Walkeri meetriline kuju ka järgmiselt:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] \right\}$$

milles k väärtused võivad olla:

$$k = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

Robertson-Walkeri meetrikas

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (dl)^2$$

milles

$$(dl)^2 = a^2(t) \{ (d\chi)^2 + K[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] \}$$

on kordajal K-l kolm erinevat võimalust. See tuleneb sellest, et Universumi ruum võib olla positiivne, negatiivne või tasane. Positiivse ruumi korral on K väärtuseks:

$$K = \sin^2 \chi$$

ja seega  $k = +1$ . Selle muutumiskiirkonnad on aga järgmised:  $\chi \in (0, \pi)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Negatiivse ruumi korral on K väärtus:

$$K = (sh\chi)^2$$

ja seega  $k = -1$ . Selle muutumiskiirkonnad on:  $\chi \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Tasase ruumi korral on K väärtus:

$$K = \chi^2$$

ja seega  $k = 0$ . Selle muutumiskiirkonnad on:  $\chi \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

Suurus  $r$  on koordinaadisüsteemiga kaasasliikuv radiaalkoordinaat:

$$R = r = a(t)\chi$$

Radiaalne kaugus  $R = r = a(t)\chi$  võib olla ka kahe galaktika vaheline kaugus Universumis. Kuna see kaugus suureneb ajas Universumi meetrilise paisumise tõttu, siis saame võtta sellest aja järgi tuletise järgmiselt:

$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(a(t)\chi) = \chi \frac{da(t)}{dt} = \chi \dot{a}$$

milles aja järgi tuletist tähistab täpp  $\dot{a}$  peal:

$$\dot{a} = \frac{da(t)}{dt}$$

Radiaalsest kaugusest  $R = r = a(t) \chi$  saame järgmise seose:

$$\chi = \frac{R}{a}$$

ja sellest tulenevalt saamegi kosmoloogias üldiselt tuntud Hubble'i seaduse:

$$v = \frac{R}{a} \dot{a} = \frac{\dot{a}}{a} R = H R$$

milles Hubble'i konstant  $H$  on

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ehk

$$\dot{a} = H a$$

Hubble'i konstant  $H$  sõltub ajast:

$$H \sim \frac{1}{t}$$

Eelnevat analüüsi võib lihtsustatult mõista nii, et Hubble'i seaduses  $v = H R$  olevast radiaalkoordinaadist  $R$ :

$$R = a(t) \chi$$

aja järgi tuletis on kiirus  $v = \dot{a} \chi$  ja teist korda aja järgi tuletis on kiirendus  $a = \ddot{a} \chi$ . Kuna  $\ddot{a}$  võrdub järgmiselt:

$$\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$$

siis saame kiirenduseks  $a$ :

$$a = \frac{d^2 a}{dt^2} \chi = \frac{d^2 R}{dt^2}$$

Kiiruse  $v$  korral on tegemist ühekordse tuletisega aja järgi:

$$v = \frac{dR}{dt}$$

ja kui tuletist üldse ei ole, siis  $R = R$ .

Robertson-Walkeri meetrikates olev ajakoordinaat  $t$  on Universumi eluiga,  $K$  on konstant, mis on seotud kõvera ruumiga ja  $a(t)$  on aja funktsioon, mis sõltub Universumi paisumisest või võimalikust kokkutõmbumisest. Kahe ruumipunkti vahelist kaugust ( ehk ka Universumi „suurust“ ) näitab  $s$ , mille väärtus ajas  $t$  muutub. Meetrika sõltub ka  $K$  konstandi väärtusest ehk ruumi kõverusest – seda, et kas tegemist on tasase, negatiivse või positiivse kõveruse Universumi ruumiga. Viimane võrrand, mida nimetatakse Robertson-Walkeri meetrikaks, näitab meile Universumi paisumise kosmoloogilist tulevikku. See sõltub sellest, et kas Universumi ruum on üldiselt tasane, positiivne või negatiivne.

Lähtudes paisuvat ruumi kirjeldavast Robertson-Walkeri meetrikast

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (dl_k)^2$$

mitte aga Riemann'i meetrikast:

$$(ds)^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik}(x) dx_i dx_k$$



milles  $g_{ik} = g_{ki}$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

arvutatakse üldrelatiivsusteooriast tuntud Albert Einsteini tensori komponendid  $G_{il}$  Einsteini võrrandist:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

milles  $g(x)$  on:

$$g(x) = g_{ik}(x)$$

Sellest tulenevalt sisaldavad Einsteini tensori komponendid funktsiooni  $a(t)$ , mis sõltub ajast:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t) \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t) \sin^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Seda tundmatut funktsiooni tuleb leida Einsteini võrranditest. Kosmoloogias on funktsioon  $a(t)$  Universumi mastaabikordajaks. Kosmoloogilist printsiipi arvestades peaks energia-impulsstensori komponendid avalduma antud Robertson-Walkeri meetrika korral järgmiselt:

$$T_{00} = \rho c^2$$

$$T_{\alpha\alpha} = -p g_{\alpha\alpha}$$

milles  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $T_{il} = 0$ , kui  $i \neq l$ ,  $i, l = 0, 1, 2, 3$ .  $g_{\alpha\alpha}$  on meetrilise tensori diagonaalsed ruumilised komponendid,  $\rho c^2$  on aine ja energia tihedus Universumis ja  $p$  on rõhk. Kuna galaktikate omavahelised põrked toimuvad äärmiselt harva, siis rõhk  $p$  on null. Kui eelnevalt kirjeldatud viisil leitud Einsteini tensori  $G_{il}$  ja energia-impulsstensori  $T_{il}$  komponendid pandakse Einsteini võrranditesse, siis saadaksegi tuntud Friedmann'i võrrandid, mis on aluseks kogu tänapäeva kosmoloogia õpetusele:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

$$\frac{1}{2} (\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{k c^2}{2}$$

milles  $k = 1, 0, -1$  ja

$$\dot{a} = \frac{d}{dt} a(t)$$

$$\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2}$$

Viimased matemaatilised võrrandid näitavad, et saadud seos (juhul kui  $p = 0$ )

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \rho$$

on tegelikult olemas ka võrrandis

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

ja seetõttu võib viimase võrrandi kirjutada kujule:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + \ddot{a}a = -\frac{kc^2}{2}$$

Eelnevalt esitatud võrrandites on  $a(t)$  mastaabikordaja,  $c^2\rho(t)$  on aine-energia tihedus ja  $p(t)$  on rõhk.

## 1.9 Kvantgravitatsioon ja mustad augud

Eirirelatiivsusteoorias käsitletakse ainult inertsiaalseid taustsüsteeme, milles kehtib inertsiseadus. Inertsiseadus seisneb selles, et keha liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt seni kuni miski seda olekut ei muuda. Tekib küsimus, et kui aja ja ruumi teisenemised (s.t. aja dilatatsioon ja keha pikkuse kontraktsioon) toimuvad inertsiaalsetes taustsüsteemides, siis kas need võivad ilmned ka mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides? Inertsiaalsetes taustsüsteemides tulevad aja ja ruumi teisenemised esile liikumiskiiruse lähenemisel valguse kiirusele  $c$ , kuid mitteinertsiaalsed taustsüsteemid on gravitatsiooniväljad. Gravitatsioonijõud ja koos sellega ka jõuväli on seotud keha massiga. Inertsiaalsetes taustsüsteemides käsitletakse eelkõige inertset massi. Vastavalt Newtoni II seadusele

$$F = ma \quad \text{ehk} \quad a = F/m$$

iseloomustatakse inertse massiga keha inertsust ehk vastupanuvõimet liikumisoleku muutumisele. Näiteks mida suurem on kehal mass, seda rohkem jõudu tuleb rakendada, et keha hakkaks liikuma või jääks paigale. Kuid mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides ehk seega gravitatsiooniväljades kasutatakse raske massi mõistet, mis ütleb, et mida suurem on kehal mass, seda suurema gravitatsioonijõu see tekitab.

Newtoni teises seaduses ja ka Newtoni gravitatsiooniseaduses esineb füüsikaline suurus, mida me nimetame massiks. Newtoni teises seaduses on mass keha inertsuse mõõduks, kuid Newtoni gravitatsiooniseaduses on massil külgetõmbe omadus. Tekib küsimus, et kas raske mass ja inertne mass on siis üks ja sama?

Newtoni gravitatsiooniseadus on teatavasti aga järgmine (Maa raskusjõu näitel):

$$F = G \frac{m_g M_M}{R_M^2}$$

milles keha raske mass on  $m_g$ , Maa raske mass on  $M_M$  ja Maa raadius on  $R_M$ . Gravitatsioonijõu  $F$  mõjul saab keha kiirenduse  $a$ , kuid mitte raskuskiirenduse  $g$ . Selline keha kiirendus peab olema võrdeline keha inertse massi ja gravitatsioonijõu suhtega:

$$a = \frac{f}{m_{in}} = G \frac{M_M m_g}{R_M^2 m_{in}}$$

Kuid kõik eksperimentaalsed katsed näitavad, et kõikide kehade korral on kiirendus  $a$  sama. Seega kui raskuskiirendus on ühesugune, siis seda peab olema ka kiirendus. Tegur  $G \frac{M_M}{R_M^2}$  on ühesugune kõikide kehade korral ja seega kõikide kehade korral on suhe  $m_g/m_{in}$  samuti ühesugune. Sellest tulenevalt on inertne mass ja raske mass kõikide kehade korral üks ja sama ehk need on võrdsed:

$$a = \frac{f}{m_{in}} = G \frac{M_M m_g}{R_M^2 m_{in}}$$

ehk

$$a = G \frac{M_M}{R_M^2}$$

Maa massi  $M_M$  saab välja arvutada just viimasest seosest. Kui me aga teame Maa orbiidi raadiust  $R_{or}$  ja Maa tiirlemisperioodi  $T$ , siis saab ära määrata ka Päikese massi  $M_p$ . Gravitatsioonijõud, mis eksisteerib Maa ja Päikese vahel, põhjustab Maa kiirenduse

$$\omega^2 R_{or}$$

milles

$$\omega = 2\pi/T$$

Selle järgi saame:

$$M_M \omega^2 R_{or} = G \frac{M_M M_p}{R_{or}^2}$$

millest ongi võimalik välja arvutada Päikese mass. Analoogiliselt saab niimoodi välja arvutada ka teiste taevakehade massid. ( Saveljev 1978, 142-143 )

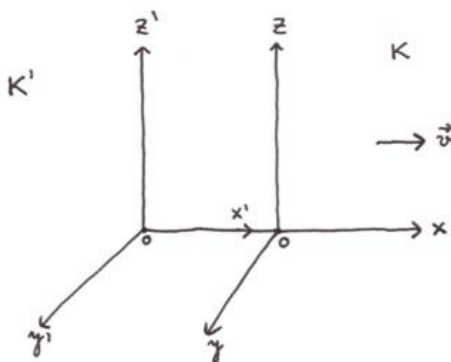
Inertne mass ja raske mass on omavahel ekvivalentsed, mis tähendab seda, et ei ole võimalik kindlaks teha, et kas vaadeldav keha asub gravitatsiooniväljas või kiirendusega liikuvast taustsüsteemis.

Näiteks kaaluta oleku korral langevas liftis või ümber Maa tiirlevas kosmoselaevas ei ole võimalik kindlaks teha kiirenduse või gravitatsioonivälja olemasolu.

Matemaatiliselt väljendub see kõveras ruumis. Näiteks kosmoselaeva orbiit tasases ehk eukleidilises ruumis on ekvivalentne sirgega kõveras ruumis. Kõvera ruumi sirget joont nimetatakse geodeetiliseks jooneks. Piisava kõverusega trajektoor võib olla kõveras ruumis sirge. Sirge on kõige lühem tee kahe ruumipunkti vahel.

Negatiivse kõverusega nn. hüperboolsete ruumide geometria töötas välja 1826. aastal N. Lobatševski ja suvalise kõverusega ruumi geometria lõi 1854. aastal B. Riemann.

Albert Einstein sidus ruumi kõveruse selliste füüsikaliste suurustega, mis kirjeldavad massi ja liikumist. Einsteini võrrandi lahendamisel saadakse mingi vaadeldava keha maailmajoon kõveras ruumis, mis on määratud teiste kehade masside poolt. Maailmajoon on neliruumis keha liikumistee. Neljamõõtmelise koordinaatsüsteemi ( ehk kõvera aegruumi ) korral kasutatakse kolme ruumitelge ja ühte ajatelge. Ajamomenti korrutatakse valguse kiirusega  $c$ , et tegemist oleks neljanda ruumimõõtmega. Tulemuseks on neli koordinaati:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ja  $ct$ .



Joonis 1 Tavaruum K liigub hyperruumi K' suhtes.

Selge on see, et kehade mass kõverdab aega ja ruumi, kuid üldrelatiivsusteooria ei anna vastust küsimusele, et miks mass kõverdab aegruumi? Mass kõverdab ümbritsevat aegruumi, kuid miks see nii on? Vastuse sellele fundamentaalsele küsimusele annab meile ajas rändamise füüsikateooria.

Universumi kosmoloogia ja ka erirelatiivsusteooria osas näitasime keha seisuenergia

$$E = mc^2$$

tulenevust ajas rändamise füüsikast. Kõik kehad eksisteerivad ajas ja ruumis. Aeg kui „kestvus“ on pidevalt „liikuv“, mis tähendab, et aeg ei jää kunagi „seisma“. Liikuvad kehad omavad kineetilist energiat. Absoluutselt kõik kehad Universumis „liiguvad“ ka aja suhtes, mis tähendab seda, et me kõik liigume ajas tuleviku poole. Kuid aeg ei ole mingisugune füüsiline objekt. Aja suhtes liikumine põhjustabki seisuenergia  $E = mc^2$  esinemise kõikidele kehadele Universumis. See tähendab seda, et energia  $mc^2$  on oma olemuselt siiski keha „kineetiline energia“, mis tuleneb sellest, et kõik kehad Universumis liiguvad ajas tuleviku suunas. Seda väljendab ja ka kirjeldab füüsikaline mudel, milles liiguvad kõik kehad hyperruumi K' suhtes, kuna tavaruum K „liigub“ hyperruumi K' suhtes kiirusega c. Sellest mudelist tuletasime välja sellise matemaatika, mis näitab, et kõikidel kehal on „kineetiline“ energia ja seega ka mass. Niimoodi võib energia  $mc^2$  olla kineetiline energia „liikuva hyperruumi K' suhtes“ ehk  $E = mc^2$  on keha kineetiline energia, mille tingib aja dimensiooni olemasolu Universumis.

Sarnaselt seisue energiaga peab ka keha raske ja inertne mass olema kuidagi seotud ajas rändamise füüsikaga.

Üldrelatiivsusteooria järgi on inertne mass ja raske mass omavahel võrdsed ehk ekvivalentsed. Mass on keha inertsi mõõduks ehk see kirjeldab keha inertsi kiiruse muutuste suhtes. See tähendab seda, et mida suurem on kehal mass, seda rohkem aega läheb vaja keha kiiruse muutmiseks.

Näiteks raske rongi pidurdamine võtab oluliselt kauem aega kui näiteks lapsevankri pidurdamine. Nende kahe keha pidurdusteade pikkused on väga erinevad ühe ja sama kiiruse arv väärtuse korral.

Viimasest võib omakorda järeldada seda, et näiteks kui rong sõidab ühtlaselt ja sirgjooneliselt mööda teed ja rongi sees mõne keha mass ajas tohutult suureneb, siis mida suurem on kehal mass, seda aeglasemalt liigub rong ja koos sellega ka keha rongis. Keha kiirus jääb lõpuks maapinna suhtes üldse paigale.

Viimastest näidetest on võimalik järeldada seda, et kui keha mass suureneb, siis peab see avaldama suuremat „vastupanu“ aja dimensioonile, kuna kõik kehad „liiguvad“ ajas tuleviku suunas. Seda kirjeldab füüsikaline mudel, mille korral suureneb keha mass tavaruumis K, mitte aga liikumiskiirus tavaruumi K suhtes. Sellisel juhul muutub keha liikumiskiirus hyperruumi K'-i suhtes aeglasemaks,

kuid tavaruumi  $K$  enda liikumiskiirus hyperruumi  $K'$  suhtes jääb alati samasuguseks. Kuid keha liikumiskiiruse muutumise korral hyperruumi  $K'$  suhtes peab esinema juba aja ja ruumi teisenemised nagu seda oli näidatud erirelatiivsusteooria osas. Sellest nähtubki see, et mida suurem on kehal mass, seda enam peab see kõverdama ümbritsevat aega ja ruumi.

Tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  füüsikaline süsteem avaldub looduses Universumi kosmoloogilise paisumisenä. Mass kõverdab ümbritsevat aegruumi ja seeläbi avaldab mass vastupanu Universumi paisumisele. See tähendab seda, et gravitatsioon kui aegruumi kõverdus avaldab vastupanu Universumi paisumisele, mis on heaks näiteks sellele, et kuidas on mass kui keha inertsimõõt seotud tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  füüsikalise süsteemiga.

Palju täpsemalt öeldes ei kõverda aegruumi mitte ainult keha mass, vaid tegelikult massi tihedus ehk massi ja ruumi vaheline suhe.

Näiteks kui suur naftatanker oleks ainult pisikese liivatera suurune, siis oleks tema gravitatsioonijõud isegi planeedi Maast palju suurem. Kuid tava suuruses ehk tegelikkuses on naftatankeri gravitatsioonijõud Maast palju kordi väiksem.

Mida väiksem on keha ruumala ehk mida tihedam on keha mass, seda lähemale jõuavad keha ruumi mõõtmed selle sama keha gravitatsioonitsentriile ehk Schwarzschildi pinnale. Seetõttu suurenebki keha massi tiheduse suurenemise korral gravitatsioonijõud keha pinnal ja selle vahetus läheduses (ehk ümbritsevas ruumis). Massitihedus avaldub massi ja ruumala jagatisena:

$$\rho = M/V$$

kuid kosmoloogias tähistatakse massi-energia tihedust tensorina:

$$T_{00} = \rho c^2 \left( \frac{J}{m^3} \right)$$

Gravitatsioonivälja kui aegruumi kõveruse põhjustab ruumis eksisteeriv energia ja mass. Seda kirjeldatakse aegruumi kõveruse geomeetriaga. Sündmuste koordinaatidel ei ole kõveras aegruumis enam meetrilist mõtet. Riemanni meetrika kirjeldab sündmuste vahelist kaugust  $ds$ :

$$(ds)^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik}(x) dx_i dx_k$$

Selles on  $g_{ik}(x)$  funktsioon, mis sõltub kuueteistkümnest aegruumi punktist  $x$  ja seda nimetatakse meetrilise tensori  $g(x)$  komponentideks – meetriliseks tensoriks või lihtsalt meetrikaks. Meetriline tensor on sümmeetriline:

$$g_{ik} = g_{ki}$$

ja sellepärast on meetrilisel tensoril 10 sõltumatut komponenti, mis on igas aegruumi punktis. Taustsüsteemi ehk koordinaatsüsteemi valikust sõltub meetrilise tensori komponentide kuju. Kuid viimase valemi koordinaatsüsteemi valikust ei sõltu kahe sündmuse vaheline kaugus ehk intervall. Erinevad meetrilised tensorid  $g(x)$  kirjeldavad meetrikat, mis on erinevates kõverates aegruumides. Just aine ja energia eksisteerimine mõjutavad aegruumi geomeetriat ehk meetrikat. Samuti ka selle aine või energia liikumine aegruumis. Seda kirjeldavad matemaatiliselt A. Einsteini võrrandid:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik}$$

kus  $g(x)$  on

$$g(x) = g_{ik}(x)$$

ja  $g_{ik}$  avaldub maatriksina järgmiselt:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

ning  $g_{ik}(x)$  maatriksi kuju on

$$g_{ik}(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

milles meetrilise tensori  $g$  komponendid on vastavalt:

$$g_{00}(x) = 1$$

$$g_{10} = 0$$

$$g_{11} = -1$$

$$g_{22} = -1$$

$$g_{33} = -1$$

Einsteini võrrandis kirjeldab  $\Lambda g_{ik}$  liige Universumis eksisteerivat tume energiat.  $G$  on sümmeetriline tensor, mida nimetatakse ka Einsteini tensoriks. Einsteini tensoril on aga 10 sõltumatut komponenti  $G_{ik} = G_{ki}$ . Need avalduvad meetrilise tensori  $g$  komponentide ja nende esimest ja teist järku tuletiste kaudu. Einsteini tensor kirjeldab seda, et kui kõver on aegruum. Energia-impulssensor  $T$  on ka sümmeetriline tensor, millel on kümme sõltumatut komponenti:

$$T_{ik} = T_{ki}$$

Tensor  $T$  kirjeldab seda, et kuidas aine liigub aegruumis ja kuidas on jaotunud energia ja aine aegruumis. Need võrrandid on omavahel seotud kümne mittelineaarse teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemiga. Aine ja energia jaotus ja liikumine põhjustab aegruumi kõverust – seda need võrrandid kirjeldavadki. Need võrrandid kirjeldavad ka kõvera aegruumi mõju aine – energia – jaotusele ja liikumisele. Tensor on füüsikalist või geomeetrilist suurust kirjeldav matemaatiline objekt. Koordinaatsüsteemi valikust sõltuvad tensorit kirjeldavad komponendid, kuid tensor ise ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust. Need võrrandid kirjeldavad gravitatsioonivälja ( ehk aegruumi kõveruse ) tekitamist materiaalsete objektide poolt ja selle tekitatud välja mõjust objektide liikumisele.

Meetriline tensor  $g$  on otseses seoses aegruumi intervalli meetrilise võrrandiga. Näitame seda nii, et viime eespool esitatud Einsteini gravitatsioonivälja kirjeldavas diferentsiaalvõrrandis tensori  $G$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi. Einsteini tensor  $G$  avaldus järgmiselt:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik}$$

mille kuju võib esitada ka lühemalt:

$$G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}$$

ehk

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

ehk

$$G^{\mu\nu} = -\frac{R}{g_{\mu\nu}}$$

Viimasest saame meetrilise tensori seose:

$$g_{\mu\nu} = -\frac{R}{G^{\mu\nu}}$$

Kui me nüüd korrutame võrrandi mõlemad pooled tensoriga  $dr^\mu dr^\nu$

$$g_{\mu\nu} dr^\mu dr^\nu = -\frac{R}{G^{\mu\nu}} dr^\mu dr^\nu$$

siis see võrdubki aegruumi intervalli meetrilise võrrandiga:

$$g_{\mu\nu} dr^\mu dr^\nu = ds^2$$

mis pikemalt välja kirjutatuna näeb välja sellisena:

$$g_{\mu\nu} dr^\mu dr^\nu = dr^\mu dr_\mu = ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Kui aga aegruumi intervalli võrrandi koordinaadid on „märgiliselt vastupidised“:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

siis võib seda kirjeldada näiteks maatriks:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ehk

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu}$$

mis esineb samuti tasast aegruumi kirjeldavas meetrilises võrrandis:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Kui aga Cartesiuse ristkoordinaatide:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

asemel kasutada sfäärilisi koordinaate:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi)$$

ja tasase aegruumi asemel oleks meil tegemist hoopis kõvera aegruumiga, siis seda kirjeldab juba

eespool esitatud meetriline tensor g:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Sellise determinandi korral tuleb aegruumi intervalli meetrilise võrrandi kuju järgmiselt:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Siinkohal tasub märkida seda, et kõik eelnevalt kasutatud tensorid tulenevad Riemanni geomeetrisest matemaatikast, mis uurib Riemanni ruume. Riemanni ruumid on „päriseukleidilise ruumi alamruumid“. Riemanni geomeetrias kirjeldabki Riemanni ruume eespool esitatud meetrika:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Siinkohal on oluline märkida, et kõik eelnevalt esitatud valemid sisaldavad Schwarzschildi raadiuse R avaldist:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

mis esinebki näiteks Schwarzschildi meetrikas:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

ehk

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2$$

ja

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = dl^2$$

Sellisel juhul näitab Schwarzschildi raadius R ( geomeetrilise ) kerakujulise pinna raadiust:

$$4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2$$

mille pinnal ( ja tegelikult ka sees ) on aeg ja ruum „kõverdunud“ lõpmatuseni ehk aja ja ruumi eksisteerimised lakkavad olemast. See väljendub gravitatsioonilises aja dilatatsioonis:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$



ja gravitatsioonilises ruumi kontraktsioonis:

$$ds^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} dr^2$$

ehk

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{R}} = 0$$

Schwarzschildi raadiuse R võrrandis:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

näitab kiirus c „paokiirust“ aegruumi lõkspinnal:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

mis on võrdne valguse kiirusega vaakumis. Tähelepanuväärne on selle juures see, et kui me avaldame viimase võrrandi Plancki massi ja Plancki gravitatsioonikonstandi kaudu:

$$c = \sqrt{\frac{2 \frac{l_p^2 c^3}{h} \frac{h}{l_p} \frac{1}{c}}{r}}$$

ehk

$$c = \sqrt{\frac{2l_p c^2}{r}}$$

siis saamegi tulemuseks valguse kiiruse c:

$$c = c \sqrt{\frac{2l_p}{r}} = c \sqrt{\frac{2l_p}{2l_p}} = c$$

ehk

$$c = c$$

Edasiseks analüüsiks teisendame näiteks aja dilatatsiooni võrrandit järgmiselt:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

ehk

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

ja võtame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$1 - \frac{R}{r} = \left(\frac{t}{t^*}\right)^2$$

Teisendame jälle:

$$1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2 = \frac{R}{r}$$

Viimases võrrandis avaldub Schwarzschildi raadius  $R$  võrrandina:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Teades seisuenergia võrrandi definitsiooni:  $E = mc^2$ , millest omakorda saame massi  $M$  matemaatilise definitsiooni energia  $E$  kaudu:

$$\frac{E}{c^2} = m = M$$

saame Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandi kujuks:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2GE}{c^4}$$

Eespool tõestasime kvantmehaanikas kasutatava Plancki konstandi  $h$  ligikaudse seose:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = h$$

ja impulssi  $p$  kehtivuse:

$$\frac{1}{2GE} = p$$

MÄRKUS. Plancki konstandi  $h$  ligikaudse väärtuse kehtivust on võimalik tõestada impulssi  $p$  seose

$$\frac{1}{2GE} = p = mc$$

kaudu. Näiteks selleks teostatakse järgmine matemaatiline teisendusakt:

$$\frac{1}{2Gm} = Ec$$

ja korrutatakse viimase võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga:

$$\frac{c^2}{2Gm} = \frac{1}{R} = Ec^3$$

Viimasest võrrandist saame:

$$\frac{1}{c^3} = ER$$

ja kui me jagame saadud võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$ -ga:

$$\frac{1}{c^4} = E \frac{R}{c} = Et$$

milles me arvestasime kiiruse  $v$  definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$v = c = \frac{s}{t}$$

siis saame määramatuse relatsiooni energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$h = Et$$

mis kattubki Plancki konstandi  $h$  dimensiooniga: „energia korda aeg“.

Sellest tulenevalt saame Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandi kujuks:

$$R = \frac{2GE}{c^4} = \frac{h}{p} = \lambda$$

mis annab omakorda gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemi kujuks:

$$1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2 = \frac{R}{r} = \frac{h}{xp}$$

ehk

$$\left[1 - \left(\frac{t}{t^*}\right)^2\right] = \frac{h}{xp}$$

Üldrelatiivsusteooria järgi on gravitatsiooniväli aegruumi kõverus. Aegruumi kõverust näitab näiteks gravitatsiooniline aja dilatatsioon, mille kehtivust on ka eksperimentaalselt tõestatud. Eespool oleva analüüsi järgi saame selle valemi kujuks:

$$t^* = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{xp}}}$$

Kuna  $xp$  korrutis saab olla ainult võrdne Plancki konstandiga  $h$ :

$$xp = h$$

kuna

$$x = r = \lambda = \frac{h}{p}$$

siis saame tulemuseks:

$$t^* = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{h}{h}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{t}{0} = \infty$$

Sellest järeldub, et kui aeg ja ruum on kõverdunud ehk teisenenud lõpmatuseni

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{h}{h}} = l_0 \sqrt{1 - 1} = 0$$

( s.t. kui aja ja ruumi eksisteerimised lakkavad olemast ), siis hakkavad avalduma kvantmehaanika

seaduspärasused, mis seisneb peamiselt selles, et footoni või mõne teise osakese liikumine on seotud lainega, mille pikkus on:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Aeg ja ruum on kõverdunud lõpmatuseni näiteks musta augu tsentris oleva Schwarzschildi pinnal ehk aegruumi lõkspinnal.

Kuid Universumi füüsikaseadused hakkavad kehtima alles „Plancki pikkuse“ skaalast alates:

$$l = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

Plancki pikkuse läbimõõduga ruumalasse ei mahuks absoluutselt mitte ükski teadaolev osake. Samasugune põhimõte kehtib tegelikult ka ajaga, mille korral väikseim võimalik ajaperiood vastab „Plancki ajale“ t:

$$t = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

See tähendab seda, et ruumi mõõtmisel vahemikul:

$$0 \dots 10^{-35} \text{ m}$$

ja ajaperioodidel vahemikul:

$$0 \dots 10^{-44} \text{ s}$$

ei ole füüsikaliselt absoluutselt mõtet, küll aga omab matemaatilist mõtet. Plancki pikkuse l ja Plancki aja t saame otseselt tuletada gravitatsioonipotentsiaali U võrrandist:

$$U = \frac{GM}{R}$$

Näiteks saame massi M avaldada seisuenergia seosest:

$$M = \frac{E}{c^2}$$

ja energia E omakorda määramatuse relatsioonist aja t ja energia E vahel:

$$E = \frac{h}{2t}$$

Gravitatsioonipotentsiaali võrrand tuleb seega kujul:

$$U = G \frac{h}{2} \frac{1}{c^2 t} \frac{1}{R} = G \frac{h}{2} \frac{1}{l^2 c}$$

Gravitatsioonipotentsiaal on Schwarzschildi raadiusega R seotud järgmiselt:

$$c^2 = \frac{2GM}{R} = 2U$$

millest saame omakorda suurima võimaliku gravitatsioonipotentsiaali kogu Universumis:

$$\frac{c^2}{2} = U$$

Sellest tulenevalt saame võrrandi U:

$$U = G \frac{h}{2} \frac{1}{l^2 c}$$

kirjutada kujule:

$$l^2 = \frac{Gh}{c^3}$$

Tegemist ongi juba Plancki pikkusega:

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

millest väiksematel ruumi skaaladel ei ole enam füüsikalist reaalsust ehk Universumi eksistensi. Teades aja t definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$t = \frac{l}{v}$$

saame tuletada ka Plancki ajaperioodi:

$$t^2 = \frac{l^2}{c^2} = \frac{Gh}{c^5}$$

ehk

$$t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

millest väiksematel ajaperioodidel ei ole Universumis enam füüsikalist mõtet. Plancki pikkuse ja Plancki aja jagatis annab meile valguse kiiruse c ehk „Plancki kiiruse v“:

$$v^2 = \frac{l^2}{t^2} = \frac{Ghc^5}{c^3 Gh} = c^2$$

ehk

$$c = \frac{l}{t}$$

Kuna Universumi väikseim võimalik „ruumi pikkus“ saab olla ainult Plancki pikkus l, siis seega ei saa gravitatsiooniline ruumi kontraktsiooni võrrand võrduda nulliga:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}} \neq l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{R}} = 0$$

Raadiuste R ja r suhe ei saa võrduda ühega:

$$\frac{R}{r} \neq \frac{R}{R} = 1$$

kuna Plancki pikkusest l ei saa olla mitte miski „väiksem“:

$$\frac{R}{r} \geq l$$

Samasugune põhimõte kehtib ka gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemi korral:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} \neq \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

milles  $t$  on näiteks Plancki aeg. Füüsikaline sisu seisneb selles, et aegruumi kõverus esineb vastavalt Schwarzschildi meetrikale ( või Einsteini gravitatsioonivälja tensorvõrrandile ) KUNI Plancki pikkuseni  $l$  ja PÄRAST SEDA on aegruum kõverdunud koheselt lõpmatuseni. Alates Plancki pikkusest  $l$  „väiksemas mõõtkavas“ avaldub koheselt aegruumi lõpmatu kõverdus ehk aegruumi füüsikalise eksisteerimise lakkamine:

See tähendab, et kahe ruumipunkti vaheline kaugus saab väheneda ainult kuni Plancki pikkuseni  $l$  ja pärast seda muutub kahe ruumipunkti vaheline kaugus „koheselt“ nulliks. Kuid samas ruumipunktide vahelised kaugused ja niisamuti ka ajaperioodid võivad olla lõpmata suured.

Järsk üleminek aegruumi lõpmatule kõverusele ülimalt väikeses aegruumi mastaabis ( s.t. Plancki pikkusel  $l$  ) ongi käesoleva kvantgravitatsiooniteooria põhisisu.

Sarnaselt gravitatsioonilise ruumi kontraktsiooniga ja gravitatsioonilise aja dilatatsiooniga kehtib täpselt samasugune füüsikaline põhimõte ka kinemaatilise ( s.t. liikumisest tingitud ) ruumi kontraktsiooni korral:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \neq l_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0 = \frac{1}{\infty}$$

milles ei saa kehtida võrdus:

$$\frac{v^2}{c^2} \neq 1$$

ja kinemaatilise aja dilatatsiooni korral:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

milles ei saa kehtida võrdus:

$$t = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \neq \infty * \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = t = 0$$

ehk

$$\frac{v^2}{c^2} \neq 1$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et teatud kiiruse jõudmise korral, mis on ilmselt veidi väiksem vaakumis levivast valguse kiirusest  $c$ , teisenevad aeg ja ruum edaspidise kiiruse suurenemise korral hüppeliselt ehk koheselt lõpmatuseni ja ka kiiruse arvväärus muutub koheselt kiiruseks  $c$ .

Gravitatsioonivälja üldise ja täpse kirjelduse annab meile Albert Einsteini tuntud gravitatsiooni-välja tensorvõrrand:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

See valem kirjeldab seda, et kuidas aine ja energia eksisteerimine mõjutavad aegruumi geometriat ( ehk meetrikat ) ja samuti ka selle aine või energia liikumine aegruumis. Näiteks aja kulgemine aegleneb kõveras aegruumis ehk gravitatsioonivälja tsentri poole minnes. Matemaatiliselt kirjeldab

seda järgmine gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrand:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt$$

milles aja diferentsiaal lõpmatuses on  $dt$ . Kasutades aga „binoomilist ekspansiooni“

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

on võimalik võrrand viia kujule:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{gR}{c^2} + \frac{3g^2 R^2}{2c^4} + \dots \right) = T_0 (1 + 6,95 \cdot 10^{-10} + 7,2 \cdot 10^{-19} + \dots)$$

milles  $g$  on siin Maa raskuskiirendus ja  $R$  on siin Maa raadius. Suurust

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

nimetatakse ka taevakeha gravitatsiooniraadiuseks ehk tänapäeval Schwarzschildi raadiuseks. Seega võib gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemi välja kirjutada ka niimoodi:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt$$

ehk

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} dt$$

Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverdus, mida põhjustavad väga rasked massid. See aegruumi kõverdus väljendub näiteks musta augu korral selles, et mida enam musta augu gravitatsioonivälja tsentri poole minna, seda enam aeg aegleneb ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus ehk „ruumi-pikkus“ lüheneb. Selline aja ja ruumi teisenemine jätkub kuni teatud kauguseni tsentrist ja seda kaugust kirjeldab meile Schwarzschildi raadius  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

See raadius  $R$  näitab kaugust musta augu gravitatsioonivälja tsentrist, et kust alates on aeg  $t$  ja ruum  $l$  teisenenud lõpmatuseni ehk kust alates avaldub aegruumi lõpmatu kõverdumine ehk aegruumi eksisteerimise „absoluutne“ lakkamine:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

ja

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{R}} = 0$$

Seetõttu ei saa absoluutselt mitte midagi eksisteerida musta augu kui aegruumi augu Schwarzschildi pinna sissepoole jäävas „piirkonnas“. See tähendab ka seda, et mitte mingisugust punktisingulaarsust musta augu tsentris, mille olemasolu tõestas „teoreetiliselt“ 1965. aastal inglise teadlane Roger Penrose, ei saa tegelikult olemas olla. Punktisingulaarsus on lihtsalt üks matemaatiline punkt, kust alates mõõdetakse Schwarzschildi raadius  $R$ , mis määrab ära musta augu kui aegruumi augu „suuruse“ ehk sellise kujuteldava sfääri suuruse ruumis, mille pinnalt kaugenedes muutub aegruumi lõpmatu kõverus järjest tasasemaks. Seepärast ei saa näiteks musta augu mass eksisteerida Schwarzschildi pinna sees, vaid peab olema sellest „väljapool“ (s.t. Schwarzschildi pinnal). Mittepöörlev Schwarzschildi pind oleks täiesti kerakujuline, kuid see võib ka pöörelda ja mõne teise taevakeha ümber ka tiirelda.

Eespool esitatud analüüsi ja ka kvantgravitatsiooniteooria tõttu ei saa musta augu mass eksisteerida Schwarzschildi pinna „sees“, vaid ainult selle „pinnal“. See tähendab seda, et kui aine langeb musta auku, siis peale suure gravitatsioonijõu mõjub langevale ainele ka veel aja ja ruumi teisendused ehk aegruumi kõverus. Sellest ongi tingitud gravitatsioonijõud, kuid see põhjustab ka veel langeva aine kolmemõõtmelise kuju muundumist kahemõõtmeliseks kujuk, mille tõttu muundub kolmemõõtmeline füüsikaline keha musta augu Schwarzschildi pinnani jõudmisel kahemõõtmeliseks kehaks ehk lõpmata peenikeseks/õhukeseks kehaks. Näiteks võime ettekujutada paberi lehte, mis oleks lõpmata õhuke. Selles mõttes on musta augu Schwarzschildi pind ikkagi „füüsiline pind“.

Kvantgravitatsiooniteooria järgi esineb aegruumi kõverus vastavalt Schwarzschildi meetrikale (või Einsteini gravitatsioonivälja tensorvõrrandile) KUNI Plancki pikkuseni  $l$  ja PÄRAST SEDA on aegruum kõverdunud koheselt lõpmatuseni. Alates Plancki pikkusest  $l$  „väiksemas mõõtkavas“ avaldub koheselt aegruumi lõpmatu kõverdus ehk aegruumi füüsikalise eksisteerimise lakkamine. Musta augu korral tähendab see seda, et kolmemõõtmeline füüsikaline keha kontrakteeub „kahemõõtmeliseks leheks“, mille läbimõõt saab lõpuks vastata ainult Plancki pikkusele  $l$  ja pärast seda muutub keha ruumala (antud juhul „lehe“ läbimõõt) „koheselt“ nulliks.

Schwarzschildi raadius  $R$  näitab kerakujulise aegruumi lõkspinna ehk Schwarzschildi pinna suurust, millel on aegruum kõverdunud lõpmatuseni ehk aja ja ruumi füüsikaline eksisteerimine on lakanud:

$$R = \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\frac{e^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast niisamuti ka Plancki pikkuse  $l$  mõõtkavas:

$$4\pi R = 1,73415 * 10^{-35} \text{ m}$$

ehk

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616 * 10^{-35} \text{ m}$$

See tähendab seda, et kui Plancki pikkusest  $l$  väiksematel mõõtkavadel ei ole Universumil enam



füüsikalist eksistensi, siis seega ei saa eksisteerida absoluutselt mitte midagi ka Schwarzschildi pinna S sissepoole jäävas „ruumalas“. Seega musta augu punktsingulaarsust ei ole tegelikult olemas. Niimoodi moodustab Plancki pikkus  $l$  väikseima võimaliku ruumi mõõtkava, mis hõlmab ühtlaselt kogu Universumi kolmemõõtmelist ruumi. Seda nimetame „Plancki pinnaks S“. See tähendab, et mida väiksemasse ruumi mõõtkavasse jõuda, seda lähemale jõuame Plancki pinnani S.

Igasuguse (taevakeha) gravitatsioonivälja tsentris peaks olema Schwarzschildi välise meetrika järgi aegruumi auk (mitte ainult musta augu tsentris). See tähendab seda, et Schwarzschildi välise meetrika järgi on planeedi ja/või tähe (gravitatsioonivälja) tsentris Schwarzschildi pind, mida saab tõlgendada musta auguna. Näiteks ka planeedi Maa tsentris peaks olema Schwarzschildi meetrika järgi aegruumi auk, mida võib põhimõtteliselt tõlgendada ka „musta auguna“. Planeedi Maa pöörlemise tõttu ümber oma kujuteldava telje ja tiirlemise tõttu ümber Päikese ei saa Schwarzschildi pind Maa tsentris olla täiesti kerakujuline ehk see peaks samuti pöörlema. Selle olemasolu planeedi Maa tsentris tõestaks asjaolu, et kellad käivad seda aeglasemini, mida lähemal on need Maa gravitatsioonivälja tsentri ehk kehtib gravitatsiooniline aja dilatatsioon

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} dt$$

ja koos sellega ka gravitatsiooniline pikkuse (ehk kahe ruumipunkti vahelise kauguse) kontraktsioon

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

milles esineb Schwarzschildi raadius  $R$ . Kellad jäävad seisma ehk aeg „peatub“ teatud kaugusel tsentrist ja seda kaugust tsentrist kirjeldabki meile tuntud Schwarzschildi raadius  $R$ . Aegruumi augus (ehk kui musta augu tsentris) on aegruum kõverdunud lõpmatuseni ehk aeg on aeglenenud lõpmatuseni ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus vähenenud lõpmatuseni. Maa tsentris olev „must auk“ oleks kõigest 8,86 mm raadiusega.

Aine tihedus Maa tuumas on väga suur. Gravitatsioonijõud Maa tuuma välispinnal on umbes 3 korda suurem kui seda on Maa pinnal. Peaaegu Kuu suurune Maa tahke sisetuum pöörleb palju kiiremini kui planeet ise. See pöörleb ida suunas, kuid Maa sulametallist välistuum pöörleb lääne suunas ja palju aeglasemalt.

Maa tuum on väga kõrge temperatuuriga. See tuleneb suurest rõhust, mille omakorda tingib palju suurem gravitatsioonijõud, kui seda on maa peal.

Ka valgust kiirgavate tähtede tsentrites peaks olema Schwarzschildi välise meetrika järgi Schwarzschildi pinnad ehk aegruumi augud (s.t. „mustad augud“), mis peaksid samuti pöörlema. Selline asjaolu viib mõttele, et mustad augud ei teki tegelikult surevate tähtede kokkuvarisemistest, vaid need on tähtede tsentrites tegelikult juba eluajal olemas.

Mustad augud tekivad 2 – 3 Päikese massiga tähtedest, kui need hakkavad oma eluea lõpus enda raskuse tõttu kokku varisema, sest tähe sisemusse suunatud gravitatsioonijõud ületab peaaegu olematuks kahanenud termotuumareaktsioonidest tingitud rõhu. Kuna tähe sisemusse suunatud gravitatsioonijõu ja tähest väljapoole suunatud termotuumareaktsioonidest tingitud rõhu tasakaal on tähe eluea lõpus rikutud (gravitatsioonijõu kasuks) ja tähe välimised kihid paisatakse „supernoova-plahvatusena“ eemale, siis tähe massi gravitatsioonilise kollapsi tagajärjel tekibki must auk.

Tähe suremine algab etapist, mil suurem osa vesinikust on ära kasutatud ehk vesinikud on muutunud heeliumideks. Sellest tulenevalt väheneb tähe energiatootmine ja tasakaal eralduva kiirguse rõhu ning suure gravitatsioonijõu vahel on rikutud. See põhjustab tähe tuuma kokkutõmbumist, mille jooksul tõuseb seal temperatuur ja rõhk ning ägenevad termotuumareaktsioonid. Kuid samal ajal paisub tähe väliskest, mis jaheneb. Sellest tulenevalt paisub täht mitmekordselt ja tähe pinnatemperatuur väheneb. Nii muutubki täht suremise etapil punaseks hiiuks. Tähe tuum aga tõmbub kokku ja kuumeneb. Heeliumi tuumad hakkavad ühinema alles siis, kui temperatuur on jõudnud  $10^8$  K-ni. Mingisugusel eluetapil tähe tuumasünteesireaktsioonid lõpevad ehk ei ole enam energiat tulevasteks tuumareaktsioonideks. Sellisel juhul tõmbub täht gravitatsioonijõudude mõjul kokku. Kui tähe mass on suurem kolmest Päikese massist, siis tema suure gravitatsioonijõu tõttu ületab tähe tihedus tavalise aatomituuma tiheduse. Nii väidetavalt tekibki must auk – kokkuvarisevatest tähetuumadest.

Kuid mustad augud tegelikult ei teki surevate tähtede supernoova plahvatuste tagajärjel, vaid need on tähtede tsentrites juba eluajal olemas. Tähe tuuma kokku tõmbumisel suure gravitatsioonijõu tõttu muutuvad tähe tuuma mõõtmed juba tuumas oleva musta augu ehk aegruumi augu suuruseks. Sellise arusaama järgi ei teki mustad augud tegelikult tähtede kokkuvarisemistest, vaid need lihtsalt muutuvad nähtavateks tähtede tuumade kokku tõmbumise tõttu. Need on tähtede tsentrites juba eluajal olemas.

Tähe tsentris olev „must auk“ ei ime tähte endasse tähe eluajal, kuna must auk on tähega võrreldes äärmiselt väike, musta augu gravitatsiooniväli „ühtib“ tähe gravitatsiooniväljaga ja tähe sisemusse suunatud gravitatsioonijõud ning tähest väljapoole suunatud termotuumareaktsioonidest tingitud rõhk on tähe eluajal tasakaalus. Põhimõtteliselt kehtib see ka planeetide ja isegi kuude korralgi.

Gravitatsiooniväli on füüsikalises mõttes aegruumi kõverus. Põhimõtteliselt võib seda mõista nii, et aegruumi kõveruse tekitab aegruumi auk, kuid aegruumi augu tekitab omakorda keha mass ( s.t. massi tihedus ). Seejuures ei ole keha mass aegruumi augu „sees“, vaid sellest „väljapool“. Aegruumi kõverusi tekitavad aegruumi augud, mis asetsevad gravitatsioonivälja tsentrites. Aegruumi auku on omakorda võimalik tõlgendada ka aegruumi tunnelina. Näiteks aegruumi auku kirjeldab Schwarzschildi raadiuse ja objekti tegeliku raadiuse suhe, mille korral teisevad aeg ja ruum, kui liikuda aegruumi augu suunas. Schwarzschildi raadius  $R_s$  määrab ära aegruumi augu suuruse ja taevase objekti raadius  $R$  määrab ära objekti enda suuruse. Aegruumi auk asub enamasti gravitatsioonivälja tsentris ja seega taevaste objektide tsentris. Schwarzschildi raadiust ehk sündmuste horisonti  $R_s$ , mida arvutas välja Karl Schwarzschild, kasutatakse tegelikult kõikides üldrelatiivsusteooria võrrandites. Näiteks meetriline tensor  $g$  sisaldab Swarzschildi raadiust ehk aegruumi augu raadiust  $R$ :

$$G = (g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Niisamuti ka Schwarzschildi meetrika sõltub aegruumi augu raadiusest  $R$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Seda kasutatakse ka tähtede ehituse mudelites, mis arvutatakse välja klassikalise gravitatsiooni-teooria võrranditest. Näiteks olgu meil täht massiga  $M$ , tema Schwarzschildi raadius  $R_s$  ja tähe tegelik raadius  $R$ . Järgnevalt uurime tähe tegeliku ja Schwarzschildi raadiuse suhet. Valguse punanihkest saadud valemi järgi on võimalik välja arvutada sageduse muutus  $\Delta f$ :

$$\Delta f = f - f'$$

kuid seda eeldusel, et valgus lähtub tähelt ( massiga  $M$  ja raadiusega  $R$  ) lõpmata kaugele. Seda seost kirjeldab meile järgmine valem:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{R_s}{R}$$

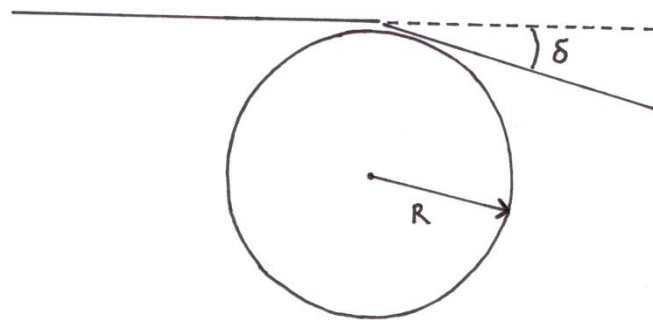
Niimoodi on võimalik välja arvutada valguskiire paindumise nurk  $\alpha$ , mis on radiaanides:

$$\alpha = \frac{R_s}{R}$$

Selle tegelik kuju on üldrelatiivsusteoorias avaldatav

$$\alpha = 2R_s / R$$

kuid sellest hoolimata on suurusjärk ikkagi umbes:  $R_s / R$ . Vaatame aga järgmist joonist:



*Joonis 1 Valguskiire paindumine tähe raskusväljas.*

Valguse kiir möödub tähest ( raadiusega  $R$  ) ja selle tulemusena see paindub. Tähe raadiuste suhe  $R_s / R$  esineb ka „seoseenergiaga“  $E_s$ , mida põhjustab tähe gravitatsioonijõud. Seda nimetatakse massikaoks ja selle matemaatiline avaldis on

$$E_s = c^2 \Delta M$$

See sarnaneb aatomituumade seoseenergiaga, mis vabaneb raskete tuumade lagunemisel või kerge te tuumade liitumisel. Kuid see tähendab ka seda, et näiteks samasugust energiat  $E = c^2 \Delta M$  oleks vaja tähe ( massiga  $M$  ) hajutamiseks lõpmata hõredaks gaasiks. Seda väljendab massikao ja massi  $M$  suhe:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{R_s}{R}$$

Viimase seose paremale poolele annavad palju täpsemad arvutused kordaja 0,6. Kui me hindame ainult suurusjärku, siis seda kordajat valemis vaja ei läheks. Ka siis on võimalik viimast seost kasutada paljude tähemudelite välja arvutamiseks. Raadiuste suhe  $R_s / R$  esineb ka helikiiruse valemis. Heli on füüsilises mõttes rõhuärituse levimine ruumis. Näiteks keskkonna tiheduse  $\sigma$  muutudes  $\Delta\sigma$  võrra muutub ka rõhk  $\Delta p$  võrra. Helikiirus avaldub seega järgmiselt:

$$v_s^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \sigma}$$

Tähe gravitatsioonijõu ja rõhu valemid annavad helikiiruse ja valgusekiiruse suhte suurusjärguks järgmise avaldise:

$$\left(\frac{v_s}{c}\right)^2 = \frac{R_s}{R}$$

Muutliku tähe pulseerimise perioodi  $T$  saame rõhuärituse levimiskiirusest  $v$  järgmiselt:

$$T_s = \frac{R}{v} = \frac{R}{c} \sqrt{\frac{R}{R_s}}$$

Astronoomiline objekt muutub „nähtamatuks“, kui Schwarzschildi raadius  $R_s$  on suurem objekti mittepöörleva kerakujulise keha raadiusest  $R$ . Niimoodi tekib väidetavalt must auk. Neutrontähed on kõige tihedamad objektid Universumis pärast musti auke. ( Keskinen ja Oja 1983, 71-74 )

Aja kulgemine erinevates taustsüsteemides on erinev ehk see on suhteline, mis sõltub vaatleja asukohast ruumis ehk sõltub taustsüsteemi valikust.

Näiteks kui mingi vaatleja siirduks oma tähelaevaga kosmosesse kiirusega, mis läheneb valguse kiirusele vaakumis ja tuleks 22 aastat hiljem maa peale tagasi, siis maa peal on möödunud selle aja jooksul peaaegu 1000 aastat. Seega vaatleja rändas ajas tulevikku.

Ületada valguse kiirust vaakumis pole reaalselt võimalik, sest lõpmatut energiat pole kusagilt võtta. Sama on tegelikult ka aegruumi auguga ( ja seega ka aegruumi tunneliga ). Näiteks aegruumi augu ehk musta augu tsentrisse pole võimalik reaalselt liikuda, sest sarnaselt valguse kiirusega vaakumis aegleneb aeg ja lüheneb keha pikkus aegruumi augule lähenemisel. Seetõttu lähenedes mustale augule reisib keha ajas tulevikku ja musta augu servale ehk Schwarzschildi pinnani jõudmiseks peab keha rändama ajas lõpmata kaugesse tulevikku. Kuid ajas ja ruumis ei eksisteeri mitte miski lõpmata kaua – isegi mitte aegruumi auk ise, sest need aja jooksul „kvantaurustuvad“. Sellest järeldub, et mitte ükski keha tegelikult ei jõuagi mitte kunagi musta augu Schwarzschildi pinnani, kuna mustad augud jõuavad lihtsalt enne ära aurustuda.

Mustad augud aja jooksul „kvantaurustuvad“, mida tuntakse „Hawkingi kiirgusena“. Selle käigus tekivad Schwarzschildi pinna lähedal vaakumis osakeste-antiosakeste paarid, mida põhjustab musta augu energia. Osakeste paarist langeb ( kvantmehaanika järgi „negatiivse energiaga“ ) üks osake musta auku, kuid teine osake kiirgub mustast august eemale. Selline protsess põhjustabki musta augu energia ja seega ka massi vähenemist väga pika ajaperioodi jooksul, kuna mustal augul on „positiivne energia“. Hawkingi kiirgusest tingitud energia vabanemise kiirus  $v$  on pöördvõrdeline musta augu massi ruuduga:

$$v \sim \frac{1}{M^2}$$

Mida väiksem on must auk, seda suurem on tema temperatuur. Mustad augud „kvantaurustuvad“ ehk nende mass väheneb väljakiiratava soojuskiirguse tõttu. Kuna massi vähenedes musta augu temperatuur suureneb, siis seega on „aurumisprotsess“ ajas kiirenev ja lõpeb plahvatusega. Musta augu entroopia väheneb aurumisprotsessi jooksul, kuid must auk koos soojuskiirgusega ehk süsteemi koguentroopia ei vähene. Praegusel kosmoloogilisel ajaskaalal võivad aurustuda ja plahvatada just väikesed mustad augud. Päikese massiga või sellest suuremate mustade aukude mass ajas suureneb, entroopia kasvab ja temperatuur väheneb. Selliste mustade aukude soojuskiirguse energia on palju väiksem ümbritsevast kosmilisest ruumist neelatavast energiast ( kiirgus, osakesed jne ). Nende temperatuurid on väga väikesed:  $T < 10^{-7} K$ .

Hawkingi kiirguse tõttu aurustuvad kõik mustad augud Universumis ehk mustad augud hääbuvad väga pika aja jooksul kuni lõpuks üldse lakkavad eksisteerimast ehk surevad. Musta augu suremisega kaasneb ka informatsiooni kadumine nendes. Energia jäävuse seadusega see vastuollu ei lähe, kuna musta augu Schwarzschildi pinna lähedal tekivad vaakumis osakeste-antiosakeste paarid, mida põhjustab musta augu energia. Osakeste paarist langeb „negatiivse energiaga“ üks osake musta auku, kuid teine osake kiirgub mustast august eemale. Selline protsess põhjustabki musta augu energia ja seega ka selle massi vähenemist väga pika ajaperioodi jooksul, kuna mustal augul on eelkõige „positiivne energia“. Kuid samas mustast august eemale kiirguv osake on nagu „energia juurde tulek“ Universumisse. Selles mõttes ei lähe musta augu ja koos sellega ka massi hävimine ( s.t. informatsiooni kadumine ) vastuollu üldise energia jäävuse seadusega, kuna energia lõppkokkuvõttes tegelikult ei hävi ega teki ka juurde. Energia muundub vaid ühest liigist teise.

Kuid samas ei pääse musta augu tsentrist ka mitte miski välja, isegi mitte valgus. Täpsemalt öeldes pääseb valgus musta augu tsentrist välja, kuid see võtab lihtsalt lõpmata kaua aega. Aja ( ja ruumi ) teisenemised gravitatsiooniväljas ehk aegruumi auku ümbritsevas aegruumis avalduvad väga selgesti järgmises katses. Näiteks oletame, et tsentraalsümmeetrilises väljas asetsevad kaks kiirgusallikat, mis on välja tsentrist kaugusel  $r_1$  ja  $r_2$  ( kusjuures  $r_1 < r_2$  ). Need kiirgusallikad on ühesugused ja nende „omaajad“ on aga järgmised:

$$s_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_1}} t_1 \approx \left(1 - \frac{\alpha}{2r_1}\right) t_1$$

$$s_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_2}} t_2 \approx \left(1 - \frac{\alpha}{2r_2}\right) t_2$$

milles  $\alpha$  on Schwarzschildi raadius:

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2}$$

ja sümmeetriatsentrist lõpmatuses on

$$s_3 = t_3.$$

Aja mõõt välja punktides seisneb selles, et selle välja kõikides punktides peavad kiirgusperioodi

omaajad olema võrdsed. Seega:

$$s_1 = s_2 = s_3$$

mille tõttu avaldubki järgmine seos:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2r_1}\right)t_1 = \left(1 - \frac{\alpha}{2r_2}\right)t_2 = t_3$$

ehk  $t_1 > t_2 > t_3$ , milles  $t_1$ ,  $t_2$  ja  $t_3$  on lõpmatuses mõõdetud vastavate kiirgusallikate perioodid. Kiirgusallika periood on seda suurem, mida lähemal on see gravitatsioonitsentrile. Toimub punanihe – spektris olev kiirgusallikate joon nihkub lõpmatuses vaadates punase osa poole. Aatomite poolt kiiratud valgus nihkub gravitatsiooniväljas spektri punase osa poole. Mida enam gravitatsioonivälja tsentrile lähemal asub kiirgav aatom, seda enam väheneb valguse võnkesagedus. ( Silde 1974, 176-177 ).

Musta augu tsentris oleval Schwarzschildi pinnal on aegruum kõverdunud lõpmatuseni. Näiteks gravitatsiooniline aja dilatatsioon muutub Schwarzschildi pinnal lõpmata suureks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

milles

$$\frac{2GM}{c^2 r} = 1$$

Viimasest me näeme, et musta augu gravitatsioonijõud ei saa Schwarzschildi pinnal olla lõpmata suur, kuna see on seotud gravitatsioonipotentsiaali  $U$  maksimaalse võimaliku suurusega Universumis:

$$U = \frac{GM}{r} = \frac{c^2}{2} = \text{const}$$

Kuid näiteks aatomite tuumajõud on seotud Yukawa tuumapotentsiaaliga  $U$ :

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

mille järgi muutub tuumapotentsiaal ( ja sellest tulenevalt ka tugev jõud ) lõpmata suureks kvarkide eemaldumisel üksteisest teatud kaugusele ruumis. See viitab sellisele huvitavale faktile, et aatomite tuumajõud on tegelikult palju kordi suurem musta augu gravitatsioonijõust Schwarzschildi pinnal.

Tuntud Schwarzschildi meetrika

$$ds^2 = g = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ehk

$$ds^2 = g = c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

kirjeldab ainult taevakeha välist aegruumi kõverust ehk seega „puhast“ gravitatsioonivälja. Selline meetrika ei kirjelda taevakeha sees olevat gravitatsioonivälja. Kuid sellise kirjelduse leidmiseks saame teha Schwarzschildi meetrikas järgmised matemaatilised teisendused:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 = \frac{4}{4} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 = \frac{1}{4} \left(2\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\right)^2 c^2 dt^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right)^2 c^2 dt^2 = \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right)^2 c^2 dt^2 = \\
&= \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right)^2 c^2 dt^2 = \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} - \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right)^2 c^2 dt^2 = \\
&= \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} - \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right)^2 c^2 dt^2 = \frac{1}{4} \left( 3\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} - \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right)^2 c^2 dt^2
\end{aligned}$$

Saadud matemaatiline teisendus annab meile Schwarzschildi meetrika kujuks:

$$ds^2 = g = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ehk

$$g = \frac{1}{4} \left( 3\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} - \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

milles Schwarzschildi raadius on:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Kuna massi tihedus avaldub:

$$\rho = \frac{M}{V(R)}$$

ja kera ruumala valem on kirjutatav:

$$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

siis seega „massi funktsioon“ võib avalduda järgmise seosena:

$$M(r) = V(r)\rho = \frac{r^3}{R^3} M$$

Sellest tulenevalt võime kirjutada:

$$\frac{2GM(r)}{rc^2} = \frac{2GMr^2}{R^3c^2} = \frac{r_sr^2}{R^3} = \frac{r_sr^2}{r_g^3}$$

ehk

$$\frac{r_s}{r} = \frac{r_sr^2}{r_r^2} = \frac{r_sr^2}{r^3} = \frac{r_sr^2}{r_g^3} = \frac{r^2}{R^2}$$

Seetõttu saame Schwarzschildi meetrika lõplikuks kujuks sellise seose:

$$g = \frac{1}{4} \left( 3\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} - \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ehk

$$g = \frac{1}{4} \left( 3\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ehk

$$g = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g^2}{R^2}} - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

mis kirjeldab taevakeha sees olevat aegruumi kõverust ja seega ka gravitatsioonivälja. Kuid eelnevates võrrandites peab arvestama sellega, et:

$$r^2 = r^2$$

$$r_g^2 \neq r^2$$

$$R^2 = \frac{r_g^3}{r_s}$$

ja viimast meetrilist võrrandit  $g$  võib matemaatiliselt avaldada ka järgmiselt:

$$g = c^2 d\tau^2 = \left( \frac{3 \cos \eta_g - \cos \eta}{2} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\cos^2 \eta} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

milles

$$\eta = \sin^{-1} \frac{r}{R}$$

$$\eta_g = \sin^{-1} \frac{r_g}{R} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_s}{r_g}}$$

Kerri meetrika järgi must auk pöörleb. See tähendab seda, et tuntud Schwarzschildi meetrika:

$$ds^2 = g = -c^2 d\tau^2 = - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 dt^2 + \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

kirjeldab musta augu aegruumi, mille korral must auk ei pöörle. Pöörleva musta augu ehk Kerri musta augu aegruumi kirjeldamiseks tuletame Kerri meetrilise valemi esialgu tavalisest aegruumi intervalli meetrilisest võrrandist:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Selleks peame kasutama sfäärilisi koordinaate:

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

mille diferentsiaalid võrduvad:

$$dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \sin \theta \cos \varphi dr + \sqrt{r^2 + a^2} \cos \theta \cos \varphi d\theta - \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi d\varphi$$



$$dy = \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}} \sin\theta \sin\varphi dr + \sqrt{r^2+a^2} \cos\theta \sin\varphi d\theta + \sqrt{r^2+a^2} \sin\theta \cos\varphi d\varphi$$

$$dz = \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta$$

Sellised avaldised annavad meile intervalli meetrilise võrrandi ruumilise osa kujuks:

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= \left( \frac{r^2}{r^2+a^2} \sin^2\theta + \cos^2\theta \right) dr^2 + \\ &+ ((r^2+a^2) \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta) d\theta^2 + (r^2+a^2) \sin^2\theta d\varphi^2 = \\ &= \frac{r^2+a^2 \cos^2\theta}{r^2+a^2} dr^2 + (r^2+a^2 \cos^2\theta) d\theta^2 + (r^2+a^2) \sin^2\theta d\varphi^2 \end{aligned}$$

ehk

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2+a^2 \cos^2\theta}{r^2+a^2} dr^2 + (r^2+a^2 \cos^2\theta) d\theta^2 + (r^2+a^2) \sin^2\theta d\varphi^2$$

Kui me sellest tulenevalt kasutame „tavalises“ Schwarzschildi meetrikas:

$$g = -c^2 dt^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

sellist geomeetrilist seost:

$$r^2 = \Lambda = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

siis tulemuseks võime saada:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 = \frac{r^2 + a^2 \cos^2\theta}{r^2 - r_s r + a^2} dr^2$$

milles avaldub omakorda

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2 = r^2 - 2Mr + a^2$$

Järgneva mõistmiseks on see väga oluline, kuna sellest saame tuletada „meetrilise determinandi“:

$$\begin{aligned} (r^2 - 2Mr + a^2)(-\sin^2\theta) &= \Delta(-\sin^2\theta) = -\Delta \sin^2\theta = -(r^2 + a^2) \sin^2\theta + 2Mr \sin^2\theta = \\ &= -(r^2 + a^2) \sin^2\theta + \frac{2Mr}{\Lambda} \sin^2\theta [-a^2 \sin^2\theta + r^2 + a^2] = \\ &= -\left[r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{\Lambda} \sin^2\theta\right] \sin^2\theta + (r^2 + a^2) \frac{2Mr}{\Lambda} \sin^2\theta = \\ &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Lambda}\right) \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{\Lambda} \sin^2\theta\right] \sin^2\theta - \frac{4M^2 r^2 a^2}{\Lambda^2} \sin^4\theta = g_{tt} g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2 = \tilde{g} \end{aligned}$$

Saadud determinant kirjeldab maatriksit:

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} \\ g_{t\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

mis on omakorda seotud meetrilise tensoriga:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & g_{t\varphi} \\ 0 & \frac{\Lambda}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ g_{t\varphi} & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

Selles olevad liikmed avalduvad järgmiselt:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Lambda}\right)$$

$$g_{t\varphi} = -\frac{2Mr}{\Lambda} a \sin^2 \theta$$

$$g_{\varphi\varphi} = \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{\Lambda} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi} &= \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{\Lambda} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mr a^2 \sin^4 \theta}{\Lambda} = \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\Lambda} [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(r^2 + a^2) + 2Mr a^2 \sin^2 \theta] = \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\Lambda} [(r^2 + a^2)^2 - (r^2 + a^2) a^2 \sin^2 \theta + 2Mr a^2 \sin^2 \theta] = \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\Lambda} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta] \end{aligned}$$

Meetiline tensor on „lahti kirjutatuna“ aga järgmine:

$$ds^2 = -dt^2 + \Lambda \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2Mr}{\Lambda} (a \sin^2 \theta d\varphi - dt)^2$$

ehk

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Lambda}\right) c^2 dt^2 - \frac{2aMr}{\Lambda} \sin^2 \theta c dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Lambda} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \\ &\quad + \frac{\Lambda}{\Delta} dr^2 + \Lambda d\theta^2 \end{aligned}$$

milles

$$\Lambda = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2 = r^2 - 2Mr + a^2$$

$$r = a = \frac{J}{Mc}$$

Saadud meetrika juba kirjeldabki pöörlevat musta auku, mille korral ei saa Schwarzschildi pind olla enam täiesti kerakujuline.

Schwarzschildi pind ei saa olla pöörleva musta augu korral täiesti kerakujuline, kuid mõnede õppekirjanduslike allikate järgi on see täielikult kerakujuline. See tähendab seda, et selles vallas esinevad vastuolulised õppekirjanduslikud allikad.

Kuid siinkohal peame veidi pikemalt lahti seletama, et kuidas meetrilisest tensorist saime Kerri meetrika. Esiteks kehtis meil siin väga huvitav matemaatiline seos:

$$-\Delta \sin^2 \theta = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Lambda}\right) \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Lambda} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta - \frac{4M^2 r^2 a^2}{\Lambda^2} \sin^4 \theta = g_{tt} g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2$$

milles

$$g_{tt} g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2 = \tilde{g}$$

ja

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} \\ g_{t\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

Veidi hiljem me tõestame suuruse  $\Delta$

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2 = r^2 - 2Mr + a^2$$

tuletuse käigus seda, et on võimalik selline matemaatiline teisendus:

$$\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 \rightarrow \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - r_s r + a^2} dr^2$$

millest põhimõtteliselt saadaksegi suurus  $\Delta$ . Kuid eespool tuletatud pikas võrduses:

$$-\Delta \sin^2 \theta = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Lambda}\right) \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Lambda} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta - \frac{4M^2 r^2 a^2}{\Lambda^2} \sin^4 \theta = g_{tt} g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2$$

paistab silma selline huvitav seos:

$$\left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Lambda} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta$$

mis viitab omakorda järgmisele matemaatilise teisenduse võimalikkusele:

$$(r^2 + a^2) \sin^2 \theta \rightarrow \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Lambda} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta$$

Ruumikoordinaatide diferentsiaalid võrdusid:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

mida võibki nüüd matemaatiliselt avaldada ka järgmiselt:

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - r_s r + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \\ &+ \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Lambda} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned}$$

ehk

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{\Lambda}{\Delta} dr^2 + \Lambda d\theta^2 + \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{\Lambda} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Sellest tulenevalt peame valemis:

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} \\ g_{t\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

liitma liikmele  $g_{\varphi\varphi}$  selliseid liikmeid nagu  $\frac{\Lambda}{\Delta}$  ja  $\Lambda$ . Tulemuseks saamegi meetrilise tensori:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & g_{t\varphi} \\ 0 & \frac{\Lambda}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ g_{t\varphi} & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

Siinkohal on hea mainida, et Schwarzschildi meetrikat:

$$g = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

kirjeldas samuti meetriline tensor:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Sellest tulenevalt võib sellist meetrilist tensorit:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & g_{t\varphi} \\ 0 & \frac{\Lambda}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ g_{t\varphi} & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

kirjeldada selline meetriline võrrand:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Lambda}\right) c^2 dt^2 + \frac{\Lambda}{\Delta} dr^2 + \Lambda d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Lambda \sin^2 \theta}{\Lambda} \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2aMr}{\Lambda} \sin^2 \theta c dt d\varphi$$

ehk

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Lambda}\right) c^2 dt^2 - \frac{2aMr}{\Lambda} \sin^2 \theta c dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Lambda \sin^2 \theta}{\Lambda} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Lambda}{\Delta} dr^2 + \Lambda d\theta^2$$

Kerri meetrilises võrrandis esineb „suurus“, millela ei saaks Kerri meetrikat tuletada:

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2 = r^2 - 2Mr + a^2$$

Seda väga tähtsat seost on võimalik „tuletada“ järgmiselt:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s r}{r^2}\right)} \frac{r^2}{r^2} dr^2 = \frac{r^2}{r^2 \left(1 - \frac{r_s r}{r^2}\right)} dr^2 = \frac{r^2}{r^2 - r_s r} dr^2$$

Kuna ruumikoordinaatide diferentsiaalides

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

võime mõista sellist „matemaatilise teisenduse“ akti:

$$\frac{r^2}{r^2} dr^2 \rightarrow \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2$$

siis seega võime teha täpselt seda sama ka järgmise seosega:

$$\frac{r^2}{r^2 - r_s r} dr^2 \rightarrow \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - r_s r + a^2} dr^2$$

Sellest tulenevalt saame kirjutada võrduseid:

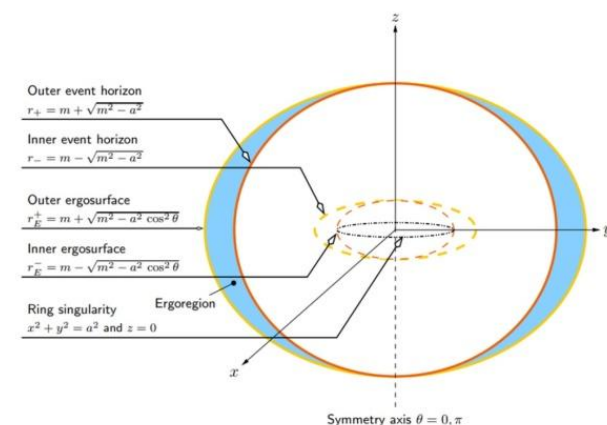
$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - r_s r + a^2} dr^2 = \frac{r^2}{r^2 - r_s r} dr^2 = \frac{r^2}{r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} dr^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2$$

kuid seda ainult juhul kui  $a = 0$ . Viimases me näemegi, et selles esineb meie otsitud „suurus“:

$$\Delta = r^2 - r_s r + a^2 = r^2 - 2Mr + a^2$$

Kerri musta augu meetrika põhineb Einsteini väljavõrrandite vaakumlahendel, mille korral ei ole arvestatud kollabeeruva tähe massi.

Musta augu piirkonnad ja piirpinnad Kerri meetrika järgi:



Pöörlevat musta auku ümbritseb kaks horisonti: statsionaarsusraja ja sündmuste horisont. Statsionaarsusraja on kokku surutud musta augu pooluste kohalt, kuid ekvaatori juures ulatub see natuke väljapoole sündmuste horisonti. Musta augu sündmuste horisont ( ehk musta augu pind ) ise ei ole enam täiesti kerakujuline ja see „pöörleb“ ning selle tsentris asub ringsingulaarsus ( mida tegelikult olemas ei ole ). Statsionaarsusraja ja sündmuste horisondi vahel asub ergosfäär, kus absoluutselt kõik kehad pöörlevad ümber musta augu ja nende pöörlemissuunad ühtivad musta augu pöörlemissuunaga. Ergosfääris ei püsi paigal mitte ükski keha, kuid sealt on võimalik välja pääseda. Musta augu sündmuste horisondist ei ole võimalik välja pääseda.

Kuna Schwarzschildi meetrika ehk mitte pöörleva musta augu korral me järeldasime musta augu singulaarsuse mitte eksisteerimist, siis selline arusaam kehtib tegelikult ka pöörlevate mustade aukude ehk Kerri meetrika korral. Mustade aukude korral peame arvestama ainult aegruumi lõkspindadega ehk sündmuste horisontidega, millel on aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni. Absoluutselt kõik, mis jääb sellest “sissepoole”, ei ole enam füüsikateaduslikult reaalne.

Musta augu pöörlemise tõttu emiteerivad pöörlemistelje poolused materiat, mis viib lõpuks musta augu hääbumiseni. Igasugune aine, mis langeb musta auku, tekitab elektromagnetkiirguse voo musta augu ümbritsevasse ruumi. Musta augu pöörlemistelje poolustelt väljuvad üksteisele vastandsuundades ümbritsevasse ruumi suured kiirgusvood. Nende järgi on võimalik välja arvutada musta augu energia.

Näiteks tähe massiga must auk nimega 4U 1630-472 pöörleb kiirusega, mis on umbes 92-95% teoreetilisest suurimast pöörlemiskiirusest. Musta auku langev aine on erakordselt kuum ja kiirgab välja eredaid röntgenkiiri, kuna aine langeb musta auku äärmiselt suure kiirendusega. Pöörlev must auk muundab enda ümbritsevat aega ja ruumi teisiti kui mittepöörlev must auk. Musta auku langeva aine kiiratud kiirgusesse jäävad sellest jäljed, mida astronoomid on võimelised ka registreerima.

Näiteks güroskoop pretseesseerib liikumisel ümber pöörleva gravitatsioonivälja allika, mis tähendab seda, et güroskoobi telg hakkab tiirlemisel ümber allika oma suunda muutma. Seda nimetatakse ITS-i kaasatriivimise efektiks ( kuna keha ITS hakkab allikale lähenedes pöörlema ) ja selline nähtus ilmneski 99% täpsusega 2004 – 2005 aastal läbi viidud Gravity Probe B eksperimendil, mille korral liikus güroskoop polaarsateliidiga ümber Maa. Selle katsega tehti kindlaks sateliidi pöörlemistelje muutumise 0,00184 kaarekraadi aastas ja aegruumi kaasavedamise Maa lähedal, mis muudab sateliidi pöörlemistasandit Maa pöörlemistasandi suhtes 0,0000114 kraadi aastas.

Musta augu termodünaamika järgi on sellel olemas temperatuur T ja entroopia A. Kuna musta augu suurenemise korral läheb kaduma ka rohkem informatsiooni musta augu moodustumisest, siis seega musta augu horisondi pindala ja tema entroopia on omavahel seotud:

$$4\pi R^2 \sim M^2$$

Selles näitab R musta augu horisondi raadiust:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Need suurused on omavahel rangelt võrdelised:

$$S \sim M^2$$

Mittepöörleva musta augu „siseenergia“ on esitatav energia ja massi ekvivalentsusena:

$$E = Mc^2$$

Kusjuures mida väiksem on musta augu mass, seda suurem on tema temperatuur T:

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \sim \frac{d}{dM}(M^2) = 2M$$

ehk musta augu mass ja temperatuur on omavahel pöördvõrdelised:

$$T \sim \frac{1}{M}$$

Näiteks kui musta augu mass oleks kõigest  $M = 10^{15} \text{ g}$ , siis tema temperatuur oleks  $T \approx 10^{12} \text{ K}$ .

Musta augu temperatuuri T valem tuletatakse termodünaamikast tuntud Boltzmanni konstandi k avaldisest:

$$k = 1,38 * 10^{-23} \frac{J}{K} = \frac{E}{T}$$

mis on seotud omakorda temperatuuri T ja energiaga E:  $E = kT$ . Energia E ise võib avalduda järgmiselt:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2} = \frac{E}{2} = \frac{1}{2} E$$

Kui me nüüd kasutame sealhulgas ka kvandienergia seost:

$$\frac{hc}{2\lambda} = \frac{1}{2} E = kT$$

ja Schwarzschildi raadiuse R avaldist:

$$\frac{hc}{2kT} = \lambda = R = \frac{2GM}{c^2}$$

siis saame temperatuuri T võrrandi:

$$\frac{hc^3}{4GMk} = T$$

Musta augu temperatuuri avaldisega kattub see täpsemalt kokku ainult siis kui Plancki konstant h on jagatud  $2\pi$ -ga, mille tulemuseks saamegi musta augu temperatuuri T kirjeldava avaldise:

$$\frac{hc^3}{8\pi GMk} = T$$

Musta augu Schwarzschildi pinna pindala  $S = 4\pi r^2$  avaldub seosena:

$$S = 4\pi \left( \frac{2GM}{c^2} \right)^2 = 16\pi \frac{G^2 M^2}{c^4}$$

millest saame omakorda massi M definitsiooni:

$$\frac{Sc^4}{16\pi G^2 M} = M$$

Viimase võime panna seisuenergia valemisse:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2} = \frac{Mc^2}{2}$$

mistõttu saame energia valemi kujuks:

$$E = \frac{Sc^6}{32\pi G^2 M}$$

Kuna musta augu entroopia  $A$  on termodünaamikas seotud temperatuuri  $T$  ja energiaga  $E$  järgmiselt:  $E = AT$ , siis võime kirjutada:

$$AT = \frac{Sc^6}{32\pi G^2 M}$$

milles  $T$  on musta augu temperatuur:

$$A \frac{hc^3}{8\pi G M k} = \frac{Sc^6}{32\pi G^2 M}$$

Musta augu entroopiat  $A$  kirjeldava valemi kujuks saame:

$$A = \frac{c^3 k S}{4hG}$$

Tähelepanuväärne on siinkohal märkida seda, et eelnevalt kasutasime „puhast“ pindala  $S$  valemit:

$$S = 16\pi \frac{G^2 M^2}{c^4}$$

kuid selle asemel on võimalik kasutada ka selle diferentsiaalvõrrandi „versiooni“:

$$dS = 32\pi \frac{G^2}{c^4} M dM$$

Selle tõttu peame ka seisuenergia  $E$  valemit  $E = mc^2$  vastavalt diferentseerima:

$$dE = c^2 dM$$

Viimane avalduks koos massiga järgmiselt:

$$dE = c^2 \frac{c^4}{32\pi G^2 M} dS = \frac{c^6}{32\pi G^2 M} dS$$

Kuna musta augu energia  $E$  ja temperatuur  $T$  olid entroopiaga  $A$  termodünaamiliselt seotud:

$$dE = T dA$$

siis saamegi matemaatiliselt teisendada nii:

$$T dA = \frac{c^6}{32\pi G^2 M} dS$$

ehk



$$\frac{hc^3}{8\pi G M k} dA = \frac{c^6}{32\pi G^2 M} dS$$

millest tulebki musta augu entroopia A valem:

$$A = \frac{c^3 k S}{4hG}$$

### 1.9.1 Mustade aukude orbiidid ja akretsioonkettad

Kuna tegelikkuses gravitatsioonivälja allikad pöörlevad ( näiteks tähed ja planeedid ), siis seega kirjeldab sellist välja järgmine meetrika:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

mis arvestab taevakehade massi M ja impulssmomenti J. Sellises meetrikas on aeg t ja nurga-koordinaat  $\varphi$  omavahel seotud ja seda  $g_{t\varphi} \neq 0$  tõttu. Tegemist on “telgsümmeetrilise gravitatsiooniväljaga”, milles liikuva keha impulssmoment on järgmine:

$$l = mg_{\varphi\mu}\dot{x}^\mu = m(g_{\varphi t}\dot{t} + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi})$$

Kuid Schwarzschildi gravitatsioonivälja korral kehtib võrdus:  $g_{t\varphi} = 0$ , mistõttu saame:

$$l = mg_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} = mr^2\omega = mrv$$

Viimane on klassikaline impulssmomenti avaldis. Kui meetrilise tensori komponendid  $g_{\mu\nu}$  ei sõltu koordinaadist  $\varphi$ , siis l on konstant liikumisel piki “geodeetilist joont”:

$$l = mg_{\varphi\mu}\dot{x}^\mu = m(g_{\varphi t}\dot{t} + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi})$$

Kui keha hakkab langema gravitatsioonivälja allika poole ja keha impulssmoment võrdub nulliga  $l = 0$ , siis seda kirjeldatakse üldrelatiivsusteoorias järgmiselt:

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}$$

Keha tiirlemiskiirus ümber gravitatsioonivälja allika on eemalasuva vaatleja suhtes järgmine:

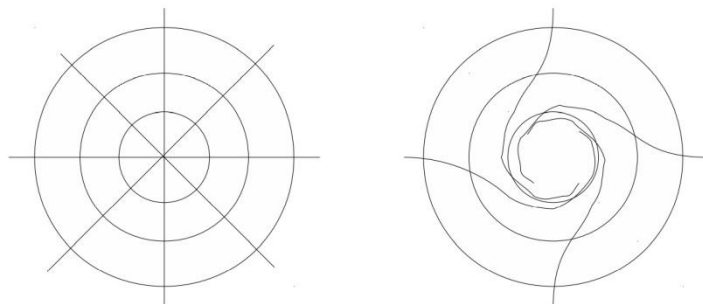
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \neq 0$$

See tähendab seda, et gravitatsioonivälja allika poole langev keha hakkab eemalasuva vaatleja suhtes tiirlema ümber allika. Kuna keha impulssmoment võrdub nulliga  $l = 0$ , siis seega hakkab

keha ITS ( s.t. keha inertsiaalne taustsüsteem ) allikale lähenedes pöörlema. Seda nimetatakse ITS-i “kaasatriivimiseks”, mis on omane ainult pöörleva gravitatsioonivälja allikaga aegruumile. Sellisel juhul hakkab güroskoobi telg tiirlemisel ümber allika oma suunda muutma.

Inertsiaalse taustsüsteemi kaasatriivimise efekt on omane ainult Albert Einsteini üldrelatiivsusteooriale ja seetõttu peab gravitatsiooni käsitlema ning mõistma ainult Einsteini üldrelatiivsusteooriast lähtudes, mitte mingisuguste teiste gravitatsiooniteooriate kaudu. Näiteks teleparalleelset gravitatsiooniteooriat ei saa enam arvestada, mis kirjeldab aegruumi kõveruse asemel selle väänet.

Pöörleva gravitatsioonivälja allika juures esinev ruumi kõverdumine:



Esimesel joonisel on tegemist mittepöörleva gravitatsioonivälja allikaga, mille korral langeb keha välja tsentrisse mööda sirget. Kuid teisel joonisel on tegemist juba pöörleva gravitatsioonivälja allikaga, mille korral langeb keha välja tsentrisse eemaloleva vaatleja suhtes kõverat teed pidi ( keha enda suhtes aga sirget teed pidi ).

Kui valgusimpulss liigub gravitatsioonivälja allika pöörlemise suunas või selle vastassuunas, siis muutub valgusimpulssi sagedus. Nurgafunktsioonide  $r$  ja  $\theta$  mitte muutumise korral jõeldub:

$$dr \neq 0$$

$$d\theta \neq 0$$

Sellisel juhul on meil tegemist valgusesarnase joonelemendi 4-intervalliga:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = 0$$

milles  $g_{tt}$  sisse arvestatakse  $c^2$ . Viimasest meetrikast tulenevad järgmised seosed:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} = -\omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}$$

Selles on  $\omega$  inertsiaalse taustsüsteemi ehk ITS-i musta augu kaasatriivimisest tingitud valguskiire nurkkiirus. Kui koordinaataeg on ajasarnane:

$$g_{tt}(r, \theta) < 0$$

siis võib valguskiire nurkkiirus olla positiivne või negatiivne. See sõltub sellest, et kas valguskiir liigub musta augu pöörlemise suunas või selle vastassuunas. Kui aga kehtib võrdus:

$$g_{tt} = 0$$

siis sellisel juhul saadakse kaks lahendit: üks on null ja teine on:

$$\frac{f\varphi}{dt} = 2\omega$$

Tegemist ongi “statsionaarsuse piirpinnaga”, kui selle pinnal kehtib võrdus:

$$g_{tt} = 0$$

Sellel pinnal on kiiratud valguskiired samasuunalised, mis võivad olla kiiratud musta auguga samas suunas või vastassuunas. Kuid reaalsed kehad saavad liikuda ainult musta augu pöörlemisega samas suunas, mitte vastassuunas.

Kuna musta augu ümber tekib akretsiooniketas aine imendumise tõttu musta auku, siis seega tuleb järgnevalt sellise võrrandi, mis seda kirjeldaks. Musta auku langeva keha relativistlik koguenergia on kirjutatav järgmiselt:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 = E^2 + E^2 = E(E + E)$$

Antud juhul me võrrandis ruute ei arvesta:

$$E = E + E$$

kuid arvestame summa asemel lahutusega:

$$E = E - E = cp - mc^2$$

Kuna erirelatiivsusteoorias avaldub keha koguenergia avaldis ka niimoodi:

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

siis võime kirjutada:

$$mc^2 + \frac{mv^2}{2} = cp - mc^2$$

ehk

$$mc^2 = -\frac{mv^2}{2} + cp - mc^2$$

Siinkohal võib märkida seda, et osakese koguenergia ja liikumiskonstant  $K$  on omavahel seotud:

$$K = \frac{E(\infty)}{mc}$$

ning osakese energia avaldub üldrelatiivsusteoorias:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{[E(\infty)]^2}{mc^2} - mc^2 \right) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + m \varphi_{eff}$$

Eespool saime tuletada sellise võrduse:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

mis võimaldab omakorda võrrandi kirjutada kujule:

$$\frac{mc^2}{2} = -\frac{mv^2}{2} + \frac{mc^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

milles massid  $m$  võime välja taandada:

$$\frac{c^2}{2} = -\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2}$$

Viimast avaldist teisendame nii, et võrrandi ühele poolele jääksid ainult valguse kiiruse  $c$  ruudud:

$$+\frac{v^2}{2} = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2}$$

Järgnevalt korrutame võrrandi mõlemad pooled jagatisega  $\frac{r^*}{r}$  ja võime arvestada sellega, et meil on tegemist tegelikult potentsiaali võrrandiga:

$$+\frac{v^2}{2} = \frac{v^2 r^*}{2 r} = -\frac{GM r^*}{r r} = U \frac{r^*}{r}$$

MÄRKUS: Kasutatav jagatis  $\frac{r^*}{r}$  esineb näiteks gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemis:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{r^*}{r}}}$$

Võrrandi teine liige teiseneb järgmiselt:

$$-\frac{c^2}{2} = -\frac{c^2 r^*}{2 r}$$

võrrandi kolmas liige:

$$+\frac{c^2}{2} = \frac{c^2 r^*}{2 r} = \frac{r^* c^2}{2 r} = \frac{l}{m^2 r^2} \frac{r^*}{2} = +\frac{l^2}{2m^2 r^2}$$

milles  $l$  on impulsimoment  $l = mvr = pr$  ja võrrandi neljas liige:

$$-\frac{c^2}{2} = -\frac{l^2}{2m^2 r^2} = -\frac{l^2}{2m^2 r^2} \frac{r^*}{r} = -\frac{r^* l^2}{2m^2 r^3}$$

Tulemuseks saame sellise võrrandi:

$$U \frac{r^*}{r} = -\frac{r^* c^2}{2r} + \frac{l^2}{2m^2 r^2} - \frac{r^* l^2}{2m^2 r^3}$$

ehk

$$\varphi_{eff} = -\frac{r^* c^2}{2r} + \frac{l^2}{2m^2 r^2} - \frac{r^* l^2}{2m^2 r^3}$$

mida mustade aukude füüsikas nimetatakse “efektiivpotentsiaaliks”. Efektiivne potentsiaal  $\varphi_{eff}$  arvestab ka keha impulssmomentiga  $L$ , mis antud juhul esineb ümber musta augu liikumisel.

Viimases võrrandis olev liige:

$$-\frac{r^*c^2}{2r} = -\frac{GM}{r}$$

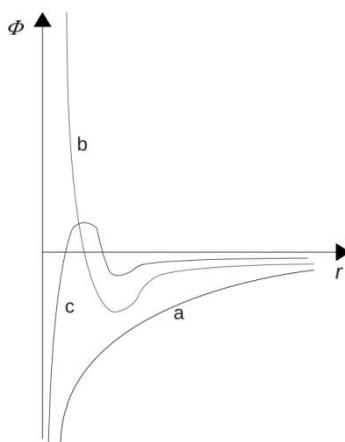
on klassikaline gravitatsioonivälja potentsiaal  $U$ . Keha impulssmomenti ja ümber musta augu tiirlemisega on seotud võrrandi teine liige:

$$+\frac{l^2}{2m^2r^2}$$

Kuid võrrandi kolmas liige:

$$-\frac{r^*l^2}{2m^2r^3}$$

tuletatakse mustade aukude füüsikas Albert Einstein'i üldrelatiivsusteooriast. Potentsiaali  $\varphi_{eff}(r)$  on võimalik esitada ka graafiliselt:



Tegemist on musta augu lähedal oleva potentsiaali graafilise esitusega. Joon a näitab “Newtoni potentsiaali”, mille korral võrdub keha impulssmoment nulliga  $l = 0$  ehk  $\varphi_{eff}$  valemis võrdub esimene liige nulliga. Joon b näitab sellist Newtoni potentsiaali, mille korral keha impulssmoment ei võrdu nulliga ehk  $\varphi_{eff}$  valemis on kaks esimest liiget  $l > \sqrt{3}mcr$ . Joon c näitab efektiivpotentsiaali  $\varphi_{eff}$  koos viimase liikmega  $l > \sqrt{3}mcr$  korral.

Musta augu stabiilsetes ringorbiitides esinevad potentsiaali ekstreemumid:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

See tähendab, et nendes esinevad stabiilsed  $r$  väärtused. Lahendades diferentsiaalvõrrandi, saame järgmise efektiivpotentsiaali võrrandi kuju:

$$0 = r^2 - 2\left(\frac{l}{mc}\right)^2 \frac{r}{r^*} + 3\left(\frac{l}{mc}\right)^2$$

Selle lahendamisel ilmneb kaks  $r$  väärtust:

$$R_{\pm} = \frac{1}{r^*} \left(\frac{l}{mc}\right)^2 \left[ 1 \mp \sqrt{1 - 3\left(\frac{r^*mc}{l}\right)^2} \right]$$

Kui langeva keha impulssmoment  $l$  on piisavalt väike ( kuid nullist erinev ), siis keha saab langeda

tähe tsentrisse ja seda üldrelatiivsusteooriast tuleneva potentsiaali tõttu. Kuid Newtoni potentsiaali korral see võimalik ei ole, sellisel juhul ilmneb “potentsiaalibarjäär”. Kui keha koguenergia võrdub:

$$\varepsilon \geq m\varphi_{eff}$$

ja tema impulssmoment on nullist erinev  $l \neq 0$ , siis keha saab langeda musta auku. Kui aga keha koguenergia võrdub:

$$\varepsilon = m\varphi_{eff}(R_-)$$

siis keha tiirleb ümber musta augu stabiilsel ringorbiidil. Potentsiaali ekstreemum  $R_+$  on lokaalne maksimum. See tähendab seda, et kui musta augu orbiidi raadius on  $R_+$ , siis keha saab tiirelda ringorbiidil. Kõrvalekalde korral langeb keha musta auku või liigub sellest orbiidist eemale väljapoole.

Väikseima raadiusega ringorbiidi korral  $R_- = R_+$  ilmneb eespool tuletatud võrrandil:

$$0 = r^2 - 2\left(\frac{l}{mc}\right)^2 \frac{r}{r^*} + 3\left(\frac{l}{mc}\right)^2$$

üks kahekordne lahend:

$$R_0 = \frac{1}{r^*} \left(\frac{l_0}{mc}\right)^2 = 3r^*$$

Tegelikkuses esineb akretsiooniketas mustal augul umbes  $3r^*$  juures. Kiiruse vähenedes langevad osakesed musta auku.

Käesoleva peatüki joonised ja materjalid on võetud järgmistest allikatest:

“Üldrelatiivsusteooria ja kosmoloogia”, Lühikonspekt, Tõnu Laas, Tallinna Ülikool, Matemaatika ja Loodusteaduste Instituut, Tallinn 2015.

<https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2019/04/20/ask-ethan-how-can-a-black-holes-singularity-spin/?sh=7fab617022d9>

## 1.10 Universumi tumeaine

Universumi tumeaine olemasolu tuli esimest korda välja astronoomilistest vaatlustest 20. sajandi esimesel poolel, mille korral nähtava aine massist ei piisanud Linnutee galaktika tähtede liikumiskiiruste seletamiseks. See tähendab seda, et galaktika koospüsimiseks ei piisa selles oleva nähtava aine massist. Näiteks kui Fritz Zwicky California Tehnoloogiainstituudist mõõtis Coma galaktikaparve ääreesade orbitaalseid liikumiskiirusi ümber tsentri, siis ta avastas, et need liikumiskiirused on palju kordi suuremad kui seda võimaldaks galaktikaparve kogumass.

Tumeaine interakteerub tavalise ehk nähtava ainega ainult gravitatsiooniliselt ja seetõttu allub tumeaine ka nõrgale interaktsioonile, kuna nõrga jõu vahebosonitel esinevad seisumassid. Gravitatsioon esineb ainult kehade masside vahel. See tähendab seda, et tumeaine „võib“ interakteeruda tavalise ainega ka nõrga interaktsiooni kaudu.

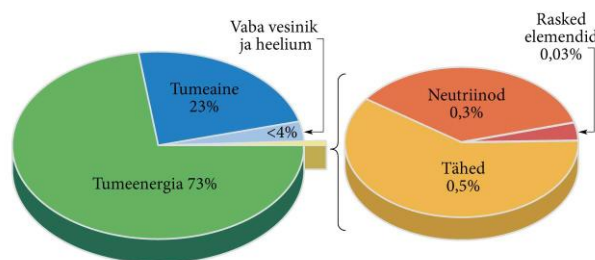
Siinkohal tasub märkida seda, et astronoomilised vaatlused kinnitavad tumeaine interakteerumist tavalise ainega ainult gravitatsiooni kaudu. Ka nõrga tuumajõu kaudu interakteeruv tumeaine on siiski ainult teooria ( s.t. hüpotees ).

Vahetult kohe pärast Universumi Suurt Pauku tekkisid väga palju väikseid musti auke, mis võivadki moodustada Universumi tumeaine, millel on ainult gravitatsiooniline vastasmõju tavalise nähtava ainega. See tähendab seda, et vanad ehk ürgsed mustad augud võivadki olla oma olemuselt Universumi tumeaine:

Universumi tundmatu tumeda massi võivad moodustada vanad ehk iidseid mustad augud. Nende massid võivad olla alates üks sajandik Päikese massist kuni 10 000 Päikese massi ja need võisid tekkida vahetult pärast Universumi Suurt Pauku. Galaktikate ümber koondusid kettana tiirlema kõige väiksemad mustad augud. Mustade aukude gravitatsioonijõude tunnemegi tumeaine mõjutusena. Ei ole teada, et kas ürgsed mustad augud pöörlevad või mitte.

Kui mustade aukude massid on 5 – 15 Päikese massi, siis nende päritolu saab olla ainult supernoovadelt. Kui aga musta augu mass on alla 5 Päikese massi, siis peab see pärinema Universumi Suurest Paugust.

Pärast Suurt Pauku on mass Universumis ebaühtlaselt jaotunud ja seetõttu tekivad väikesed mustad augud sellistesse ruumipiirkondadesse, kuhu on koondunud kõige rohkem ainet. Pärast Suurt Pauku ühinevad esimese miljardi aasta jooksul suurimad mustad augud kõikjal Universumis. Selle tagajärjel tekivad supermassiivsed mustad augud, mis eksisteerivad tänapäeval galaktikate tsentrites. Kuid on ka väga palju väikseid musti auke, mis jäävad iseseisvateks ja seetõttu koonduvad need kettana ümber galaktikate. Seal toimivad need tumeainena. Universumis võivad eksisteerida isegi mustade aukudega galaktikaid.



Joonis Üks näide Universumi koostisest ja tumeainest

Foto allikas: <https://opik.fyysika.ee/index.php/book/section/5025#/section/5025>

Vikipeedia andmete järgi moodustab tumeenergia meie vaadeldavas Universumis 68,3% kogu energiast, tumeaine 26,8% ja tavaline ehk nähtav aine ainult 4,9%. Selline „protsentidesse jaotamine“ ei ole tegelikult päris õige, kuna Universumi ruumala on tegelikult lõpmata suur

$$r = \infty$$

ehk galaktikaid on Universumis lõpmata hulk, siis seega ka tumeenergiat, tumeainet ja tavalist ehk

nähtavat ainet on lõpmata suure Universumiga võrreldes tegelikult samuti lõpmata palju. Mingisuguses lokaalses vaadeldavas Universumi piirkonnas võib tumeenergiat, tumeainet ja tavalist ainet jaotada niimoodi protsentidesse nagu eespool välja toodud.

Kuna Universumi punktisingulaarsuse korral paisus kogu Universum lõpmatu kiirusega

$$v = H = \infty$$

siis seega Universumi pindsingulaarsuse „ajal“ ehk 0 sekundit pärast Universumi punktisingulaarsust oli kogu Universumi ruumala lõpmata suur ( täpselt nii nagu tänapäevalgi ):

$$r = \infty$$

ja Universumi energia/massi tihedus oli samuti lõpmata suur:

$$\rho = \infty$$

Viimane tähendab seda, et mistahes Universumi ruumpunktis oli energia/mass lõpliku suurusega  $x$ :

$$E = mc^2 = x$$

milles

$$x \neq \infty$$

$$x \neq 0$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et kogu Universumis eksisteeris vaakumi asemel mateeria ehk antud juhul *ürgne energiaväli*. Selline ürgne energiaväli ei olnud tsentraalsümmeetriline ehk sellel puudus ruumis allikas. Sellisel juhul täitis ürgne energiaväli *absoluutselt ühtlaselt* kogu Universumi ruumala, mille korral ei eksisteerinud üldse vaakumit ehk „tühja ruumi“.

Kuna ürgne energiaväli täitis *absoluutselt ühtlaselt* kogu Universumi ruumala, mille korral ei eksisteerinud üldse vaakumit, siis seega ei saanud Universumis tekkida tsentraalsümmeetrilisi kõveraid aegruumi piirkondi. See tähendab seda, et ürgsest energiaväljast ei saanud tekkida ürgseid musti auke. Kõverat aegruumi piirkonda tajume me gravitatsiooniväljana, millel avaldub gravitatsioonijõud. Mustadel aukudel esinevad väga äärmuslikud gravitatsioonijõud.

Universumi pindsingulaarsuse korral oli Universumi ruumala lõpmata suur, kuid aegruum ise oli üle terve Universumi teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni. Seetõttu on Universumi pindsingulaarsust võimalik füüsikaliselt tõlgendada ka kui „*musta augu kahemõõtmelise Schwarzschildi pinna kolmemõõtmelise versioonina*“, kuna musta augu pinnal on aeg ja ruum kõverdunud ehk teisenenud samuti lõpmatuseni. Musta augu suurus Universumis kirjeldab Schwarzschildi raadius  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Kui musta augu pind on lõpliku suurusega ( näiteks musta augu ringjoon ei ole lõpmata suur ), siis seevastu Universumi ruumala on lõpmata suurusega ( Universumi kujuteldav ringjoon on lõpmata suur ).

Kogu Universumi aegruumi täitev „potentsiaalne“ energiaväli omas energiat ja massi vastavalt seisuenergia valemile:

$$E = mc^2$$



Kuid see viimane võrrand avaldub ka järgmiselt:

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

millest omakorda tuletasime väljapotsentsiaali võrrandi:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Viimane on matemaatiliselt tuletatav ka diferentsiaalvõrrandist:

$$\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 = 0$$

mis kirjeldab välja potentsiaalset energiat  $V$  skalaarse välja lagranžiaani  $L$  võrrandis:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$$

$\mu$  on energiavälja mass või energiavälja osakese mass ja  $\lambda$  on „teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( neljane tipp )“, mis ei ole mõõdetav. Kuna  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ , siis seega on energiavälja potentsiaalil  $\phi$  kaks minimaalset väärtust:

$$\phi = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

mida me nägime ka lagranžiaani  $L$  võrrandit kirjeldaval joonisel.

Kui ürgse energiavälja sümmeetriline potentsiaal muutus ebasümmeetriliseks ehk potentsiaal langes nulli ( antud juhul väikseimasse olekusse ), siis toimus „sümmeetria spontaanne rikkumine“, mille tagajärjel tekkis Universumis vaakum ja tänapäeval tuntud Higgsi väli koos elektromagnetilise, tugeva ja nõrga interaktsiooniga. Higgsi väli on „kahekomponendiline“ ehk „kompleksne“ väli.

Potentsiaalse energia eksponentsiaalse languse tõttu tekkiski Universumis vaakum ja tänapäeval tuntud Higgsi väli koos kogu meie tajutava materiaalse maailmaga, millesse tegelikult läkski kogu ürgne kineetiline energia.

Ürgse energiavälja potentsiaalse energia  $V$  langus ja sellest tulenevalt ka sümmeetria spontaanne rikkumine ( s.t. kõikide interaktsioonide eraldumine ühest väljast ) toimus pärast Universumi sündi „kõikjal ruumis korraga“ ajavahemikul  $t$ :

$$t \rightarrow 10^{-44}s \dots 10^{-9}s$$

ehk

$$10^{-44}s < t < 10^{-9}s$$

Selline ajaperiood langeb suures osas kokku nüüdisaegsete tunnustatud kosmoloogiliste mudelitega, mis käsitlevad sümmeetria spontaanse rikkumise ajaperioodiks:

$$10^{-43}s < t < 10^{-10}s$$

Järgnevalt hindamegi ja analüüsime uuesti vähemalt suurusjärgu täpsusega Universumi vanuse ja temperatuuri omavahelist seost ning sellest tulenevalt Universumi ainetiheduse evolutsiooni esimese 300 000 aasta jooksul, mil Universumi arengus muutus üks või teine elementaarosakeste

vaheline protsess oluliseks:

1. Kui Universumi vanus on  $10^{-43} < t < 10^{-34}$  s, siis võis temperatuur olla kõrgem kui  $10^{27}$  K. Sellisel temperatuuril ilmselt puudusid tuumaosakesed (prootonid ja neutronid), kuid eksisteerisid leptonid nagu näiteks neutriinod, samuti ka vabad kvargid, footonid ja võib olla ka veel seni avastamata osakesed.
2. Kui Universumi vanus on  $10^{-34} < t < 10^{-10}$  s, siis võis temperatuur olla kõrgem kui  $10^{15}$  K. Sellisel temperatuuril tekib aine ja antiaine asümmeetria ehk kvarke ja leptoneid on ühe miljardiku võrra rohkem kui antikvarke ja antileptoneid.
3. Kui Universumi vanus on  $10^{-10} < t < 10^{-6}$  s, siis võis temperatuur olla kõrgem kui  $10^{13}$  K. Sellisel temperatuuril on Universumi ainetihedus suurem aatomituumade tihedusest:

$$\rho = 10^{14} \frac{kg}{cm^3}$$

Sellisel ajaperioodil on Universumis umbes 300 erinevat liiki osakest ja seda nimetatakse „hadronite staadiumiks“.

4. Kui Universumi vanus on vahemikus  $10^{-6} < t < 10$  s, siis temperatuur võis olla vahemikus  $10^{13} K > T > 5 \cdot 10^9 K$  ja Universumi ainetihedus:

$$10^{14} \frac{kg}{cm^3} > \rho > 1 \frac{kg}{cm^3}$$

Sellisel juhul on tegemist „leptonite staadiumiga“, mis tähendab seda, et footoneid ja leptoneid (elektronid, positronid, neutriinod, antineutriinod jms) on umbes  $10^9$  korda rohkem kui barione. Sellisel ajaperioodil toimuvad esimesed termotuumareaktsioonid, mille käigus moodustuvad raskemate aatomite tuumad. Need tuumad on raskemad vesiniku tuumast (näiteks He ja natuke ka Li ning Be), kuid need pole paraku stabiilsed ehk need lagunevad, kuna need põrkuvad teiste osakestega kokku kõrge temperatuuri ja ülisuure tiheduse tõttu.

5. Kui Universumi vanus on vahemikus  $10s < t < 100$  s, siis temperatuur võis olla kõrgem kui  $5 \cdot 10^8$  K. Universumi ainetihedus on langenud väärtuseni:

$$10 \frac{g}{cm^3}$$

mis on 10 korda suurem vee tihedusest. Sellisel juhul on tegemist heeliumi ja deuteriumi tuumade sünteesi staadiumiga. Sellisel ajaperioodil tekivad vesinikust raskemad tuumad, mis on juba stabiilsed. Põhilised tuumad on heeliumi ja deuteriumi aatomituumad. Deuteriumi tuumad moodustavad Universumis pärast tuumareaktsioonide toimumist väga väikese osa (umbes alla 1%-i). Lõpuks moodustub Universumis 27% heeliumi tuumad ja 73% vesiniku tuumad ehk lihtsalt prootonid. Sellise ajaperioodi lõppedes ei toimu enam tuumareaktsioone, kuna Universumi ainetihedus ja temperatuur on siis lihtsalt väga väikesed.

6. Kui Universumi vanus on vahemikus  $10^2 s < t < 10^{13}$  s, siis seda ajaperioodi nimetatakse „kiirgusdominantseks Universumiks“. Kogu sellise ajaperioodi jooksul on kõige rohkem footoneid, mis on soojustasakaalus ülikõrge temperatuuriga plasmaga. See

kuum plasma koosneb põhiliselt elektronidest, prootonitest ja heeliumi aatomituumadest. Footonite energiatihedus on palju kordi suurem tavaaine energiatihedusest ja seetõttu kirjeldab Universumi kiirgusdominantset olekut võrrand:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}$$

milles  $\rho c^2$  on energiatihedus ja  $p$  on rõhk. Footonite energiatihedus väheneb palju kordi kiiremini tavaaine energiatihedusest just Universumi paisumise tõttu. Seepärast toimus umbes 300 000 aastat pärast Universumi sündi ( mil Universumi temperatuur oli umbes 4000 K ) üleminek kiirgus-dominantselt ajastult aine-dominantsele ajastule. Ülemineku ajal muutus Universum kiirgusele läbipaistvaks, mille korral oli temperatuur umbes 3000 K. Umbes  $6 \cdot 10^{12}$  s ehk ligikaudu 200 000 aastat pärast Universumi sündi oli temperatuur langenud 3600 K-i. Pärast seda võisid tekkida sellised aatomid, mis olid juba elektriliselt neutraalsed ja ka stabiilsed. Tegemist on niiöelda „vesiniku rekombinatsiooniga“, mille korral osakeste vahelised põrked ei rebinud enam aatomitest välja elektrone. Kogu Universumit täitev ülikuum plasma muutus kiiresti elektriliseks neutraalseks keskkonnaks, milles said juba vabalt liikuda footonid. Soojusliku ehk termodünaamilise tasakaalu kadumine aine ja footonite vahel põhjustas Universumi muutumise kiirgusele läbipaistvaks.

WMAP-i täpsemad mõõtmised näitavad kiirguse vabanemise ajaks umbes 397 000 aastat pärast Universumi Suurt Pauku.

Eelnevalt välja toodud Universumi varajased arenguetapid näitavad väga selgelt seda, et ürgsete mustade aukude tekkimiseks vahetult kohe pärast Universumi Suurt Pauku ehk Universumi varajases arengustaadiumis on täidetud kolm peamist füüsikalist tingimust:

1. Pärast Suurt Pauku oli Universumi ainetihedus vähemalt esimesel 100 sekundil ülimalt suur.

Näiteks kui Universumi vanus oli vahemikus  $10^{-10}$  või  $10^{-9} < t < 10^{-6}$  s ( mis esines pärast sümmeetria spontaanset rikkumist ), siis Universumi ainetihedus oli suurem aatomituumade tihedusest:

$$\rho = 10^{14} \frac{kg}{cm^3}$$

See on umbes 100 korda suurem kui praegusel ajal eksisteeriva neutrontähe suurim võimalik tihedus Universumis:

$$\rho = 10^{12} \frac{kg}{cm^3}$$

Neutrontähe tihedus on suurusjärgus 100 – 1000 miljonit tonni kuupsentimeetri kohta. Kui aga Universumi vanus oli vahemikus  $10^{-6} < t < 10$  s, siis Universumi ainetihedus esines vahemikus:

$$10^{14} \frac{kg}{cm^3} > \rho > 1 \frac{kg}{cm^3}$$

Kui Universumi vanus oli vahemikus  $10s < t < 100$  s, siis Universumi ainetihedus oli langenud väärtuseni:

$$\rho = 10 \frac{g}{cm^3}$$

See on umbes 10 korda suurem kui Päikese keskmine tihedus:

$$\rho = 1,409 \frac{g}{cm^3}$$

ja „ainult“ 16 korda väiksem Päikese keskmise olevast tihedusest:

$$\rho = 160 \frac{g}{cm^3}$$

Päikese massiga musta augu tihedus on  $10^{19} \text{ kg/m}^3$ .

2. Vahetult pärast Suurt Pauku ei olnud aine Universumis jaotunud ühtlaselt, vaid see jaotus Universumis vähemalt osaliselt ebaühtlaselt. Aine ebaühtlast jaotumist Universumis võib seletada kahe peamise „asjaoluga“:
  1. Footonite energiatihedus oli palju kordi suurem tavaaine energiatihedusest, kuid footonite energiatihedus vähenes palju kordi kiiremini tavaaine energiatihedusest Universumi paisumise tõttu.
  2. Erinevatel osakestel on erinevad massid ja sellest tulenevalt on võimalik järeldada, et aine ei saanud jaotuda Universumis täiesti ühtlaselt. See tähendab eelkõige seda, et mõnes ruumipiirkonnas pidi koonduma suurem mass kui mõnes teises ruumipiirkonnas.

Näiteks prootoni mass  $1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  on tuhandeid kordi suurem elektroni massist  $9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

Näiteks „hadronite staadiumis“  $10^{-10} < t < 10^{-6} \text{ s}$  oli Universumis umbes 300 erinevat liiki osakest, mis olid kõik väga erinevate massidega. Kuid ajaperioodil  $10 \text{ s} < t < 100 \text{ s}$  tekkisid vesinikust raskemad tuumad, mis olid stabiilsed. Põhilised tuumad olid heeliumi ja deuteeriumi aatomituumad. Deuteeriumi tuumad moodustasid Universumis pärast tuumareaktsioonide toimumist väga väikese osa. Lõpuks moodustus Universumis 27% heeliumi tuumad ja 73% vesiniku tuumad. Kogu kiirgusdominantse ajaperioodi jooksul  $10^2 \text{ s} < t < 10^{13} \text{ s}$  oli kõige rohkem footoneid, mis olid soojustasakaalus ülikõrge temperatuuriga plasmaga. See kuum plasma koosnes põhiliselt elektronidest, prootonitest ja heeliumi aatomituumadest.

1. Mõnes ruumipiirkonnas pidi koonduma rohkem massi kui mõnes teises ruumipiirkonnas. Selline aine massi ebaühtlane jaotus esines üle terve Universumi.
2. Mõnda ruumipiirkonda koonduv suurem mass võis hakata raskusjõu tõttu kokku varisema. Massi kokku tõmbumise tagajärjel suureneb paratamatult ka gravitatsioonijõud. Selle tagajärjel võisid tekkida äärmuslikud gravitatsioonijõud, mis esinevad ainult mustadel aukudel.
3. Mustad augud tekivad näiteks praegusel ajal Universumis suurte tähtede gravitatsioonilise kollapsi tagajärjel, kuna tähe sisemusse suunatud gravitatsioonijõu ja termotuumareaktsioonidest tingitud rõhu tasakaal on

rikutud ja tähe välimised kihid paisatakse „supernoovaplahvatusena“ eemale. Mustad augud tekivad suurte massidega tähtedest, kui need hakkavad oma eluea lõpus enda raskuse tõttu kokku varisema.

3. Ülisuur ainetihedus eksisteeris vähemalt sada sekundit pärast Suurt Pauku ( mis on tegelikult piisav ajaperiood vähemalt väikeste mustade aukude tekkeks ) ja mida aeg edasi, seda ebaühtlasemaks aine massi jaotus Universumis muutus.

Üliväikeste mustade aukude tekkeks, mis jäävad umbes elementaarosakeste suurusjärku, piisab väga väikesest ajaperioodist. Näiteks elektroni suuruse musta augu tekkimine võib võtta aega umbes kõigest  $10^{-6}$  sekundit.

Esimestel sekunditel pärast Universumi Suurt Pauku oli küll ainetihedus erakordselt suur, kuid sellega kaasnes ka väga suur rõhk, millest võib omakorda järeldada seda, et vahetult kohe pärast Suurt Pauku said tekkida ainult väga väikesed ehk mikroskoopilised mustad augud ( mitte suured ehk makroskoopilised mustad augud ). Suurte mustade aukude tekkimist välistas Universumi suurest ainetihedusest ja suurest temperatuurist tingitud ülikõrge rõhk, kuid mikroskoopilise musta augu tekkimist ei saanud Universumi ülikõrge rõhk „segada“.

Aine saab hakata gravitatsiooniliselt kokku tõmbuma ainult siis, kui kiirgus ei suru seda laiali. Siin mõistame me seda „rõhuna“.

Kõik elementaarosakesed liikusid esimestel sekunditel pärast Universumi Suurt Pauku valguse lähedase kiirusega ja toimusid pidevalt omavahelisi kokkupõrkeid. Sellest tulenevalt oligi rõhk väga väga suur.

Rõhu füüsikalist tähtsust mustade aukude tekkimisel näitab näiteks praegusel ajal Universumis tekkivate mustade aukude süünd. Näiteks mustad augud tekivad suurte massidega tähtedest, kui need hakkavad oma eluea lõpus enda raskuse tõttu kokku varisema, sest tähe sisemusse suunatud gravitatsioonijõud ületab peaaegu olematuks kahanenud termotuumareaktsioonidest tingitud rõhu. Kuna tähe sisemusse suunatud gravitatsioonijõu ja tähest väljapoole suunatud termotuumareaktsioonidest tingitud rõhu tasakaal on tähe eluea lõpus rikutud ( gravitatsioonijõu kasuks ) ja tähe välimised kihid paisatakse „supernoovaplahvatusena“ eemale, siis tähe massi gravitatsioonilise kollapsi tagajärjel tekibki must auk.

Esimestel sekunditel kohe pärast Universumi Suurt Pauku said tekkida ainult väga väikesed ehk mikroskoopilised mustad augud, mis võisid olla umbes elementaarosakeste suurus. Ürgsete mustade aukude ehk Suure Pangu järgsete mustade aukude täpseid suuruseid ei olegi tegelikult võimalik matemaatiliselt tuletada, kuid me võime ainult „hinnata“ nende võimalikke suurusjärke Hawkingi kiirguse järgi nii, et ürgne must auk eksisteeriks enam-vähem ka tänapäeval. See tähendab, et ürgse musta augu eluiga oleks Hawkingi kiirguse järgi 14 – 15 miljardit aastat pikk, mis oleks natuke pikem Universumi praegusest vanusest. Kuna musta augu „aurustumisaeg“  $t$  on kirjeldav valemiga:

$$t_{evap} \approx \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 * 10^{66} a$$

siis ürgse musta augu minimaalseks massiks võime „hinnanguliselt“ võtta  $5 * 10^{11}$  kilogrammi. Sellise massiga must auk aurustuks umbes 15 miljardi aastaga, mis on natuke rohkem kui Universumi praegune vanus. Universumi praegust vanust loetakse umbes 13,7 või 13,8 miljardit aastat. Sellise massiga mustad augud võisid tekkida kohe pärast Suurt Pauku ajavahemikul

$$10^{-10} < t < 100 \text{ s}$$

kuna sellisel ajavahemikul oli Universumi ainetihedus vahemikus:

$$10^{14} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} > \rho > 10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

mis sobiks üsna hästi eespool võetud ürgse musta augu hinnangulise massiga.

Kui must auk aurustumise tõttu täielikult häviks, siis see plahvataks, mille tagajärjel tekitaks Hawkingi kiirgus gammakiiri. Nende gammakiirte energia oleks umbes  $\approx 100 \text{ MeV}$  ja kiirus umbes  $10^{20}$  ergi sekundis. Peale gammakiirte tekib ka osakesi ( näiteks elektrone ja positrone ), mille lagunemised tekitaks samuti gammakiiri.

$5 * 10^{11} \text{ kg}$  massiga musta augu suurus ehk Schwarzschildi raadius  $R$  oleks peaaegu aatomituumade suurus:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = 7,413 * 10^{-16} \approx 10^{-15} \text{ m}$$

Kui ürgse musta augu mass on  $5 * 10^{11} \text{ kilogrammi}$ , siis igas kuupvalgusaastas saab maksimaalselt olla umbes 200 ürgset musta auku. Kuna ürgse musta augu mass võib olla  $5 * 10^{11} \text{ kg}$  ja raadius oleks sellisel juhul  $R \approx 10^{-15} \text{ m}$ , siis de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  valemi järgi

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

oleks ürgse musta augu lainepikkus  $\lambda$  ja sellest tulenevalt ka igasugused „kvantmääramatused“ niivõrd väikesed, et neid võib üldse ( isegi kvantmaailmas ) füüsikaliselt arvestamata jätta.

Näiteks kui väikese kuulikese mass oleks  $m = 10^{-6} \text{ kg}$  ja impulsi väärtus oleks  $p = 10^{-27} \text{ kgm/s}$ , siis lainepikkus tuleks seega  $\lambda \approx 10^{-7} \text{ m}$ . Sellise kuulikese kiirus oleks aga äärmiselt väike  $v \approx 10^{-21} \text{ m/s}$ .

Kuna massid on väga suured isegi mikroskoopiliste mustade aukude korral, siis seega nende liikumiskiirused saavad olla ainult sellised, mis on omased just makrokehadele. Sellest järeldub, et tumeaine ehk „külma tumeaine“ saavad moodustada ka mikroskoopilised ürgsed mustad augud, kuna nende liikumiskiirused ei saa olla ruumis väga suured just suure massi tõttu, ehkki nad võivad mõõtmistelt olla mikroskoopilised nagu seda on näiteks elementaariosakesed.

Väikeste mustade aukude Hawkingi kiirgused on palju intensiivsemad kui suurte mustade aukude Hawkingi kiirgused.

Mida väiksem on must auk, seda suurem on tema temperatuur. Mustad augud „kvantaurustuvad“ ehk nende mass väheneb väljakiiritava soojuskiirguse tõttu. Kuna massi vähenedes musta augu temperatuur suureneb, siis seega on „aurumisprotsess“ ajas kiirenev ja lõpeb plahvatusena. Musta augu entroopia väheneb aurumisprotsessi jooksul, kuid must auk koos soojuskiirgusega ehk süsteemi koguentroopia ei vähene. Praegusel kosmoloogilisel ajaskaalal võivad aurustuda ja plahvatada just väikesed mustad augud. Päikese massiga või sellest suuremate mustade aukude mass ajas suureneb, entroopia kasvab ja temperatuur väheneb. Selliste mustade aukude soojuskiirguse energia on palju väiksem ümbritsevast kosmilisest ruumist neelatavast energiast ( kiirgus, osakesed jne ). Nende temperatuurid on väga väikesed:  $T < 10^{-7} \text{ K}$ .

Järgnevalt esitame selliseid tõsiteaduslike argumente, mis põhjendavad võimalikult veenvalt

seda, et miks peaksid Universumi tumeaine moodustama siiski ürgsed mustad augud:

1. Pärast Universumi Suurt Pauku oli vähemalt esimesel sajal sekundil Universumi ainetihedus nii suur, et sellises olekus oleks pidanud tekkima mustad augud. See on matemaatiliselt kirjeldatav ja ka tõendatav.
  - Pärast Universumi Suurt Pauku ühinevad esimese miljardi aasta jooksul väikesed mustad augud kõikjal Universumis. Selle tagajärjel tekivad ülimassiivsed mustad augud, mis eksisteerivad tänapäeval galaktikate tsentrites.

Kõige vanem ülimassiivne must auk, mille olemasolu on astronoomiliste vaatlustega kindlaks tehtud, on tekkinud umbes 690 miljonit aastat pärast Universumi Suurt Pauku. Musta augu mass on Päikesest ligikaudu 800 miljonit korda suurem ja see toidab kvasarit „nimega“ ULAS J1342+0928.

Üks vanimaid ülimassiivseid musti auke, mille olemasolu on samuti astronoomiliste vaatlustega kindlaks tehtud, on tekkinud ligikaudu 900 miljonit aastat pärast Universumi Suurt Pauku. Musta augu mass on Päikesest ligikaudu 12 miljardit korda suurem ja see toidab kvasarit „nimega“ J0100+2802. Kvasari eredus on Päikesest ligikaudu 420 biljonit korda suurem ja see asub Maast umbes 12,8 miljardi valgusaasta kaugusel.

Eelnevalt nimetatud ülimassiivsed mustad augud on nii suured/massiivsed ja nii vanad, et nende tekkimised on tänapäeva astrofüüsika üks suurimaid mõistatusi. Iidse ülimassiivse musta augu suurus ja vanus viitab üsna selgesti sellele, et iidset ülimassiivsed mustad augud pidid tekkima väga paljudest väiksemate mustade aukude liitumistest. Väikseid musti auke pidi olema seega väga väga palju, mis viitab omakorda sellele, et need väikesed mustad augud võisid moodustada ka tumeaine ning seega võisid need tekkida peaaegu kohe pärast Universumi Suurt Pauku.

Nii suure massiga ja nii vanad mustad augud saavad tekkida ainult väiksemate mustade aukude liitumise tulemusena, mille arvukus peab olema väga väga suur. Väiksemate mustade aukude ülisuur arvukus viitabki sellele, et need mustad augud peaksid tulenema tumeainest, mis ise võibki koosneda ( ürgsetest ) mustadest aukudest. Tumeainet on ju palju rohkem kui tavalist ehk nähtavat ainet. Mitte mingisugust muud seletust ei ole võimalik anda sellele, et kuidas saab üsna lühikese kosmoloogilise ajaperioodi jooksul tekkida iidne ülimassiivne must auk miljardite valgusaastate kaugusel. Mustad augud, mis moodustaksid ka tumeaine, oleks sellele parim seletus.

Iidsed ülimassiivsed mustad augud viitavad ka sellisele astrofüüsikalisele asjaolule, et ülimassiivsete mustade aukude ja galaktikate areng ei toimunud ilmselt päris „käsikäes“. See võib tähendada seda, et näiteks ülimassiivne must auk võis tekkida esimesena ja gaasi- ning tolmutilv selle ümber veidi hiljem, milles omakorda tekkisid tähed. Tänapäeval me teame, et kõikides galaktikate tsentrites on ülimassiivne must auk, kuid kumb tekkis enim: kas galaktika või ülimassiivne must auk galaktika keskmes? Tundub, et ülimassiivsed mustad augud tekkisid esimestena.

Ülimassiivne must auk saab tekkida ainult väiksemate mustade aukude liitumisel, „tavalise“ musta augu ülisuures koguses aine imendumise tulemusena või ülimassiivse gaasi- ja tolmutilve gravitatsioonilise kokku tõmbumisega. Nendest viimane variant on Universumis äärmiselt ebatõenäoline, kuna enne musta augu tekkimist peaks tekkima täht. „Tavaline“ must auk tekib supernoova plahvatuse tagajärjel.

Kõige vanem galaktika, mille olemasolu on samuti astronoomiliste vaatlustega kindlaks tehtud, on GN-z11, mis on tekkinud umbes 300 - 400 miljonit aastat pärast Universumi Suurt Pauku ehk see oli olemas juba 13,4 miljardit aastat tagasi. Maast on see 32 miljardi valgusaasta kaugusel, kuna see on kaugenenud Universumi paisumise tõttu.

Kõige „kaugem“ ketagalaktika, mis on tänapäeval avastatud, on nimega DLA0817g. See avastati Tšiilis Atacama kõrbes paikneva raadioteleskoobisüsteemiga ALMA Marcel Neeleman ja tema kolleegide poolt Saksamaalt Heidelbergist Max Plancki astronoomiainstituudist. Avastatud ketagalaktika pöörleb peaaegu sama kiiresti kui Linnutee galaktika ja see tekkis „kõigest“ 1,5 miljardit aastat pärast Universumi Suurt Pauku.

Esimesed tähed tekkisid umbes 100 miljonit aastat pärast Suurt Pauku.

- Kuid on ka väga palju väikseid musti auke, mis jäävad iseseisvateks ja seetõttu koonduvad need kettana ümber galaktikate. Seal toimivad need tumeainena. Universumis võivad eksisteerida isegi mustade aukudega galaktikaid.

Maast umbes 300 miljoni valgusaasta kaugusel asub galaktika nimega Dragonfly 44 ehk Kiil 44, mille kogumass on umbes samasugune kui Linnutee galaktikal, kuid tähti on seal umbes sada korda vähem ja tumeda aine osakaal galaktika massist on sellel lausa 99,99 protsenti. Tegemist on praktiliselt tumeda aine galaktikaga ja tõestab kindlalt tumeda aine olemasolu Universumis.

Astronoomilised vaatlused kinnitavad, et galaktikate vaheline ruum ei ole tegelikult tühi, vaid see on täis tumedat ainet. Tumeaine asub enamasti galaktika ketast ümbritsevas sfäärilises halos ehk galaktika kettast väljaspool ( galaktika halos ). Tumeainet on leitud ka Linnutee galaktika keskme osas.

2. Carlos Argüelles ja tema töörühm Argentinast La Plata Riigiülikoolist on välja käinud idee, et ülisuured mustad augud võisid tekkida tumeainest. Tema meelest jõudis tekkiva galaktika keskel tiheneda tumeaine enne tavalist ainet. Algse “tumeaine-galaktika” moodustas tihe tumeainetuim, mida ümbritses hõre tumeainepilv. Kuid lühikese aja jooksul kukkus tumeainetuim oma enda raskuse tõttu kokku äärmiselt tihedaks “objektiks”, millest omakorda moodustuski ülisuur must auk. Ülisuured mustad augud galaktikate keskel tekkisid juba 800 miljonit aastat pärast Universumi Suurt Pauku. Argüellesi teooriast saab järeldada ka seda, et vähemalt suur osa tänapäeval leiduvast Universumi tumeainest moodustavadki tegelikult galaktikakeskmete mustad augud. Universumi tumeaine tundub kogunevat galaktikatesse ja nende ümbrusse, kuhu on koondunud ka tavalist ainet.



3. Mõned teised tumeaine teooriad peavad keskseks teguriks hoopis inflatsiooni, mis põhjustas massi ebahühtlast jaotumist kogu Universumis ja seeläbi tekkisid väikesed mustad augud sinna, kuhu oli koondunud kõige rohkem ainet. Sellise teooria järgi võimendas inflatsioon kvantfluktuatsioone, mis võimaldas moodustada algseid musti auke. Mustade aukude kogumite tiheduse fluktuatsioonid võisid moodustuda juba Universumi infaltsiooni lõpus. Algsete mustade aukude kobarad sisaldasid selliseid musti auke, mille massid võisid olla Päikesest 100 – 10 000 korda suuremad. Need kobarad suurenesid Universumi paisumise tõttu ja nendes sisalduvad mustad augud võisid juhtida galaktikate ja galaktikakobarate tekkimist. Kuid käesolev tumeda aine füüsikateooria ei pea Universumi inflatsiooni keskseks teguriks, kuna kogu Universumi materiaali pidi tekkima pärast Suurt Pauku ja pärast inflatsiooni. See tähendab seda, et väikesed mustad augud võisid tekkida Universumi esimestel sekunditel pärast Suurt Pauku ( ilma inflatsiooni rollita ) lihtsalt ülisuure tiheduse ja selle ebahühtlase jaotuse tõttu Universumis. Selles osas need kaks erinevat teooriat omavahel kattuvad.

Kahe erineva teooria kattuvuse all on mõeldud seda, et esimestel sekunditel pärast Suurt Pauku võisid algosakeste tihe udu tihedamad alad koheselt kokku variseda nende oma gravitatsioonijõu tõttu, põhjustades algsete ehk ürgsete mustade aukude tekkimise. Universumi inflatsioon ei mänginud siin mingit rolli ehk ei olnud põhjustajaks aine tiheduse erinevuse tekkimisele Universumis kohe vahetult pärast Suurt Pauku.

4. Mustad augud sobiksid väga hästi kirjeldama Universumi tumeainet, kuna mustad augud interakteeruvad tavalise ehk nähtava ainega ainult gravitatsiooniliselt, nad ei kiirga valgust ega muid elektromagnetilisi laineid ( ainult neelduvad ) ja nad on ka väga massiivsed taevakehad. Mustad augud ( eriti mikroskoopilised mustad augud ) ei ole „mustal taeva laotusel“ ka näha.

Suur must auk kiirgab elektromagnetlaineid ainult siis kui ta parajasti imeb endasse ainet. Kuid väga väikeste mustade aukude korral ei pruugi see nii olla. Kusjuures tumeaine interakteerumist tavalise ainega ei olegi tegelikult teleskoopidega ( ega isegi osakeste kiirenditega ) otseselt vaadeldud. Teatakse AINULT seda, et teadaolevast massist ei piisa meie galaktika tähtede kiiruste seletamiseks.

5. Kui väga väikese ürgse musta augu mass on „hinnanguliselt“  $5 \cdot 10^{11}$  kilogrammi, siis sellise massiga must auk aurustuks täielikult umbes 15 miljardi aastaga, mis on natuke rohkem kui Universumi praegune vanus ( 13,7 või 13,8 miljardit aastat ). Selline aurustumisaeg oleks täiesti piisav selleks, et Universumis saaksid eksisteerida veel ka tänapäevalgi ürgsed mustad augud, mis moodustaksid tumeda aine.

Tumeainet moodustavate ürgsete mustade aukude suuruseid ei oleks võimalik praegu astronoomiliste vaatluste järgi objektiivselt hinnata. Nende tekkimise käigus pärast Universumi Suurt Pauku võisid väga väikesed ( ehk mikroskoopilised ) mustad augud juba esimestel sekunditel ära aurustuda, kuid veidi suuremad võisid omavahel liituda ja seega kasvada. Kuna aine tihedus oli Universumi esimestel sekunditel ülisuur, siis järelikult võis ka väikeste mustade aukude arvukus ühes kuupmeetris olla väga suur, mistõttu said need väga kiiresti omavahel liituda ja kasvada. Mida suuremaks must auk kasvab, seda pikem on tema eluiga ehk aurustumisaeg. Tumeainet moodustavate ürgsete mustade aukude suurused võivad nüüdisajal vägagi

varieeruda – väga väikestest kuni väga suurteni. Nende tegelikke suurusi ei ole võimalik täpselt hinnata.

Kõige väiksema massiga teadaolev must auk on umbes kaks korda suurema massiga kui kõige suurem teoreetiliselt võimalikuks peetav neutrontäht.

6. Tänapäeva arvutisimulatsioonid näitavad üsna veenvalt, et Universumi suuremastaabiline struktuur ( galaktikaparved ) ei saanud tekkida ilma tumeaineta. Universumi suuremastaabiline struktuur sai hakata tekkima juba 300 000 aastat pärast Suurt Pauku. Astronoomilised vaatlused kinnitavad, et reliktkiirgusel on olemas oma struktuur, mis tähendab seda, et reliktkiirgus ei ole igast suunast täpselt ühesugune. Selle järgi pidid „tiheduse fluktuatsioonid“ tekkima juba 300 000 aastat pärast Suurt Pauku ja struktuurid 400 000 aastat hiljem. Kõik see kinnitab tumeaine vajalikkust Universumi mõistmisel ja selle olemasolu Universumis. Näiteks galaktikad, mis asuvad meist 11,5 miljardi valgusaasta kaugusel, hakkasid tekkima just tumeaine filamentide ristumiskohtades. Seda näitavad astronoomilised vaatlused ( ALMA ).

Väga Suure Teleskoobiga tehtud astronoomilised vaatlused näitavad, et galaktikatele ja nende arengule oli tumeaine mõju 10 miljardi aasta eest palju kordi väiksem kui nüüdisajal, kuna tumeaine sisaldus oli nendes palju väiksem kui praegu. Tumeaine kogunes „klompidesse“ aeglasemalt kui tavaline nähtav aine.

Astronoomilised vaatlused kinnitavad, et reliktkiirgusel on olemas oma struktuur, mis tähendab seda, et reliktkiirgus ei ole igast suunast täpselt ühesugune ja see viitab „tiheduse fluktuatsioonidele“ 300 000 aastat pärast Suurt Pauku. Selle ülitähtsa avastuse tegid teadlased nimedega John C. Mather ja George F. Smoot ning neile anti selle eest 2006. aastal Nobeli preemia.

Kosmilises mikrolainetaustas on nähtud võnkumisi, mis kalduvad Gaussi jaotusest kõrvale. Seda on mõistetud tumeaine avaldumisena kosmilises mikrolainetaustas.

7. Erinevad „modifitseeritud gravitatsiooniteooriad“ ( ehk MOND-id ) ei saa seletada Universumi tumeainet, kuna sellised füüsikateooriad ei kirjeldaks siis enam Universumi kosmoloogiat tervikuna ega Universumi suuremastaabilise struktuuri tekkimist Universumi varajases arengustaadiumis.

Maast umbes 65 miljoni valgusaasta kaugusel asub ülihajune galaktika nimega NGC1052-DF2, milles ei ole peaaegu üldse tumedat ainet. See aga välistaks „modifitseeritud gravitatsiooniteooriate“ kasutamise võimalust tumeda aine seletamiseks.

8. „Massiivsed kompaktsed haloobjektid“ ehk MACHO-d ei suuda samuti seletada Universumi tumeaine olemust, kuna Linnutee-lähedaste galaktikate, Suure ja Väikese Magaelhäesi pilvede pikaaegsel uurimisel ei ole leitud mitte ühtegi massiivset osakest, mis oleksid põhjustanud „mikroläätseid“. MACHO-d võivad olla väga halvasti nähtav tavaline aine, tolmu- või gaasipilved, „kodutud“ planeedid, neutrontähed, „tavalised“ mustad augud või liiga hämarad pruunid ja punased kääbustähed.

Galaktikate vahelises ruumis on tavaline aine koondunud ülisuurtesse kuuma

ja külma gaasi „filamentidesse ehk joomedesse“. Kuum filament on rohkem kui 100 000 kelvini suuruse temperatuuriga ja külm filament on sellest väiksema temperatuuriga. Astronoomias nimetatakse neid viirge „soojaks kuni kuumaks galaktikate vaheliseks aineks“ ja need aineviirud on optilistele teleskoopidele nähtamatud. Kuid osa neid moodustavast soojast gaasist on võimalik tuvastada ultraviolettkiirguse vaatlusega. Sellise WHIM-i kuumgaasilise komponendi olemasolu galaktikate vahelises ruumis seletab ainult mõningal määral ära ka tumeda aine esinemise või lihtsalt puuduoleva aine Universumis.

„Gravitatsiooniläätš“ tekib siis, kui mingisugune väga massiivne keha või kehade kogum asub vaatleja ja kauge valgusallika vahel ning oma gravitatsioonijõuga kallutab ta allikast tuleva valguse levimise suunda. Selle tagajärjel võib allika kujutis võimenduda ja/või muunduda.

Universumi tumeaine olemasolu üks kindlamaid tõendeid on rõngakujuline massijaotus galaktikaparves 5 miljardi valgusaasta kaugusel. Gravitatsioon painutab valgust galaktikaparve ümber. Niimoodi „nähakse“ tumeainet isoleerituna teistest struktuuridest.

9. Kui mustade aukude massid on 5 – 15 Päikese massi, siis nende päritolu saab olla ainult plahvatavadelt tähtedelt ehk supernoovadelt. Kui mustade aukude massid on suuremad kui 15 Päikese massi ( ülimassiivsete mustade aukude massid on näiteks Päikese massist umbes tuhandeid kuni miljardeid kordi suuremad ), siis need on tekkinud enamasti väiksemate mustade aukude liitumisel või mateeria imendumise tulemusena. Kui aga avastatakse selline must auk, mille mass on alla 5 Päikese massi, siis peab see pärinema suure tõenäosusega Universumi Suurest Paugust ja see oleks juba väga kindel kaudne tõend tumeaine teooriale, mis ütleb, et selle on moodustunud ürgsed mustad augud.

Mustad augud võivad olla Päikesest 5 – 15, 10 – 30 ja 100 tuhat – 10 miljardit korda raskemad. Kuid 66 miljardit Päikese massi on praegu teadaolevalt raskeimate mustade aukude mass ja need asuvad enamasti hiigelgalaktikate keskmes. Mõned astronoomid ennustavad isegi 100 miljardi Päikese massiga musti auke. Sellise massiga mustad augud saavad tekkida ainult väiksemate mustade aukude liitumise tulemusena, mille arvukus peab olema väga väga suur. Väiksemate mustade aukude ülisuur arvukus viitaks sellele, et need mustad augud peaksid tulenema tumeainest, mis ise võibki koosneda ( ürgsetest ) mustadest aukudest. Tumeainet on ju palju rohkem kui tavalist ehk nähtavat ainet. Mitte mingisugust muud seletust ei ole võimalik anda sellele, et kuidas saab üsna lühikese kosmoloogilise ajaperioodi jooksul tekkida 40 miljardi Päikese massiga ülimassiivne must auk miljardite valgusaastate kaugusel. Mustad augud, mis moodustaksid tumeaine, oleks sellele parim seletus.

Päikesest 40 miljardit korda suurema massiga must auk on „nimega“ S5 0014+81. Selle sündmuste horisondi diameeter on 37 Pluuto orbiiti ja eluiga oleks Hawkingi kiirguse järgi  $1,342 \cdot 10^{99}$  aastat.

Päikesest 66 miljardit korda suurema massiga must auk on kvasar nimega TON 618. Selle sündmuste horisondi diameeter on rohkem kui 40 Neptuuni orbiiti, täpsemalt 390 miljardit km.

10. Enamasti on arvatud, et Universumi tumeaine moodustavad sellised nõrgalt interakteeruvad massiivsed elementaarosakesed, mida nimetatakse WIMP-deks. Need tundmatud elementaarosakesed kuuluksid mittebarüonide aine klassi, mis interakteeruksid barüonainega ehk tavalise ainega ainult gravitatsiooni ja natuke ka nõrga tuumajõu kaudu. Nendeks osakesteks on pakutud „aksionit“, „neutralinot“, „Kaluza-Kleini“ nimelisi osakesi, „tumefootoneid“, „gravitinosid“, „photinosid“ jne jne. Kuid mitte ühtegi nendest välja pakutud elementaarosakestest ei ole eksperimentaalselt tuvastatud ja üsna vähe on usutav, et seda juhtuks tulevikus. Väga oluline on siinkohal mõista seda, et kui tumeaine peakski koosnema senitundmatutest elementaarosakestest, siis peaks see välja tulema elementaarosakeste-füüsika standardmudelist ( ehk tegemist ei saa olla standardmudelist väljaspool olevate osakestega ) ja neid osakesi peaks suutma ka avastada tänapäeva võimsaimates osakeste kiirendites. Kuna kumbagi neist ei ole suudetud teostada kümnete aastate jooksul, siis on võimalik järeldada, et tumeaine elementaarosakesi ei ole lihtsalt olemas.

Neutriinod on levinud kogu Universumis ja seetõttu on ka neid elementaarosakesi pakutud tumeaine olemuse seletamiseks. Kuid neutriinod ei saa kuidagi olla tumeaine osakesed, kuna need osakesed on liiga väikese massiga ( enamasti massid neutriinodel siiski üldse puuduvad ) ja need liiguvad peaaegu alati ja kõikjal valguse kiirusega  $c$ .

Tumeaine võib koosneda „variosakestest“ ja „variaatomitest“. Variaatomi moodustaks variprooton ( võib olla ka varineutron ) ja varielektron. Sellise arusaama järgi võivad „varifootonid“ tekkida katsetes tulistada elektronid metalli sisse. Need peaksid välkkiirelt lagunema elektronide ja positronide paariks. Kuna mitte ükski eksperimentaalne katse ei ole seda näidanud, siis järelikult tumeaine ei saa siiski koosneda „variosakestest“.

Supersümmeetria teooria, mis on elementaarosakestefüüsika standardmudeli edasiarendus, ennustab sellise osakese olemasolu, mis sobiks väga hästi tumeaine seletamiseks, kuna see olevat elektrilaenguta stabiilne osake ning annab just õige kosmoloogilise konstandi väärtuse ( kirjeldamaks omakorda Universumi tumeenergiat ). Kuid supersümmeetria teooria kehtivust ei ole katseliselt tõestatud ja pealegi ei sobi see ka ajas rändamise füüsikateoorias kirjeldatud interaktsioonide füüsikateooriaga sisuliselt kokku, mis vihjab sellele, et supersümmeetria teooriat ei ole Universumi materia kirjeldamiseks tegelikult vaja. Mitte ühtegi supersümmeetria poolt ennustatavat osakest ei ole tänapäeva maailma võimsaimates osakeste kiirendites tuvastatud ja on vähe usutav, et seda tehakse tulevikus.

Supersümmeetria ei sobi ajas rändamise füüsikateoorias kirjeldatud interaktsioonide füüsikateooriaga sisuliselt kokku, mis vihjab sellele, et supersümmeetriat ei ole Universumi materia kirjeldamiseks tegelikult vaja. See tähendab seda, et ajas rändamise füüsikateooria kirjeldab Universumit ( sealhulgas ka „sümmeetria spontaanset rikkumist“ ) nii, et supersümmeetriat ja elementaarosakeste standardmudeli-välist füüsikat ei ole otseselt vaja ( ehk neid pole lihtsalt olemas ).

11. USA Browni Ülikooli füüsikud ( Savvas Koushiappas ja Alex Geringer ) seadsid Universumi tumeaine elementaarosakese massile teoreetilise alampiiri. Selle järgi peab tumeaine osakese mass olema suurem kui 40 GeV. Tänapäeva osakeste superkiirendites on

avastatud selliseid osakesi, mille massid on vahemikus 7 – 12 GeV, mis on alla Browni Ülikooli füüsikute seatud piiri. See tähendab nüüd seda, et tänapäeva osakeste superkiirendid oleksid võimelised sellise arusaama järgi tuvastama tumeaine osakesi, kuid kuna seda pole ikka veel suudetud teostada, siis ilmselt tumeaine elementarosakesi ei olegi tegelikult olemas.

12. Kuna tumeaine on niivõrd mõistatuslik nähtus kogu Universumis, siis on arvatud, et selle põhjustajaks võiksid olla Universumi teised dimensioonid või tumeaines avalduks teise Universumi ( s.t. paralleeluniversumi ) füüsiline mõju meie Universumile. Sellised stringiteooriast ja multiversumi teooriast tulenevad „eksootilised“ või „ulmelised“ teooriad on siiski tänapäeva fundamentaalfüüsika alusreeglitest liiga kaugel ehk liiga äärmuslikud ja seetõttu ei sobi sellised „hinnangud“ käesoleva füüsikateaduse raamidesse. Näiteks stringiteooriast tulenevad teised dimensioonid ei kattu ajas rändamise füüsikateooria olemusega kokku.
13. Kogu eelnev teaduslikult argumenteeritud mõtteanalüüs viib sellisele põhimõttelisele järeldusele, et ükskõik kui võimsad on osakeste kiirendid, ei suuda need tumeaine osakesi avastada, sest neid pole lihtsalt olemas. See tähendab seda, et ükskõik kui sügavale materiasse me ka vaataksime, tumeaine osakesi ei paista välja mitte kusagilt. Sellise „ennustuse“ või „hüpoteesi“ lõplikku õigsust näitab ainult tulevik.

Kui maailma kõige võimsaimates osakeste kiirendites ei avastata tulevikus mitte ühtegi elementarosakest, mis kirjeldaksid Universumi tumeainet, siis ainus võimalus jääbki see, et tumeaine moodustavad ürgsed mustad augud.

Kui tulevikus avastatakse selline must auk, mille mass on alla 5 Päikese massi, siis peab see pärinema suure tõenäosusega Universumi Suurest Paugust ja see oleks juba väga kindel kaudne tõend tumeaine teooriale, mis ütleb, et selle on moodustunud ürgsed mustad augud.

Täna seaks päevaks on avastatud gravitatsioonilained, mis registreeriti ( LIGO ) kahe musta augu kokkupõrkel miljardite valgusaastate kaugusel. Põrkunud mustade aukude massid olid vastavalt 29 ja 36 Päikese massi, mis on peaaegu kaks korda suuremad kui 15 Päikese massi. Nii suured mustad augud „võisid“ tekkida väiksemate mustade aukude liitumisel, mis omakorda „võisid“ pärineda Suurest Paugust.

Kusjuures tänapäeva maailma võimsaimates osakeste kiirendites ( näiteks CERN-is ) ei ole avastatud mikroskoopilisi musti auke ega pole suudetud neid ka tekitada, kuna seadmetes kasutatavad energiad jäävad selleks lihtsalt liiga väikesteks.

## 1.11 Ajas rändamise ja Universumi kosmoloogilise paisumise omavahelise seose füüsikaline ja matemaatiline süva-analüüs

Kõikide kehade liikumised Universumis on suhtelised ehk relatiivsed. See tähendab seda, et mistahes keha liikumist kirjeldatakse mingisuguse taustsüsteemi suhtes. Näiteks inimese liikumine jõe peal sõitval laeva tekil on relatiivne ( sest inimese liikumine toimub laeva suhtes ), kuid laeva liikumist ( koos reisijaga ) jõe kalda suhtes nimetatakse kaasaliikumiseks. Reisija liikumist jõe kalda suhtes nimetatakse aga absoluutseks liikumiseks.

Selline kehade liikumise relatiivsuspriinip esineb ka erirelatiivsusteoorias. Näiteks inimene ei ole võimeline reaalselt jooksuma ( s.t. iseseisvalt liikuma ) 200 km/h paigalseisva maa suhtes. Kui aga inimene jookseb rongis ühest otsast teise rongi liikumise suunas, mis liigub maa suhtes umbes 180 km/h, siis maa suhtes jooksebki inimene 200 km/h. Rongi suhtes on inimese liikumiskiirus aga kõigest 20 km/h. Ei ole põhimõtteliselt vahet, et mil viisil on teostatud inimese liikumine maa suhtes. Inimene liigub rongi suhtes 20 km/h, kuid lõppkokkuvõttes liigub inimene maa suhtes ikkagi 200 km/h. See tähendab seda, et inimesel piisab liikuda kiirusega ainult 20 km/h, et saavutada enda kiiruseks 200 km/h. Ülejäänud „töö“ teevad ära „kõrvaljõud“, mis antud näites on rongi liikumine maa suhtes.

Kui inimene liigub ruumipunktist A ruumipunkti B, siis kulub sellele alati mingisugune ajavahe- mik ja läbitakse alati mingisugune ulatus ruumis. Vaatame näiteks sellist juhtu, mil mõnes korterelamus või majas elav inimene sooritab asukoha muutuse ruumis mingisuguse aja perioodi vältel. Näiteks kui inimene liigub köögist elutuppa, siis mõne aja pärast kööki tagasi tülles ei ole tegelikult see köök nõ. „päris sama“ või „samal kohal“ mis ta oli enne. Seda sellepärast, et kõik Universumis on pidevas liikumises. Enne kui inimene jõudis elutoast tagasi kööki on see köök läbinud ruumis juba tuhandeid või isegi miljoneid kilomeetreid ( sõltuvalt sellest kui kaua on inimene köögist ära olnud ). Ja mitte ainult köök ei ole läbinud tohutuid vahemaid ruumis, vaid ka elutuba, inimene, maja jne. Seda sellepärast, et me kõik liigume kaasa planeedi Maa pöörlemisega ümber oma kujuteldava telje, liigume kaasa ka Maa tiirlemisega ümber Päikese, Päikesesüsteemi tiirlemisega ümber Linnutee galaktika tsentri, Galaktika liikumisega maailmaruumis ja siis kõige lõpuks Universumi pideva paisumisega. Absoluutselt kõik kehad Universumis liiguvad ( ainuüksi juba Universumi paisumise tõttu ). Sellest tulenevalt on olemas nõ. näilised ja tõelised endised ( ja ka tulevased ) asukohad ruumis. Näiteks kui inimene liigub köögist elutuppa ja mõne aja möödudes naaseb ta tagasi kööki, siis see köök ( nagu ka kõik ülejäänud Universumi aegruumi piirkonnad ) ei ole täpselt sama ehk ei ole ruumis täpselt samas asukohas. Kõik kehad Universumis liiguvad kaasa Universumi üldise liikumisega. Universum on pidevas muutumises ja liikumises. Köök on ruumis liikunud inimese äraoleku ajal ( tegelikult kogu aeg ) vähemalt miljoneid kilomeetreid. Kui aga inimesel on siiski soov tagasi tulla nõ. „tõelisesse endisesse“ kööki ( mitte näilisesse endisesse kööki ), kust ta mõni aeg tagasi lahkus elutuppa, peab ta sellisel juhul aegruumist „lahti pääsema“, mis kisub pidevalt temaga ( ja kõige muuga ) kaasa. Kuid kõõgi tõeline endine asukoht on ruumis jäänud väga kaugele ( ja ka pidevalt kaugeneb Universumi kosmoloogilise paisumise tõttu ). Näiteks saja aasta tagune planeet Maa on „ruumis“ väga kaugele jäänud. Kõõgi „näiline“ endine asukoht ruumis eksisteerib alati siis kui me seda mistahes ajahetkel külastame. Oluline järeldus on see, et mitte näiliste vaid tõeliste endiste ( ja ka tulevaste ) asukohtade külastamine „ruumis“ õngi tegelikult juba oma olemuselt ajas rändamine.

Ja nii õngi võimalik liikuda ruumis „kahte erinevat moodi“:

1. Liikudes näilistesse endistesse ( või tulevastesse ) asukohtadesse ruumis. Sellisel juhul ajas rändamist ei avaldu. Esineb ainult „tavapärane“ Universumis liikumine, mida me kõik igapäevaselt teeme. Näiteks Maa kaaslase Kuu orbiidil esineb pretseesseerimise periood, mis tähendab seda, et Kuu veeru- ja tõususõlmed jõuavad tagasi orbiidi suhtes ( mitte

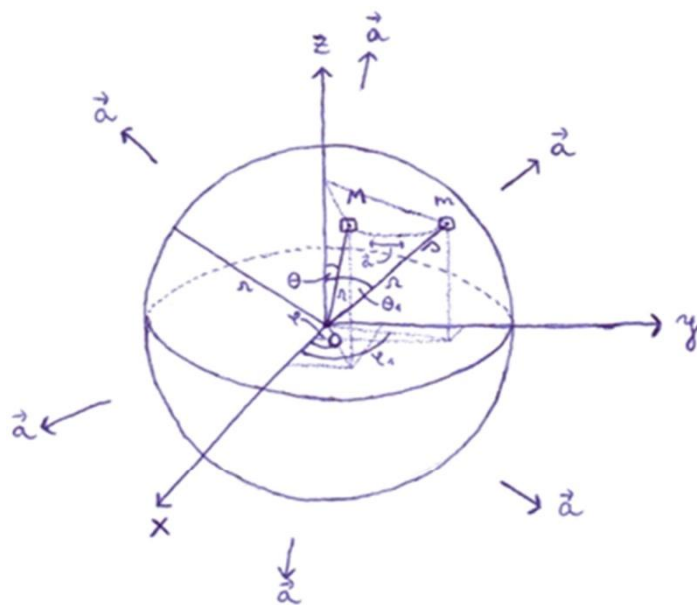
Universumi suhtes ) täpselt samasse punkti iga 18,6 aasta tagant. Seda perioodi nimetatakse saarose tsükliks.

2. Liikudes tõelistesse endistesse või tulevastesse asukohtadesse ruumis. Sellisel juhul avaldub ajas rändamine, sest kehtib ka erirelatiivsusteooriast tuntud printsiip aja ja ruumi üksteise lahutamatusel. Ajas on võimalik rännata minevikku ja tulevikku.

Siinkohal ilmneb ka põhjus, et miks me ei saa ruumis tavapäraselt liikudes ka ajas rännata. Seda sellepärast, et aegruumi piirkondade tõelised endised asukohad ruumis eemalduvad meist pidevalt ( Universumi paisumise tõttu ) ja seepärast jäävad need meile lihtsalt kättesaamatuks. Kõik kehad Universumis on liikumas olekus. Näiteks planeet Maa teeb ühe täispöörde ümber oma kujuteldava telje ühe ööpäeva jooksul. Seetõttu vahelduvadki Maal päevad ja ööd. Kõik planeedid, tähed, kuud ja teised kosmilised kehad Universumis pöörlevad ümber oma telje ja pöörlemise käigus nad ka liiguvad avakosmoses. Näiteks Maa teeb aastaga ühe täistiiru ümber Päikese. Samal ajal tiirleb kogu Päikesesüsteem ümber Linnutee Galaktika tsentri. Galaktikad moodustavad parvesid, mis liiguvad üksteisest eemale. Mida kaugemal on galaktika parv, seda kiiremini see meist kaugeneb. Kogu Universum tervikuna paisub ja seda Suurest Paugust alates.

Eespool nägime seda, et Universum paisub tegelikult nõ. „meetriliselt“. See tähendab seda, et galaktikad „ise“ tegelikult ei liigu, vaid ainult Universumi ruumala suureneb ajas. See ongi „meetiline paisumine“. Näiteks kahe galaktika parve kaugenemine üksteisest on nagu kahe punkti vahelise kauguse suurenemine ruumis, mis esineb ka näiteks gravitatsiooniväljades ( ehk kõveras aegruumis ): kahe punkti vaheline kaugus ruumis suureneb üha enam mingisuguse taevakeha gravitatsioonitsentrist eemaldumisel. Seepärast kirjeldatakse Universumi paisumist ka meetrikaga. Seda nimetasime eelnevalt Universumi meetriliseks paisumiseks või Universumi paisumise meetriliseks mudeliks.

Kuid Universumi ruumala paisumist kujutatakse väga sageli ette just kera ruumala paisumisena. Seejuures kera pinnal olevad kaks punkti ( oletame seda, et need on galaktikad ) kaugenevad üksteisest kera paisumisel. Peab märkima ka seda, et Universumi paisumisel ei ole keset, kuid kera paisumisel on see aga olemas. See on ka ainus erinevus. Antud kera paisumist nimetatakse füüsikas Universumi klassikaliseks paisumiseks või Universumi paisumise klassikaliseks mudeliks.



Joonis 11 Universumi paisumine kui kera paisumine.

Üleval olev joonis kujutab endast Universumi paisumise klassikalist mudelit. Kera kujutab kogu meie teadaolevat Universumit ja kera pinnal olevad „kehad“  $M$  ning  $m$  on näiteks mingisugused suvalised galaktikad. Kera ( ehk Universum ) paisub ajas kiirenevalt ( kiirendusega  $a$  ), mis on ühtlane. Joonis 13 on nagu „ülesvõte“ ajahetkel  $t_1$ . Kera raadius  $r$  suureneb ajas pidevalt. Kera paisumisel kehad ( ehk galaktikad )  $M$  ja  $m$  eemalduvad üksteisest samuti kiirendusega  $a$ . Kera paisumiskiirendus on samaväärne kehade  $M$  ja  $m$  teineteise eemaldumiskiirendusega kera pinnal. Kehad  $M$  ja  $m$  „ise“ kera pinnal ei liigu, vaid nende üksteisest eemale liikumist põhjustab kera paisumine. Antud mudelist on näha seda, et kehade  $m$  ja  $M$  omavahelise kauguse ja kera raadiuse suhe ajas ei muutu. Kehad  $m$  ja  $M$  liiguvad ka üksteise suhtes eemale. Geomeetriast on teada, et kera raadiuse ja ringjoone suhe ajas ei muutu, kui ringjoon ( ja seega selle raadius ) peaks ajas suurenema või vähenema.

Kera lõiget kera keskpunkti läbiva tasandiga nimetatakse kera suurringiks. Selle kera suurringi raadius  $r$  on ka ühtlasi kogu kera raadius ja see avaldub valemiga:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Kolmemõõtmelises ruumis oleks selle valemi kuju aga järgmine:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Keha  $M$  sfäärilised koordinaadid ajahetkel  $t_1$  on:

$$\begin{cases} x'' = r \sin \theta \cos \varphi \\ y'' = r \sin \theta \sin \varphi \\ z'' = r \cos \theta \end{cases}$$

Keha  $m$  sfäärilised koordinaadid ajahetkel  $t_1$  on:

$$\begin{cases} x' = r \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \\ y' = r \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ z' = r \cos \theta_1 \end{cases}$$

Kuna kera paisub ajas kiirenevalt, siis saame kiirenduse  $a$  valemiks järgmise avaldise:

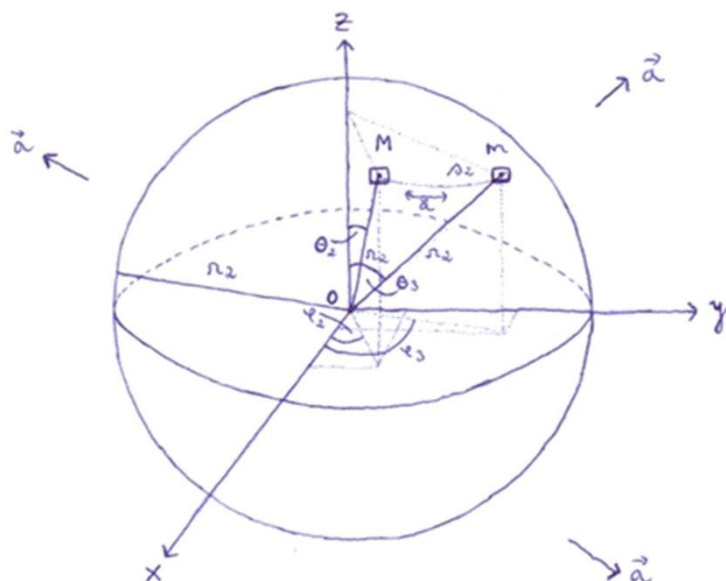
$$a = \frac{r}{t^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t^2}$$

Saadud valem kirjeldab kera paisumise kiirendust  $a$ . Kuna kera paisumise kiirendus ja kehade  $M$  ning  $m$  üksteise eemaldumise kiirendused on samaväärsed, siis seega valem kehtib ka kehade  $M$  ja  $m$  teineteise eemaldumise kiirenduseks. Kera paisumise kiirus suureneb ajas ühtlaselt. Järelikult mida kaugemal on kehad ( ehk galaktikad )  $M$  ja  $m$  üksteisest, seda kiiremini nad üksteisest ka eemalduvad. Kehade  $M$  ja  $m$  omavaheline kaugus  $s$  näitab väikseima kaare pikkust mööda kera pinda, mille peal kehad  $M$  ja  $m$  asuvad. See ei näita kehade vahelist ühendavat sirget, mis jääb kera ruumala sisse.

Kera paisumine on Universumi paisumise mudeliks. Tegelikult ei ole Universumil paisumiskeset ega „ääri“. Kui vaadata neid kera paisumise jooniseid, siis tegelikult kera ( Universum ) paisumiskese ehk paisumistsenter kui punkt „täidab kogu ruumi“. Neid punkte on lõpmata palju. Niimoodi paisubki Universumi ruum ajas ühe korraga – ei ole keset, ääri ega



mingisugust eelistatud suunda. Kogu Universumi ruumala suureneb ajas kõikjal ühe korraga.



Joonis 12 Kera paisumisel kehade  $m$  ja  $M$  koordinaadid muutuvad.

Nagu jooniselt 14 näha – on kera paisunud  $r_2 - r$  võrra ja kehade  $M$  ning  $m$  omavaheline kaugus on suurenenud  $s_2 - s$  võrra. Tegemist on ajahetkega  $t_2$ . Kera raadius on suurenenud ajas  $r_2 - r$  võrra. Universum ( ehk kera  $K$  ) on paisunud ja galaktikad (  $M$  ja  $m$  ) on üksteisest eemaldunud.

Kera raadius  $r$  ajahetkel  $t_2$  on:

$$r_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Keha  $M$  sfäärilised koordinaadid ajahetkel  $t_2$  on:

$$\begin{cases} x_2 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ y_2 = r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \\ z_2 = r_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

Keha  $m$  sfäärilised koordinaadid ajahetkel  $t_2$  on:

$$\begin{cases} x_3 = r_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_3 \\ y_3 = r_2 \sin \theta_3 \sin \varphi_3 \\ z_3 = r_2 \cos \theta_3 \end{cases}$$

Kera ruumala suurenes ajas. Kehade  $M$  ja  $m$  asukohad ristkoordinaadistiku suhtes on ajahetkel  $t_2$  teistsugusemad kui ajahetkel  $t_1$ . Nii samuti ka kera raadiuse pikkus. Järgnevalt võrdleme omavahel ajahetki  $t_1$  ja  $t_2$ .

Kera raadiuse  $r$  pikkus on ajahetkel  $t_1$  erineva pikkusega kui ajahetkel  $t_2$ :

$$r \neq r_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \neq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

Keha  $M$  sfäärilised koordinaadid on ajahetkedel  $t_1$  ja  $t_2$  erinevad:

$$t_1 \begin{cases} x'' = r \sin \theta \cos \varphi \\ y'' = r \sin \theta \sin \varphi \\ z'' = r \cos \theta \end{cases}$$

$$t_2 \begin{cases} x_2 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ y_2 = r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \\ z_2 = r_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

ehk matemaatiliselt on seda võimalik kirja panna ka nii:

$$\begin{aligned} x'' &= r \sin \theta \cos \varphi \neq x_2 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ y'' &= r \sin \theta \sin \varphi \neq y_2 = r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \\ z'' &= r \cos \theta \neq z_2 = r_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Kuid keha m sfäärilised koordinaadid on ajahetkedel  $t_1$  ja  $t_2$  samuti erinevad:

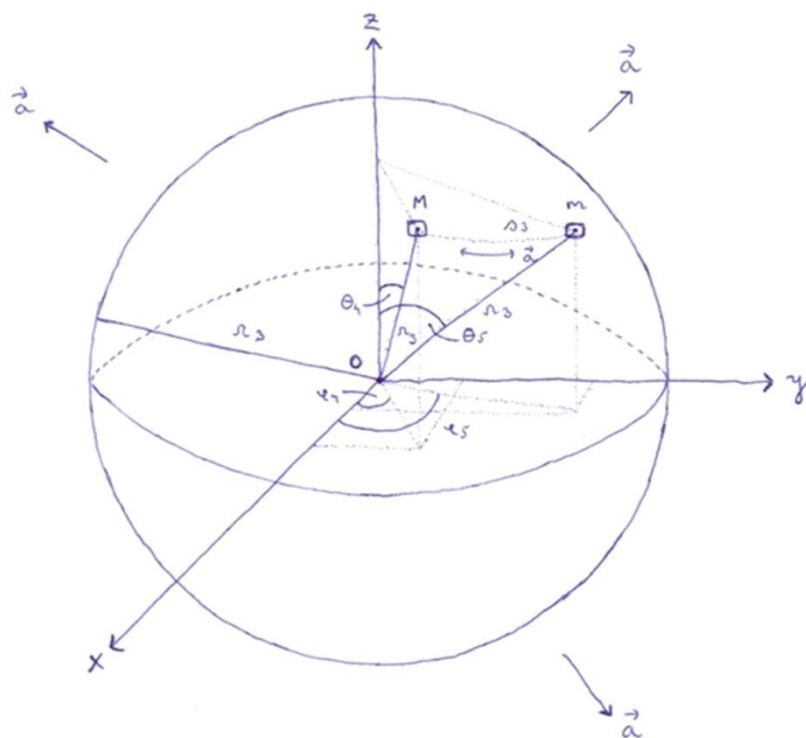
$$t_1 \begin{cases} x' = r \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \\ y' = r \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ z' = r \cos \theta_1 \end{cases}$$

$$t_2 \begin{cases} x_3 = r_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_3 \\ y_3 = r_2 \sin \theta_3 \sin \varphi_3 \\ z_3 = r_2 \cos \theta_3 \end{cases}$$

mida on samuti võimalik matemaatiliselt väljendada järgmiselt:

$$\begin{aligned} x' &= r \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \neq x_3 = r_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_3 \\ y' &= r \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \neq y_3 = r_2 \sin \theta_3 \sin \varphi_3 \\ z' &= r \cos \theta_1 \neq z_3 = r_2 \cos \theta_3 \end{aligned}$$

ning seda sellepärast, et kehade M ja m sfäärilised koordinaadid on kera paisumise tõttu ajas erinevad.



Joonis 13 Kera paisub ajas pidevalt.

Nagu jooniselt 15 näha – on kera paisunud  $r_3 - r_2$  võrra ja ka kehade M ja m omavaheline kaugus on suurenenud  $s_3 - s_2$  võrra. Tegemist on ajahetkega  $t_3$ . Kera raadius on suurenenud ajas  $r_3 - r_2$  võrra. See tähendab seda, et Universum on veelkord paisunud ja galaktikad M ja m üksteisest eemaldunud.

Kera raadius  $r$  ajahetkel  $t_3$  on:

$$r_3 = \sqrt{x_{11}^2 + y_{11}^2 + z_{11}^2}$$

Keha M sfäärilised koordinaadid ajahetkel  $t_3$  on:

$$\begin{cases} x_4 = r_3 \sin \theta_4 \cos \varphi_4 \\ y_4 = r_3 \sin \theta_4 \sin \varphi_4 \\ z_4 = r_3 \cos \theta_4 \end{cases}$$

Keha m sfäärilised koordinaadid ajahetkel  $t_3$  on:

$$\begin{cases} x_5 = r_3 \sin \theta_5 \cos \varphi_5 \\ y_5 = r_3 \sin \theta_5 \sin \varphi_5 \\ z_5 = r_3 \cos \theta_5 \end{cases}$$

Kera ruumala suurenes ajas. Kehad M ja m asukohad ristkoordinaadistiku suhtes on ajahetkel  $t_3$  teistsugused kui ajahetkel  $t_2$ . Nii samuti ka kera raadiuse pikkus. Järgnevalt taas võrdleme omavahel ajahetki  $t_1$ ,  $t_2$  ja  $t_3$ .

Kera raadius  $r$  on erinevates ajahetkedes erineva pikkusega:

$$r \neq r_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \neq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \neq r_3 = \sqrt{x_{11}^2 + y_{11}^2 + z_{11}^2}$$

Keha M sfäärilised koordinaadid on erinevates ajahetkedes ( ehk  $t_1$ ,  $t_2$  ja  $t_3$  ) erinevad:

$$t_1 \begin{cases} x'' = r \sin \theta \cos \varphi \\ y'' = r \sin \theta \sin \varphi \\ z'' = r \cos \theta \end{cases}$$

$$t_2 \begin{cases} x_2 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ y_2 = r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \\ z_2 = r_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

$$t_3 \begin{cases} x_4 = r_3 \sin \theta_4 \cos \varphi_4 \\ y_4 = r_3 \sin \theta_4 \sin \varphi_4 \\ z_4 = r_3 \cos \theta_4 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{aligned} x'' = r \sin \theta \cos \varphi &\neq x_2 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \neq x_4 = r_3 \sin \theta_4 \cos \varphi_4 \\ y'' = r \sin \theta \sin \varphi &\neq y_2 = r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \neq y_4 = r_3 \sin \theta_4 \sin \varphi_4 \\ z'' = r \cos \theta &\neq z_2 = r_2 \cos \theta_2 \neq z_4 = r_3 \cos \theta_4 \end{aligned}$$

Keha m sfäärilised koordinaadid on erinevates ajahetkedes ( ehk  $t_1$ ,  $t_2$  ja  $t_3$  ) erinevad:

$$t_1 \begin{cases} x' = r \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \\ y' = r \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ z' = r \cos \theta_1 \end{cases}$$

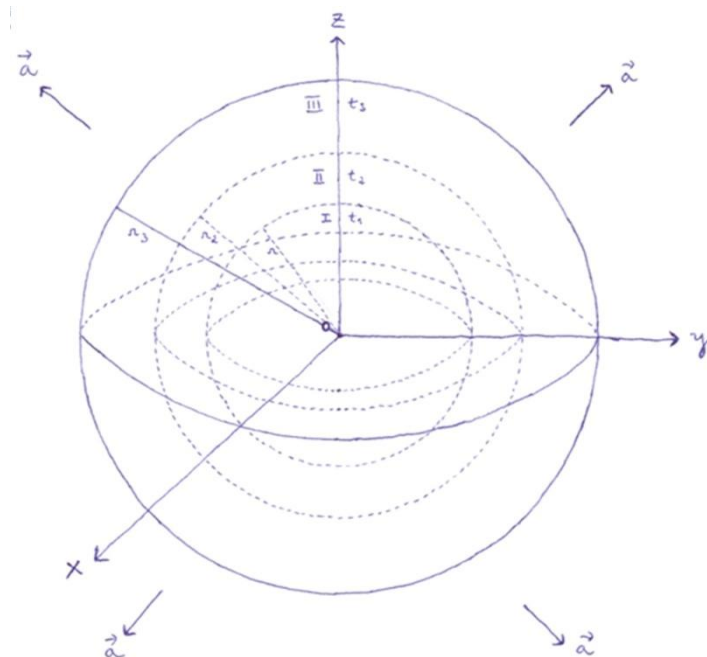
$$t_2 \begin{cases} x_3 = r_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_3 \\ y_3 = r_2 \sin \theta_3 \sin \varphi_3 \\ z_3 = r_2 \cos \theta_3 \end{cases}$$

$$t_3 \begin{cases} x_5 = r_3 \sin \theta_5 \cos \varphi_5 \\ y_5 = r_3 \sin \theta_5 \sin \varphi_5 \\ z_5 = r_3 \cos \theta_5 \end{cases}$$

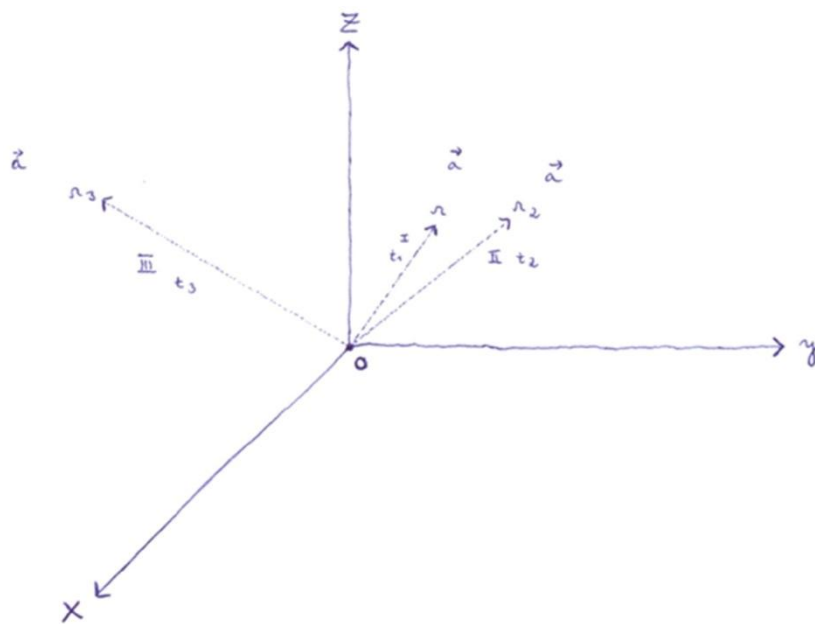
ehk

$$\begin{aligned} x' = r \sin \theta_1 \cos \varphi_1 &\neq x_3 = r_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_3 \neq x_5 = r_3 \sin \theta_5 \cos \varphi_5 \\ y' = r \sin \theta_1 \sin \varphi_1 &\neq y_3 = r_2 \sin \theta_3 \sin \varphi_3 \neq y_5 = r_3 \sin \theta_5 \sin \varphi_5 \\ z' = r \cos \theta_1 &\neq z_3 = r_2 \cos \theta_3 \neq z_5 = r_3 \cos \theta_5 \end{aligned}$$

ning seda sellepärast, et kera ( ehk Universum ) paisub ajas pidevalt.



Joonis 14 Erinevatel ajahetkedel on kera raadius erineva pikkusega.



Joonis 15 Universumi paisumine sfäärilistes koordinaatides.

Kehade  $M$  ja  $m$  liikumised kera sfääril ( ehk kera pinnal ) on nagu kehade liikumised meie tavalises aegruumis, sest kera pidevalt paisub ( s.t. liigub ). Kera sfäär on küll kahemõõtmeline, kuid meie elame ikka kolmemõõtmelises ruumis. Kera ruumala pidevalt suureneb ajas paisumise tõttu. Kui aga keha liiguks ainult mööda kera raadiust, siis see keha liiguks hyperruumis. Ja kui kehade liikumised toimuvad hyperruumis, siis avaldubki ajas rändamine. Niimoodi ongi Universumi paisumine seotud ajas rändamisega. Universumi ruumala suurenemise ( s.t. paisumise ) tõttu

toimub Universumis pidev liikumine ehk mitte ükski keha Universumis ei saa olla absoluutselt paigal. Universumi paisumine on pigem kui aja paisumine. Absoluutselt kõik kehad Universumis liiguvad selle üldise paisumisega kaasa.

Antud Universumi paisumise mudelis oleks kera hyperruum  $K'$  ja kehade liikumised kera pinnal toimuksid tavaruumis  $K$  ( mis antud juhul liigub pidevalt mööda  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -telge ). Kehasid  $M$  ja  $m$  võib kujutada galaktikatena või galaktikate parvedena. Need kehad sfääri pinnal ise ei liigu, vaid need liiguvad ainult kera paisumisega kaasa ehk pidevalt mööda kera raadiust ( tsentrist eemale ).

Joonistelt on üsna selgesti näha, et kera iga sfäär ( pind ) on nagu ( ülesvõte ) mingisugusest kindlast ajahetkest. Ja kui tõepoolest liikuda ainult mööda kera raadiust ( näiteks tsentri poole ), siis satuksime sellistesse kera sfääridesse, mis oleksid teistsugustes ajahetkedes. Antud juhul siis Universumi varasemates ajahetkedes ehk liikumine toimuks siis ajas minevikku. Seda kujutab meile joonis 16. Seetõttu nimetataksegi antud mudeli kera erinevaid sfääre Universumi ajasfäärideks. Neid ajasfääre on Universumil ilmselt lõpmata palju. Iga kera sfäär on mingisuguses kindlas ajahetkes, sest kera paisub ajas. Kera ruumala suureneb ajas ja seda lakkamatult.

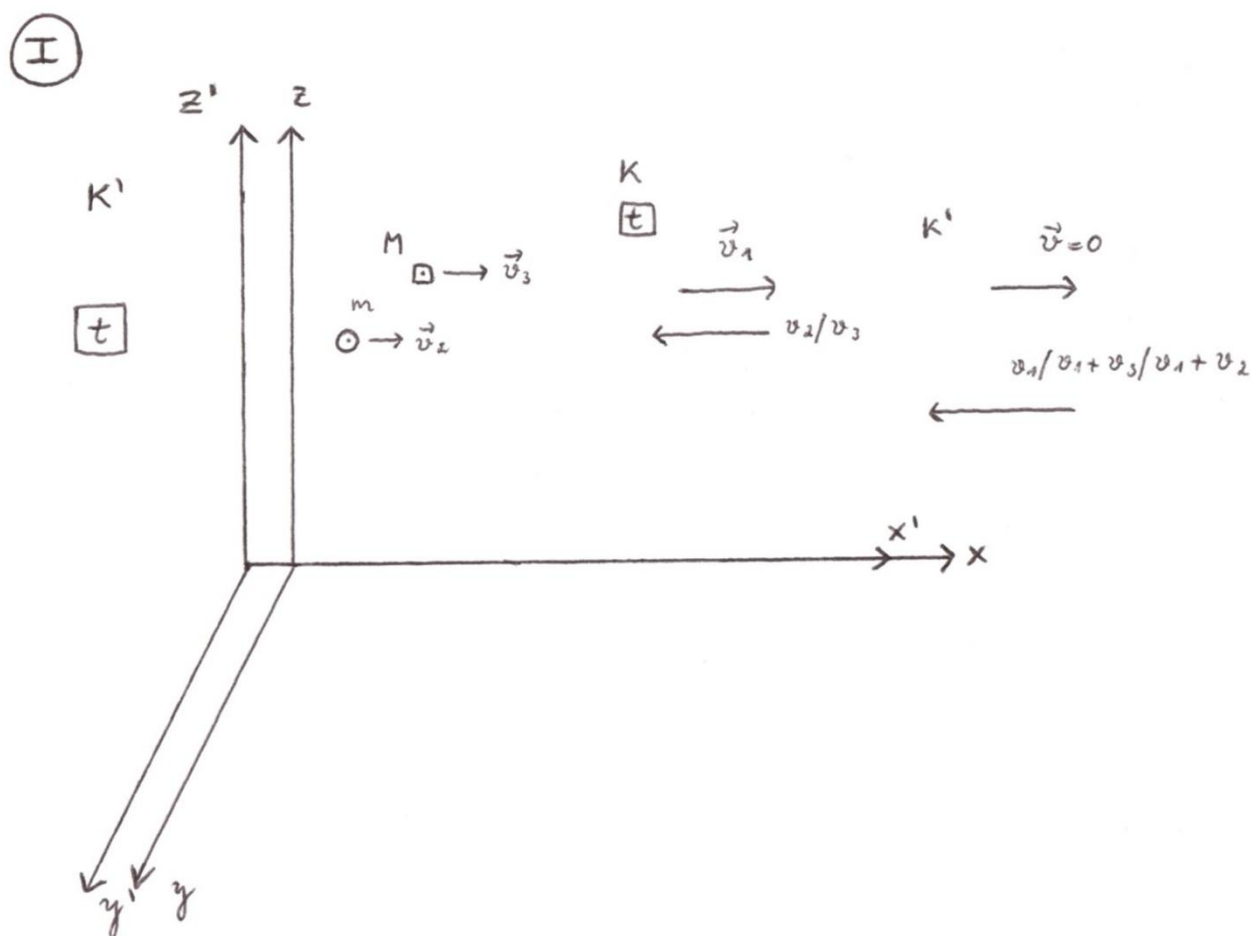
Kui inimene liigub oma majas näiteks köögist elutappa ja mõne aja möödudes tagasi elutoast kööki, siis tundub, et köök on täpselt samasuguses asukohas ruumis, kus see varem oli. Kuid see ainult näib nii, sest see ei ole tegelikult õige. Köök ( ja isegi elutuba ning inimene ise ) ei ole täpselt samas asukohas ruumis ( ning seega ka ajas ), kus see mõni aeg tagasi varem oli. Seda sellepärast, et inimese köök, elutuba, maja, inimene ise jne on koos planeedi Maaga kosmoses edasi liikunud uude asukohta ruumis. Planeet Maa liigub omakorda edasi koos Päikesesüsteemiga, mis liigub omakorda Linnutee galaktikaga jne. Köögi tõeline endine asukoht ruumis jääb aga väga kaugemale. Sellest tulenevalt ka ajahetk. Universumi ruum tervikuna paisub, mille põhjustas väidetavalt Suur Pauk. Kogu Universumi aine liigub koos selle üldise paisumisega kaasa. Näiteks saja-aasta tagune planeet Maa on ruumis väga kaugemale jäänud. Köögi tegelik endine asukoht jääb ruumis meist pidevalt kaugemale, sest me liigume pidevalt Universumi paisumisega kaasa. Kui inimene soovib naasta tagasi köögi tegelikku endisesse asukohta ruumis, siis peab ta selleks aegruumi kõverusest ( ehk gravitatsioonist ) nõ. „lahti pääsema“, mis teda muidu kogu aeg kõigega kaasa kisub. Ta peab liikuma ruumis, mis jääb meile pidevalt kättesaamatuks. Ainult niimoodi on võimalik minna tõelisesse endisesse köögi asukohta ruumis. See võimaldab liikuda ka endisesse aega. Selline hyperruumiks nimetatav ruum jääb meile kogu aeg kättesaamatuks, sest me liigume kosmiliselt paisuva ruumiga pidevalt kaasa. Universumi ruumala tervikuna paisub.

Järgnevalt oletame seda, et planeet Maa on tavaruum  $K$  ja kehad  $m$  ning  $M$  on objektid selle peal ( näiteks inimesed ). Hyperruum  $K'$  on aga kogu ülejäänud paisuv Universum.  $K$ -d võib vaadelda ka kui tavalist (aeg)ruumi ( milles me kõik igapäevaselt elame ), kuid  $K'$  on hyperruum. Järgnevalt vaatamegi matemaatiliselt seda, et kuidas toimub kehade liikumised tavaruumis  $K$  ja hyperruumis  $K'$ . Teame seda ( tegelikult kohe tõestame seda ), et hyperruumis liikudes liigub keha ka ajas. Kuid seejuures peame arvestama järgmiste aja ja ruumi füüsika alusreeglitega:

1. Aeg ja ruum eksisteerivad lahutamatult koos. Seda kinnitab meie erirelatiivsusteooria.
2. Eelnevast järeldub see, et liikudes ajas, peame liikuma ka ruumis ning vastupidi.
3. Eelnevast järeldub omakorda seda, et igal ajahetkel on olemas oma ruumipunkt. See tähendab sisuliselt seda, et liikudes ajas näiteks minevikku, peavad kehad olema ka endistes asukohtades kogu Universumi suhtes.

Hyperruum on hüpoteetiline aegruum, mis eksisteerib meie igapäevaselt tajutavast ajast ja ruumist väljapool. Ehkki hyperruum ( ja ka hyperaeg ) sisaldavad endas aja ja ruumi igapäevaseid mõisteid, siis reaalselt ehk tegelikult ei sisalda hyperruum endas mitte mingisuguseid aja- ja ruumidimensioone. Kuid sellegipoolest kujutatakse hyperruumi geomeetrilistes mudelites kolme- või isegi neljamõõtmelise koordinaatsüsteemina, mis eksisteerib paralleelselt meie tavalise

aegruumi kõrval. Hyperruum on nagu paralleelaegruum ( mitte segi ajada paralleelmaailmaga ), milles ei eksisteeri aega ega ruumi. Hyperruum on nagu väljaspool aegruumi eksisteeriv ajatu ja ruumitu dimensioon.



Joonis 16 Kehad  $m$  ja  $M$  liiguvad tavaruumis  $K$  ja hyperruumis  $K'$ .

Kõik joonised on sooritatud Cartesius´e ristkoordinaadistikus, milles on kujutatud järgmist mehaanilist süsteemi – kaks keha (  $m$  ja  $M$  ) ja kaks „ruumi“ (  $K$  ja  $K'$  ). Reaalses maailmas on tavaruum  $K$  ja hyperruum  $K'$  „ühesuursed“.

Keha  $m$  asub tavaruumis  $K$  koordinaatidega  $m( x,y,z,t )$ , kuid hyperruumis  $K'$  aga  $m( x',y',z',t )$ . Keha  $M$  asub tavaruumis  $K$  koordinaatidega  $M( x_1,y_1,z_1,t )$ , kuid hyperruumis  $K'$  aga  $M( x_1',y_1',z_1',t )$ . Tavaruum  $K$  eksisteerib hyperruumi  $K'$  suhtes koordinaatidega  $K( x_2',y_2',z_2',t )$ . Neid kehade ja „ruumide“ koordinaate esitleme siin ja edaspidi järgnevalt:

Tavaruumis  $K$ :

$$m( x,y,z,t )$$

$$M( x_1,y_1,z_1,t )$$

Hyperruumis  $K'$ :

$$m( x',y',z',t )$$

$$M( x_1',y_1',z_1',t )$$

$$K( x_2',y_2',z_2',t )$$

Kogu liikumine toimub ainult sirgjooneliselt (  $x$ -telje suunas ) ja toimub ühtlaselt ehk liikumise kiiruse arvväärus ajas ei muutu. Järelikult  $v$  tähistab kiirust ja  $a$  kiirendust. Hyperruum  $K'$  ise on paigal ehk  $v = 0$ ,  $x$ -telje suunas liiguvad ainult  $K$ ,  $m$  ja  $M$ . Edaspidi ei ole oluline kirjeldada (

vaadelda ) nende kehade  $m$  ja  $M$  ning tavaruumi  $K$  liikumist, vaid oluline on vaadelda nende koordinaate ruumis ja ajas, s.t. nende liikumiste asukohti ruumis ja ajas ( ehk aegruumis ). Kuna kogu liikumine toimub ainult  $x$ -telje suunas, siis võib teisi koordinaate arvestada järgmiselt:

$$y=y_1=y'_1=y_2'=0 \quad \text{ja} \quad z=z_1=z'=z_1'=z_2'=0$$

Seega võib kehade  $m$  ja  $M$  ning tavaruumi  $K$  liikumiste koordinaate välja kirjutada nõnda:

Tavaruumis  $K$ :

$$m(x, 0, 0, t)$$

$$M(x_1, 0, 0, t)$$

Hyperruumis  $K'$ :

$$m(x', 0, 0, t)$$

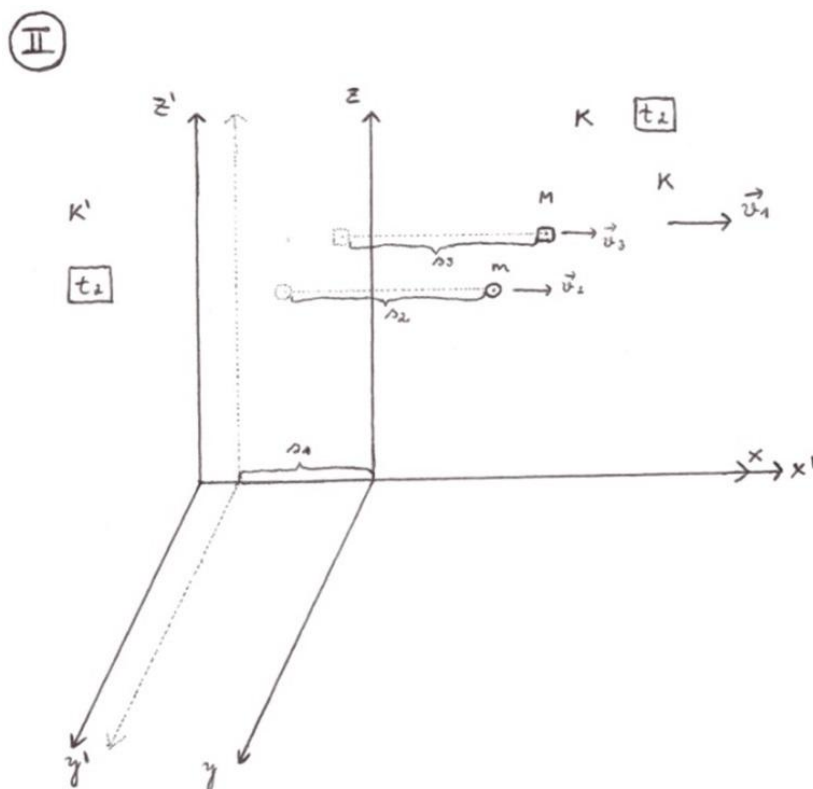
$$M(x_1', 0, 0, t)$$

$$K(x_2', 0, 0, t)$$

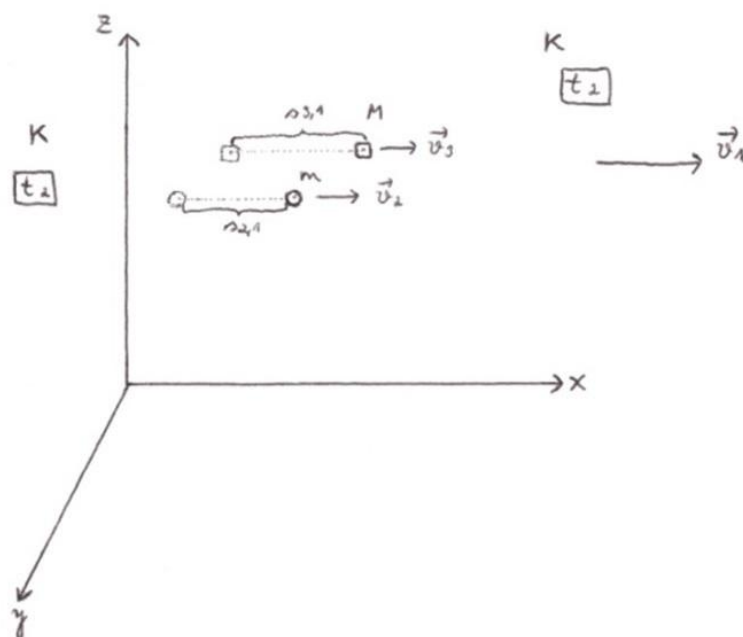
Edaspidi võtamegi ainult sellise esitluse kuju.

Antud juhul vaatleme me kehade  $m$  ja  $M$  ning tavaruumi  $K$  koordinaate ruumis ühel kindlal aja hetkel  $t$ . Kui kehad  $m$  ja  $M$  ning tavaruum  $K$  üksteise suhtes liiguvad, siis tegelikult ka hyperruum  $K'$  liigub nende suhtes. Kui  $m$ ,  $M$  ja  $K$  liiguvad  $x$ -telje suunas, siis  $K'$  liigub  $m$ ,  $M$  ja  $K$  suhtes  $x$ -telje vastassuunas. Hyperruum  $K'$  ise on reaalselt siiski paigal.

Keha  $m$  liikumise kiirus on suhteline. Näiteks tavaruumis  $K$  on selle kiirus  $v_2$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes aga  $v_2+v_1$ . Sama on ka keha  $M$ -i liikumiskiirusega.  $K$ -s on selle kiirus  $v_3$ , kuid  $K'$  suhtes on kiirus  $v_3+v_1$ .  $K$  „liigub“  $K'$  suhtes kiirusega  $v_1$ . Tavaruum  $K$  liigub keha  $m$  suhtes kiirusega  $v_2$  ja  $M$ -i suhtes  $v_3$ . Kuid  $K$  liigub kehade  $m$  ja  $M$  suhtes  $x$ -telje vastassuunas.







Joonis 17 Kehad  $m$  ja  $M$  liiguvad  $K$  ja  $K'$  suhtes.

Kehad  $m$  ja  $M$  ning tavaruum  $K$  on teinud nihke ehk liikunud edasi  $x$ -telje suunas teatud vahemaa, sest me vaatleme antud mehaanilist süsteemi nüüd teisest ajahetkest  $t_2$  (mis on erinev eelmisest ajahetkest  $t$ ). Sellisel juhul asub keha  $m$  tavaruumis  $K$  koordinaatidega  $m(x_a, y, z, t_2)$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes aga  $m(x'_a, y', z', t_2)$ . Keha  $M$  asub tavaruumis  $K$  koordinaatidega  $M(x_b, y_1, z_1, t_2)$ , kuid hyperruumis  $K'$   $M(x'_b, y'_1, z'_1, t_2)$ . Tavaruum  $K$  ise eksisteerib nüüd hyperruumi  $K'$  suhtes koordinaatidega  $K(x'_3, y'_2, z'_2, t_2)$ . Seda kõike saab esitleda järgmisel kujul:

Tavaruumis  $K$ :

$$m(x_a, 0, 0, t_2)$$

$$M(x_b, 0, 0, t_2)$$

Hyperruumis  $K'$ :

$$m(x'_a, 0, 0, t_2)$$

$$M(x'_b, 0, 0, t_2)$$

$$K(x'_3, 0, 0, t_2)$$

Kehad  $m$  ja  $M$  nihkusid ehk liikusid edasi teatud vahemaa. Näiteks keha  $m$  nihkus tavaruumi  $K$  suhtes  $s_{2,1}$  pikkuse vahemaa, kuid hyperruumi  $K'$  suhtes aga  $s_2$ ;  $M$  nihkus  $K$  suhtes  $s_{3,1}$ , kuid  $K'$  suhtes aga  $s_3$ .  $K$  nihkus  $K'$ -i suhtes  $s_1$  pikkuse vahemaa. Kehad  $m$  ja  $M$  asuvad ajahetkel  $t_2$  ehk pärast nihet uutes aja ja ruumi koordinaatides nii tavaruumi  $K$  kui ka hyperruumi  $K'$  suhtes. Nii-samuti ka  $K$  asub  $K'$  suhtes uutes aja ja ruumi ehk aegruumi koordinaatides. Siin ja edaspidi võime seda kõike esitleda järgmiste mittevõrdeliste suhetena, mis rõhutab erinevatel ajahetkedel erinevate ruumikoordinaatide eksisteerimist:

Tavaruumis  $K$ :

$$m(x, 0, 0, t) \neq m(x_a, 0, 0, t_2)$$

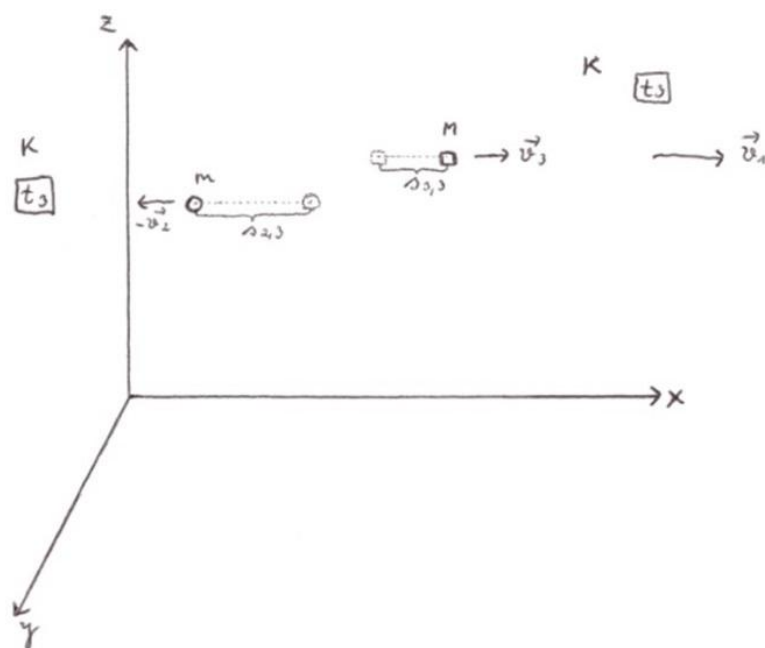
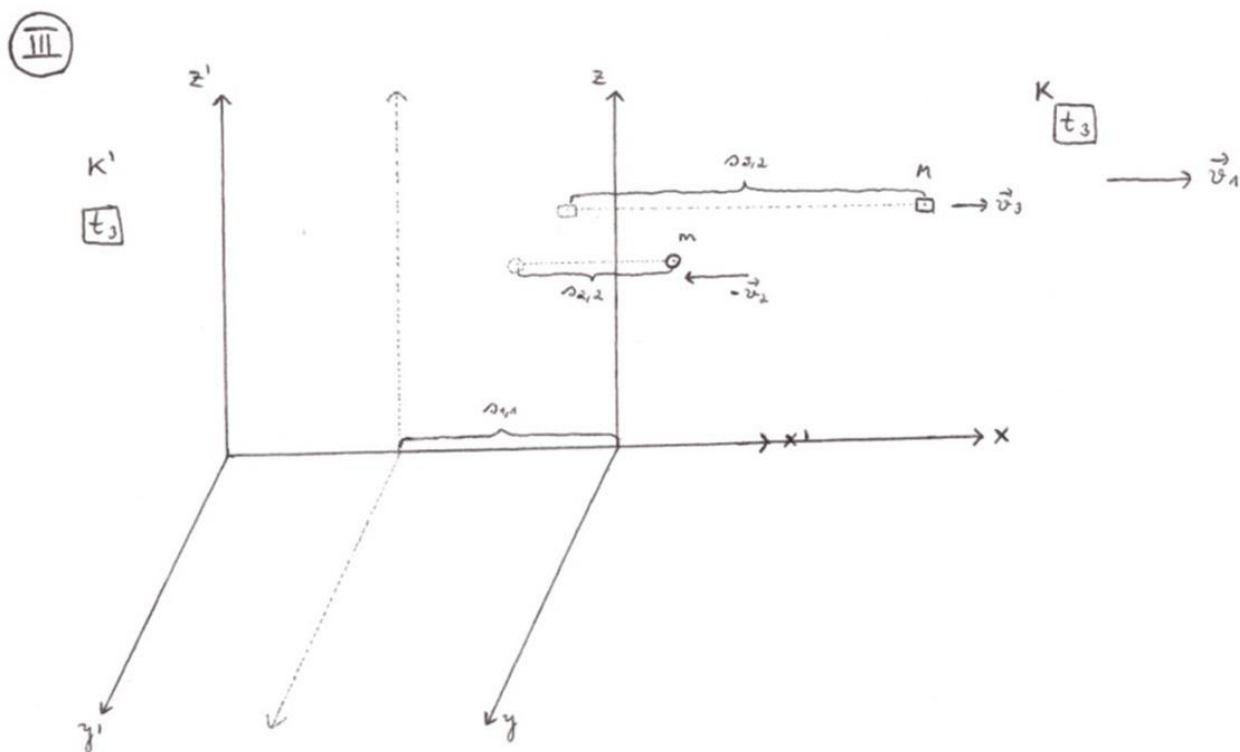
$$M(x_1, 0, 0, t) \neq M(x_b, 0, 0, t_2)$$

Hyperruumis  $K'$ :

$$m(x', 0, 0, t) \neq m(x'_a, 0, 0, t_2)$$

$$M(x'_1, 0, 0, t) \neq M(x'_b, 0, 0, t_2)$$

$$K(x'_2, 0, 0, t) \neq K(x'_3, 0, 0, t_2)$$



Joonis 18 Keha  $m$  liikus  $K$  suhtes tagasi.

Kehad  $m$  ja  $M$  ning tavaruum  $K$  liikusid veelkord edasi ehk tegemist on kolmandast ajahetkest  $t_3$  vaadeldava sama mehaanilise süsteemiga. Keha  $m$  asub nüüd tavaruumis  $K$  koordinaatidega  $m(x, 0, 0, t_3)$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes aga  $m(x'_c, 0, 0, t_3)$ . Keha  $M$  asub tavaruumis  $K$  koordinaatidega  $M(x_d, 0, 0, t_3)$ , kuid hyperruumis  $K'$  aga  $M(x'_d, 0, 0, t_3)$ . Tavaruum  $K$  ise eksisteerib nüüd hyperruumi  $K'$  suhtes koordinaatidega  $K(x'_5, 0, 0, t_3)$ .

Tavaruumis K:

$$m(x, 0, 0, t_3) \\ M(x_d, 0, 0, t_3)$$

Hyperruumis K':

$$m(x_c', 0, 0, t_3) \\ M(x_4', 0, 0, t_3) \\ K(x_5', 0, 0, t_3)$$

Kehad m ja M nihkusid ehk liikusid veelkord edasi. Näiteks keha m liikus ehk nihkus tavaruumi K suhtes  $s_{2,3}$  pikkuse vahemaa, kuid hyperruumi K' suhtes aga  $s_{2,2}$ ; keha M nihkus K suhtes  $s_{3,3}$ , kuid K' suhtes aga  $s_{3,2}$ . K nihkus K' suhtes  $s_{1,1}$  pikkuse vahemaa. Keha m nihkus tavaruumi K suhtes x-telje vastassuunas tagasi, kuid hyperruumi K' suhtes aga liikus ikkagi x-telje suunas edasi.

Keha m on ajahetkel  $t_3$  tavaruumi K suhtes esialgses ruumikoordinaadis tagasi ehk

$$[m(x, 0, 0) = m(x, 0, 0)] \neq m(x_a, 0, 0),$$

kuid hyperruumi K' suhtes aga uues ruumikoordinaadis

$$m(x_c', 0, 0, t_3).$$

Keha m tegi tavaruumi K suhtes nihke – edasi ja tagasi. Keha m on aga tegelikult uues ruumi ( ja seega ka aja ) koordinaadis, kuigi tavaruumi K suhtes seda otseselt näha ei ole:

$$m(x, 0, 0, t) \neq m(x_a, 0, 0, t_2) \neq m(x, 0, 0, t_3)$$

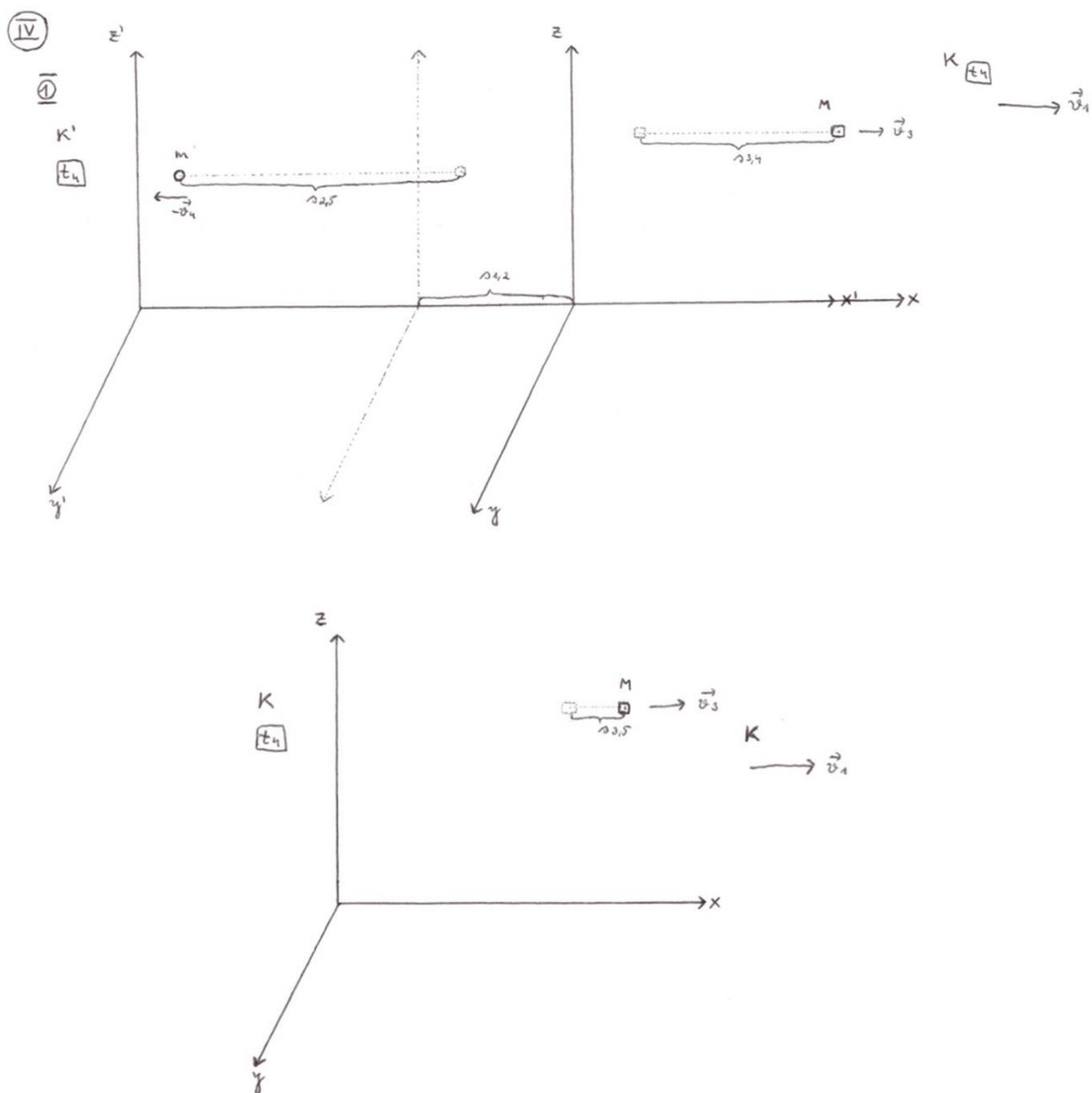
Seda tõestab hyperruumi K' suhtes liikumine. Kuna tegemist on uue asukohaga ruumis, siis seega eksisteerib ka uus ajahetk. Näiliselt on keha m tavaruumi K suhtes endises ruumi asukohas, kuid tegelikult seda ei ole. Tõeline endine asukoht ruumis ( ja sellest tulenevalt ka endine ajahetk ) jääb tavaruumist K „väljapoole“. See jääb hyperruumi K' „otsesesse ulatusse“. K suhtes liikus keha m näiliselt tagasi endisesse asukohta ruumis, kuid tegelikult mitte. Keha m liikus ruumis hoopis edasi, mis tõestab hyperruumi K' suhtes vaatlemine.

Hyperruumis K':

Tavaruumis K:

$$m(x', 0, 0, t) \neq m(x_a', 0, 0, t_2) \neq m(x_c', 0, 0, t_3) \quad M(x_1, 0, 0, t) \neq M(x_b, 0, 0, t_2) \neq M(x_d, 0, 0, t_3) \\ M(x_1', 0, 0, t) \neq M(x_b', 0, 0, t_2) \neq M(x_4', 0, 0, t_3) \\ K(x_2', 0, 0, t) \neq K(x_3', 0, 0, t_2) \neq K(x_5', 0, 0, t_3)$$

Kehade m ja M näilised liikumised ruumis tulenevad sellest, et kui vaadelda neid ainult tavaruumi K suhtes. Tõelised nihked tulevad ilmsiks siis kui vaadelda kehade liikumisi hyperruumi K' suhtes. K liigub K' suhtes kiirusega  $v_1$  ja kehad m ning M asuvad selle K „sees“. Albert Einsteini relatiivsusteooria kinnitab meile seda, et mistahes keha saab minna tagasi endistesse ruumipunktidest ( x, y, z ), kuid mitte tagasi endistesse ajahetkedesse t. Tegelikult see nii ei ole, kuid näiliselt see paistab nii olevat.



Joonis 19 Keha m on K suhtes haihtunud.

Kehad m ja M ning tavaruum K nihkusid ehk liikusid veelkord edasi. Tegemist on neljandast ajahetkest  $t_4$  vaadeldava samasuguse mehaanilise koordinaatsüsteemiga. Näiteks tavaruum K nihkus hyperruumi  $K'$  suhtes  $s_{1,2}$  pikkuse vahemaa. Keha M nihkus K suhtes  $s_{3,5}$  pikkuse vahemaa, kuid  $K'$  suhtes aga  $s_{3,4}$ . Tavaruum K eksisteerib hyperruumi  $K'$  suhtes koordinaatidega  $K(x_6', 0, 0, t_4)$ . Keha M asub tavaruumis K koordinaatidega  $M(x_f, 0, 0, t_4)$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes koordinaatidega  $M(x_g', 0, 0, t_4)$ . Matemaatiliselt võib kõike eelnevat esitada järgmiselt:

Tavaruumis K:

$$\begin{aligned} M(x_f, 0, 0, t_4) \\ m(0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Hyperruumis  $K'$ :

$$\begin{aligned} M(x_g', 0, 0, t_4) \\ K(x_6', 0, 0, t_4) \\ m(x', 0, 0, t) \end{aligned}$$

Kehade  $m$  ja  $M$  ruumikoordinaadid on tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  suhtes ajas vägagi erinevad, niisamuti ka tavaruumi  $K$  „ruumikoordinaadid“ hyperruumi  $K'$  suhtes ning kehade  $m$  ja  $M$  suhtes. Kõike seda on võimalik esitleda matemaatiliselt järgnevalt:

Hyperruumis  $K'$ :

$$M(x_1', 0, 0, t) \neq M(x_b', 0, 0, t_2) \neq M(x_4', 0, 0, t_3) \neq M(x_g', 0, 0, t_4) \\ K(x_2', 0, 0, t) \neq K(x_3', 0, 0, t_2) \neq K(x_5', 0, 0, t_3) \neq K(x_6', 0, 0, t_4)$$

Tavaruumis  $K$ :

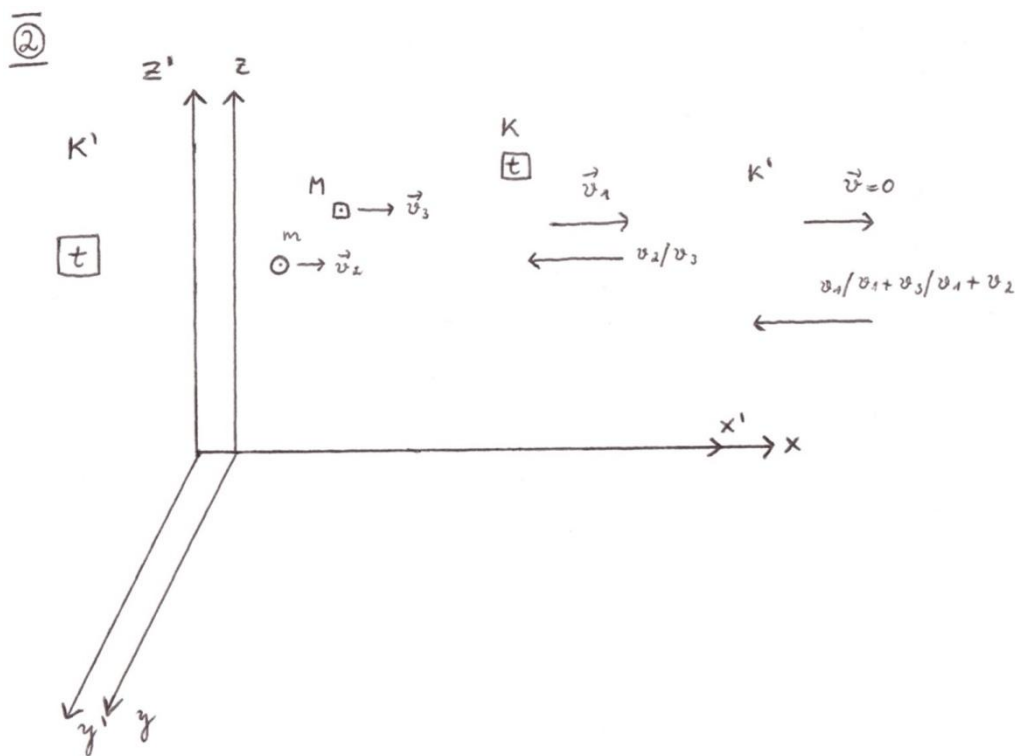
$$M(x_1, 0, 0, t) \neq M(x_b, 0, 0, t_2) \neq M(x_d, 0, 0, t_3) \neq M(x_f, 0, 0, t_4) \\ m(x, 0, 0, t) \neq m(x_a, 0, 0, t_2) \neq m(x, 0, 0, t_3) \neq m(0, 0, 0, 0)$$

Keha  $m$  nihkus ehk liikus hyperruumi  $K'$  suhtes  $s_{2,5}$  pikkuse vahemaa, kuid tavaruumi  $K$  suhtes „haihtus keha õhku“ ehk ei toimunud mitte mingisugust liikumist ( $s = 0$ ). See tähendab seda, et keha  $m$  ajahetkel  $t_4$  ei eksisteeri enam tavaruumis  $K$  ja seega keha  $m$  koordinaadid tavaruumis  $K$  ajahetkel  $t_4$  võib välja kirjutada nõnda:  $m(0, 0, 0, 0)$ . Kuid hyperruumi  $K'$  suhtes eksisteerib keha  $m$  sellegi poolest edasi ja seega võib keha  $m$  koordinaadid hyperruumi  $K'$  suhtes välja kirjutada nii:  $m(x', 0, 0, t)$ . Sellest järeldub ühtlasi ka seda, et keha  $m$  kaugust (ehk nihet  $s$ ) „ruumis“ kirjeldab nüüd aeg  $t$ . See tähendab seda, et keha  $m$  liikus ajas tagasi hetke  $t$ , sest keha  $m$  ruumikoordinaadid hyperruumi  $K'$  suhtes

$$m(x', 0, 0)$$

vastavad ajahetkele  $t$ :

$$m(x', 0, 0, t).$$



Joonis 20 Keha m on liikunud ajas tagasi.

Joonis 8 on tehtud eelkõige keha M suhtes vaadatuna, kuid joonis 9 on tehtud keha m suhtes. Antud juhul jätame arvestamata sellise asjaolu, et kui mingi keha rändab ajas tagasi, siis kohtub ta ka enda „teisikuga“. Sellist juhtu vaatame edaspidi täpsemalt. Antud juhul liigub keha m ajas minevikku. Ajas rändamise korral peab keha „liikuma“ enda tegelikesse endistesse ( või tulevastesse ) asukohtadesse ruumis.

Keha m asub joonisel 8 tavaruumis K koordinaatidega  $m(0,0,0,0)$ . Ka ajakoordinaat  $t$  võrdub siin 0-ga, sest keha m ei ole tavaruumis K ajahetkel  $t_4$  enam olemas. Keha on seal „haihtunud“. Kuid keha m asub hyperruumi  $K'$  suhtes ruumikoordinaatidega  $m(x',0,0)$ . Seetõttu on hyperruumis  $K'$  keha m aga olemas. Ajahetk võrdub keha m-i suhtes  $t$ -ga, sest keha m asub nüüd tegelikult endises asukohas ruumis ja seetõttu saame keha m aegruumi lõplikuks koordinaadiks  $m(x',0,0,t)$ . See tähendab seda, et kui hyperruumi  $K'$  suhtes on keha m koordinaadid

$$m(x',0,0,t),$$

siis tuleb tavaruumi K suhtes keha m koordinaadid

$$m(x,0,0,t).$$

Seda sellepärast, et kui hyperruumi  $K'$  suhtes on keha m ruumikoordinaadid

$$m(x',0,0),$$

siis seega vastab sellele ruumikoordinaadile ajahetk  $t$  ja saamegi lõpuks keha m lõppkoordinaadiks

$$m(x',0,0,t).$$

Seda võib mõista ka kui keha m ruumi ja aja koordinaatide suhtega

$$m(x', 0, 0) = m(t).$$

Kõik see oli ainult keha m suhtes vaadatuna. Keha m asub ajahetkel  $t_4$  hyperruumi  $K'$  suhtes ruumikoordinaatides  $m(x', 0, 0)$ . Kuna keha m jaoks võrdub ajahetk  $t$ -ga, siis keha m suhtes tulevad keha M ja tavaruumi K aegruumi koordinaadid nõnda:

Hyperruumis  $K'$ :

$$\begin{aligned} M(x_1', 0, 0, t) \\ K(x_2', 0, 0, t) \end{aligned}$$

Tavaruumis K:

$$M(x_1, 0, 0, t)$$

See oli sellepärast nii, et esimeses ajahetkes ( ehk  $t$  ) olid nad sellistes ruumikoordinaatides. Eelnevalt vaatasime ainult keha m suhtes, mis liikus ajas tagasi. Kuid keha M suhtes vaadatuna tuleb joonise 8 järgi aegruumi koordinaadid:

Tavaruumis K:

$$\begin{aligned} m(0, 0, 0, 0) \\ M(x_f, 0, 0, t_4) \end{aligned}$$

Hyperruumis  $K'$ :

$$\begin{aligned} m(x', 0, 0, t) \\ M(x_g', 0, 0, t_4) \\ K(x_6', 0, 0, t_4) \end{aligned}$$

Keha m on liikunud ajas keha M ja tavaruumi K suhtes minevikku. Ajas saabki rännata ainult teiste kehade suhtes, nii nagu kehade liikumist ennast kirjeldatakse mehaanikas ainult teiste kehade suhtes. Joonise 8 järgi asuvad kehad m ja M nüüd erinevates ruumi- ( ja seega ka aja- ) koordinaatides. Keha m asub keha M suhtes minevikus ja keha M asub keha m suhtes tulevikus. Aeg ja ruum on omavahel väga tihedalt seotud. Kuna tegemist oli keha m ajarännakuga minevikku, siis analoogiliselt toimib see ka tuleviku ajarännaku korral. Kuid aja peatamist käsitletakse relatiivsusteooria osas pikemalt.

### 1.11.1 Hyperruumi dimensioon ehk väljaspool aega ja ruumi

Plancki aja  $t$

$$t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5,39121 * 10^{-44} \text{ s}$$

ja Plancki pikkuse  $l$

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616\,229(38) * 10^{-35} \text{ m}$$

olemasolu ehk selle tulenemine aegruumi füüsikast näitab, et hyperruumi dimensioon „eksisteerib“ väljaspool aegruumi, mida on võimalik mõista Plancki aja ja Plancki pikkuse „järgse“ dimensioonina. See tähendab seda, et hyperruum „algab“ sealt, kust lõpeb meie tajutav aegruum.

Meie tajutavat aegruumi „piirabki“ Plancki aeg ja Plancki pikkus. Plancki aja ja Plancki pikkuse matemaatilisel tuletamisel kasutasime seisueenergia  $E$  seost:

$$M = \frac{E}{c^2}$$

ja määramatuse relatsiooni kvandi energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$E = \frac{h}{2t}$$

Mõlemaid seoseid on võimalik matemaatiliselt tuletada ja analüüsida ajas rändamise üldvõrrandist, mis omakorda kinnitab seda, et hyperruumi dimensioon on meie igapäevaselt tajutavast aegruumist ehk tavaruumist väljaspool alates Plancki ajast ja Plancki pikkusest. Tavaruum ise on meile tajutav kuni Plancki ajani ja Plancki pikkuseni. Seisueenergia ja määramatuse relatsioon kvandi energia ja aja vahel on põhjalikumalt analüüsitud ja tuletatud käesoleva teose relatiivsusteooria ja kvantfüüsika erinevates osades.

Kui ajas on võimalik rännata ainult ajast väljas olles, kuid samas väljaspool aega ei eksisteeri enam aega ennast, siis kuidas saab väljaspool aega rännata ajas kui väljaspool aega ei eksisteeri enam aega ennast? Selline vastuolu on ainult näiline. Millises mõttes ei eksisteeri enam aega?

Kui me rändame ajas ( näiteks minevikku ), siis peame liikuma ka ruumis, sest aeg ja ruum on relatiivsusteooria järgi üksteisest lahutamatult seotud. Selline ruumidimensioon, mis võimaldab rännata ajas, eksisteerib väljaspool meie igapäevaselt kogetavat ruumi. Kuid ka siin esineb pealtnäha näiline vastuolu. Väljaspool meie kogetavat ruumi ei eksisteeri enam ruumidimensioone, siis kuidas saab liikuda ajas, kui ruumi enam ei eksisteeri, mis võimaldaks ajas rändamist?

Tavalise inimese jaoks on aeg eksisteerinud mineviku, oleviku ja tuleviku vormis. Kui aga liikuda ajas, siis ajavormid nagu minevik ja tulevik kaovad ning esile tuleb ainult oleviku ajavorm. Näiteks minevikus asetleidnud sündmused ei toimu ajaränduri jaoks enam minevikus, sest ta on ju liikunud ajas minevikku. Seetõttu kehtib temale ainult oleviku ajavorm ja selles mõttes on Universum ise tegelikult ajatu. See tähendab seda, et aega ei eksisteeri, millest järeldub omakorda veel üks tõsiasi. Nimelt igasugune liikumine Universumis on seotud ajaga – täpsemalt öeldes ajavormidega nagu näiteks minevik, olevik ja tulevik. Näiteks keha liikumise kiiruse kirjeldamiseks kasutatakse alghetke, hetkkiiruse ja lõppkiiruse mõisteid. Kui aga Universum on oma olemuselt tegelikult ajatu ( s.t. eksisteerib ainult oleviku ajavorm ), siis Universumis nähtavat liikumist ei ole tegelikult olemas. See on illusioon, mis tuleneb sellest, et eksisteerib ainult oleviku aja liik ja seetõttu minevikku ega tulevikku ei ole tegelikult olemas. Universumis nähtavad sündmused ja protsessid pole tegelikult liikumises. Kogu meie teadaolev Universum on seega tegelikult paigal olekus. Nähtav liikumine Universumis on ainult näiline ehk illusioon. Just aja ( ja seega ka ruumi ) näiline olemasolu loovadki kõige liikumise illusiooni.

Igapäevaselt elav inimene liigub pidevalt ruumis ühest ruumipunktist teise. Kuid ajarändur liigub ajas ( s.t. hyperruumis ) ühest ajahetkest teise, mis füüsiliselt on analoogiline ruumis liikumisega ühest ruumipunktist teise. Sellest tulenevalt eksisteerivad ajaränduri jaoks Universumis minevikus hävinud hooned, kuid seda teistel ajahetkedel sarnaselt nii nagu olevikus elava inimese suhtes eksisteerivad hooned erinevates ruumi asukohtades. Selles mõttes ongi Universum oma olemuselt tegelikult ajatu. Aega ei ole olemas. Näiteks 16 aastat tagasi surnud inimene tegelikult ikka veel eksisteerib. Ta on Universumis olemas, kuid eksisteerib meie suhtes minevikus, mitte olevikus ( ega ka tulevikus ). See tähendab, et inimene „elab“ meie suhtes möödunud ajahetkedes ( ehk möödunud hyperruumi punktides ). Olevikus teda enam ei eksisteeri ja pole teda ka tulevikus. Kuid sellegipoolest on ta siiski Universumis olemas.

Kui inimene liigub ruumis ( s.t. tavaruumis ), siis ta võib olla erinevates ruumipunktides, kuid ei saa olla seda üheaegselt. Näiteks võib inimene viibida oma majas ühel hetkel köögis ja siis mõnel teisel hetkel toimetada elutoas. Ajaga on tegelikult samamoodi, sest Universum eksisteerib ajalisel



tegelikult ühekorraga. Nii nagu on ruumiga, nii on ka ajaga ( sest ajas rändamist võimaldab hyperruumis liikumine ). Minevikus surnud inimene tegelikult ikka veel eksisteerib nii nagu inimene viibib majas ühes ruumis, kuid teistes ruumides teda ei ole. Selles seisnebki ajatu Universumi füüsikaline olemus. Seda näitab vaieldamatult inimese reaalne ajas rändamine minevikku või tulevikku. Aja eksisteerimine sarnaneb ruumi eksisteerimisega, mistõttu eksisteerib Universum küll erinevates ruumipunktides, kuid samas ka erinevates ajahetkedes.

Aja rännak minevikku on füüsikaliselt samaväärne, mis inimese liikumine majas ühest toast teise. Seetõttu pole aega tegelikult olemas. Ruumis on võimalik liikuda ühest asukohast teise. Just see sama asjaolu kehtib tegelikult ka aja kohta. Minevikus asetleidnud sündmused on tegelikult Universumis ikka veel realselt olemas. Selle mõistmiseks on olemas analoogiline seos ruumis toimuvaga. Näiteks inimene sõidab linnast ära maale puhkama. Mõnda aega inimest linnas ei eksisteeri, kuid sellegipoolest on ta siiski olemas ( elades maal ). Ei ole nii, et teda enam üldse olemas ei oleks, kui inimene on linnast lahkunud. Mõne aja pärast võib ta tulla linna tagasi. Täpselt samamoodi on ka ajaga. Minevikus surnud inimene tegelikult on Universumis olemas, kuid ta eksisteerib meie suhtes lihtsalt teises ajahetkes – nii nagu inimest pole enam linnas, kui ta on maale puhkusele sõitnud. Ajal ja ruumil eksisteerivad analoogilised seaduspärasused – näiteks ruumis ( s.t. tavaruumis ) saab inimene olla erinevates ruumipunktides ja samas ka ajas on võimalik ( näiteks ajaränduril ) olla erinevates ajahetkedes. See tähendab ka seda, et kõik mineviku ja ka tuleviku sündmused eksisteerivad Universumis ( s.t. hyperruumis ) koos olevikuga. Selles mõttes on kogu minevik ( ja ka tulevik ) Universumis olemas. Absoluutselt kõik, mis kunagi minevikus on aset leidnud ja tulevikus ka aset leiab, eksisteerivad tegelikult kogu aeg. Selles mõttes ei hävi mitte miski mitte kunagi. Kõik eksisteerib Universumi hyperruumis igavesti. Sündmused minevikus ei ole tegelikult nõ. „möödunud sündmused“, mida pole enam olemas. Need kõik eksisteerivad ikka veel, kuid lihtsalt teistes ajahetkedes. Sama on ka tulevikus asetleidvate sündmustega.

Hyperruumi suhtes vaadatuna eksisteerib kogu meie Universum ajalises mõttes „ühekorraga“. See tähendab, et kogu minevik ja ka kogu tulevik eksisteerivad nagu üheskoos kõrvuti. Minevikku ega tulevikku ( nii nagu meie neid mõistame ) tegelikult ei ole, sest eksisteerib ainult oleviku ajavorm. Selles mõttes aega ei ole. Aega Universumis ei eksisteeri, sest selles on võimalik liikuda nii edasi kui ka tagasi ( ning ka olevikus ).

Sündmused, mis leiavad aset tulevikus, on tegelikult sama „kindlalt paigas“ nii nagu seda on sündmused, mis on leidnud aset minevikus. Mineviku ja tuleviku sündmuste vahe seisneb ainult selles, et mineviku sündmuste kohta me teame, kuid tulevikus leidvate sündmuste kohta me ei tea mitte midagi. See on tegelikult väga oluline erinevus. Näiteks astroloogid on üldises arvamuses, et tulevik on kogu aeg liikuv – s.t. muutlik. Kuid tegelikult ei ole see sugugi nii. Tulevikus aset leidvad sündmused on samakindlalt paigas nagu mineviku puhulgi. See on väga oluline järeldus, mis tuleb välja inimese reaalsest ajas rändamisest. Mineviku sündmusi me võime teada, kuid tulevikus asetleidvaid sündmusi me ei tea.

## **1.11.2 Ajas rändamise seaduspärasused**

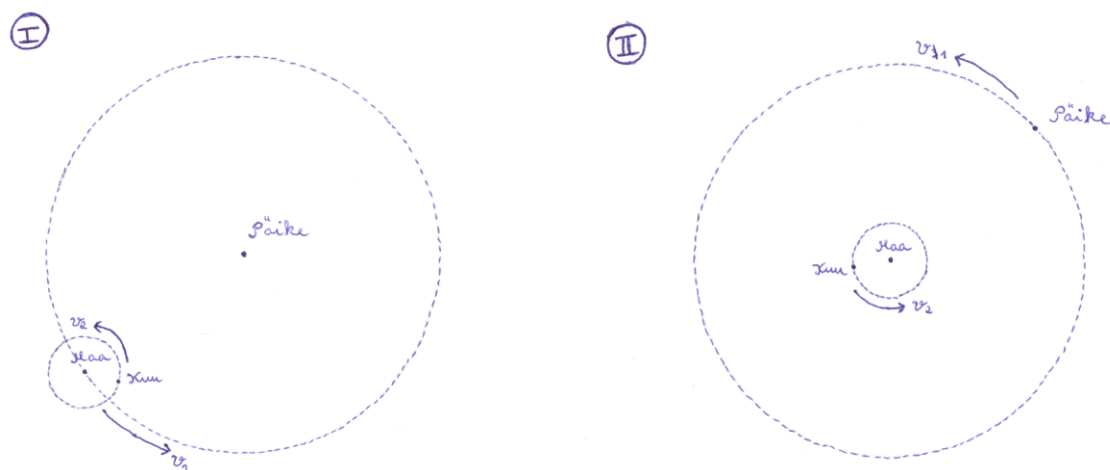
### ***1.11.2.1 Aja ja ruumi vahetamine***

Inimese tavakogemusest on teada seda, et ruumis on võimalik enda asukohta muuta ( vahetada )

nii, et inimese enda eksisteerimine ei kao. Näiteks kui inimene sõidab suvel linnast ära maale puhkama, siis sellel ajal, mil inimene maal puhkab, teda linnas ei ole. Kui linnas seda inimest ei ole, siis ei tähenda see seda, et teda üldse maailmas olemas ei oleks. Inimene on lihtsalt muutnud oma asukohta ruumis, kuid ta on igaljuhul siiski olemas. Tegelikult kehtib see ka aja kohta. Näiteks kui inimene on juba ammu surnud, siis ei tähenda see seda, et teda enam olemas ei oleks Universumis. Ta on tegelikult olemas küll, kuid ta eksisteerib teises ajas – minevikus, mitte olevikus ega tulevikus. Nii nagu oli inimese linnast maale sõidu korral – kui teda linnas ei ole, ei tähenda see seda, et teda üldse olemas ei oleks. Inimene puhkab parajasti maal. Täpselt sama on tegelikult ka ajaga. Ammu hävinud majad tegelikult ikka veel eksisteerivad, kuid seda ainult teises ajas – minevikus. Seda kõike näitab ajas liikumine ise. See, mis kehtib ruumi korral, kehtib ka ajaga. Näiteks kehad on võimalised eksisteerima erinevates ruumpunktides ja ( sellega analoogiliselt ) kehad on võimalised eksisteerima ka erinevatel ajahetkedel. Niimoodi muutuvad arusaamad kehade ja nähtuste eksisteerimisest Universumis.

### 1.11.2.2 Liikumise suhtelisus

Liikumine on suhteline ehk relatiivne nähtus. Kui tahetakse kirjeldada keha liikumist, siis tuleb alati märkida ka seda, et mille suhtes keha liikumist kirjeldatakse. Näiteks joonisel I vaadeldakse Maa ja Kuu liikumist Päikese suhtes, kuid joonisel II vaadeldakse Päikese ja Kuu liikumist Maa suhtes. Mõlemad käsitlused on tegelikult õiged. Kõikidel joonistel on kujutatud Päikesesüsteemi kuuluvate kehade ( s.t. Päikese, Maa ja Kuu ) liikumist.



Joonis 21 Liikumine on suhteline: Maa liikumine Päikese suhtes ja Päike Maa suhtes.

Joonisel I on näha, et Päike ei liigu ( see on paigal ) ja Maa ning Kuu tiirlevad ümber Päikese. Kuu tiirleb omakorda ümber planeedi Maa. Joonisel II on aga Maa hoopis paigal ja Päike ning Kuu tiirlevad ümber paigalseisva Maa.

Kui inimene rändab ajas tagasi, siis kogu ülejäänud Universum liigub ajaränduri suhtes ajas. Ajarändur liigub Universumi suhtes ajas. Ajaränduri liikumine ajas Universumi suhtes on nii nagu Kuu liikumine Päikese suhtes joonisel I, kui ajarändur asub planeedi Maa pinnal. Kuid samas võib olla ka nii, et Universumi liikumine ajas ajaränduri suhtes esineb nii nagu joonisel II: planeet Maa seisab paigal ja kõik muu liigub. Sama võib olla ka ajaränduriga. Tundub, et tegelikkuses oleks viimane variant õigem nii nagu reaalne Päikesesüsteemi liikumine on esitatud joonisel I.

Inimene ei rända ajas nii et ta ka ise muutuks kas nooremaks või vanemaks. Ajarändur võib kohata ennast kas nooremana minevikus või vanemana tulevikus.

Ajaränduri liikumise trajektoor ajas ( ehk hyperruumis ) on sirge ehk lineaarne. Keerulisi liikumistrajektore ( nagu näiteks planeedi Maa liikumine maailmaruumis tähtede suhtes ) ajaränduri korral ei ole. See tähendab seda, et kui inimene rändab ajas minevikku näiteks Pariisis, siis ta ka satub möödunud ajahetkesse ja ka Pariisi, mitte Londonisse või Moskvasse. Seda näitavad reaalsed ajarännud. Reaalne ajas rändamine ei avaldu nõnda, et kui rännatakse ajas minevikku, siis jõutakse küll õigesse aega, kuid mitte õigesse kohta. Ka sellisel korral liigub ajarändur hyperruumis ehk ajas lineaarselt, kuid kehade asukohtade muutused Universumis ( s.t. kehade liikumised ) põhjustavad sellise asukoha muutust, kuhu ajarännak sooritada tahetakse. Näiteks kui inimene sooritab ajarännaku minevikku planeedil Maa, siis ajas ta küll jõuab soovitud aega, kuid leiab ennast hoopis avakosmosest, sest Maa on juba eest ära liikunud ( Planeet Maa ju liigub maailmaruumis nii nagu näidatud joonisel I ). Sellist ajarännakut reaalselt tegelikult ei eksisteeri.

### ***1.11.2.3 Energia jäävuse seadus ajas rändamise korral***

Oletame seda, et kaugest minevikust rändab inimene ajas olevikku ( ehk siis meie praegusesse aega ). Sellisel juhul ilmub inimene sõna otseses mõttes „ei kusagilt“. See tähendab seda, et lihtsalt äkki on olemas üks võõras inimene. Kuid see on ju vastuolus energia jäävuse seadusega, mis ütleb väga selgelt seda, et energia ei kao ega teki, vaid see muundub ühest liigist teise. Inimest võib vaadelda ju ka füüsilise kehana ehk energiana. Sellisel probleemil on olemas kaks järgmist võimalikku lahendit, mis tulevad välja ajas rändamise teooriast:

1. Energia jäävuse seadus on küll rikutud, kuid seda ainult lühikeseks ajaks. See tähendab seda, et inimene küll rändab ajas ( näiteks minevikku ), kuid ajas, kuhu inimene rändas, saab ta olla ainult teatud kindla aja ja siis liigub ta „automaatselt“ oma aega tagasi – aega, kust ta ajas rändama hakkas. Sellise ajanihke korral teleportreerub inimene ajas minevikku, eksisteerib seal mõnda aega ja siis teleportreerub tagasi meie aega. Oluline on märkida seda, et inimene teleportreerub minevikust tagasi meie aega peaaegu täpselt samasse ajahetke, mil ta hakkas teleportreeruma minevikku – hoolimata sellest, et kui kaua inimene minevikus eksisteeris. Nii ei olegi energia jäävuse seadus rikutud. See sarnaneb elementaarosakeste-füüsikast tuntud osakestega mille korral vaakumis osakesed tekivad ja kaovad, kuid seda ainult teatud aja jooksul, et mitte rikkuda energia jäävuse seadust. Energia ei teki ega kao, vaid see muundub ühest liigist teise ongi energia jäävuse seaduse füüsikaline formulatsioon

ja kõik füüsikanähtused peavad sellele alluma.

2. Vastuolu energia jäävuse seadusega on siiski tegelikult näiline. Näiteks kui keha liigub ruumis ( keha asukoht ruumis muutub ), siis see ei ole vastuolus energia jäävuse seadusega. Kuid ärme unusta seda, et ajas liikumine on samas ka ruumis liikumine vastavalt erirelatiivsusteooria põhiprintsiibile – aeg ja ruum on üksteisest lahutamatult seotud. See tähendab ka seda, et liikudes ajas peame liikuma ka ruumis. Ruumis liikudes ei ole keha vastuolus energia jäävuse seadusega. Ja seega kehtib ka see ajas liikumise korral.

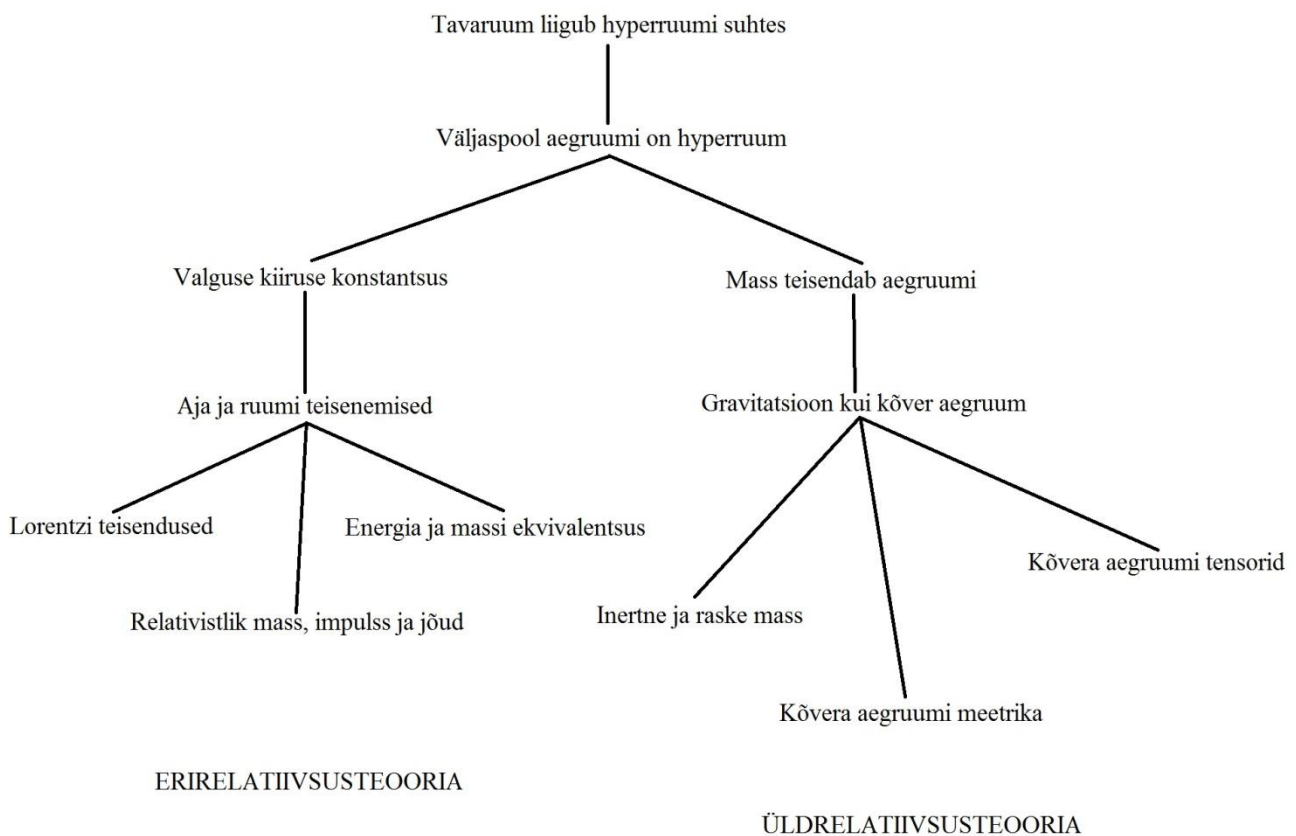
Kui kaugest minevikust rändab inimene ajas olevikku ( ehk siis meie praegusesse aega ), siis sellisel juhul ilmub inimene sõna otseses mõttes „ei kusagilt“: lihtsalt äkki on olemas üks võõras inimene. Kuid seevastu kauges minevikus kaob see sama inimene ära ehk „haihtub õhku“. Selles mõttes ei olegi vastuolu energia jäävuse seadusega, mis ütleb meile väga selgelt seda, et energia ei kao ega teki, vaid see muundub ühest liigist teise. Inimest võib vaadelda ka füüsilise kehana ehk energiana.

Energia jäävuse seadust ei rikuta siis, kui keha teleportreerub ruumis. Ruumis teleportreerumisel muudab keha oma asukohta ruumis kõigest 0 sekundi jooksul ja seega ei kao keha kusagile.

## 1.12 Relatiivsusteooria ajas rändamise teorias ( vanem materjal )

### 1.12.1 Sissejuhatus

Seni oleme ( ajas rändamise teooria põhiideedes ) käsitlenud lihtsat kolmemõõtmelist (tava)ruumi ehk eukleidilist ( või pseudoeukleidilist ) ruumi Cartesiuse ristkoordinaadistikus ( või sfäärilistes koordinaatides ). Seni oli kolmemõõtmeline (tava)ruum eranditult kõikjal eukleidiline ja aeg eranditult kõikjal alati „ühevoolavusega“. Kosmoloogias tegime me väikse erandi. Kuid nüüd edaspidi hakkame me vaatama seda, et see tegelikult ei ole nii. Aeg ( ehk kestvus ) ei ole kõikjal ühetaoline, vaid aeg „liigub“ erinevates taustsüsteemides erinevalt. Ka ruum ei ole kõikjal eukleidiline, vaid ruum ( tegelikult ka aeg ) on näiteks massiivsete kehade ümbruses kõver. Seda näitavad meile eri- ja üldrelatiivsusteooria. Kuid miks sellised aja ja ruumi efektid relatiivsusteoorias esinevad, seda me nüüd lähemalt vaatama hakkamegi. Relatiivsusteoorias esinevad aja ja ruumi efektid tulenevad just ajas rändamise teorias olevatest seaduspärasustest. Sellepärast enne relatiivsusteooriaga tutvumist käsitlesimegi just ajas rändamise teooriat. Aja ja ruumi efektid, mis on kirjeldatud relatiivsusteoorias, tulevad välja tegelikult just ajas rändamise teooriast.



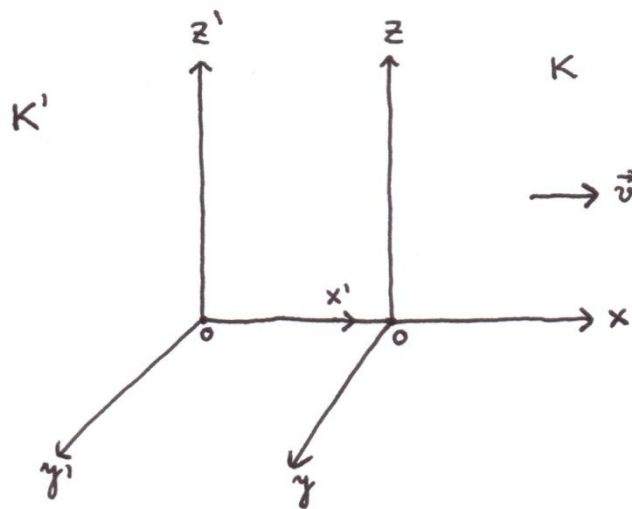
*Joonis 22 Eirelatiivsusteooria aluseks on Lorentsi teisendused ja üldrelatiivsusteooria aluseks on massi omadus mõjutada aegruumi meetrikat. Mõlemal juhul esineb aja ja ruumi teisendus, mis tuleneb omakorda materiaalse keha „siirdumisest“ tavaruumist hyperruumi ehk väljapoole aegruumi. Hyperruumis ehk väljaspool aegruumi ei eksisteeri enam aega ega ruumi.*

### 1.12.2 Eirelatiivsusteooria

Eirelatiivsusteoorias ei käsitleta rasket massi ( mis on seotud gravitatsiooniga ), vaid ainult inertset massi. Aeg ja ruum on seotud taustsüsteemiga. Järelikult arvestatakse eirelatiivsusteoorias ainult inertsiaalseid taustsüsteeme. Kogu eirelatiivsusteooria füüsika tuleneb aja ja ruumi teisenemistest ehk Lorentzi aja ja ruumi teisendusvalemistest.

#### 1.12.2.1 Valguse kiirus vaakumis

Eirelatiivsusteooria ei anna vastust küsimusele, et miks esineb aja ja ruumi teisenemine, kui keha liikumiskiirus läheneb valguse kiirusele vaakumis? Vastuse sellele fundamentaalsele küsimusele leiame ajas rändamise teooriast. Selleks, et rännata ajas ( ehk liikuda ühest ajahetkest teise ), peab keha olema ajast ( ja ka ruumist ) „väljas“. See on üldse esimene füüsikaline tingimus sooritamaks tõelist aja rännakut. Väljaspool aega ei eksisteeri enam aega. Eespool tõestasime, et  $K'$ -s ehk hyperruumis liikudes rändab keha ajas. Seega hyperruumis ei eksisteeri enam aega ( ega ka ruumi ). Kuna tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes, siis järelikult keha jõudmiseks hyperruumi ehk  $K'$ -i peab keha liikumiskiirus tavaruumis  $K$  ( milles eksisteerib aeg ja ruum ) suurenema. Kuna  $K'$ -s ehk hyperruumis aega ei eksisteeri ( s.t. aeg on lõpmatuseni aeglenenud ehk aeg on peatunud ), siis seega lähenedes hyperruumile ( ehk keha liikumiskiiruse suurenemisel tavaruumis  $K$  ) aegleneb aeg. Kuid aja aeglenemine keha liikumiskiiruse kasvades on teada ainult eirelatiivsusteooriast: näiteks mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Keha liikumiskiiruse lähenemist valguse kiirusele vaakumis võib antud kontekstis tõlgendada keha liikumiskiiruse kasvuna tavaruumis  $K$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes hakkab keha paigale jääma. Järelikult  $K$  liigub  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$ . Kuna aeg ja ruum on üksteisest lahutamatult seotud, siis aja aeglenemisega käib kaasas ka keha pikkuse lühenemine, mis on samuti tuntud eirelatiivsusteooriast.



Joonis 23 K liigub K' suhtes valguse kiirusega.

Füüsikaseadused on kõikides inertsiaalsüsteemides ühesugused. Teisiti öeldes on kõik inertsiaalsüsteemid samaväärsed ja mitte mingisuguste katsetega ( olgu mehaanikas, optikas või muul alal ) ei saa näidata seda, et üks süsteem oleks teistest eelistatavam. Eirelatiivsusteooria laiendab suhtelisust. Relatiivsusteooriaga klassikalises mehaanikas tegime tutvust juba eespool.

Valguse kiirus vaakumis on seotud ka elektri- ja magnetkonstandiga ( vastavalt  $\epsilon_0$  ja  $\mu_0$  ) järgmiselt:  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . See on elektromagnetlainete ( s.t. valguse ) levimiskiirus vaakumis, mida tähistatakse tähega c.

### 1.12.2.2 Relativistliku mehaanika tulenev ajas rändamise teooriast

Kosmoloogia osas ehk Universumi paisumise mudelis tuletatud üldvõrrandist

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

on võimalik tuletada korraga nii aja dilatatsiooni kui ka pikkuse kontraktsiooni valemid, mis on täiesti identsed eirelatiivsusteooriast tuntud aja ja ruumi teisenemise valemitega. Näiteks kui eelnevalt välja toodud üldvõrrandis on  $vt' = 0$ , siis saame teisendada järgmiselt:

$$ct = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

$$t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t,$$

milles

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

nimetatakse erirelatiivsusteoorias  $\gamma$ -faktoriks ehk kinemaatiliseks teguriks, mis näitab aja aeglustumist ehk aja dilatatsiooni välisvaatleja suhtes. Peale aja dilatatsiooni võrrandi saame ajas rändamise üldvõrrandist

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

tuletada ka kehade pikkuste kontraktsiooni valemi, kui teha järgmisi asendusi:  $t'c = d$  ja

$$ct + vt' = l$$

( kui  $vt' = 0$ , siis  $ct = l$  ):

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} d$$

ehk

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Nendest lihtsatest võrranditest on selgesti näha, et kehade pikkuse kontraktsiooni valemi:

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} d$$

saame ka siis, kui aja dilatatsiooni valemis:

$$t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'$$

korrutada mõlemad pooled valguse kiirusega  $c$ :

$$ct = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c \quad \rightarrow \quad l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} d,$$

sest  $ct = l$  ja  $t'c = d$ .

Tähelepanuväärne on see, et aja dilatatsiooni valem



$$t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'$$

ja pikkuse kontraktsiooni valem

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} d$$

tulevad välja ühest ja samast võrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c.$$

Kuid erirelatiivsusteoorias tulevad aja dilatatsiooni ja pikkuse kontraktsiooni valemid kahest erinevast võrrandist, mida nimetatakse Lorentzi teisendusvalemiteks:

$$x' = \gamma(x + vt) = \frac{(x + vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja

$$t' = \gamma\left(t + \frac{v}{c^2}x\right) = \frac{\left(t + \frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Need valemid näitavad aja ja ruumi koos-teisenemist. Näiteks kui  $x' = 0$  võrrandis on  $vt = 0$ , siis saamegi pikkuse kontraktsiooni valemi:  $x' = \gamma x$  ehk

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Kui aga  $t'$  valemis on  $\frac{v}{c^2}x = 0$ , siis saame aja dilatatsiooni valemi:  $t' = \gamma t$  ehk

$$t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'.$$

Sellest analüüsist järeldub, et  $x'$  valemis ei saa tuletada aja dilatatsiooni võrrandit ja samas  $t'$  valemis ei saa tuletada pikkuse kontraktsiooni valemit. Kuid meie üldvõrrandis

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

on võimalik tuletada korraga mõlemad valemid ehk nii aja kui ka ruumi teisenemise võrrandid. Seetõttu on antud üldvõrrand veelgi üldisem ja fundamentaalsem (s.t. mitmeti tõlgendatavam) kui erirelatiivsusteoorias tuntud Lorentzi teisendusvalemid. Lorentzi teisendusvalemitest tuletatakse välja kogu erirelatiivsusteooria füüsika, kaasaarvatud ka relativistlik mehaanika.

Erirelatiivsusteoorias seisnevad aja ja ruumi teisenemised selles, et kui keha liikumiskiirus

läheneb valguse kiirusele vaakumis, siis esineb aja aeglenemine ehk aja dilatatsioon ja keha pikkuse kontraktsioon ehk selle lühenemine välisvaatleja suhtes. Keha omaaeg ja omapikkus ei muutu. Valguse kiirust vaakumis ei ole võimalik ületada. Kuid antud Universumi paisumise mudelit kirjeldavas üldvõrrandis

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

on  $c$  kera paisumise kiirus ja  $v$  on keha  $m$  kiirus ( vaakumis ), mis liigub paisuva kera pinnal alati risti kera raadiusega. Sellises mudelis läheneb keha  $m$  liikumiskiirus kera paisumiskiirusele  $c$ . Valguse kiirust ehk antud juhul kera paisumiskiirust ületada ei ole realselt võimalik.

### 1.12.2.3 Aegruumi intervall

Mida enam aeg teiseneb välisvaatleja suhtes, seda väiksema „omaajaga“  $\tau$  mingisugust vahe-  
maad ruumis läbitakse ehk seda suuremaks muutub keha „omakiirus“. Seda näitab aegruumi intervalli meetriline võrrand, mis kirjeldab kahe punkti vahelist kaugust  $ds$  neljamõõtmelises aegruumis. See tähendab seda, et aja dilatatsiooni valemist on võimalik matemaatiliselt tuletada aegruumi intervalli võrrand. Selleks teeme alustuseks eelnevalt tuletatud aja dilatatsiooni valemis järgmised matemaatilised teisendused:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Tõstame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2$$

milles  $dt$  on

$$dt = \Delta t = t_2 - t_1$$

ja seega saame viimase võrrandi kirjutada kujul

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (t_2 - t_1)^2$$

Kahe ruumipunkti vahelist kaugust kolmemõõtmelises ruumis kirjeldab valem

$$l^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

milles kolme ruumikoordinaadi liikmed on vastavalt

$$\begin{aligned}dx &= x_2 - x_1 \\ dy &= y_2 - y_1 \\ dz &= z_2 - z_1\end{aligned}$$

Klassikalises mehaanikas defineeritakse keha liikumiskiirust  $v$  teepikkuse  $l$  ja aja  $t$  jagatisena:

$$v = \frac{l}{t}$$

Tõstame kiiruse  $v$  võrrandi mõlemad pooled ruutu ja arvestame sealjuures ka eelmisi seoseid:

$$v^2 = \frac{l^2}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}$$

Viime selle kiiruse ruudu eelnevalt tuletatud võrrandisse:

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(t_2 - t_1)^2$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$  ruuduga, tulemuseks saamegi aegruumi intervalli, mis kirjeldab kahe punkti vahelist kaugust neljamõõtmelises aegruumis:

$$c^2\tau^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Võtame tähistuseks  $s$ -i:

$$c\tau = s$$

ja saame aegruumi intervalli meetriliseks võrrandiks järgmise kuju

$$s^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Kuna  $\tau$  ei sõltu inertsiaalsüsteemist, siis kahe vaadeldava sündmuse A ja B vaheline intervall on kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugune. Intervall  $s$  on invariant, kuid ajavahemik ja lõigu pikkus ei ole invariantid. Valguse korral on intervall:  $\tau = 0$  ja seega:

$$0 = c^2 \Delta t^2 - l^2$$

Suurus, mis jääb muutumatuks ehk konstantseks mingi teisenduse käigus, nimetatakse füüsikas invariantiks (näiteks invariant on vektori pikkus koordinaadi pööramise käigus). Niisamuti ka kahe ruumipunkti vaheline kaugus  $ds$  on invariantne Galilei teisenduste suhtes:

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \text{const}$$

ehk

$$x_i x_i = \text{const}$$

Kuid kiiruse absoluutväärtus ei ole invariantne (välja arvatud ruumi pöörete korral). Valguse kiirus  $c$  on invariant Lorentzi teisenduste suhtes ja seetõttu on tema aegruumi intervall võrdne nulliga:

$$x_i x_i - c^2 t^2 = 0 = \text{invariant}$$

ehk

$$s = \sqrt{\Delta x_i \Delta x_i - c^2 \Delta t^2} = \text{invariant}$$

Kogu relativistlik dünaamika on invariantne aegruumi pöörete suhtes. Seda ka aegruumi intervall ehk kahe punkti vaheline kaugus  $s$  aegruumis:

$$s^2 = \Delta x_\mu \Delta x_\mu = \sum_{\mu=1}^4 \Delta x_\mu^2 = \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2$$

milles  $\mu = 1, 2, 3, 4$ ,  $\Delta l^2 = \Delta x_j \Delta x_j$  ja  $\Delta x_4 = ic \Delta t$ . Viimane intervalli valem avaldub ka järgmiselt:

$$ds = \sqrt{dl^2 - c^2 dt^2}$$

mildest on võimalik tuletada näiteks aja dilatatsiooni võrrand:

$$ds = -cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -cdt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{dl^2}{dt^2}}$$

Kahe punkti vahelist kaugust neljamõõtmelises aegruumis kirjeldab aegruumi intervall:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ehk

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Aegruumi intervallist me järgnevalt lähtumegi, et kirjeldada kahe punkti vahelist kaugust teisene- nud aegruumis. Tuletatud aegruumi intervalli meetrilisel võrrandil:

$$ds^2 = c^2 \tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt^2 - dl^2$$

on olemas ajaline osa

$$ds_1^2 = c^2 dt^2$$

ja ruumiline osa

$$-ds_2^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2) = -dl^2$$

See tähendab seda, et nende kahe osa liitmisel saamegi aegruumi intervalli meetrilise võrrandi:

$$ds_1^2 + (-ds_2^2) = ds_1^2 - ds_2^2 = ds^2$$

ehk

$$ds_1^2 - ds_2^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2$$

Aegruumi intervall  $ds$  on valguse kiiruse  $c$  ja „omaaja“  $\tau$  korrutis:

$$ds^2 = c^2 \tau^2$$

milles  $\tau^2 \neq dt^2$ . Mida lähemale valguse kiirusele  $c$  vaakumis, seda enam teiseneb aeg välisvaatleja suhtes ehk esineb aja dilatatsioon:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

ja seetõttu võime aegruumi intervalli avaldada järgmiselt ( koos aja dilatatsiooniga ):

$$d\tau^2 = c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Kuid peale ajalise osa on aegruumi intervalli võrrandis olemas ka ruumiline osa:

$$ds^2 = d\tau^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2 = dl^2$$

Antud võrrandis arvestame ainult keha pikkuse muutumist liikumise suunas:

$$ds^2 = dl^2$$

ehk

$$d\tau^2 = dl^2$$

kuna kahe ruumipunkti vaheline kaugus ehk pikkus muutub ainult liikumise suunas

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ehk

$$dl = d\tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Võttes aga viimase avaldise ruutu

$$dl^2 = d\tau^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

saamegi pikkuse teisenemise avaldise ainult liikumise suunas

$$d\tau^2 = \frac{dl^2}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

Aegruumi intervalli võrrandi ruumilise osa saame seetõttu avaldada järgmiselt:

$$ds^2 = d\tau^2 = \frac{dl^2}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

Kui me arvestame ajalist ja ruumilist osa samaaegselt ehk liidame need kaks poolt omavahel kokku, saamegi meetrilise võrrandi, mis kirjeldab matemaatiliselt aegruumi teisenemist keha liikumis-

kiiruse lähenemisel valguse kiirusele  $c$  vaakumis:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} dl^2$$

Sündmuste põhjuslikkust ehk põhjuslikkusega seotud seoseid kirjeldab valguskoonus. Kui tegemist on Minkowski aegruumiga, siis kirjeldab valguskoonust  $ct$ - $r$ -koordinaadistikus  $45^\circ$  nurga all olevad jooned. Joonis:

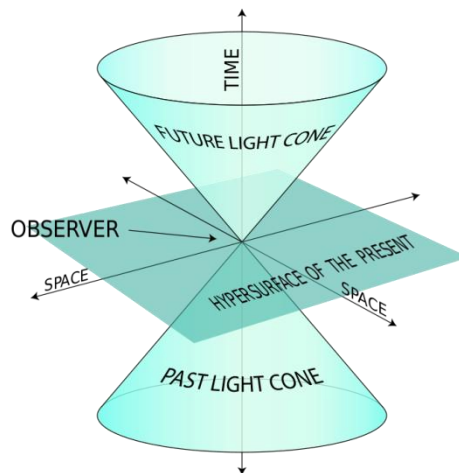


Foto allikas: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/World\\_line.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/World_line.svg)

Radiaalsuunas langeva valguse korral on 4-intervall Minkowski aegruumis:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 = 0$$

Sellest nähtub võrdus:

$$cdt = \pm dr$$

milles “+” märk kirjeldab punktist väljuvat valgussignaali ja “-” märk punkti sisenevat valgussignaali. Valgussignaali 4-intervall on Schwarzschildi koordinaatides esitatav järgmiselt:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$$

mildest omakorda nähtub:

$$cdt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{R}{r}}$$

Võtame viimasest avaldisest integraali, mille võrrandi parem pool esitub järgmiselt:

$$\pm \int \frac{dr}{1 - \frac{R}{r}} = \pm \int \frac{dr}{\frac{r - R}{r}} = \pm \int \frac{r dr}{r - R} = I$$

Kui saadud integraalis teeme muutujate vahetuse:

$$x = r - R$$

siis saame integraali kujuks:

$$I = \int \frac{x+R}{x} dr = \int \left(1 + \frac{R}{x}\right) dx = x + R \ln|x| + \text{const} =$$

$$= r - R + R \ln|r - R| + \text{const} \equiv r + R \ln|r - R| + \text{const}$$

See tähendab seda, et valgussignaali intervalli võrrand on kujul:

$$ct = \pm(r + R \ln|r - R| + \text{const})$$

Sellest järeldub, et aeg ja ruum on I piirkonnas “normaalsed”. Kuna geodeetilised jooned või nende maailmajooned asuvad valguskoonuse sees, siis seega osakeste jaoks on need ajasarnased. Kuid II piirkonnas vahetuvad omavahel aeg ja ruum. Maailmajoon on ajasarnane ehk avaldis:

$$1 - \frac{R}{r}$$

muudab märki siis, kui  $t$  on “fikseeritud”. Kui maailmajoon jääbki “ajasarnaseks”:

$$ds^2 < 0$$

siis peab kehtima võrdus:  $dr \neq 0$ . Sellest järeldub, et osake liigub Schwarzschildi pinna sees ainult punktsingulaarsuse suunas:  $r \rightarrow 0$ .

#### 1.12.2.4 Matemaatiline analüüs

Kui tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes, siis järelikult keha jõudmiseks hyperruumi ehk  $K'$ -i peab keha liikumiskiirus tavaruumis  $K$  ( milles eksisteerib aeg ja ruum ) suurenema. Kuna  $K'$ -s ehk hyperruumis aega ei eksisteeri ( s.t. aeg on lõpmatuseni aeglenenud ehk aeg on peatunud ), siis seega lähenedes hyperruumile ( ehk keha liikumiskiiruse suurenemisel tavaruumis  $K$  ) aegleneb aeg. Kuid aja aeglenemine keha liikumiskiiruse kasvades on teada ainult erirelatiivsusteooriast: näiteks mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Keha liikumiskiiruse lähenemist valguse kiirusele vaakumis võib antud kontekstis tõlgendada keha liikumiskiiruse kasvuna tavaruumis  $K$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes hakkab keha paigale jääma. Järelikult  $K$  liigub  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$ . Analüüsime seda järgnevalt matemaatiliselt.

Kosmoloogia osas tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c$$

on võimalik teha järgmised matemaatilised teisendused. Juhul kui  $ct = 0$ , saame järgmise võrrandi

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c .$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled  $t'$ -ga:

$$\frac{vt'}{t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{ct'}{t'}$$

ja sellest tulenevalt saame lõpuks järgmise väga olulise võrrandi:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Kuna aja dilatatsiooni võrrand, mis on tuletatav samuti ajas rändamise üldvõrrandist, on kujul

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja seetõttu saame kinemaatilise teguri avaldada järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'} .$$

Ajas rändamise üldvõrrandist tuletatud valemi

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

saame seega viia järgmisele matemaatilisele kujule:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{ct}{t'}$$

ehk

$$v = c \frac{t}{t'} .$$

Viime  $t'$  teisele poole

$$vt' = ct$$

ja teisendame viimast võrrandit kujule:

$$v \Delta t = ct ,$$

milles  $\Delta t = t'$ . Viimasest tuletatud väga olulisest võrrandist, mis viib lõpuks kvantmehaanika füüsikalise mõistmiseni

$$v \Delta t = ct$$

on selgelt näha seda, et keha  $m$  liikumiskiirus  $v$  sõltub aja kulgemisest ( näiteks mida rohkem aeg



teiseneb välisvaatleja suhtes, seda väiksema omaajaga jõuab keha liikuda ühest ruumipunktist teise ) või keha liikumiskiirus ise tingib aja kulgemise iseloomu ( näiteks mida kiiremini liigub keha, seda enam teiseneb aeg ):

$$v = \frac{ct}{\Delta t}$$

Teepikkus  $ct$  võib olla valguse teepikkus tavaruumi  $K$  suhtes või seisumassiga keha teepikkus hyperruumi  $K'$  suhtes:

$$v = \frac{s}{\Delta t} ,$$

milles  $s = ct$ . Järgnevalt analüüsime aja teisenemise

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tulenevust hyperruumi  $K'$  ja tavaruumi  $K$  füüsikalisest süsteemist. Näiteks kui keha massiga  $m$  liigub tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$  ( see võib olla näiteks valguse liikumine vaakumis ), siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal ehk  $v' = 0$ . Eelnevalt tuletatud valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

on sellisel juhul  $v = c$ :

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}$$

ja saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks

$$v' = 0 .$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui keha liigub vaakumis kiirusega  $c$  mistahes vaatleja suhtes, siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal ( s.t. „absoluutselt paigal“ ). Kuna keha  $m$  liigub sellisel juhul tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$ , siis aeg on tavaruumi  $K$  suhtes teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja seetõttu saame hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0 .$$

See tähendab seda, et kui keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes liikumiskiiruseks  $c$  ehk  $v = c$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = c .$$

Kui aga keha  $m$  on hyperruumi  $K'$  suhtes paigal ehk  $v' = 0$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes on aeg teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$v' = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui mingi keha liigub vaakumis kiirusega  $c$ , siis see on konstantne kiirus mistahes vaatleja jaoks, kes vaakumis parajasti eksisteerivad. See tuleneb otseselt sellest, et mida lähemale jõuame keha liikumiskiirusele  $c$ , seda aeglasemini kulgeb aeg välisvaatleja suhtes. Kiirusel  $c$  liikudes läheb ajavahe  $\Delta t$  lõpmata suureks ehk

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja see tähendab seda, et välisvaatleja suhtes kulgeb aeg lõpmata aeglaselt, kuid keha enda suhtes (nõ. keha „omaajas“) kulgeb aeg lõpmata kiiresti. See tähendab seda, et keha jõuab omaajas tavaruumis  $K$  (näiteks vaakumis) mistahes ruumipunkti hetkega ehk lõpmata suure kiirusega:  $v \rightarrow \infty$ . Kuid hyperruumi  $K'$  suhtes on keha „absoluutselt“ paigal ja seetõttu ei ole hyperruumi  $K'$  suhtes ka aja teisenemist ehk:

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t.$$

See tähendab seda, et hyperruumi  $K'$  suhtes on keha kiirus „omaajas“ lõpmata väike. Kui keha massiga  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes aga hoopis paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes liigub see kiirusega  $v' = c$ . Näiteks kui me kiiruse teisenemise valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

on kiirus  $v$  võrdne nulliga ehk

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}$$

siis saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks  $c$ :

$$v' = c.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et absoluutselt kõik kehad Universumis, millel on seisumass  $m_0$  ja seega seisuenergia  $E_0 = m_0 c^2$ , liiguvad valguse kiirusega  $c$  hyperruumi  $K'$  suhtes, kuid samas võivad need meie tavaruumis  $K$  olla paigal. Ka valguse suhtes liiguvad kõik kehad kiirusega  $c$ . Kuna keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t$$

ja seetõttu saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

See tähendab seda, et kui keha m on tavaruumi K suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi K' suhtes on aeg teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{s}{\infty} = 0.$$

Kui keha m liigub hyperruumi K' suhtes kiirusega c ehk  $v' = c$ , siis tavaruumi K suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$v' = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

See tähendab seda, et kui valguse korral oli nii, et liikudes vaakumis ehk tavaruumis K kiirusega c ja seetõttu omaajas jõudis valgus hetkega mistahes ruumipunkti tavaruumis, siis siin antud juhul on olukord aga vastupidine. Näiteks seisumassiga kehad liiguvad hyperruumi K' suhtes kiirusega c ja sellest tulenevalt on hyperruumi ja tavaruumi ajavahe lõpmata suur. See tähendab seda, et hyperruumi K' poolt vaadatuna kulgeb aeg tavaruumis ehk kogu meie Universumis tervikuna lõpmata kiiresti, kuid tavaruumis olles kulgeb aeg vaatleja jaoks tavapärase tempos ja aja kulgemine ei näi mitte kunagi katkevat ehk selle eksisteerimine näib olevat igavikuline. Kuna kõik kehad liiguvad hyperruumi K' suhtes kiirusega c, siis seega hõlmab „omaaeg“ hyperruumi suhtes vaadatuna üle kogu Universumi ehk kogu tavaruumi K. Selles mõttes kõik kehad Universumis, millel on seisumass ja seisuenergia ning mis liiguvad hyperruumi suhtes kiirusega c, liiguvad hyperruumi poolt vaadatuna ( ehk nõi. hyperruumi omaajas ) lõpmata suure kiirusega ehk  $v \rightarrow \infty$ , sest aeg kulgeb lõpmata suure kiirusega.

Selle paremaks mõistmiseks toome järgnevalt välja ühe mõttelise eksperimendi. Näiteks kogu meie paisuv Universum on nagu üks hiigel suur taustsüsteem, milles esineb üleüldine ehk globaalne aja ja ruumi teisenemine. Selles hiigel suures taustsüsteemis ( mis on Universumi suurune ) eksisteerivad lõputu hulk väiksemaid taustsüsteeme nagu näiteks liikuvad ehk inertsiaalsed taustsüsteemid ( milles avalduvad erirelatiivsusteooria seaduspärasused ) ja mitteinertsiaalsed taustsüsteemid ehk gravitatsiooniväljad ( milles avalduvad üldrelatiivsusteooria seaduspärasused ). Oletame, et meil on kaks vaatlejat, kellest üks asub meie paisuvas Universumis ja teine hüpoteetiline vaatleja asub sellest väljapool. Paisuva Universumi sees olevale vaatlejale tunduvad Universumis toimuvad sündmused kulgevad normaalselt jadapidi, kui välja arvata erinevates taustsüsteemides esinevaid aja kulgemisi, mille erinevusi võivad põhjustada kehade liikumiskiiruste või raskusjõu erinevad vahekorrad. Kuid teisele vaatlejale, kes asub paisuvast Universumist väljapool, tundub aeg Universumis kulgevat lõpmata kiiresti.

Valgus liigub tavaruumi K suhtes ehk vaakumis kiirusega c ja see on konstantne mistahes vaatleja jaoks, kes parajasti vaakumis eksisteerivad. See tuleneb otseselt sellest, et mida lähemale jõuab keha kiirus valguse kiirusele vaakumis, seda aeglasemini kulgeb aeg ja seda lühem on keha pikkus välisvaatleja suhtes. Kui mingi keha või taustsüsteem liigub täpselt valguse kiirusega c, siis aeg on välisvaatleja suhtes aeglenenud lõpmatuseni:

$$v = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0$$

Välisvaatleja jaoks on valguse kiirusega liikuvale kehal kiiruseks c, kuid kiirusega c liikuva keha enda suhtes ehk nõi. omaajas jõuab see mistahes ruumipunkti ühe hetkega ehk tema kiirus on seega lõpmata suur. See tähendab füüsikaliselt seda, et valguse kiirusega liikuvale kehal on liikumiskiirus

omaajas lõpmata suur, kuid välisvaatleja suhtes on selle keha kiirus ruumis ikkagi  $c$ . Ükskõik kui suur on vahemaa ruumis ehk  $\Delta x = c\Delta t$ , läbib valguse kiirusega liikuv keha selle teepikkuse omaajas alati 0 sekundiga ehk  $\Delta t = 0$ :

$$v = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{0} = \infty$$

Oluline on märkida seda, et viimane valem ei tule matemaatikast otseselt välja:

$$v = \frac{ct}{\infty} \neq \frac{ct}{0}.$$

Seda saab tuletada ainult füüsikalise analüüsi teel.

### 1.12.2.5 Aja dilatatsioon

Mida lähemal on keha liikumiskiirus valguse kiirusele vaakumis, seda aeglasemalt kulgeb aeg. Matemaatiliselt kirjeldab seda järgmine võrrand:

$$t' = \gamma t$$

kus kordajat  $\gamma$ , mis sõltub ainult kiirusest  $v$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

nimetatakse kinemaatiliseks teguriks. See näitab seda, et mitu korda liiguvad füüsikalised protsessid aeglasemalt liikuvast süsteemist. See näitab ka kellade käiku erinevates süsteemides ehk seda, et mitu korda käib liikuv kell aeglasemalt kellast, mis ei liigu. Kinemaatiline tegur erineb ühest väga vähe siis kui kiirused  $v$  on väga väikesed. Kinemaatiline tegur näitab aja aeglenemist ehk aja kadumist. Kasutades aga järgmist binoomilist ekspansiooni:

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + \dots + x^n$$

ehk summana välja kirjutades

$$(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} x^k$$

ja arvestades sealjuures matemaatilisi seaduspärasusi

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

$$0! = 1$$

saame kinemaatilise teguri  $\gamma$  välja kirjutada järgmisele kujule:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \dots$$

Kui aga  $v/c$  avaldis asendada  $\beta$ -ga, saame võrrandi välja kirjutada niimoodi:

$$\gamma = 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3\beta^4}{8} + \dots$$

On võimalik kasutada ka ligikaudseid valemeid. Näiteks kui kinemaatiline tegur  $\gamma$  avaldub

$$\gamma \sim 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

siis seega aja dilatatsiooni võrrandi saame

$$T \approx T_0 \left[1 + \frac{v^2}{2c^2}\right]$$

Kuid  $1/\gamma$  korral avaldub kinemaatiline tegur ligikaudsetes valemities aga järgmiselt:

$$\frac{1}{\gamma} \sim 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

See oli matemaatiline versioon aja aeglenemisest, mis on tingitud kehade liikumiskiiruse suurest kasvust ehk siirdumisest tavaruumist üle hyperruumi. Hiljem vaatame pikkuse kontraktsiooni, mille korral keha liigub siis ruumist välja ehk ruumitusse dimensiooni. Aja ja ruumi teisenemised, mida avastas A. Einstein 1905. aastal erirelatiivsusteoorias, olid matemaatilised avaldised aja ja ruumi kadumisest kehade suure liikumiskiiruse kasvu korral ehk siis siirdumisel tavaruumist hyperruumi. Need näitavad aja aeglenemist ( ehk aja kadumist ) ja pikkuse lühenemist ( ehk ruumi kadumist ) matemaatiliste võrranditena. Näiteks kui keha liigub valguse kiirusega vaakumis, siis aeg ja ruum lakkavad üldse eksisteerimast:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$$

ja seda sellepärast, et

$$v = c.$$

Siin on selgesti näha seda, et aega ja ruumi ei ole, kui keha liigub vaakumis valguse kiirusega. Järelikult sellele lähenedes ( valguse kiirusele vaakumis ) hakkavad aeg ja ruum kaduma, mis väljendubki aja aeglenemises ja keha pikkuse lühenemises.

Kõikides taustsüsteemides jääb aga omaaeg samasuguseks. See ei muutu. Kuid see on kõigest

illusioon, sest aja aeglenemist inimene ei taju. Seda tajutakse ainult siis, kui näiteks saaksime kõrvalt vaadata rongi sisse, mis liigub valguse lähedase kiirusega. Kellad käiksid rongi sees tuhandeid kordi aeglasemalt, kui rongist väljas olles. Rongi sees istuvale inimesele tundub aeg kulgevat aga normaalselt, kuid väljaspool seda rongi tundub vaatlejale rongis olev ajakulg aeglenevat. On selgesti näha seda, et vaatlejale ei ole näiteks aja aeglenemine ehk aja kadumine tajutav seni, kuni ta ei eksisteeri süsteemist, kus aja dilatatsioon aset leiab, väljaspool. Omaaja jäävus taustsüsteemides on seega tegelikult näiline. Omaaja jäävust tegelikult ei ole. Kui see aga oleks siiski nii, siis peab omaaeg ju sama olema ka süsteemist väljaspool olevale vaatlejale. Kuid nii see siiski ei ole. Kõik eelnev kehtib sisuliselt ka pikkuse kontraktsiooni kohta.

#### 1.12.2.5.1 Imaginaarne aeg

Aja dilatatsioon sõltus füüsikalise keha liikumiskiirusest  $v$  valguse kiiruse  $c$  suhtes järgmiselt:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mille korral on keha liikumiskiirus  $v$  alati väiksem valguse kiirusest  $c$  ehk  $v < c$ . Valguse kiirusega  $c$  liikuva keha korral ehk „aegruumi piiri“ korral võrdub aja dilatatsioon lõpmatusega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \infty$$

milles  $v = c$ . Matemaatiliselt on võimalik aga edasi analüüsida. Näiteks kui mõni füüsikaline keha liiguks kiiremini kui valgus vaakumis ehk  $v > c$ , siis aeg muutuks sellisel juhul „imaginaarseks“:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - 2}} = \frac{t}{\sqrt{-1}} = \frac{t}{\pm i}$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\pm i}$$

Aeg on sellisel juhul imaginaarne ja seetõttu peame kasutama kompleksarvude matemaatikat, mis sisaldab imaginaarühikut  $i$ . Näiteks kompleksarv esitatakse matemaatikas järgmise võrrandiga

$$z = a + bi$$

ja selle kaaskompleksarv avaldub:

$$z^* = a - bi$$

Kompleksarvu ruut võrdub:

$$z^2 = a^2 + 2abi - b^2$$

milles  $i$  on imaginaarühik  $i = \sqrt{-1}$ , võrrandi reaalosa on

$$z^2 = a^2 - b^2$$

ja imaginaarosa on

$$z^2 = 2ab$$

Kuid kompleksarvu võrrandi

$$z = a + bi$$

$a$  liige on võrrandi reaalosa ja  $bi$  liige on imaginaarosa ning  $a$  ja  $b$  ise on reaalarvud. Ajamõõde ehk ajaline dimensioon muutus meil antud juhul imaginaarseks:

$$t' = \frac{t}{\pm i}$$

ehk

$$t = t'i$$

Kompleksarvu võrrandina avaldub see aga järgmiselt:

$$t = z = 0 + t'i = t'i$$

ehk

$$t = t'i$$

milles võrrandi reaalosa on null ja imaginaarosa on  $t'i$ . Sellisel juhul on võrrandis:

$$t = z = a + bi$$

$a = 0$  ja  $b = t'$ . Kuna võrrandi reaalosa võrdub nulliga, siis seega füüsikalisi järeldusi ei ole võimalik teha, sest füüsikalisi nähtusi või seadusi on võimalik kirjeldada ainult võrrandi reaalosaga. Kompleksarvu imaginaarühik  $i$  väljendub matemaatilises analüüsis ka geomeetrilise funktsioonina:

$$\sqrt{-1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

ehk

$$\sqrt{-1} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$$

Imaginaarühik  $i$  võib olla positiivne või negatiivne:

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Siinkohal võib tuua ka erandi, mille korral kompleksarvu üldse ei tekigi ehk aeg ei teisene ega muutu imaginaarseks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{0}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \infty}}$$

Tõstame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$t'^2 = \frac{t^2}{(1 - \infty)} = \frac{t^2}{-\infty} = 0$$

ja näeme seda, et aeg ei ole enam imaginaarne, vaid see võrdub hoopiski nulliga:

$$t' = 0$$

ehk aja dilatatsiooni ei esine üldse. See tähendab seda, et kordaja  $\gamma$  väärtus on null:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

kui  $c = 0$  ehk kui looduses ei esineks „piirkiirust“. Sealjuures ei ole tegelikult vahet, et kas kordaja  $\gamma$  on ruudus:

$$\gamma^2 = 0$$

või mitte:

$$\gamma = 0$$

### 1.12.2.6 Keha pikkuse kontraktsioon

Oletame seda, et Maa pealt alustab oma teekonda ruumilaev ühtlase kiirusega  $v$  kinnistähe suunas. Täht ise asub kaugusel  $l$ . Vaatleja, kes jäi Maale, mõõdab reisi kestuseks  $t$ :

$$t = \frac{l}{v}$$

kuid kell, mis eksisteerib laeva pardal, näitab vähem aega:

$$t' = \frac{t}{\gamma}$$

Seega reisi teekond on reisijatele lühenenud järgmiselt:

$$l' = t' v = \frac{t}{\gamma} v = \frac{l}{\gamma} = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Reisi alg- ja lõpppunkt liiguvad kiirusega  $v$ . Nii on see reisijaile laeva pardal, mitte Maale jäänule. Ainult niimoodi on võimalik seletada sellist lühenemist. Selline kontraktsioon tekib ükskõik millise liikumise sihilise pikkuse korral. Näiteks kui meetrine joonlaud liigub kiirusega  $0,8c$  ( ehk  $240\,000$  km/s ), siis see on ainult  $60$  cm pikkune. Kuid kaasaliikivas süsteemis on see joonlaud ikkagi  $1$  meetri pikkune. Kehade mõõtmed teistes suundades aga ei muutu. Näiteks kui kera liigub ülisuure kiirusega, siis see muutub just liikumise sihis kokkusurutud pöördellipsoidiks. Kinemaatiline tegur läheneb lõpmatuseni kui liikumiskiirus läheneb valguse kiirusele vaakumis ja selle tõttu läheneb keha pikkus nullile. ( Ainsaar 2001, 12 ).



### 1.12.2.7 Aja ja ruumi „koos-teisenemine“

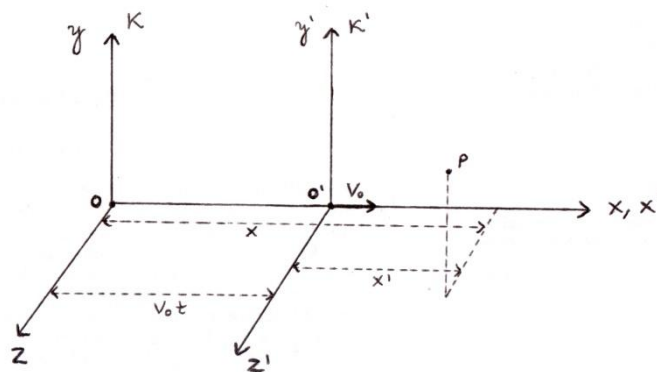
Taustsüsteemi kasutatakse keha mehaanilise liikumise kirjeldamiseks. Taustsüsteemi moodustavad taustkeha, sellega seotud koordinaadistik ja ajamõõtja ( ehk kell ). On olemas kahte liiki taustsüsteeme ja nendeks on siis inertsiaalsüsteemid ja mitteinertsiaalsüsteemid. Inertsiaalsüsteem on taustsüsteem, kus kehtib Newtoni I seadus. Igasugune taustsüsteem, mis liigub mingisuguse inertsiaalsüsteemi suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt on samuti inertsiaalsüsteem. Mitteinertsiaalsüsteem on selline taustsüsteem, mis liigub inertsiaalsüsteemi suhtes kiirendusega. Newtoni I seadus ei kehti mitteinertsiaalsüsteemides. Inertsiaalsüsteemi määratletakse ka kui taustsüsteemi, milles vaba keha liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt.

Taustkeha on keha, mille suhtes me liikumist vaatleme. Taustkeha loetakse enamasti liikumatuks. Taustkehal valitakse punkt, millega seotakse koordinaadistik. Näiteks keha asukoha määramiseks ruumis on vaja kolmest koordinaadist koosnevat koordinaadistikku. Kui keha aga liigub tasapinnal, siis piisab ainult kahest koordinaadist. Kui aga keha liigub sirgjoonel, siis kasutame ainult ühte koordinaati.

Järgnevalt on käsitletud kahte taustsüsteemi. Taustsüsteem  $K'$  liigub taustsüsteemi  $K$  suhtes kiirusega  $V$ . Liikumine toimub ühtlaselt ja sirgjooneliselt  $x(x')$  telje suunas.  $K'$ -s on koordinaadid  $x', y'$  ja  $z'$ .  $K$ -s on koordinaadid  $x, y$  ja  $z$ . Mõlemas taustsüsteemis on keha  $y$ - ja  $z$ -koordinaadid aga võrdsed:

$$y' = y \quad \text{ja} \quad z' = z.$$

Jooniselt on näha seda, et  $x'$ -koordinaat on seotud  $x$ -koordinaadiga:



Joonis 24  $K$  ja  $K'$  on siin taustsüsteemid.

Ajahetkel  $t = 0$  ühtivad  $K$  ja  $K'$  alguspunktid  $O$  ja  $O'$ , kuid ajamomendiks  $t$  on  $O'$  nihkunud  $O$  suhtes lõigu  $Vt$  võrra:

$$x = x' + Vt \quad \text{ehk} \quad x' = x - Vt.$$

Need on Galilei teisendused, mis on esitatud kõige lihtsamal kujul. Arvesse võtame ka veel  $y$  ja  $z$  ning  $y'$  ja  $z'$  vahelised seosed ja  $t = t'$ , saame:

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t.$$

Kui  $K'$  on liikuv taustsüsteem ja  $K$  on liikumatu taustsüsteem, siis on võimalik välja arvutada keha koordinaadid  $K'$ -s, kui on teada tema koordinaadid  $K$ -s.

Alguses ( $t = 0$ ) olid keha koordinaadid võrdsed ( $x_0' = x_0$ ). Kuid ajavahemiku  $\Delta t$  möödudes oli aga

$$x' = x - V\Delta t.$$

Siin tähendab märk  $\Delta$  ( millegi ) vahemikku, see on delta-märk.

Koordinaadid muutusid seejuures  $\Delta x' = x' - x_0'$  ja  $\Delta x = x - x_0$ . Arvestades neid võrdusi, on võimalik kirjutada:

$$x' - x_0' = x - x_0 - V\Delta t$$

ehk

$$\Delta x' = \Delta x - V\Delta t.$$

Saadud võrrandi jagame  $\Delta t$ -ga ja seejuures arvestame kiiruse definitsiooni ning  $\Delta t' = \Delta t$ , saame:

$$v' = v - V,$$

kus  $v'$  on keha kiirus taustsüsteemis  $K'$  ja  $v$  on keha kiirus taustsüsteemis  $K$ .  $K'$  liigub taustsüsteemi  $K$  suhtes kiirusega  $V$ . Viimane valem kehtib siis kui taustsüsteem  $K'$  liigub  $x$ -telje positiivses suunas. Kui aga on vastupidises suunas, siis tuleb valem aga järgmine:

$$v' = v + V.$$

Oletame seda, et alguses olid keha kiirused taustsüsteemides  $K$  ja  $K'$  järgmised:

$$v' = v - V.$$

Ajavahemiku  $\Delta t$  möödudes on aga järgmine:

$$v_1' = v_1 - V,$$

seejuures on muutunud kiirused aga  $\Delta v' = v_1' - v'$  ja  $\Delta v = v_1 - v$ .  
Kui aga

$$v_1' - v' = v_1 - v - V + V \quad \text{ehk} \quad \Delta v' = \Delta v.$$

Saadud valemi jagame mõlemad pooled  $\Delta t$ -ga ja arvestame kiiruse mõistet ning  $\Delta t' = \Delta t$ , saame:

$$a' = a.$$

Siin tuleb välja see, et keha kiirendus on muutumatu taustsüsteemide suhtes, mis liiguvad üksteise suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Veelgi üldisemalt võib aga seda sõnastada niimoodi: „*kõik mehaanilised nähtused toimuvad ühesuguselt kõigis inertsiaalsetes taustsüsteemides. Seda tuntakse Galilei relatiivsuspriprintsina*“. ( Ugaste 2001, 36-37 ).

Eelnevalt on Galilei Galileo teisendusvalemid avaldatavad järgmiselt:

$$\begin{cases} x = x' + vt' = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Need teisendusvalemid ei tohi muutuda koordinaatide alguspunkti nihutamisel ehk koordinaati  $x$ -i ei tohi asendada suurusega  $x+a$ . See tuleneb ruumi homogeensusest ja seda tingimust rahuldavad ainult lineaarsed teisendused. Selleks peab lineaarse teisenduse valem olema järgmise kujuga:

$$x = \gamma(x' + vt') = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

või

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

milles olev kordaja liige  $\gamma$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

on kinemaatiline tegur, mis oli meil juba varem teada ja matemaatiliselt tuletatud. Nendest koordinaatide teisendusvalemitest saame leida ka aja teisendusvalemi. Selleks teostame terve rida järgmisi matemaatilisi teisendusi. Koordinaatide teisendusvalemeid ( ja selle kaudu ka aja teisendusvalemeid ) on võimalik matemaatiliselt tuletada ka otse ajas rändamise teooria üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

Näiteks viime viimases võrrandis oleva ruutjuure avaldise teisele poole võrdusmärgi:

$$ct' = \frac{ct + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(ct + vt')$$

ja saame võrrandi:

$$ct' = \gamma(ct + vt')$$

milles  $\gamma$  on tuntud kinemaatiline tegur:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Järgmiselt teostame viimases saadud võrrandis matemaatilised asendused, kuna kiiruse ja aja korrutist defineeritakse füüsikas läbitud teepikkusena:

$$ct' = x'$$

$$ct = x$$

ja selleks, et võrrandis jääksid ülaindeksite ( ' ) liikmed kõik ühele poole võrdusmärgi, teeme ka järgmise asenduse:

$$+vt' = -vt$$

Sellest tulenevalt saamegi koordinaatide teisendusvalemid tavaruumis K liikuvate taustsüsteemide jaoks:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

ja

$$x = \gamma(x' + vt')$$

Keha pikkuse ehk ruumi teisendusvalemist  $x' = \gamma(x - vt)$  leiamegi aja  $t$  teisendusvalemi järgmiselt:

$$\frac{x'}{\gamma} = x - vt$$

ehk

$$vt = x - \frac{x'}{\gamma}$$

milles  $x$ -i võib avaldada koordinaadi teisendusvalemiga ja seejärel matemaatiliselt edasi teisendada järgmiselt, et leida aja teisendusvalem  $t$ :

$$vt = [\gamma(x' + vt')] - \frac{x'}{\gamma}$$

$$vt = \gamma x' + \gamma vt' - \frac{x'}{\gamma}$$

$$t = \frac{\gamma x' + \gamma vt' - \frac{x'}{\gamma}}{v}$$

$$t = \gamma \frac{x'}{v} + \gamma \frac{vt'}{v} - \frac{x'}{v\gamma}$$

$$t = \gamma \left[ t' + \frac{x'}{v} - \frac{x'}{v\gamma^2} \right]$$

$$t = \gamma \left[ t' + \frac{x'}{v} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right]$$

Viimasest võrrandist avaldame kineetilise teguri  $\gamma$ :

$$t = \gamma \left[ t' + \frac{x'}{v} \left( 1 - \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2} \right) \right]$$

ehk

$$t = \gamma \left[ t' + \frac{v}{c^2} x' \right]$$

Viimaks saamegi matemaatiliselt tuletatud aja teisendusvalemi t:

$$t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \frac{\left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

või

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) = \frac{\left( t - \frac{v}{c^2} x \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Neid valemeid nimetatakse ametlikus erirelatiivsusteoorias Lorentzi teisendusvalemiteks, milles on selgelt näha seda, et aeg t ja ruumikoordinaat x võivad ühekorraga muutuda:

$$x' = \frac{(x + vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{\left( t + \frac{v}{c^2} x \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Aeg t ja koordinaat x on meie süsteemis, kuid aeg t' ja koordinaat x' on aga süsteemis, mis meie suhtes liigub. Nii aja kui ka koordinaadi teisendusvalemid sõltuvad üksteisest. Neid valemeid nimetatakse Lorentzi teisendusvalemiteks. Nendest valemitest on võimalik tuletada aja aeglenemine

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja keha pikkuse lühenemine ehk kontraktsioon

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Näiteks kui me Lorentzi koordinaadi x teisendusvalemis

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

võtame v=0 või t'=0, siis saamegi keha pikkuse kontraktsiooni valemi:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk

$$x' = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Kui aga Lorentzi aja teisendusvalemis  $t'$

$$t' = \frac{\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

võtame  $v=0$  või  $x=0$ , siis saamegi aja aeglenemise ehk dilatatsiooni valemi:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Lorentzi teisendusvalemeid:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

ja

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

on võimalik kirja panna ka niimoodi:

$$x = \frac{x' + vty}{\gamma}$$

ja

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}xy}{\gamma},$$

milles

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

on n.ö. kinemaatiline tegur. Tuntud kinemaatilise teguri  $\gamma$  võib väljendada ka järgnevalt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

milles

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

Seega  $\gamma \neq \beta$ . Kui lähtuda üldistest teisendusvalemistest aegruumi koordinaatide vahel, siis on võimalik tuletada relatiivsusteoorias esinevad efektid. Teades seda, et kiirus on koordinaadi tuletis vastava aja järgi, on kiiruste liitumise relativistlik valem tuletatav Lorentzi teisendusvalemistest. Lorentzi teisendus näitab aja ja ruumi koos-teisenemist. Lorentzi teisendusi on lihtsam avaldada maatriks kujul:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Lorentzi aja ja ruumi teisendusvalemistest järeldub, et aja aeglenemine ei sõltu ruumi koordinaatidest  $x$ ,  $y$ , ja  $z$ , kuid seevastu keha pikkuse lühenemine esineb ainult keha liikumise sihis.

Aja aeglenemine on olemuselt aja kadumine ehk selle eksisteerimise lakkamine, sest aja

lõpmatust aeglenemist on võimalik mõista aja peatumisena. Kuid aja peatumine on olemuselt aja eksisteerimise lakkamine. Täpselt sama on ka ruumiga. Kahe ruumipunkti vahelise kauguse vähenemist või keha pikkuse lühenemist on võimalik mõista kui ruumi kadumisenä ( ruum kaob ), sest keha pikkuse lõpmatust lühenemist või kahe ruumipunkti vahelise kauguse lõpmatust vähenemist saab mõista kui ruumi eksisteerimise lakkamisenä. Näiteks kui keha pikkus lüheneb lõpmatuseni, siis tähendab see seda, et kehal ei olegi enam siis mingisugust pikkust ehk keha ruumala on kahanenud nulliks.

Kui väita, et aeg ei kao, siis pole ka aja aeglenemist. Kuid aja aeglenemine siiski toimub. Aja aeglenemine ja keha pikkuse kontraktsioon on relatiivsed ( kuid siiski reaalsed ) nähtused, mis tähendab seda, et ühe vaatleja jaoks need nähtavalt avalduvad, kuid mõne teise vaatleja jaoks aga mitte. See tähendab seda, et keha „omaaeg“ ja „omapikkus“ jäävad igasugustel aja ja ruumi teisenemistel samaks. Näiteks mida lähemale rongi liikumise kiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aeg aegleneb rongis ja rongi pikkus lüheneb vaatleja jaoks, kes vaatleb rongi liikumist kõrvalt. Kuid rongi sees olevale vaatlejale kulgeb aeg tavapärase kiirusega ja rongi pikkus on sama, mis paigalseisteski. See näitab väga ilmekalt seda, et aegruumi teisenemist ( ehk selle eksisteerimise lakkamist ) inimene ei taju, kui ta eksisteerib parajasti süsteemis, kus aegruumi teisenemine toimub. Kuid väljaspool seda süsteemi on seda juba tajutav. Selle heaks näiteks on kaksikute paradoksi juhtum. Näiteks kui üks kaksikvendadest läheb kosmosereisile ja naaseb hiljem Maale tagasi, siis ei ole vennad enam ühevanused. Kosmoserändur on jäänud vennast nooremaks. Teoreetiliselt võib vanusevahe suurendada piiramatult. Analüüsime seda pisut matemaatilisemalt. Võtame näiteks sellise juhu, et kui isa reisib Maast eemale 2 aastat ja tagasi teine 2 aastat ( isa poolt mõõdetud ajavahemikud ), siis on ta oma tütre 20 aastat noorem. Enne reisi algust oli isa oma tütre 20 aastat vanem. Seega saame konstantse kiirusparameetri  $\beta$  Maa suhtes järgmiselt:

$$40 = 4y$$

milles

$$y = 10 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

milles

$$\beta = 0,995.$$

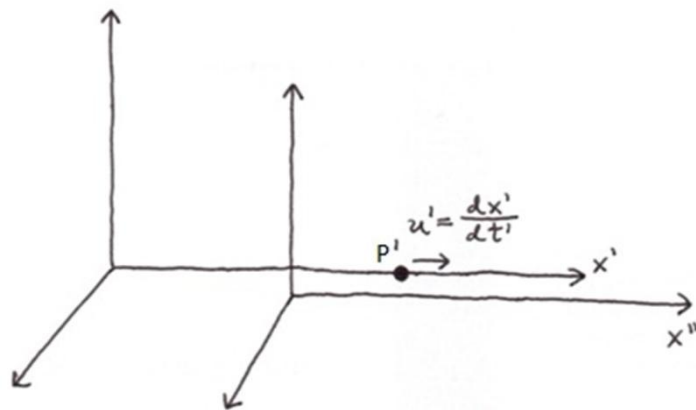
Kuid siiski tekib küsimus, et miks ei jäänud Maale jäänud inimene nooremaks, kuna me võime lugeda mistahes keha paigalseisvaks ja seega liikus ta ju koos Maaga kosmoselaevas oleva inimese suhtes? Nii tulebki välja see, et kahe reisija taustsüsteemid ei ole tegelikult lõpuni samaväärsed. Kosmoselaeva tagasi Maale ehk samasse inertsiaalsüsteemi naasmise korral ( ehk kiiruste võrdsustumise korral ) tuleb kosmoselaeval muuta kiirust aeglasemaks. Ühises lõppsüsteemis esineva aegade vahe põhjustabki kosmoselaeva vahepealne viibimine mitteinertsiaalsüsteemides.

Aja kulgemine erinevates taustsüsteemides on erinev ehk see on suhteline, mis sõltub vaatleja asukohast ruumis ehk sõltub taustsüsteemi valikust. Suhteline ehk relatiivne on ka inimese reaalne ajas teleportreerumine. Näiteks inimene võib hetkega teleportreeruda ajas 30 aastat tulevikku või selle asemel ta lihtsalt ootab 30 aastat ( mis on ka tegelikult ajas rändamine ), et jõuda hetke, mil teleportreerumisega oleks jõudnud ainult ühe hetkega. Ajas minevikku saab minna ainult teleportreerumisega. Teleportreerumisel ajas ja ruumis keha omaaega ja omapikkust enam ei eksisteerigi, sest keha teleportreerub ajas ja ruumis hetkega ( aega sellele ei kulu ).

„Kaksikute paradoks“ on aja aeglustumise efekt. Näiteks mida lähemale valguse kiirusele vaakumis inimene liigub, seda aeglasemini ta ka vananeb. Kuna hyperruumis aega ( ja ruumi ) ei ole ja lähenedes sellele aegleneb inimese vananemine. Seega kui inimene ainult eksisteeriks hyperruumis, siis ta üldse ei vananeks. Inimene ei vananeks ja seega ei sureks mitte kunagi. Järelikult oleks hyperruumis eksisteerides võimalik igavene elu. See on erirelatiivsusteooria kaksikute paradoksi edasiarendus. See näitab igavese elu võimalikust – kui aega ei eksisteeri, siis elu eksisteerimine oleks igavene.

Mida lähemale rongi liikumise kiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aegleneb aeg rongis ja rongi pikkus lüheneb vaatleja jaoks, kes vaatleb rongi liikumist kõrvalt. Kuid rongi sees olevale vaatlejale liigub aeg tavapärase kiirusega ja rongi pikkus on sama, mis paigalseisteski. Kui rongis liigub välisvaatleja jaoks aeg lõpmatuseni ( ehk aeg on peatunud ehk aega enam ei ole ) ja rongi pikkus on kahanenud lõpmatuseni ( ehk kahanenud nulliks ), siis rongi sees olev vaatleja ja rongist väljas olev vaatleja ei saa olla enam omavahel kontaktis. See tähendab sisuliselt seda, et igasuguse aja ja ruumi koos-teisenemise korral hakkab kontakt keha ja aegruumi vahel, milles keha eksisteerib, kaduma. Keha nagu „väljuks“ ajast ja ruumist. Ajas rändamise korral peab keha olema ju ajast väljas, et see saaks üldse liikuda ühest ajahetkest teise. See on üldse esimene füüsikaline tingimus sooritamaks tõelist aja rännakut.

### 1.12.2.8 Valguse kiiruse jäävusseadus vaakumis



Joonis 25 Punkti  $P'$  liikumine erinevate koordinaadistikude suhtes.

Punkt  $P'$  liigub koordinaadistikus  $T'X'Y'Z'$  mööda  $x'$  telge kiirusega:

$$u' = \frac{dx'}{dt'}$$

Punkti  $P'$  liikumiskiirus  $u''$  koordinaadistikus  $T''X''Y''Z''$  on

$$u'' = \frac{dx''}{dt''} = \frac{d\left(\frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)}{d\left(\frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)} = \frac{\frac{d(x' - vt')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{d\left(t' - \frac{vx'}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{d(x' - vt')}{d\left(t' - \frac{vx'}{c^2}\right)} = \frac{dx' - d(vt')}{dt' - d\left(\frac{vx'}{c^2}\right)} = \frac{dx' - vdt'}{dt' - \frac{vdx'}{c^2}} =$$



$$= \frac{\frac{dx' - v dt'}{dt'}}{\frac{dt' - \frac{v dx'}{c^2}}{dt'}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}.$$

Kui aga teeme viimases avaldises järgmise väikese asenduse

$$\frac{dx'}{dt'} = u'$$

saame liikumiskiiruseks

$$u'' = \frac{u' - v}{1 - \frac{vu'}{c^2}}$$

Kuid koordinaadistikus  $T'X'Y'Z'$  on punkti  $P''$  kiirus mööda  $x''$  telge:

$$w'' = \frac{dx''}{dt''}$$

Sellise punkti kiirus  $w'$  on koordinaadistikus  $T'X'Y'Z'$  aga järgmine:

$$w' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d\left(\frac{x'' + vt''}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)}{d\left(\frac{t'' + \frac{vx''}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)} = \frac{\frac{dx''}{dt''} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx''}{dt''}}$$

millest saame lõpliku avaldise

$$w' = \frac{w'' + v}{1 + \frac{vw''}{c^2}}$$

Kui liikumiskiirused on valguse kiirusest vaakumis palju kordi väiksemad, siis võib võtta järgmiste seoste asemele lihtsama kujuga valemid, mis on siis ka kooskõlas Galilei teisendustega:

$$w' = \frac{w'' + v}{1 + \frac{vw''}{c^2}}$$

$$u'' = \frac{u' - v}{1 - \frac{vu'}{c^2}}$$

Näiteks kui liikumiskiirused on palju väiksemad valguse kiirusest vaakumis, siis avaldis

$$\frac{v}{c^2}$$

on väga väike ja seepärast on väikesed ka järgmised suurused:

$$\frac{vu'}{c^2}$$

$$\frac{vw''}{c^2}$$

Sellepärast ei ole väga suurt erinevust ühe ja

$$1 - \frac{vu'}{c^2}$$

ning vastavalt ühe ja

$$1 + \frac{vw''}{c^2}$$

vahel. Seega ei ole väga suurt erinevust ka  $u'-v$  ja

$$\frac{u' - v}{1 - \frac{vu'}{c^2}}$$

ning vastavalt  $w''+v$  ja

$$\frac{w'' + v}{1 + \frac{vw''}{c^2}}$$

vahel. Valguse kiirusest ( vaakumis ) väiksemate kiiruste korral on võimalik valemite

$$w' = \frac{w'' + v}{1 + \frac{vw''}{c^2}}$$

$$u'' = \frac{u' - v}{1 - \frac{vu'}{c^2}}$$

asemele võtta valemid vastavalt  $u'' = u' - v$  ja  $w' = w'' + v$ .

Oletame nüüd seda, et punkti P` liikumise kiirus  $u'$  on võrdne valguse kiirusega vaakumis  $c$ . Punkt P` liigub seejuures koordinaadistikus T`X`Y`Z` mööda  $x'$  telge. Punkti P` kiirus  $u''$  koordinaadistikus T``X``Y``Z`` on

$$u'' = \frac{u' - v}{1 - \frac{vu'}{c^2}}$$

ja seega saame liikumiskiiruse  $u''$  järgmiselt:

$$u'' = \frac{u' - v}{1 - \frac{vu'}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c - v}{\frac{c - v}{c}} = \frac{c(c - v)}{(c - v)} = c$$

Kui aga punkt P'' liigub koordinaadistikus T'X'Y'Z'' mööda x'' telge valguse kiirusega c (w''), siis selle punkti kiirus koordinaadistikus T'X'Y'Z' on avaldatav valemist

$$w' = \frac{w'' + v}{1 + \frac{vw''}{c^2}}$$

millest saame punkti kiiruseks:

$$w' = \frac{w'' + v}{1 + \frac{vw''}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c + v}{\frac{c + v}{c}} = \frac{c(c + v)}{(c + v)} = c$$

Siin ongi näha seda, et kui keha liigub valguse kiirusega, siis ei tule sellele kiirusele midagi juurde ega ei lähe ka midagi maha. See ei olene sellest, et kas liikumine, mida antud juhul vaadeldakse, ise toimub liikuvast või paigalseisvas koordinaadistikus. Suurus „valguse kiirus“ on analoogiline suurusega „intervall“. Muide peale footonite on olemas ka teisi osakesi, mis liiguvad vaakumis valguse kiirusega. Näiteks  $\pi$ -mesonid.  
(Lorents 1998, 98-101).

### 1.12.2.9 Kineetiline energia erirelatiivsusteoorias

Üldvõrrandist

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

on võimalik tuletada ka keha seisuenergia valem  $E = mc^2$ . Kui  $ct = 0$ , siis saame järgmised matemaatilised teisendused:

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

ehk

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Keha kineetiline energia  $E$  avaldub valemiga:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Matemaatilisest analüüsist on teada ritta arendamise võrrand, mida nimetatakse „Tylori reaks“:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

Järgnevalt tõestamegi, et Tylori rida kasutades saame tuletada keha kineetilise energia valemi  $E = T$ :

$$T = m_0 c^2 \left[ 0 + \frac{\beta^2}{2} - \frac{3\beta^4}{8} + \dots \right] = \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3m_0 v^2 \beta^2}{8} + \dots$$

milles otsitav põhiliige ongi:

$$\frac{m_0 v^2}{2}$$

Kasutades matemaatikast tuntud Tylori rida:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots$$

on kinemaatilise teguri  $\gamma$  võimalik esitada ligikaudse valemiga järgmiselt:

$$\gamma(\beta^2) = \gamma(0) + \frac{d\gamma}{d\beta^2} \beta^2 = 1 + \frac{1}{2} \beta^2$$

milles olev liige võrdub

$$\frac{d\gamma}{d\beta^2} = \left[ (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \right]' = (1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}} \left( -\frac{1}{2} \right) (-1) = \frac{1}{2}$$

kuna selles võrrandis  $\beta^2 = 0$ . See tähendab seda, et kui kiirused on väikesed võrreldes valguse kiirusega vaakumis, siis saab kasutada ligikaudseid valemiteid:

$$\frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2$$

Kinemaatilise teguri  $\gamma$  avaldist:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

võib esitada ka järgmiselt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

milles  $\beta^2$  avaldub nõnda:

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}.$$

Kõike eelnevat arvestades võibki kinemaatilise teguri  $\gamma$  asendada ligikaudse valemiga:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{4} \frac{v^4}{c^4}},$$

sest  $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ . Kuna liige

$$-\frac{1}{4} \frac{v^4}{c^4}$$

on väga väike, siis saame viimase avaldise kirjutada nõnda:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Sellest tulenevalt saame  $\gamma$  avaldada järgmiselt:

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

või

$$\frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

ja sooritada järgmised matemaatilised teisendused:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c \frac{1}{\gamma} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right),$$

korrutame võrrandi mõlemad pooled  $mc$ -ga, saame järgmiselt:

$$v \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$mcv \approx mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$mcv \approx mc^2 - \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv.$$

Kui  $mcv$  korral on  $v = c$  ja  $mc^2 = E$ , saame keha kogu energia avaldise:

$$\frac{mv^2}{2} + mcv = mc^2$$

ehk

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

milles  $\frac{mv^2}{2}$  on keha kineetiline energia ja  $mc^2$  on keha seisueenergia. Viimasest valemist saame

tuletada keha massi ja energia seose relativistlikus mehaanikas (Einsteini valemi) järgmiselt:

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2} = mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = mc^2 \gamma = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

ja tõepoolest saamegi seda, et  $E = mc^2$ , kui keha on paigal ehk  $v = 0$ .

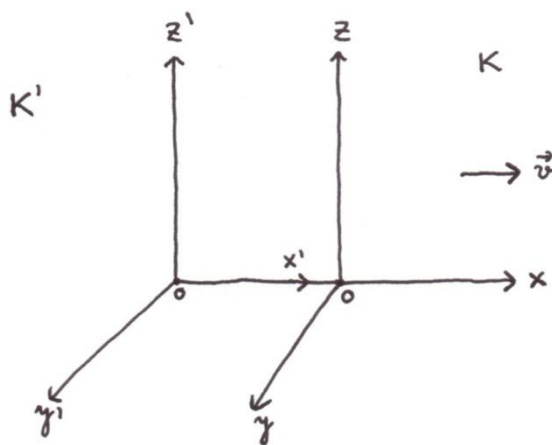
Võrrandi

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ehk

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

füüsikaline sisu seisneb järgmises analüüsis. Eelnevalt on teada, et meie tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ . Sellest ongi näha seda, et kui keha  $m$  liikumiskiirus on tavaruumi suhtes  $c$  ehk  $v = c$  (näiteks valguse liikumiskiirus meie tajutavas aegruumis), siis hyperruumi suhtes on keha paigal ehk  $v' = 0$ . Kui aga keha liikumiskiirus on tavaruumi suhtes null (keha on paigal) ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi suhtes on keha liikumiskiirus võrdne  $c$ -ga ehk  $v' = c$ . See tähendab ka seda, et kõik kehad Universumis liiguvad valguse kiirusega  $c$ . Valgus ise on tegelikult paigal.



Joonis 27  $K$  liigub  $K'$  suhtes valguse kiirusega.

Täpselt samasugune analüüs kehtib ka eelnevalt tuletatud energiavõrrandi

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv$$

ehk

$$\left( \frac{mv'^2}{2} \right)' = (mc^2 - mcv)$$

korral. Näiteks kui keha  $m$  liikumiskiirus on tavaruumi  $K$  suhtes null ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes on keha kineetiline energia võrdne relatiivsusteoorias tuntud seisue energiaga ehk

$$\frac{mv^2}{2} = E = mc^2 .$$

See tähendab seda, et kõik kehad Universumis, mis liiguvad hyperruumi suhtes valguse kiirusega  $c$ , omavad tavaruumis seisuenergia hyperruumi suhtes. Kui aga keha liikumiskiirus on tavaruumi suhtes võrdne valguse kiirusega  $c$  ehk  $v = c$ , siis hyperruumi suhtes on keha kineetiline energia null ehk

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mc^2 = 0 .$$

See tähendab ka seda, et näiteks valgusel on tavaruumi suhtes seisuenergia ja seega ka seisumass, kuna see liigub tavaruumi suhtes kiirusega  $c$ , kuid hyperruumi suhtes on see aga paigal. Kogu eelneval juhul on  $\frac{mv^2}{2}$  keha kineetiline energia hyperruumi suhtes ja seetõttu etendab see avaldis ainult matemaatilise definitsioonina ehk

$$\frac{mc^2}{2} \neq mc^2 ,$$

vaid

$$E'_k = mc^2 - mcv$$

ehk

$$E'_k = E_k .$$

See tähendab seda, et keha  $m$  kineetiline energia  $E'_k$  hyperruumi suhtes

$$E'_k = \frac{mv'^2}{2}$$

sõltub sellest, milline on keha liikumiskiirus  $v$  tavaruumi suhtes:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv = mc(c - v)$$

ehk

$$\frac{mv^2}{2} = mc(c - v)$$

$$E'_k = mc(c - v).$$

Kuid samas keha kogu energia avaldises

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

on võrrandi liige  $\frac{mv^2}{2}$  ainult tavaruumi suhtes vaadatuna. Selles on näha, et kui keha liikumiskiirus  $v$  on tavaruumi suhtes null ehk  $v = 0$  ( ja seega  $\frac{mv^2}{2} = 0$  ), siis keha kineetiline energia  $E$  hyperruumi suhtes on  $E = mc^2$ , mida me nimetame keha „seisuenergiaks“.

Mass ja energia on ekvivalentsete suurused. Keha relativistlik mass on ka keha koguenergia mõõt. Keha koguenergia ja seisuenergia avaldises ei võeta arvesse keha potentsiaalset energiat, mis on tingitud välise välja olemasolust. Ei arvestata keha potentsiaalse energia muutumist välises

jõuväljas.

Teadagi on seda, et kõik energiad liigituvad potentsiaalseks või kineetiliseks energiaks. Sellest tulenevalt tekib küsimus, et mis liiki kuulub seisenergia  $E = mc^2$ ? Mis energiaga õieti tegemist on? Kõik kehad eksisteerivad tavaruumis, milles eksisteerib aeg ( ja ruum ). Aeg kui kestvus on pidevalt „liikuv“. See tähendab, et aeg ei jää kunagi „seisma“. Liikuvad kehad omavad kineetilist energiat. Absoluutselt kõik kehad Universumis liiguvad ka aja suhtes ( s.t. me kõik liigume ajas tuleviku poole ), kuid aeg ei ole mingisugune objekt. Sellest võibki tulla see seisenergia  $E = mc^2$  kõikidele kehadele Universumis. See tähendab seda, et energia  $mc^2$  on oma olemuselt siiski keha „kineetiline energia aja suhtes“. Kõik kehad ju liiguvad hyperruumi  $K'$  suhtes, sest tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ . Järelikult kõikidel kehal on kineetiline energia ja seega ka mass. Niimoodi võib energia  $mc^2$  olla kineetiline energia „liikuva hyperruumi suhtes“ ehk  $E = mc^2$  on keha aja suhtes eksisteeriv energia.

Ajas rändamise üldvõrrandist on võimalik tuletada ka keha relativistlikku kogueenergia võrrandi, mis seob omavahel keha massi ja impulsi. See võrrand on ülioluline elementaarosakeste füüsikas, milles arvutatakse välja osakese mass, impulss või tema energia. Selle võrrandi saamiseks alustame aga järgmisest seosest, mis oli juba eelnevalt välja tuletatud:

$$cmv = mc^2 - \frac{mv^2}{2}$$

Viimases võrrandis teeme mõned järgmised muudatused:

$$cmv + \frac{mv^2}{2} = mc^2$$

Kuna keha kineetiline energia on hyperruumi  $K'$  suhtes alati järgmine

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

mis oli ka eelnevalt tõestatud, ja keha seisenergia avaldame lihtsalt  $E$ -na

$$mc^2 = E$$

siis seega saame lõpuks järgmise seose

$$cmv + mc^2 = E$$

milles  $mv = p$  on füüsikalise keha impulss:

$$cp + mc^2 = E$$

Viimane saadud energia  $E$  seos ongi seotud relativistlikust mehaanikast tuntud keha relativistliku kogueenergia  $E^2$  võrrandiga:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

See tähendab seda, et on võimalik tuletada sellest energia  $E$  seos järgmiselt. Näiteks teostame keha relativistliku kogueenergia võrrandi matemaatilise teisenduse:

$$E^2 = p^2 c^2 + p^2 c^2 = c^2(p^2 + p^2) = c^2 2p^2$$

millegi saame impulsi ja energia vahelise seose:



$$\frac{E^2}{c^2} = 2p^2$$

Järgnevalt arvestame keha seisuenergia  $E = mc^2$  matemaatilise definitsiooniga:

$$\frac{m^2 c^4}{c^2} = 2p^2$$

mistõttu  $c^2$  taandub võrrandist välja:

$$m^2 c^2 = 2p^2$$

Kui me viime massi  $m$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$mc^2 = E = \frac{2p^2}{m}$$

siis saame seisuenergia  $E$  võrrandi kujuks:

$$E = mc^2 = \frac{2p^2}{m}$$

Viimases võrrandis on valguse impulss  $p = mc$ :

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{p^2}{m} = \frac{m^2 c^2}{m} = mc^2$$

Sellest tulenevalt saame kineetilise energia seose seisuenergia järgmiselt:

$$\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis näitab seda, et keha seisuenergia  $E = mc^2$  on tegelikult oma olemuselt kineetiline energia. Kuid viimases võrrandis on võimalik teostada ka veel järgmised matemaatilised teisendused:

$$mc^2 = E = 2mc^2 = 2E$$

ehk

$$E = mc^2 + mc^2$$

millest saamegi eespool tuletatud energia  $E$  seose võrrandi:

$$E = pc + mc^2$$

Füüsikalise keha relativistliku koguenergia  $E^2$  võrrand on oma olemuselt viimase energia  $E$  võrrandi ruut:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

ehk

$$E^2 = c^2 (p^2 + m^2 c^2)$$

Keha seisuenergia ja keha relativistlik koguenergia on omavahel seotud järgmiselt:

$$E = mc^2 = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Kui võtame dimensiooniks  $c = 1$ , siis relativistlik koguenergia võrrand avaldub palju lihtsamal kujul

$$E^2 = p^2 + m^2$$

Kui me relativistliku koguenergia võrrandis

$$\sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc ,$$

korrutame liiget  $mc$  imaginaararvuga  $i$  (s.t. kompleksarvuga )

$$imc = p_4 = \frac{im_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

siis võib seda matemaatiliselt tõlgendada energia-impulss vektorina. Relativistlik koguenergia  $E$  on relativistlik seos energia ja impulsi vahel. Mitterelativistlik energia on tuntud klassikalisest mehaanikast kineetilise energiana  $T$ :

$$T = \frac{p^2}{2m} .$$

Ametlikus erirelatiivsusteooria geomeetrias on neljamõõtmelise impulsi ruut  $p_\mu p_\mu$  defineeritav koos seisuenergia järgmiselt:

$$-m_0^2 c^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{m_0^2 (v^2 - c^2)}{1 - \beta^2} = p_\mu p_\mu ,$$

milles olev kordaja liige

$$\frac{v^2 - c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v_\mu v_\mu = -c^2 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = -c^2$$

on ajasarnane vektor ja see on konstant.  $v_\mu v_\mu$  on siin aga neljamõõtmelise kiiruse ruut, mis näitab tegelikult seda, et kõik kehad Universumis liiguvad valguse kiirusel  $c$ . Sellest tulenevalt on (neljamõõtmeline kiirus)vektor  $v_\mu$  avaldatav aga järgmiselt

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} ,$$

milles olev jagatise liige

$$\tau = t\sqrt{1 - \beta^2}$$

on liikuva keha omaaeg ja seega saame kiirusvektori lõplikuks seoseks:

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{t\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Vastavalt neljamõõtmelise kiirusvektori matemaatilisele definitsioonile tuleb impulsi  $p$  kuju

$$p = m_0 v$$

teistsuguste tähistustega järgmiselt

$$p_\mu = m_0 v_\mu$$

Seisuenergia võrrand on elementaarosakestefüüsikas üsna oluline avaldis ja seda just erinevate

osakeste põrgete analüüsis. Näiteks kahe osakese mitteelastse põrke korral võib algselt üks osake  $M$  olla paigal ja teine osake  $\bar{M}$  võib liikuda impulssiga  $p$ . Põrke tulemusena tekiks uus osake. Järgnevalt leiamegi tekkinud uue osakese massi  $\bar{M}$  ja energia  $E_{\bar{M}}$ . Selleks saame „relativistliku dünaamika põhivõrrandit“ kasutades:

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

ehk

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

kirjeldada kahe osakese põrke süsteemi:

$$E_{\bar{M}}^2 = p^2 + \bar{M}^2$$

milles  $c = 1$ . Kuna kahe osakese kokkupõrkel tekib uus osake, siis saame kirjutada:

$$E_{\bar{M}} = M + \sqrt{p^2 + M^2}$$

ehk

$$\left(M + \sqrt{p^2 + M^2}\right)^2 = p^2 + \bar{M}^2$$

Viimasest saamegi tekkinud uue osakese massi  $\bar{M}$  ja läbi selle ka energia  $E_{\bar{M}}$ :

$$\begin{aligned}\bar{M}^2 &= M^2 + p^2 + M^2 + 2M\sqrt{p^2 + M^2} - p^2 = \\ &= 2M^2 + 2M\sqrt{p^2 + M^2} = 2M \left(M + \sqrt{p^2 + M^2}\right)\end{aligned}$$

Kui aga kaks osakest paigalolekus massidega  $m_1$  ja  $m_2$  liiguvad sirgjoonel otse teineteise vastu, siis nende koguenergiad on vastavalt  $E_1$  ja  $E_2$ . Järgnevalt leiame teise osakese energia  $E$  sellises inertsiaalses taustsüsteemis, milles esimene osake  $m_1$  on paigal. Sellisel juhul on meil tegemist üleminekuga ühest süsteemist teise süsteemi. Kuna relativistliku dünaamika põhivõrrand avaldub lihtsa seosena:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

siis selle järgi saame massi ruudu:

$$m^2 = E^2 - p^2$$

ja impulsi ruudu:

$$p^2 = E^2 - m^2$$

milles  $c = 1$ . „Enne“ kahe osakese kokku põrget saame kirjutada avaldise:

$$(E_1 + E_2)^2 - \left(\sqrt{E_1^2 - m_1^2} + \sqrt{E_2^2 - m_2^2}\right)^2 = M_{\text{süs}}^2$$

kuid „pärast“ kokku põrget avaldub see aga järgmiselt:

$$(m_1 + E)^2 - \left(0 + \sqrt{E^2 - m_2^2}\right)^2 = M_{\text{süs}}^2$$

ehk

$$(m_1 + E)^2 - E^2 + m_2^2 = M_{\text{süs}}^2$$

Seega saime:  $M_{\text{süs}}^2 = M_{\text{süs}}^2$ . Lõppkokkuvõttes avaldub teise keha energia  $E$  valemina:

$$E = \frac{E_1 E_2}{m_1} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{E_1^2}} \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{E_2^2}} \right]$$

Sellise valemi „tuletamiseks“:

$$E = \frac{E_1 E_2}{m_1} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{E_1^2}} \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{E_2^2}} \right]$$

võtame ära kõik valemis esinevad „alaindeksid“:

$$E = \frac{E * E}{m} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \right]$$

Selline „käik“ annab meile järgmise matemaatilise tulemuse:

$$E = \frac{E^2}{m} \left[ 1 + \left( \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \right)^2 \right] = \frac{E^2}{m} \left[ 1 + 1 - \frac{m^2}{E^2} \right] = \frac{E^2}{m} + \frac{E^2}{m} - m$$

ehk

$$E = \frac{E^2}{m} + \frac{E^2}{m} - m = 2 \frac{E^2}{m} - m$$

Viimasest võrdusest viime massi  $m$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$m + E = 2 \frac{E^2}{m}$$

Järgnevatks analüüsiks on meil vaja eespool tuletatud seost:

$$(m_1 + E)^2 - E^2 + m_2^2 = M_{\text{süs}}^2$$

milles me samuti võtame ära kõik „alaindeksid“:

$$(m + E)^2 - E^2 + m^2 = m^2$$

Kuna relativistliku dünaamika põhivõrrand:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

teiseneb ka kujule:

$$-p^2 = -E^2 + m^2$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$(m + E)^2 - p^2 = m^2$$

ehk

$$(m + E)^2 = p^2 + m^2 = E^2$$

Kuna viimasest me näeme seda, et:

$$m + E = E$$

siis sellest tulenevalt võime avaldise:

$$m + E = 2 \frac{E^2}{m}$$

„esitada“ ka järgmiselt:

$$E = 2 \frac{E^2}{m}$$

Kui võtame ühikuks  $c = c$  (mitte enam  $c = 1$ ), siis saadud lõpptulemusest:

$$\frac{m}{2} = E$$

nähtubki „seisuenergia“ võrrand:

$$\frac{mc^2}{2} = mc^2 = E$$

mis on omakorda võrdne „relativistliku dünaamika põhivõrrandiga“:

$$E = mc^2 = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$$

Üks osake laguneb kaheks osakeseks, mille ühe mass on  $m$  ja teise osakese mass on  $0$ . Enne lagunemist oli osakese mass  $M$ :

$$M = E_m + E_y$$

ehk

$$M = E_M$$

Järgnevalt leiame pärast lagunemist tekkinud ühe osakese massi  $E_m = m$ :

$$E_m^2 = p^2 + m^2$$

ehk

$$E_m = \sqrt{p^2 + m^2}$$

ja teise osakese impulsi  $p$ :

$$E_y = p_y = p_m = p$$

Selleks „koostame“ võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} M = E_m + p \\ E_m^2 = p^2 + m^2 \end{cases}$$

millest saame järgmised võrdused:

$$E_m = M - p$$

ja

$$(M - p)^2 = p^2 + m^2$$

Viimane ruutvõrrand „laheneb“ järgmiselt:

$$M^2 - 2Mp + p^2 = p^2 + m^2$$

millest saame omakorda impulsi  $p$  avaldise:

$$Mp = \frac{M^2 - m^2}{2}$$

ehk

$$p = \frac{M^2 - m^2}{2M}$$

Sellest tulenevalt saame eespool esitatud võrrandis

$$E_m = M - p$$

oleva impulsi  $p$  kirjutada lahti:

$$E_m = M - \frac{M^2 - m^2}{2M}$$

mis annabki meile lagunemise tagajärjel tekkinud ühe osakese massi  $m$  avaldise:

$$E_m = \frac{M^2 + m^2}{2M}$$

#### 1.12.2.9.1 Kineetiline energia kosmoloogias

Eirelatiivsusteooriast tuntud keha seisuenergia võrrand  $E = mc^2$  on matemaatiliselt tuletatav ka Universumi paisumisest tingitud inertsiaalse jõu avaldisest, mis oli kosmoloogia osas tuletatud:

$$F_{in} = m\dot{L} = mR\dot{H}$$

Näiteks viime  $mR$  liikme teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{F_{in}}{mR} = \dot{H}$$

ja arvestame seda, et Universumi paisumise inertsiaalne jõud avaldub gravitatsioonijõuna:

$$F_{in} \frac{1}{mR} = \frac{GMm}{R^2} \frac{1}{mR} = \dot{H}$$

Tulemuseks saame Hubble'i konstandi  $H$  sõltuvuse ajast:

$$\frac{GM}{R^3} = \dot{H}$$

Kosmoloogia osas me tõestasime, et Hubble'i konstandi sõltuvus ajast avaldub ka järgmiselt:

$$\frac{GM}{R^3} = -\frac{H^2}{2} - H^2$$

Kui me viime  $R^2$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{GM}{R} = -\frac{H^2 R^2}{2} - H^2 R^2$$

ja arvestame seda, et Hubble'i seadus avaldub kujul:

$$v = HR$$

siis saame tulemuseks võrrandi:

$$\frac{GM}{R} = -\frac{v^2}{2} - v^2$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} + \frac{GM}{R} = -v^2$$

Viimane võrrand kirjeldab mehaanilist energia jäävuse seadust. Edasiseks analüüsiks on võimalik välja kirjutada järgmine seos:

$$-\frac{GM}{R^3} = -\frac{4\pi G}{3}\rho = \frac{\ddot{a}}{a}$$

Seda sellepärast, et mass  $M$  avaldub ka massitihedusena ja Friedmanni võrrandist saame tuntud seose:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3}\rho$$

Sellest tulenevalt saame võrrandi:

$$-\frac{GM}{R^3} = -\frac{4\pi G}{3}\rho = +\frac{\ddot{a}}{a} = +\frac{H^2}{2} + H^2$$

ehk

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{H^2}{2} + H^2$$

Viime  $H^2$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = \frac{H^2}{2}$$

ja eelneva analüüsi põhjal võime arvestada järgmise seosega:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H}$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\dot{H} - H^2 = \frac{H^2}{2}$$

Oletame seda, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ :

$$H = c$$

Sellest tulenevalt saame:

$$\dot{c} - c^2 = 0 - c^2 = \frac{c^2}{2}$$

ehk

$$-c^2 = \frac{c^2}{2}$$

milles tuletis konstandist võrdus nulliga. Viimase võrrandi mõlemad pooled korrutame massiga  $m$ :

$$\frac{mc^2}{2} = -mc^2$$

ja võtame võrrandi mõlemad pooled negatiivseks:

$$-\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Eespool tuletatud seose põhjal:

$$v^2 = -c^2$$

saamegi väga olulise võrrandi

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

ehk

$$E_k = mc^2$$

Kogu eelnev matemaatiline tuletuskäik näitab, et Universum peab paisuma tegelikult valguse kiirusega  $c$  selleks, et saaks kehtida seisuenergia seadus nii nagu me seda erirelatiivsusteoorias tunneme. Albert Einsteini erirelatiivsusteoorias tuletatakse keha seisuenergia avaldis Newtoni teisest seadusest, milles esineb relativistlik impulss. Relativistlikku impulssi on võimalik tuletada otse ka eelnevalt tuletatud kiiruste suhtelisuse võrrandist:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Näiteks kui me viimase võrrandi mõlemad pooled korrutame massiga  $m$ :

$$mv = p = mc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

saamegi tulemuseks relativistliku impulsi  $p$ :

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p$$

milles võib tõlgendada impulsse järgmiselt:  $mc = p$  ja  $mv = p$ . A. Einsteini erirelatiivsusteoorias tuletatakse keha seisuenergia avaldis Newtoni teisest seadusest:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

milles esinebki relativistlik impulss:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}$$

Jõud on ühe keha mõju teisele kehale ehk kui me Newtoni teise seaduse võrrandi mõlemad pooled korrutame teepikkuse  $x$ -ga, saame tulemuseks välja kirjutada järgmise diferentsiaalvõrrandi:



$$dA = Fdx = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) dx$$

millest omakorda nähtub see, et tegemist on energia võrrandiga:

$$dE = dA$$

See tähendab seda, et keha teeb tööd energia arvelt ja seetõttu on need omavahel ka võrdsed. Võttes impulsist aja järgi tuletise, saame:

$$dE = \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} + \frac{mv^2}{c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3} \frac{dv}{dt} \right) dx$$

Viimases võrrandis peame arvestama järgmiste diferentsiaalseostega:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ja

$$\frac{dv}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dv = v dv$$

Sellest tulenevalt saame energiaavaldise kujuks:

$$dE = \frac{mvdv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right) = \frac{mvdv}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{mc^2 d \left( \frac{v^2}{c^2} \right)}{2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Diferentseerides viimast võrrandit, saame tulemuseks:

$$dE = d \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

millest omakorda järeldub:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + const$$

Relativistlikus mehaanikas loetakse saadud konstanti nulliks ja seega saamegi Einsteini valemi:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Kui keha kiirus  $v$  on tavaruumi suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis saamegi keha seisuenergia avaldise:

$$E = mc^2$$

Eelnevalt tuletatud Einsteini valem

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kirjutatakse lahti erirelatiivsusteoorias järgnevalt. Näiteks kui vaba keha kiirused on valguse kiirusest vaakumis palju väiksemad, siis kasutatakse ligikaudset avaldist:

$$\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Sellest tulenevalt kirjutame Einsteini valemi välja nüüd klassikalise mehaanika valemi kujule:

$$E = mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

See näitab seda, et klassikaline mehaanika tuleneb relativistlikust mehaanikast ehk klassikaline mehaanika on relativistliku mehaanika osa.

Erirelatiivsusteoorias defineeritakse relativistlikku massi järgmise võrrandiga:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Kuid eelnevalt tuletatud Einsteini valem

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

on võrdne ka järgmise avaldisega:

$$E = mc^2 + E_k$$

milles  $mc^2$  ongi keha paigalseisu energiaks ehk seisuenergiaks. Seisuenergia ja kineetilise energia summat nimetatakse ka vaba keha koguenergiaks. Sellest tulenevalt on mass ja energia ekvivalentsed suurused ja keha relativistlik mass on ka keha koguenergia mõõt. Kui viimases valemis:

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

on keha kiirus  $v$  tavaruumi suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis saamegi taas puhtalt keha seisuenergia avaldise:

$$E \approx mc^2$$

Erirelatiivsusteooriast tuntud keha seisuenergia võrrand  $E = mc^2$  on matemaatiliselt tuletatav ka otse Universumi paisumiskiirust kirjeldavast Hubble'i konstandist  $H$ , mis näitab väga selgelt seisuenergia füüsikalist olemust. Näiteks kui me võtame Hubble'i konstandist  $H$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ühemõõrse tuletise aja järgi, siis saame

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}\dot{a}}{a^2} = \frac{\ddot{a}a}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

ehk

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

Kuna viimases võrduses olev  $\frac{\ddot{a}}{a}$  liige on esitatav eespool olevas kosmoloogia osas tõestatud seose põhjal

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2}$$

siis saame järgmise väga olulise võrrandi:

$$\dot{H} = -\frac{H^2}{2} - H^2$$

Järgnevalt arvestame seda, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ :

$$H = v = c$$

ja seega saame

$$\dot{c} = -\frac{c^2}{2} - c^2$$

Kuna konstandist  $c$  tuletis on null

$$0 = -\frac{c^2}{2} - c^2$$

ja kui me korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ , siis saame

$$0 = -\frac{mc^2}{2} - mc^2$$

Viime võrrandi liikme  $-mc^2$  teisele poole võrdusmärgi

$$mc^2 = -\frac{mc^2}{2}$$

ja arvestame erirelatiivsusteooriast tulenevat seost

$$-c^2 = v^2$$

ning lõpuks saamegi võrrandi

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

ehk

$$E_k = mc^2$$

Eelnev matemaatiline analüüs näitab väga selgelt seda, et Universum peab paisuma tegelikult valguse kiirusega  $c$  selleks, et saaks kehtida seisuenergia seadus nii nagu me seda nüüdisajal tunneme. Kuna tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  füüsikaline süsteem avaldub looduses Universumi kosmoloogilise paisumisena, siis ei olegi see väga üllatav. See näitab väga selgelt, et seisuenergia

on tegelikult oma olemuselt kineetiline energia „liikuva“ aja suhtes.

Eelnevast järeldub omakorda seda, et Universumi paisumine ei saa mitte kunagi lakata, kuna see oleks vastuolus energia jäävuse seadusega. Näiteks kõik kehad omavad seisuenergiat ehk kineetilist energiat Universumi paisumise tõttu ja kui Universumi paisumine lakkaks, siis kehad Universumis lakkaksid eksisteerimast, mis on juba vastuolus energia jäävuse seadusega. Energia jäävuse seadus ütleb seda, et energia ei teki ega kao, vaid muutub ühest liigist teise. Seisuenergia muutumist mingisuguseks teiseks liigiks ei ole füüsiliselt tuvastatud. Seisuenergia on oma olemuselt seotud kehade eksisteerimisega ajas ja ruumis, kuid mis siiski allub ka energia jäävuse seadusele. Näiteks energia jäävuse seadusest tuletatakse tuntud Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrand:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Kui me teeme viimases võrrandis järgmised matemaatilised teisendused:

$$c^2 = \frac{2GM}{R} = 2 \frac{GM}{R} = 2U$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ :

$$mc^2 = \frac{2GMm}{R} = 2Um$$

siis saamegi seisuenergia  $E$  võrrandi seose gravitatsioonipotentsiaaliga  $U$ :

$$E = mc^2 = 2Um$$

Selline lihtne matemaatiline tuletuskäik näitab seisuenergia  $E$  kooskõla Universumi energia jäävuse seadusega.

Kuid peale seisuenergia võrrandi on võimalik matemaatiliselt tuletada ka klassikalisest mehaanikast tuntud kineetilise energia valemi. Näiteks eelnevalt tuletatud Hubble'i seaduse seoses:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

tõestatakse ajas rändamise teooria kosmoloogia osas, et viimase võrrandi liige  $\frac{\ddot{a}}{a}$  võrdub

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho$$

ja sellest tulenevalt saame Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandi:

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3}\rho - H^2$$

Kuna viimases võrrandis on mass  $M$  avaldatud tiheduse kaudu järgmiselt:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

siis võrrandi tegelik kuju on

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{GM}{R^3}$$

Viime liikme  $-H^2$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi

$$\frac{dH}{dt} + H^2 = -\frac{GM}{R^3}$$

ja niisamuti ka R-i:

$$R \left( \frac{dH}{dt} + H^2 \right) = -\frac{GM}{R^2}$$

Tulemuseks saame järgmist:

$$R \frac{dH}{dt} + H^2 R = -\frac{GM}{R^2}$$

Kuna liikme  $H^2 R$  saame lahti kirjutada järgmiselt:

$$H^2 R = H(HR) = HV = H \frac{dR}{dt}$$

siis seega saamegi lõpptulemuseks järgmise võrrandi:

$$R \frac{dH}{dt} + H \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(HR) = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

ehk

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

Saadud viimane võrrand on Newtoni teine seadus gravitatsioonijõu F korral:

$$a = -\frac{GM}{R^2}$$

mis klassikalises mehaanikas on avaldatuna:

$$a = -\frac{F}{m}$$

Negatiivne jõud on tingitud puhtalt sellest, et gravitatsioonijõud F avaldab vastupanu Universumi paisumisele. Kui aga viimase võrrandi ehk

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

mõlemad pooled korrutame liikmega

$$\frac{dR}{dt}$$

ja integreerime aja järgi, siis saame tulemuseks võrrandi

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E = \text{const}$$

mis on mehaanilise energia jäävuse seadus klassikalisel kujul. Võrrandis on E integreerimiskonstant ja võrrandi liige

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = E_k$$

ehk

$$\frac{mv^2}{2} = E_k$$

ongi „klassikaline“ kineetiline energia.

#### 1.12.2.9.2 Kineetilise energia ja valguse seos

Eespool tuletatud seisueenergia võrrandi seost kineetilise energia definitsiooniga on võimalik matemaatiliselt ja füüsikaliselt tuletada puhtalt ka elektromagnetvälja energia uurimisel. Valgus on oma olemuselt ruumis liikuv elektromagnetväli. Selle füüsikaline olemus seisneb elektri- ja magnetvälja üksteise muutumises, mis levib ruumis edasi lainena kiirusega  $c$ . Elektromagnetvälja ehk elektromagnetlaineline energia  $E$  avaldub elektrivälja ja magnetvälja energiatega summana:

$$E = E_E + E_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E_T^2}{2} V + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V$$

ja sellest tulenevalt saame elektromagnetlaineline energiatiheduseks:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E_T^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

milles kehtib võrdus

$$\omega_E = \omega_H$$

Ruumis liikaval elektromagnetlainele endal ei ole elektrilaengut, kuid elektrivälja tugevus avaldub elektrilaengu  $q$  korral järgmiselt:

$$E_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{r^2}$$

ja magnetvälja tugevus  $H$  on avaldatav:

$$H = \frac{B}{\mu_0\mu}$$

milles magnetvälja induksioon  $B$  on näiteks solenoidi korral:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

kus  $I$  on defineeritud elektrivooluna:

$$I = \frac{q}{t}$$

Eelneva põhjal saame elektromagnetlaineline energiatiheduse  $\omega$  kirjutada ka järgmisel kujul:

$$\omega = 2\omega_E = \varepsilon_0 \varepsilon E_T^2$$

Seda sellespärast, et elektromagnetlaineline energiatihedus võrdus laine elektri- ja magnetvälja energiatiheduste summaga:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_T^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

milles

$$\omega_E = \omega_H$$

ehk

$$E_T \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H \sqrt{\mu_0 \mu}$$

Sellest tulenevalt saame vaakumis liikuva elektromagnetlaineline energiatiheduse võrrandi:

$$\omega = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} E_T H$$

Elektromagnetlaineline või energiavälja muutuse levimise kiirus ruumis avaldub elektri- ja magnetkonstantidega:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = v = c$$

Sellest tulenevalt saame laine energiatiheduse seoseks:

$$\omega = \frac{EH}{v} = \frac{EH}{c}$$

milles väli liigub ruumis valguse kiirusega:  $v = c$ . Viimase võrrandi mõlemad pooled jagame  $c^2$ -ga:

$$\frac{\omega}{c^2} = \frac{EH}{c^3}$$

Kuna  $\omega$  on välja energia(tihedus) ja  $c^2$  on valguse kiirus ruudus, siis  $E = mc^2$  järgi peaks välja mass avalduma järgmiselt:

$$\frac{EH}{c^3} = m$$

Seetõttu saamegi tuntud seose

$$\frac{\omega}{c^2} = m$$

mis väljendab massi ja energia ekvivalentsust:

$$\omega = E = mc^2$$

Eelnev tuletuskäik näitab väga selgelt seda, et erirelatiivsusteooriast tuntud seisueenergia avaldis on otseselt tuletatav ka elektromagnetvälja energiast ja seisueenergia näitab peale keha massi energiat ka veel välja energiat. Sellest järeldatakse ka elektromagnetvälja impulsi olemasolu:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{EH}{c^2}$$

ehk

$$p = mv = mc = \frac{EH}{c^2}$$

mille järgi välja mass  $m$  avaldubki seosena:

$$m = \frac{EH}{c^3}$$

Tähelepanuväärne on see, et kui me viimases võrrandis kirjutame elektrivälja tugevuse  $E$  ja magnetvälja tugevuse  $H$  korrutise lahti, siis saame tuletada klassikalisest mehaanikast tuntud kineetilise energia valemi  $E_k$ . Näiteks elektrivälja energia  $E$  võrrandist:

$$E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_T^2}{2}$$

saame kätte elektrivälja tugevuse avaldise:

$$E_T = \sqrt{\frac{2E}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}}$$

Täpselt sama on ka magnetvälja tugevuse  $H$  avaldise esitamisega:

$$H = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{\mu_0 \mu}}$$

Sellest tulenevalt saame elektrivälja tugevuse ja magnetvälja tugevuse korrutise  $EH$  avaldada kujul:

$$EH = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}} \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} = \sqrt{2E} \sqrt{2E} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = 2Ev = 2Ec$$

milles väli liigub tühjas ruumis ehk vaakumis valguse kiirusega:  $v = c$ . Kuna saime seose

$$EH = 2Ec$$

siis saame energia avaldiseks  $2E$ :

$$\frac{EH}{c} = 2E$$

mis kattub eespool saadud elektromagnetvälja energiatiheduse  $2E = 2\omega$  avaldisega:

$$\omega = 2\omega_E = \varepsilon_0 \varepsilon E_T^2$$

Viimases võrrandis arvestatakse nii elektrivälja kui ka magnetvälja energiatihedust. Sellest tulenevalt saame välja massi  $m$  avaldada kujul:

$$m = \frac{EH}{c^3} = \frac{2Ec}{c^3} = \frac{2E}{c^2}$$

mildest nähtubki klassikalisest mehaanikast tuntud kineetilise energia valem:

$$E = \frac{mc^2}{2}$$

Kuna eelnevalt saime tuletada ka tuntud seisueenergia seose:



$$E = mc^2$$

siis seega peab kehtima järgmine võrdus:

$$E_k = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

mis oli juba eelnevalt matemaatiliselt ja füüsikaliselt tuletatud ning analüüsitud. See kinnitab seisukohta, et füüsikalise keha või välja seisuenergia on oma olemuselt kineetiline energia ( liikuva ) aja suhtes.

### 1.12.3 Üldrelatiivsusteooria ajas rändamise teoorias

#### 1.12.3.1 Sissejuhatus

Albert Einstein lõi üldrelatiivsusteooria peaaegu kümme aastat pärast erirelatiivsusteooria loomist. Ta üldistas seda mis tahes taustsüsteemidele, sest erirelatiivsusteoorias käsitleti ainult inertsiaalseid taustsüsteeme. Kuid üldrelatiivsusteoorias võetakse arvesse ka mitteinertsiaalseid taustsüsteeme. Need on kiirendusega liikuvad süsteemid. Seepärast teooria üldisem ongi. Gravitatsioonijõu mõjul liiguvad gravitatsiooniväljas vabad kehad kiirendusega. Üldrelatiivsusteooria on seepärast relativistlik gravitatsioonivälja teooria.

Gravitatsioonijõu ja inertsijõu vahel ei ole mingisugust vahet. Sellisele ekvivalentsuseprintsibile ongi üles ehitatud kogu üldrelatiivsusteooria. Sellist printsipi tõestavad kõik eksperimentaalsed katsed, mis näitavad raske ja inertse massi samasust ehk võrdsust, kuid seda ainult teatud piirini:

$$\left| \frac{m_g - m}{m_g} \right| \leq 10^{-12},$$

milles  $m_g = m$ . Täpsemate mõõtmeteri ei ole veel lihtsalt saadud. See näitab selgelt seda, et gravitatsioonivälja on võimalik asendada inertsijõudude väljaga. Näiteks keerleva kosmoselaeva tsentrifugaaljõud tõukab kehad kosmoselaeva välisseinte poole. Sein muutub keerlevas kosmoselaevas põrandaks, millel on inimesel võimalik kõndida. Selline tekkiv tsentrifugaaljõud ( ehk inertsijõud ) on sarnane gravitatsioonijõuga. Niimoodi simuleeritakse gravitatsiooni eksisteerimist kosmoselaevas.

Raske ja inertse massi võrdsust nimetatakse nõrgaks ekvivalentsusprintsibiiks, kuid tugevast ekvivalentsusprintsibist järeldub valguskiire kõverdumine gravitatsiooni poolt.

Kiirenevalt liikuvate süsteemide matemaatilisel kirjeldamisel jõutakse välja mittehomogeense ruumi mõisteni. Massiivsete kehade ümber muutub ruum kõveraks. Seal hakkavad vabad kehad liikuma kiirendusega. Sellega seletataksegi gravitatsiooni. Kõveras ruumis on vaba keha kiirendusega liikumine niisama iseenesest mõistetav nähtus nagu ühtlane sirgjooneline liikumine „sirges“ ehk eukleidilises ruumis.

Gravitatsioon on aegruumi kõverdus ehk seda kirjeldatakse aegruumi geomeetriaga. Gravitatsiooniväli ei ole energiaväli, sest see ei sisalda energiat ehkki keha omab potentsiaalset

energiat gravitatsiooniväljas. Ja seega võime rääkida gravitatsioonist kui aegruumi väljast ( ehk aja ja ruumi väljast ). Universumis on olemas kahte liiki materia väljasid: energiaväljad ja aegruumiväljad.

### 1.12.3.2 Inertne ja raske mass

Eirelatiivsusteoorias käsitletakse ainult inertsiaalseid taustsüsteeme. Inertsiaalses taustsüsteemis kehtib inertsiseadus. Inertsiseadus on see, et keha liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt seni kuni miski seda olekut ei muuda. Tekib küsimus, et kui aja ja ruumi teisenemised ( s.t. aja dilatatsioon ja keha pikkuse kontraktsioon ) toimuvad inertsiaalsetes taustsüsteemides, siis kas need võivad ilmneda ka mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides. Inertsiaalsetes taustsüsteemides tulevad aja ja ruumi teisenemised esile liikumiskiiruse suurenedes, kuid mitteinertsiaalsed taustsüsteemid on gravitatsiooniväljad. Gravitatsioonijõud ja koos sellega ka jõuväli on seotud keha massiga. Inertsiaalsetes taustsüsteemides käsitletakse eelkõige inertset massi. Vastavalt Newtoni II seadusele (  $F = ma$  ehk  $a = F/m$  ) iseloomustatakse inertse massiga keha inertsust ehk vastupanuvõimet liikumisoleku muutumisele. Näiteks mida suurem on kehal mass, seda rohkem jõudu tuleb rakendada, et keha hakkaks liikuma või jääks paigale. Kuid mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides ( näiteks gravitatsiooniväljades ) kasutatakse raske massi mõistet. Mida suurem on kehal mass, seda suurema gravitatsioonijõu see tekitab.

Nii Newtoni teises seaduses kui ka Newtoni gravitatsiooniseaduses on olemas mass. Mass on keha inertsuse mõõduks – nii on see Newtoni teises seaduses, kuid massil on ka külgetõmbe omadus – see seisneb Newtoni gravitatsiooniseaduses. Kuid kas raske mass ja inertne mass on siis üks ja sama?

Newtoni gravitatsiooniseadus on teatavasti aga järgmine ( Maa raskusjõu korral ):

$$F = G \frac{m_g M_M}{R_M^2}$$

kus keha raske mass on  $m_g$ , Maa raske mass on  $M_M$  ja Maa raadius on  $R_M$ . Gravitatsioonijõu mõjul saab keha kiirenduse  $a$ , kuid mitte raskuskiirenduse ( ehk  $g$  ). Selline keha kiirendus peab olema võrdeline keha inertse massi ja gravitatsioonijõu suhtega:

$$a = \frac{f}{m_{in}} = G \frac{M_M m_g}{R_M^2 m_{in}}$$

Kuid kõik eksperimentaalsed katsed näitavad seda, et kõikide kehade korral on kiirendus  $a$  sama. Seega kui raskuskiirendus on ühesugune, siis seda peab olema ka kiirendus. Tegur

$$G \frac{M_M}{R_M^2}$$

on ühesugune kõikide kehade korral. Seega kõikide kehade korral on suhe  $m_g/m_{in}$  samuti ühesugune. Ja seega saab järeldada ainult ühte – nimelt inertne mass ja raske mass on kõikide kehade korral üks ja sama. Need on võrdsed – siis:

$$a = \frac{f}{m_{in}} = G \frac{M_M m_g}{R_M^2 m_{in}}$$

ehk

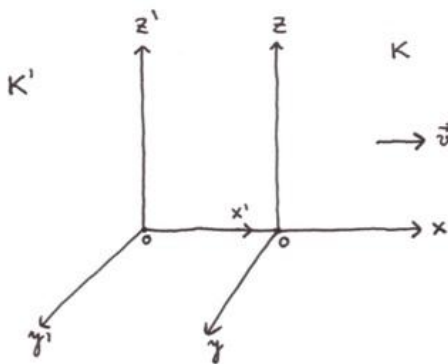
$$a = G \frac{M_M}{R_M^2}$$

Maa massi  $M_M$  saab kätte just viimasest seosest. Kui me teame Maa orbiidi raadiust  $R_{or}$  ja Maa tiirlemisperioodi  $T$ , siis saab ära määrata ka Päikese massi  $M_p$ . Gravitatsioonijõud, mis eksisteerib Maa ja Päikese vahel, põhjustab Maa kiirenduse  $\omega^2 R_{or}$  ( $\omega = 2\pi/T$ ). Järelikult:

$$M_M \omega^2 R_{or} = G \frac{M_M M_p}{R_{or}^2}$$

Siit ongi võimalik välja arvutada Päikese mass. Analoogiliselt saab nii arvutada ka teiste taevakehade massid. ( Saveljev 1978, 142-143 ).

Inertne ja raske mass on ekvivalentsed. See tähendab seda, et ei ole võimalik kindlaks teha, et kas vaadeldav keha asub gravitatsiooniväljas või kiirendusega liikuv tasutsüsteemis. Näiteks kaaluta oleku korral langevas liftis või ümber Maa tiirlevas kosmoselaevas ei ole võimalik kindlaks teha kiirenduse või gravitatsioonivälja olemasolu. Matemaatiliselt väljendub see kõveras ruumis. Näiteks kosmoselaeva orbiit tasases ehk eukleidilises ruumis on ekvivalentne sirgega kõveras ruumis. Kõvera ruumi sirget joont nimetatakse geodeetiliseks jooneks. Piisava kõverusega trajektoor võib olla kõveras ruumis sirge. Sirge on kõige lühem tee kahe ruumipunkti vahel. Negatiivse kõverusega nn. hüperboolsete ruumide geometria töötas välja 1826. aastal N. Lobatševski ja suvalise kõverusega ruumi geometria lõi 1854 aastal B. Riemann. Albert Einstein sidus ruumi kõveruse selliste suurustega, mis kirjeldavad massi ja liikumist. Einsteini võrrandi lahendamisel saadakse mingi vaadeldava keha maailmajoon kõveras ruumis, mis on määratud teiste kehade masside poolt. Maailmajoon on neliruumis keha liikumistee. Neljamõõtmelise koordinaatsüsteemi ( ehk kõvera aegruumi ) korral kasutatakse kolme ruumitelge ja ühte ajatelge. Ajamomenti korrutatakse valguse kiirusega, et oleks tegemist neljanda ruumimõõtmega. Tulemuseks on neli koordinaati:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ja  $ct$ .



Joonis 26 Tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes.

Kehade mass kõverdab aega ja ruumi. Kuid üldrelatiivsusteooria ei anna vastust küsimusele, et miks mass kõverdab aegruumi? Mass kõverdab aegruumi, kuid miks see nii on? Vastused nendele küsimustele annab ajas rändamise teooria.

Eirrelatiivsusteooria osas näitasime keha seisuenergia  $E = mc^2$  seost ajas rändamise füüsikaga. Kõik kehad eksisteerivad tavaruumis, milles eksisteerib aeg ja ruum. Aeg kui kestvus on pidevalt „liikuv“. See tähendab, et aeg ei jää kunagi „seisma“. Liikuvad kehad omavad kineetilist energiat. Absoluutselt kõik kehad Universumis liiguvad ka aja suhtes ( s.t. me kõik liigume ajas tuleviku poole ), kuid aeg ei ole mingisugune objekt. Sellest tulenebki seisuenergia  $E = mc^2$  kõikidele

kehadele Universumis. See tähendab seda, et energia  $mc^2$  on oma olemuselt siiski keha „kineetiline energia aja suhtes“. Kõik kehad liiguvad hyperruumi  $K'$  suhtes, sest tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ . Järelikult kõikidel kehal on „kineetiline“ energia ja seega ka mass. Niimoodi võib energia  $mc^2$  olla kineetiline energia „liikuva hyperruumi suhtes“ ehk  $E = mc^2$  on keha aja suhtes eksisteeriv energia.

Sarnaselt seisue energiaga peab ka keha raske mass olema kuidagi seotud ajas rändamise füüsikaga. Üldrelatiivsusteooria järgi on inertne mass ja raske mass omavahel võrdsed ehk ekvivalentsed. Mass on keha inertsi mõõt ehk see kirjeldab keha inertsi kiiruse muutuste suhtes. See tähendab seda, et mida suurem on kehal mass, seda rohkem aega läheb vaja keha kiiruse muutmiseks. Näiteks raske rongi pidurdamine võtab oluliselt kauem aega kui näiteks lapsevankri pidurdamine. Nende kahe keha pidurdusteade pikkused on väga erinevad ühe ja sama kiiruse arväärtuse korral. Või näiteks kui rong sõidab ühtlaselt ja sirgjooneliselt mööda teed ja rongi sees mõne keha mass ajas tohutult suureneb, siis mida suurem on kehal mass, seda aeglasemalt liigub rong ja keha enda kiirus jääb lõpuks maapinna suhtes üldse paigale. Järelikult, kui tavaruumis  $K$  keha mass suureneb (mitte liikumiskiirus  $K$  suhtes), siis keha liikumiskiirus hyperruumi  $K'$ -i suhtes muutub aeglasemaks, sest  $K$  enda liikumiskiirus jääb alati samaks  $K'$  suhtes. Kuid keha liikumiskiiruse muutumine hyperruumi  $K'$  suhtes tähendab juba aja ja ruumi teisenemist nagu seda oli juba näidatud erirelatiivsusteooria osas. Sellest järeldubki tõsiasi, et mida suurem on kehal mass, seda enam see kõverdab ümbritsevat ruumi ja aega.

Tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  füüsikaline süsteem avaldub looduses Universumi kosmoloogilise paisumisenä. Mass kõverdab ümbritsevat aegruumi ja seeläbi avaldab mass vastupanu Universumi paisumisele. See tähendab seda, et gravitatsioon ehk aegruumi kõverdus avaldab vastupanu Universumi paisumisele, mis on heaks näiteks sellele, et kuidas on mass kui keha inertsi mõõt seotud tavaruumi ja hyperruumi füüsikalise süsteemiga.

Palju täpsemalt öeldes ei kõverda aegruumi mitte ainult (lihtsalt) keha mass, vaid tegelikult massi tihedus ehk massi ja aegruumi vaheline suhe. Näiteks kui suur naftatanker oleks ainult pisikese liivatera suurune, siis oleks tema gravitatsioonijõud isegi planeet Maast palju suurem. Kuid tava suuruses ehk tegelikkuses on naftatankeri gravitatsioonijõud Maast palju kordi väiksem. Mida väiksem on keha ruumala ehk mida tihedam on keha mass, seda lähemale jõuavad keha ruumi mõõtmed selle sama keha gravitatsioonitsentri (ehk Schwarzschildi pinnale). Seetõttu suurenebki keha massi tiheduse suurenemise korral gravitatsioonijõud keha pinnal ja selle vahetus läheduses (ehk ümbritsevas ruumis). Massitihedus avaldub massi ja ruumala jagatisena:  $\rho = M/V$ , kuid kosmoloogias tähistatakse massi-energia tihedust tensorina:

$$T_{00} = \rho c^2 \left( \frac{J}{m^3} \right)$$

Kuna gravitatsiooniväljas eksisteerib aja dilatatsioon ja pikkuse kontraktsioon, siis ei saa aegruum olla enam eukleidiline (või pseudoeukleidiline) raskete masside läheduses. See tähendab seda, et aja aeglenemist ja pikkuste lühenemist gravitatsiooniväljas kirjeldatakse kõvera geomeetria-na. Igasuguse massi ümbruses hakkavad vastavalt raadiuse  $R$ -le aeg ja ruum kaduma, mida kirjeldatakse aegruumi kõverdusena. Näiteks mõne suure taevakeha Schwarzschildi raadiuse juures aega  $t$  ja ruumi  $l$  enam ei eksisteerigi:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{R}{R_s}}} = \infty$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{R_s}} = 0.$$

Sellepärast, et

$$r = R.$$

Siin on näha seda, et aega ja ruumi ei ole enam olemas gravitatsioonivälja tsentris ( teatud ulatusega  $R$  ). Järelikult sellele lähenedes hakkavad aeg ja ruum kaduma, mis väljendubki aja aeglenemises ja kahe ruumipunkti vahelise kauguse lühenemises. Kohe hakkame me seda lähemalt vaatama rohkem matemaatiliselt.

### **1.12.3 Üldrelatiivsusteooria tulenemine ajas rändamise teooriast, üldrelatiivsusteooria matemaatiline interpretatsioon ilma tensormatemaatikast ja Riemanni geomeetriat kasutamata**

Eirelatiivsusteoorias olev matemaatiline analüüs näitas üsna veenvalt, et kui tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes, siis järelikult keha jõudmiseks hyperruumi ehk  $K'$ -i peab keha liikumiskiirus tavaruumis  $K$  ( milles eksisteerib aeg ja ruum ) suurenema. Kuna  $K'$ -s ehk hyperruumis aega ei eksisteeri ( s.t. aeg on lõpmatuseni aeglenenud ehk aeg on peatunud ), siis seega lähenedes hyperruumile ( ehk keha liikumiskiiruse suurenemisel tavaruumis  $K$  ) aegleneb aeg. Kuid aja aeglenemine keha liikumiskiiruse kasvades on teada ainult eirelatiivsusteooriast: näiteks mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Keha liikumiskiiruse lähenemist valguse kiirusele vaakumis võib antud kontekstis tõlgendada keha liikumiskiiruse kasvuna tavaruumis  $K$ , kuid hyperruumi  $K'$  suhtes hakkab keha paigale jääma. Järelikult  $K$  liigub  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$ .

Niisamuti ka gravitatsiooniväli seisneb aja dilatatsioonis ja ruumi kontraktsioonis. See tähendab seda, et gravitatsiooni tsentritele lähenedes aeg aegleneb ja ruumipunktide vahelised kaugused vähenevad ( ruum kontrakteerub ) välisvaatleja suhtes. Keha mass mõjutab aja kulgemist ja 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi meetrikat. Meetrika uurib kahe ruumipunkti vahelist kaugust ds. Gravitatsiooni tsentris on aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni. See tähendab, et aeg ja ruum lakkavad eksisteerimast teatud kaugusel  $R$  gravitatsiooni tsentrist.

Mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aja kulg aegleneb ja keha pikkus lüheneb välisvaatleja suhtes. Kui keha  $m$  liigub tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$ , siis nähtub tavaruumi  $K$  liikumine hyperruumi  $K'$  suhtes. Gravitatsiooni tsentritele lähenedes aeg samuti aegleneb ja ruumipunktide vahelised kaugused vähenevad ( ruum kontrakteerub ) välisvaatleja suhtes. Gravitatsiooni tsentris ehk Schwarzschildi pinnal on aegruumi kõverus lõpmatult suur ja paokiirus on seal võrdne valguse kiirusega  $c$ . Analüüsime seda järgnevalt matemaatiliselt.

Kosmoloogia osas tuletatud ajas rändamise teooria üldvõrrandist

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c$$

teostame järgmised matemaatilised teisendused. Näiteks võtame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$(ct + vt')^2 = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] (ct')^2$$

ja seejärel kirjutame lahti tekkiva ruutvõrrandi  $(ct + vt')^2$ :

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] (ct')^2$$

Viime tekkinud võrrandi liikme  $2(ct)(vt')$  teisele poole võrdusmärgi:

$$(ct)^2 + (vt')^2 = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] (ct')^2 - 2(ct)(vt')$$

ja seejärel jagame võrrandi mõlemad pooled liikmega  $(ct')^2$

$$\frac{(ct)^2 + (vt')^2}{(ct')^2} = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] - \frac{2(ct)(vt')}{(ct')^2}$$

Viimase võrrandi liige  $(ct)^2 + (vt')^2$  võrdub järgmiselt:

$$(ct)^2 + (vt')^2 = (ct')^2$$

See tuleneb kosmoloogia osas tuletatud Pythagorase teoreemi võrrandist:

$$d^2 = l^2 + (vt')^2$$

mille liikmed on vastavalt järgmised:

$$d = ct'$$

$$l = ct + vt'$$

Kuna viimases võrduses  $vt' = 0$ , siis seega saame lõpptulemuseks  $l = ct$ . Hiljem me näeme seda, et eelnevalt tuletatud seos

$$(ct')^2 = (ct)^2 + (vt')^2$$

on võimalik võrduma panna järgmiselt

$$(ct')^2 = \left[1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}\right] (ct)^2 = (ct)^2 + (vt')^2$$

Sellest tulenevalt saame edasi teisendada järgmise matemaatilise võrrandiga:

$$\frac{(ct)^2 \left[1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}\right]}{(ct')^2} = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] - \frac{2(ct)(vt')}{(ct')^2}$$

Kuna viimase võrrandi liikmes

$$\frac{2(ct)(vt')}{(ct')^2} = \frac{2 ct vt'}{c^2 t'^2} = \frac{2tv}{ct'} = \frac{2vt}{ct'}$$

võivad järgmised avaldised olla nullid:  $vt' = 0$  või  $vt = 0$ , siis seega saame viimase võrrandi avaldada matemaatiliselt järgmiselt:

$$\left[1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}\right] \left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] - 0$$

Erirelatiivsusteooriast tuntud aja dilatatsiooni võrrandis

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

oleva ruutjuure saame avaldada järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

Tõstame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = \left(\frac{t}{t'}\right)^2$$

Hiljem on näha seda, et eelnevalt tuletatud seoses

$$\sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}} \frac{t}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

võrdub võrrandi esimene liige ühega:

$$\sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}} \frac{t}{t'} = 1$$

Kuna aja dilatatsiooni võrrand on kujul

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

siis seega saame ka selles seoses ühega võrduse:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{t'}{t} = 1$$

See tähendab seda, et kui  $v = 0$ , siis saame tulemuseks

$$1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

või kui  $0 \leq v < c$ , siis saame samuti

$$1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{t'}{t}$$

Sellest tulenevalt saame lõpuks kirja panna järgmise matemaatilise seose:

$$\sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2} \frac{t}{t'}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{t'}{t}} = 1$$

ehk

$$\sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2} \frac{t}{t'}} = 1$$

Gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrandi tuletamiseks analüüsime eelnevalt tuletatud üldises võrduses

$$\sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2} \frac{t}{t'}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{t'}{t}} = 1$$

võrrandi liikmeid eraldi. Näiteks viimases võrrandis olevas võrduses

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{t'}{t}} = 1$$

asendame  $v^2$  gravitatsioonivälja paakiirusega:

$$v^2 = \frac{2GM}{R}$$

mis musta augu korral võrdub valguse kiirusega vaakumis ehk  $v = c$  ja sellest tulenevalt saame Schwarzschildi raadiuse  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Ruutjuure avaldise kujuks saame:

$$\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R} \frac{t'}{t}} = 1$$

ehk

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r} \frac{t'}{t}} = 1$$

mis juba ongi oma olemuselt gravitatsiooniline aja dilatatsiooni võrrand. Sama tulemuse peame saama ka järgmisest võrdusest:

$$\sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2} \frac{t}{t'}} = 1$$

Selleks teostame viimases võrduses järgmised lihtsad matemaatilised teisendused:  $vt' = dy$  ja  $ct = l = dx$ . Sellest tulenevalt saame ruutjuure kujuks:

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} \frac{t}{t'}} = 1$$



Ka selles võrrandis teostame matemaatilised teisendused:  $dy = R$  ja  $dx = r$ . Tulemuseks saame:

$$\sqrt{1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{t}{t'}} = 1$$

Järgnevalt arvestame seda, et raadiuste jagatis võib avalduda:

$$+ \frac{R^2}{r^2} = \left(-\frac{R}{r}\right)^2$$

ja sellest tulenevalt saame:

$$-\frac{R}{r} = \pm \sqrt{+ \frac{R^2}{r^2}}$$

Seega saame ruutjuure avaldise kirja panna järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r} \frac{t}{t'}} \neq 1$$

Viimane seos ei saa võrduda enam ühega. Sellisel juhul ei saa kehtida enam ka üldine võrdus:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r} \frac{t}{t'}} \neq \sqrt{1 - \frac{R}{r} \frac{t'}{t}} = 1$$

See tuleneb sellest, et kui ruutjuure avaldised omavahel võrduvad:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

siis aja suhted omavahel ei võrdu:

$$\frac{t}{t'} \neq \frac{t'}{t}$$

Kuid aja suhete omavahelise võrduse korral

$$\frac{t'}{t} = \frac{t}{t'}$$

kehtib sellisel juhul ka kogu võrdus:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r} \frac{t'}{t}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r} \frac{t}{t'}} = 1$$

Selline analüüs näitab, et gravitatsiooniline aja dilatatsiooni võrrand on tuletatav ka võrdusest:

$$\sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2} \frac{t}{t'}} = 1$$

Viimast seost on võimalik tuletada ka palju lihtsamal teel. Näiteks kosmoloogia osas tuletatud Pythagorase teoreemi võrrandis

$$d^2 = l^2 + (vt')^2$$

teostame järgmised matemaatilised teisendused:

$$l^2 = dx^2$$

$$(vt')^2 = dy^2$$

$$d^2 = ds^2$$

Sellest tulenevalt saame võrrandi, mis kirjeldab kahe ruumipunkti vahelist kaugust ds

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{ehk} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Viimase võrrandi on võimalik viia järgmisele matemaatilisele kujule:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2} \sqrt{\frac{((dx)^2 + (dy)^2)}{(dx)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Saadud võrrandi

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

mõlemad pooled tõstame ruutu:

$$ds^2 = \left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right] dx^2$$

ja asendame võrrandi kõik liikmed järgmiselt:

$$d^2 = \left[1 + \frac{(vt')^2}{l^2}\right] l^2$$

Eelnevalt on teada seda, et kehtib seos

$$l = ct + vt'$$

Kuna just selles seoses  $vt' = 0$ , siis seega saame  $l = ct$  ja  $d = ct'$ . Sellest tulenevalt saame teostada terve rida järgmisi matemaatilisi teisendusi:

$$(ct')^2 = \left[1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}\right] (ct)^2$$

valguse kiirus c taandub võrrandis välja:

$$t'^2 = \left[1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}\right] t^2$$

viime viimase võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla

$$t' = \sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}} t$$

ja saamegi lõpuks otsitava võrrandi:

$$1 = \sqrt{1 + \frac{(vt')^2}{(ct)^2}} \frac{t}{t'}$$

Kui me aga integreerime algselt tuletatud seost

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

saame järgmise väga huvitava tulemuse:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x'} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{x'} \sqrt{1 + (2x + i)^2} dx = \int_0^{x'} \sqrt{1 + 4x^2 + 4ix - 1} dx = \\ &= \int_0^{x'} \sqrt{4x^2 + 4ix} dx \end{aligned}$$

Integreerides võrrandeid arvestasime seda, et

$$y = x^2 + ix \quad \text{ja} \quad i = \sqrt{-1}$$

Kuid jätkame edasi võrrandi integreerimist ja saame tulemuseks järgmist:

$$s \approx \int_0^{x'} \sqrt{4i} \sqrt{x} dx = \sqrt{4i} \frac{2}{3} x'^{\frac{3}{2}}$$

Järgmisena proovime analoogilisel teel välja arvutada keha m teepikkuse c:

$$c = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x'^2 + x'^4 + 2ix'^3 - x'^2} = \sqrt{x'^4 + 2ix'^3} = \sqrt{x'^2} \sqrt{x'^2 + 2ix'} = x' \sqrt{x'^2 + 2ix'}$$

ja teepikkuse c väärtuseks saame ligikaudu:

$$c \approx x' \sqrt{2ix'} = x' \sqrt{2i} \sqrt{x'}$$

Selleks, et teada saada, milline teepikkus on tegelikult kõige lühem, arvutame välja järgmise piirväärtuse ehk teepikkuste s ja c suhte:

$$\lim_{x' \rightarrow 0} \frac{s}{c} = \lim_{x' \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4i} \frac{2}{3} x'^{\frac{3}{2}}}{x' \sqrt{2ix'}} = \frac{\sqrt{4i} \frac{2}{3} x'^{\frac{3}{2}}}{x' \sqrt{2i} \sqrt{x'}} = \lim_{x' \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Järelikult s ja c suhe avaldub järgmiselt:

$$\frac{s}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,9428$$

ja seega on teepikkus s teepikkusest c lühem lausa 6 % :

$$s \rightarrow 6\%$$

See tähendab füüsiliselt seda, et teepikkuse  $s$  vahemaa on peaaegu 6% lühem teepikkusest  $c$ . Seega selline tavaarusaam, et kahe ruumipunkti vaheline kõige lühem tee on just sirge, ei kehti enam ruumi teisenemiste korral. Ruumi teisenemise korral on teepikkus isegi veelgi lühem sirgest teest. Ruumi teisenemise korral muutuvad kaugused meile palju lähemale.

( <http://www.youtube.com/watch?v=l3ZUW0LYUD0> )

Füüsikaline kaugus  $s$  kahe ruumipunkti A ja B vahel muutub väiksemaks ehk ruum teiseneb ka gravitatsioonivälja tsentrile lähenedes. Need punktid asetsevad välja tsentrist 0 tõmmatud raadiusel:

$$s = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} .$$

Kui välja tsentrist eemalduda, siis kaugus välja kahe ruumipunkti vahel suureneb. Järgnevalt tuletame ja analüüsime seda palju põhjalikumalt.

Kosmoloogia osas tuletatud ajas rändamise teooria üldvõrrandis

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

olev kordaja liige

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on võimalik viia järgmisele matemaatilisele kujule:

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}} .$$

Kuna mass mõjutab aegruumi ( s.t. tavaruumi ) meetrikat tsentraalsümmeetriliselt, siis saame kasutada sfäärilisi koordinaate ehk meil on järgnevalt tegemist tsentraalsümmeetrilise ruumikeskkonnaga, mis ajas enamasti ei muutu. See tähendab füüsiliselt seda, et suhtele  $\frac{v^2}{c^2}$  ( mille korral  $v = 0$  ) vastab mingisugune ruumikoordinaat ehk antud juhul mingi kindel kaugus  $r$  tsentraalsümmeetrilise ruumikeskkonna ( ehk kera ) tsentrist:

$$\frac{v^2}{c^2} = r .$$

Null punkt asub kera tsentrist tegelikult lõpmatuses. Täpselt sama on ka suhtega  $\frac{c^2}{c^2}$  ( mille korral  $v = c$  ) ehk sellele vastab samuti mingi kindel kaugus  $R$  kera tsentrist:

$$\frac{c^2}{c^2} = R .$$

See punkt asub kera tsentri vahetus läheduses, mitte täpselt kera tsentris. Eelnevast analüüsist saame teha järgmised lihtsad seosed:

$$v^2 = rc^2$$

$$c^2 = Rc^2 .$$

Sellest tulenevalt saame teha järgmised lihtsad matemaatilised teisendused:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{rc^2}{Rc^2}} = \sqrt{1 - \frac{r}{R}} .$$

Kuna ruutjuure alla ei saa jääda negatiivset arvu ehk

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \neq \sqrt{1 - \frac{r}{R}} ,$$

tuleb teha selleks puhtalt matemaatiline „pöördteisendus“:

$$\sqrt{1 - \frac{r}{R}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{R}{r}} .$$

Lõpuks me näemegi seda, et:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} .$$

Eespool mainitud üldvõrrand tuleb seega kujul:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} t' c$$

milles

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{R}{r} .$$

Saadud ruutjuure avaldis

$$\sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

on matemaatiliselt ja füüsikaliselt identne gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrandis oleva ruutjuure avaldisega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} .$$

Albert Einsteini üldrelatiivsusteoorias tuletatakse ruutjuure avaldis järgmiselt. Avaldises

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

asendatakse  $v^2$  Newtoni gravitatsiooniteoorias tuntud teise kosmilise kiirusega

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

ehk

$$v^2 = \frac{2GM}{r}.$$

$\frac{GM}{r}$  on gravitatsioonipotentsiaal ja  $\frac{v^2}{2}$  on liikuva keha kineetiline energia:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}.$$

Sellest tulenevalt saadakse järgmised matemaatilised teisendused:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r}},$$

milles

$$\frac{2GM}{c^2} = R$$

on Schwarzschildi raadiuse avaldis ja  $r$  on kaugus planeedi tsentrist. Teine kosmiline kiirus on keha kiirus, mis võimaldab mingisuguse planeedi mõjusfäärist jäädavalt lahkuda. Seda nimetatakse ka paokiiruseks ja näiteks musta augu pinnal on see võrdne valguse kiirusega  $c$ .

Eelnevalt tuletatud üldvõrrandist

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} t' c$$

on võimalik tuletada korraga nii aja dilatatsiooni kui ka pikkuse kontraktsiooni valemid, mis on täiesti identsed üldrelatiivsusteooriast tuntud aja ja ruumi teisenemise valemitega. Näiteks kui eelnevalt välja toodud üldvõrrandis on  $vt' = 0$ , siis saame teisendada järgmiselt:

$$ct = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} t' c$$

$$t = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} t'$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} t,$$

milles

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

nimetatakse üldrelatiivsusteoorias  $\gamma$ -faktoriks ehk  $\gamma$ -teguriks, mis näitab aja aeglustumist. Kuid samas saame üldvõrrandist

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} t' c$$

tuletada ka kehade pikkuse kontraktsiooni valemi, kui teha järgmisi asendusi:  $t'c = d$  ja

$$ct + vt' = l$$

(kui  $vt' = 0$ , siis  $ct = l$ ):

$$l = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} d$$

ehk

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{R}{r}}.$$

Nendest lihtsatest võrranditest on selgesti näha, et kehade pikkuse kontraktsiooni valemi:

$$l = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} d$$

saame ka siis, kui aja dilatatsiooni valemis:

$$t = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} t'$$

korrutada mõlemad pooled valguse kiirusega  $c$ :

$$ct = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} t' c \quad \rightarrow \quad l = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} d,$$

sest  $ct = l$  ja  $t'c = d$ .

Eirelatiivsusteoorias sõltus aja dilatatsioon keha liikumiskiirusest  $v$  valguse kiiruse  $c$  suhtes:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kuid üldrelatiivsusteoorias sõltub aja dilatatsioon keha asukohast  $r$  gravitatsioonivälja tsentri  $R$  suhtes:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

mille korral on gravitatsiooniraadius  $R$  alati väiksem taevakeha mõõtmetest  $r$  ehk  $R < r$ . Gravitatsioonivälja tsentris eksisteerival Schwarzschildi pinnal ehk aegruumi lõkspinnal võrdub aja dilatatsioon lõpmatusega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \infty$$

milles  $R = r$ . Matemaatiliselt on võimalik aga edasi analüüsida. Näiteks kui mõni füüsikaline keha satuks Schwarzschildi pinna sisse ehk  $R > r$ , siis aeg muutuks sellisel juhul imaginaarseks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - 2}} = \frac{t}{\sqrt{-1}} = \frac{t}{\pm i}$$

ehk

$$t' = \frac{t}{\pm i}$$

Aeg on sellisel juhul imaginaarne ja seetõttu peame kasutama kompleksarvude matemaatikat, mis sisaldab imaginaarühikut  $i$ . Näiteks kompleksarv esitatakse matemaatikas järgmise võrrandiga

$$z = a + bi$$

ja selle kaaskompleksarv avaldub:

$$z^* = a - bi$$

Kompleksarvu ruut võrdub:

$$z^2 = a^2 + 2abi - b^2$$

milles  $i$  on imaginaarühik  $i = \sqrt{-1}$ , võrrandi reaalosa on

$$z^2 = a^2 - b^2$$

ja imaginaarosa on

$$z^2 = 2ab$$

Kuid kompleksarvu võrrandi

$$z = a + bi$$

a liige on võrrandi reaalosa ja  $bi$  liige on imaginaarosa ning  $a$  ja  $b$  ise on reaalarvud. Ajamõõde muutus meil imaginaarseks:

$$t' = \frac{t}{\pm i}$$

ehk

$$t = t'i$$

Kompleksarvu võrrandina avaldub see aga järgmiselt:

$$t = z = 0 + t'i = t'i$$



ehk

$$t = t'i$$

milles võrrandi reaalosa on null ja imaginaarosa on  $t'i$ . Sellisel juhul on võrrandis:

$$t = z = a + bi$$

$a = 0$  ja  $b = t'$ . Kuna võrrandi reaalosa võrdub nulliga, siis seega füüsikalisi järeldusi ei ole võimalik teha, sest füüsikalisi nähtusi või seadusi on võimalik kirjeldada ainult võrrandi reaalosaga. Kompleksarvu imaginaarühik  $i$  väljendub matemaatilises analüüsis ka geomeetrilise funktsioonina:

$$\sqrt{-1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

ehk

$$\sqrt{-1} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$$

Imaginaarühik  $i$  võib olla positiivne või negatiivne:

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

Siinkohal võib tuua ka erandi, mille korral kompleksarvu üldse ei tekigi ehk aeg ei muutu imaginaarseks:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{0}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \infty}}$$

Tõstame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$t'^2 = \frac{t^2}{(1 - \infty)} = \frac{t^2}{-\infty} = 0$$

ja näeme seda, et aeg ei ole enam imaginaarne, vaid see võrdub hoopiski nulliga:

$$t' = 0$$

See tähendab seda, et kordaja  $y$  väärtus on null:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = 0$$

kui  $r = 0$ . Sealjuures ei ole tegelikult vahet, et kas kordaja  $y$  on ruudus:

$$y^2 = 0$$

või mitte:

$$y = 0$$

Kompleksarvude matemaatikaga kaasnevad ka nõ. matemaatilised paradoksid, millele ei leidu ratsionaalseid lahendusi. Üheks heaks näiteks on järgmine võrdus:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} = i$$

ehk

$$\frac{1}{i} = i$$

Sellest tulenevalt võime välja kirjutada ka järgmise võrduse:

$$\frac{1}{2i} = \frac{1}{2} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} i = \frac{i}{2}$$

ehk

$$\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$$

Viime reaalarvud ja imaginaarühikud võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{2}{2} = ii$$

Tulemuseks saame võrduse:

$$+1 = i^2$$

mis ei võrdu imaginaarühiku  $i$  tegeliku väärtusega:

$$i^2 = -1$$

ehk

$$i = \sqrt{-1}$$

Sellist vastuolu ratsionaalselt seletada ei ole kahjuks võimalik ja seetõttu ongi tegemist matemaatilise paradoksiga. Eelnevalt välja toodud seos võib võrduda ka järgmiselt:

$$\frac{1}{2i} = \frac{1}{2} \frac{1}{i} = \frac{1}{i+i}$$

milles avaldub samuti täpselt samasugune vastuolu:

$$\frac{1}{i} = i$$

ehk

$$+1 = i^2$$

### 1.12.3.3.1 Gravitatsioonijõud

Järgnevalt näitame seda, et kuidas gravitatsiooniline aja dilatatsioon on seotud gravitatsiooni-jõuga. See näitab kõige otsesemalt seost aegruumi kõveruse ja raskusjõu vahel. Järgnev matemaatiline tuletus ja analüüs on klassikaline näide sellest, kuidas on võimalik tuletada aegruumi

kõverusest Newtoni gravitatsiooniseadus ilma tensormatemaatikat ja Riemanni geomeetriat kasutamata. Selleks teeme gravitatsioonilises aja dilatatsiooni valemis mõned järgmised teisendused:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} = \frac{t}{t'}$$

Viimase võrrandi mõlemad pooled tõstame ruutu:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{t^2}{t'^2}$$

Kuna Newtoni II seaduse järgi

$$a = \frac{F}{m}$$

on raskuskiirendus  $a$  võrdne raskusjõuga

$$a = g = \frac{GM}{r^2}$$

siis seega peab raskuskiirendus  $a$  olema võrdeline ka ajasuhtega, mis tuli eelnevalt välja gravitatsioonilisest aja dilatatsioonist:

$$a = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right).$$

Esiteks diferentseerime sulus oleva avaldise  $r$ -i järgi:

$$\frac{\partial \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

milles olevat liiget

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2}$$

tuntakse Schwarzschildi raadiusena. Pärast sellist diferentseerimist me näeme, et raskuskiirendus  $a$  on seotud Schwarzschildi raadiusega järgmiselt:

$$a = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

Diferentsiaalmatemaatikast on teada, et

$$\frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{ds} \approx 1$$

ja kiirendus  $a$  on tegelikult teise astme tuletis aja järgi

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{dt^2}{ds^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} = a$$

ehk

$$v = \frac{dr}{ds} \quad \text{ja} \quad a = \frac{d^2 r}{ds^2}$$

Seetõttu võime raskuskiirenduse  $a$  avaldada diferentsiaalavaldisega:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{2GM}{c^2r^2}$$

Aegruumi intervalli  $ds$ -i asemele võime kirjutada omaaja ja valguse kiiruse  $c$  korrutise

$$ds = cd\tau$$

sest aegruumi intervalli meetrilises võrrandis on need omavahel seotud järgmiselt:

$$ds^2 = c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Seda võime märkida ka raskuskiirenduse ehk antud juhul Newtoni II seaduse avaldises gravitatsiooni korral:

$$\frac{d^2r}{c^2d\tau^2} = \frac{2GM}{c^2r^2}$$

ehk

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{2GM}{r^2}$$

ehk

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{GM}{r^2}$$

Kuna kiirendus  $a$  avaldub diferentsiaalseosena:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = a$$

siis seega saame järgmise seose, milles kiirenduse jagatis kahega võrdub raskusjõuga:

$$\frac{a}{2} = \frac{GM}{r^2}$$

Vastavalt üldrelatiivsusteooria üldisele ekvivalentsuse printsiibile võib raskusjõudu asendada inertsjõuga ehk me võime kiirendust käsitleda kesktõmbekiirendusena:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

ja sellest tulenevalt saame järgmise seose:

$$\frac{v^2}{2r} = \frac{GM}{r^2}$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

Kui me viimases avaldises korrutame mõlemad pooled massiga  $M$

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

siis me näeme seost, mida nimetatakse klassikalises mehaanikas energia jäävuse seaduseks, mille ühel pool on kineetiline energia ja teisel pool on gravitatsiooniline potentsiaalne energia ehk lihtsalt

gravitatsioonipotentsiaal:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

Eespool olevast gravitatsioonilisest aja dilatatsiooni võrrandist tuletatud energia jäävuse seadusest on võimalik matemaatiliselt tuletada Newtoni II seadus gravitatsioonijõu korral:

$$a = g = \frac{GM}{r^2}$$

Esiteks gravitatsioonipotentsiaal  $\phi$  on tegelikult tuletatav Newtoni gravitatsioonijõust  $F$ , kui me Newtoni gravitatsiooniseadust integreerime raadiuse  $r$ -i järgi järgmiselt:

$$\frac{GMm}{r} = \int_r^{+\infty} \frac{GMm}{r^2} d\vec{r} = U$$

milles  $F$  ongi Newtoni ülemaailmne gravitatsiooniseadus:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Teiseks on kineetiline energia  $E$  võrdeline tehtud tööga:

$$Fs = ma = mg = m \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds} = mv \frac{dv}{ds}$$

ehk

$$Fs = mv \frac{dv}{ds}$$

Viimasest seosest ongi näha seda, et töö  $A$  avaldise diferentseerimisel saame kineetilise energia valemi järgmiselt:

$$dA = Fsds = mv dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Integreerides viimast avaldist:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} s d\vec{s}$$

saamegi kineetilise energia matemaatilise avaldise:

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{mv^2}{2}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2}{2}$$

Niimoodi võrrandi kahte poolt eraldi diferentseerides ja integreerides ( nagu diferentsiaal- ja integraalarvutuses asi käib ) jõuamegi lõpuks kaudselt või otseselt Newtoni II seaduse vormini:

$$a = \frac{F}{m}$$

ehk gravitatsiooni korral

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{GM}{r^2}$$

Mõnikord omistatakse Newtoni II seadusele ka selline kuju, mille korral on mass lihtsalt korrutatud kiirendusega:

$$F = ma$$

ja see on täiesti identne Newtoni gravitatsioonijõuga  $F$ :

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

### 1.12.3.3.2 Gravitatsioonivälja meetriline võrrand

Järgnevalt tuletame tensormatemaatikat kasutamata meetrilise võrrandi, mis kirjeldab matemaatilisel gravitatsioonivälja ehk tsentraalsümmeetrilist aegruumi kõverust, mis ajas ei muutu. Aja ja ruumi teisenemise võrranditest on võimalik matemaatilisel tuletada aegruumi intervalli meetrilise võrrandi, mis kirjeldab kahe punkti vahelist kaugust ds neljamõõtmelises aegruumis. Selleks teeme alustuseks aja dilatatsiooni valemis järgmised matemaatilised teisendused:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk

$$t = \tau = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ehk

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$$

milles

$$t' = \Delta t = t_2 - t_1$$

Saadud viimase võrrandi mõlemad pooled tõstame ruutu

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t^2$$

Elementaararvmatemaatikast teame, et kahe punkti vahelist kaugust kolmemõõtmelises ruumis kirjeldab Phytagorase teoreem:

$$l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

milles olevad liikmed tähendavad järgmist:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

Kiiruse  $v$  definitsioon klassikalisest mehaanikast on aga järgmine:

$$v = \frac{l}{\Delta t}$$

Tõstame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu ja arvestame sealhulgas ka eelnevaid seoseid:

$$v^2 = \frac{l^2}{\Delta t^2} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}$$

Viime viimase võrrandi aja dilatatsiooni valemisse ja saame tulemuseks järgmiselt:

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2 c^2}\right) \Delta t^2 = \Delta t^2 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{c^2}$$

Korrutame saadud võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga ja saame:

$$c^2 \tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

milles

$$c\tau = s$$

ehk

$$c = \frac{s}{\tau}$$

Viimaks saamegi kätte otsitud lõpliku võrrandi

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

ehk

$$s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l^2}$$

mis näitab sündmuste A ja B vahelist intervalli. Kuna  $\tau$  ei sõltu inertsiaalsüsteemist, siis kahe vaadeldava sündmuse A ja B vaheline intervall on kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugune. Intervall  $s$  on invariant, kuid ajavahemik ja lõigu pikkus ei ole invariantid. Valguse korral on intervall:  $\tau = 0$  ja seega:

$$0 = c^2 \Delta t^2 - l^2$$

Kahe punkti vahelist kaugust neljamõõtmelises aegruumis kirjeldab aegruumi intervall:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ehk

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Aegruumi intervallist me järgnevalt lähtumegi, et kirjeldada kahe punkti vahelist kaugust kõveras aegruumis ehk tsentraalsümmeetrilises gravitatsiooniväljas. Tuletatud aegruumi intervalli meetrilisel võrrandil:

$$ds^2 = c^2 \tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt^2 - dl^2$$

on olemas ajaline osa

$$ds_1^2 = c^2 dt^2$$

ja ruumiline osa

$$-ds_2^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2) = -dl^2$$

See tähendab seda, et nende kahe osa liitmisel saamegi aegruumi intervalli meetrilise võrrandi:

$$ds_1^2 + (-ds_2^2) = ds_1^2 - ds_2^2 = ds^2$$

ehk

$$ds_1^2 - ds_2^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2$$

Aegruumi intervall  $ds$  on valguse kiiruse  $c$  ja „omaaja“  $\tau$  korrutis:

$$ds^2 = c^2 \tau^2$$

milles  $\tau^2 \neq dt^2$ . Mida lähemale gravitatsioonivälja tsentrile, seda enam teiseneb aeg välisvaatleja suhtes ehk esineb gravitatsiooniline aja dilatatsioon:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

ehk

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} dt$$

ja seetõttu võime aegruumi intervalli avaldada järgmiselt ( koos aja dilatatsiooniga ):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Kuid peale ajalise osa on aegruumi intervalli võrrandis olemas ka ruumiline osa:

$$ds^2 = d\tau^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Kuna gravitatsiooniväli on enamasti tsentraalsümmeetriline, siis avaldame selle ruumilise osa sfäärilistes koordinaatides:

$$ds^2 = dr^2 - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Antud võrrandis arvestame ainult raadiuse muutumist:

$$ds^2 = dr^2$$

ehk

$$d\tau^2 = dr^2$$

kuna kahe ruumipunkti vaheline kaugus ehk pikkus muutub ainult gravitatsioonivälja tsentri poole liikudes, mitte aga risti välja raadiusega:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

ehk

$$dr = d\tau \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

Võttes aga viimase avaldise ruutu



$$dr^2 = d\tau^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

saamegi pikkuse teisenemise avaldise ainult välja tsentri suunas

$$d\tau^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

Aegruumi intervalli võrrandi ruumilise osa saame seetõttu avaldada järgmiselt:

$$ds^2 = d\tau^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

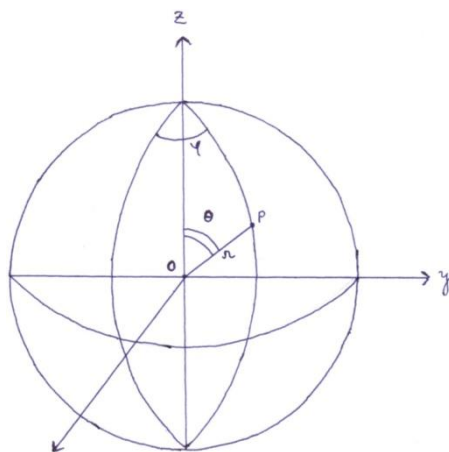
Kui me arvestame ajalist ja ruumilist osa samaaegselt ehk liidame need kaks poolt omavahel kokku, saamegi meetrilise võrrandi, mis kirjeldab matemaatiliselt puhast gravitatsioonivälja ehk tsentraalsümmeetrilist aegruumi kõverust:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

milles

$$\alpha = \frac{2Gm}{c^2}$$

nimetatakse Schwarzschildi raadiuseks, mis näitab välja tsentris eksisteeriva aegruumi augu suurust.



Joonis 27 Sfäärilised koordinaadid.

1916. aastal leidis sellise lahendi teadlane nimega Schwarzschild ja seetõttu nimetatakse seda ka Schwarzschildi meetrikaks. Kui aga võtta viimases võrrandis  $\alpha$  ja  $r^2$  asemele

$$r + \frac{R}{2}$$

ja tehes mõningaid matemaatilisi teisendusi, saame aga järgmise meetrilise kuju:

$$ds^2 = \frac{r - \frac{R}{2}}{r + \frac{R}{2}} dt^2 - \frac{r + \frac{R}{2}}{r - \frac{R}{2}} dr^2 - \left(r + \frac{R}{2}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Saadud avaldist peetakse Foki gravitatsioonivälja põhivormiks. Antud võrrand kirjeldab sellist välja, mis ajas ei muutu ja on tsentraalsümmeetriline. Selline vorm on esitatud harmoonilistes koordinaatides.  $R$  on Schwarzschildi raadius.

Pikkuse lühenemist on mõeldud füüsikalist kaugust kahe ruumipunkti A ja B vahel (näiteks kaugust gravitatsioonivälja kahe punkti vahel). Need punktid asetsevad tsentrist 0 tõmmatud raadiusel:

$$s = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}.$$

Kui välja tsentrist eemalduda, siis kaugus välja kahe ruumipunkti vahel suureneb.

Eelnevalt tuletatud aegruumi meetrikast on võimalik välja arvutada valguskiire paindumisnurk (radiaanides)  $\eta$ . Selleks vaatleme järgnevalt tsentraalsümmeetrilises gravitatsiooniväljas „tasandis“  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  valguskiire trajektoori. See tähendab, et tähest 0 möödub kauguselt  $a$  valguskiir, mis tuleb lõpmatusest. Me uurime järgnevalt valguskiire paindumist tähe gravitatsiooniväljas. Kuna sellisel juhul on valguskiire maailmajoon geodeetiline nulljoon ehk

$$ds^2 = 0$$

ja tsentraalsümmeetrilist gravitatsioonivälja kirjeldab võrrand:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2),$$

seega saame viimase võrrandi avaldada järgmiselt:

$$0 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 d\varphi^2.$$

Geodeetilise joone võrrandite integraalid on üldrelatiivsusteoorias tuntud järgmised avaldised:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dt}{ds} = E$$

mis on energia integraal ja

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = C$$

mis on momendi integraal. Jagades energia integraali momendi integraaliga, saame:

$$\frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{r^2} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{E}{C} = k \text{ (const).}$$

Viimases võrrandis on  $ds$  maha taandunud ja seega kehtib võrrand ka valgusjoonte korral.

Järgnevalt hakkame leidma konstandi  $k$  väärtust. Selleks arvestame võrrandis

$$0 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 d\varphi^2.$$

seda, et kui  $r = a$ , siis  $dr = 0$  ja saame

$$\left(1 - \frac{\alpha}{a}\right) \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 - a^2 = 0.$$

Viimasest võrrandist saame leida  $\frac{dt}{d\varphi}$  järgmiselt:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{a}}}$$

ja seega saame leida  $k$  ( $r = a$  korral):

$$k = \frac{E}{C} = \frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{r^2} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1 - \frac{\alpha}{a}}{a^2} \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{a}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{a}}}{a} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}{r}.$$

Kui me võrrandis

$$0 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

jagame mõlemad pooled  $d\varphi^2$ -ga:

$$\frac{0}{d\varphi^2} = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2}{d\varphi^2} - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \frac{dr^2}{d\varphi^2} - \frac{r^2 d\varphi^2}{d\varphi^2}$$

ja asetades võrrandist

$$k = \frac{E}{C} = \frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{r^2} \frac{dt}{d\varphi}$$

liige

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{kr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

eelmisesse võrrandisse, saame tulemuseks:

$$0 = \frac{k^2 r^4}{1 - \frac{\alpha}{r}} - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r^2.$$

Viimases võrrandis teeme järgmised asendused:

$$u = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{u}, \quad dr = -\frac{1}{u^2} du$$

ja korrutame kõik liikmed valemiga  $1 - \frac{\alpha}{r}$  ning  $u^4$ -ga, saame lõpuks järgmise avaldise:

$$k^2 - \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - u^2(1 - \alpha u) = 0$$

ehk

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{k^2 - u^2(1 - \alpha u)}$$

ehk

$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2(1 - \alpha u)}}$$

ehk

$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2 + \alpha u^3}}.$$

Kui  $\varphi = 0$ , siis  $r = \infty$  ja  $u = 0$ . Kui aga  $r = a$ , siis  $u = \frac{1}{a}$  ja seega saame

$$\varphi = 2 \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2 + \alpha u^3}}$$

milles  $\varphi$  on nurk, mille võrra pöörduv raadius  $r$ , kui valguskiir tuleb lõpmatusest, möödub tähe tsentrist kauguselt  $a$  ja liigub lõpmatusse. Ligikaudselt võrdub see avaldisega:

$$\varphi - \pi = \frac{2\alpha}{a} = \eta,$$

milles  $\eta$  on nurk, mille võrra kaldub valguskiir esialgsest sihist kõrvale tähe poole. Näiteks Päikese korral on see järgmine:

$$\eta = \frac{2 * 2,96}{700\,000} * 206\,000 \approx 1,74'',$$

kui valguskiir möödub Päikese äärest. See on leidnud ka vaatusliku kinnituse.

Geodeetilise joone meetrilise võrrandi energia integraali

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dt}{ds} = E$$

ja momendi integraali

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = C$$

valemeid on võimalik matemaatiliselt tuletada ka ilma tensorsmatemaatikat ja Riemanni geomeetriat kasutamata, mis on väga oluline näitamaks teooria füüsikalisemat poolt. Seda näitab järgnev matemaatiline analüüs. Näiteks geodeetilise joone meetrilises võrrandis

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

olevast liikmest

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2$$

on võimalik tuletada energia integraali  $E$  avaldis ja sama võrrandi liikmest

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2$$

on võimalik tuletada momendi integraali  $C$  avaldis. Sealjuures tuleb arvestada, et valguse korral on

$$ds^2 = 0$$

Meetrilise võrrandi liikmest, mis on oma füüsikaliselt olemuselt aja dilatatsioon

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2$$

teostame järgmised matemaatilised teisendused. Viime  $ds^2$  võrrandi teisele poole

$$1 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dt^2}{ds^2}$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled murruga  $\frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dt^2}{ds^2} \frac{ds}{dt}$$

ning saamegi viimaks järgmise avaldise, mis on väga sarnane üldrelatiivsusteooria tensormatemaatikast tuletatud energia integraali avaldisega E:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt}$$

Kuna üldrelatiivsusteooria Riemanni geomeetria tensoritest tuletatud võrrandi

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{\alpha}{r(r - \alpha)} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

integreerimisel ( s.t. eraldatakse muutujad, jagades murruga  $\frac{dt}{ds}$  ja korrutades  $ds$ -ga ) saadakse avaldis, mida nimetatakse energia integraaliks E:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dt}{ds} = E$$

siis meie poolt tuletatud võrrandi liige

$$\frac{ds}{dt} = E$$

ongi samaväärne energia integraali E avaldisega, mis muidu tuletatakse üldrelatiivsusteoorias tensormatemaikat ja Riemanni geomeetriat kasutades. Täpselt samasugune põhimõte on ka momendi integraali tuletamise korral. Selleks teeme põhimõtteliselt täpselt samad matemaatilised teisendused, mis energia integraali tuletamisel. Näiteks viime võrrandis

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2$$

oleva liikme  $ds^2$  teisele poole

$$1 = r^2 \frac{d\varphi^2}{ds^2}$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled murruga  $\frac{ds}{d\varphi}$

$$\frac{ds}{d\varphi} = r^2 \frac{d\varphi^2}{ds^2} \frac{ds}{d\varphi}$$

ning saamegi lõpuks üldrelatiivsusteoorias tuletatud momendi integraaliga väga sarnase avaldise:

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{ds}{d\varphi}$$

Kuna üldrelatiivsusteooria Riemanni geomeetria tensoritest tuletatud võrrandi

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0$$

integreerimisel ( s.t. eraldatakse muutujad, jagades murruga  $\frac{d\varphi}{ds}$  ja korrutades ds-ga ) saadakse avaldis, mida nimetatakse momendi integraaliks C:

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = C$$

siis meie poolt tuletatud võrrandi liige

$$\frac{ds}{d\varphi} = C$$

ongi samaväärne momendi integraali C avaldisega. Selline matemaatiline ja füüsikaline analüüs on tegelikult sisemiselt vastuoludeta. Näitame seda veenvalt järgmise analüüsi kaudu. Näiteks jagades energia integraali E momendi integraaliga C, saadakse konstant k, mis võrdub järgmiselt:

$$k = \frac{E}{C} = \frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{r^2} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{d\varphi}} = \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} = k$$

Teades seda, et dt võrdub avaldisega

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

saame liikme  $\frac{d\varphi}{dt}$  välja kirjutada järgmiselt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}{ds}$$

Seetõttu võrdub konstant k järgmise avaldisega:

$$\frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{r^2} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{d\varphi \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}{ds}$$

Leiame viimasest võrrandist ds:

$$\frac{r^2 d\varphi^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt} = ds$$

ja viime ruutjuure avaldise võrrandi teisele poole:

$$\frac{r^2 d\varphi^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt} = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

Teades seda, et  $ds^2$  võrdub liikmega

$$r^2 d\varphi^2 = ds^2$$

saame viimase võrrandi kirjutada kujule

$$\frac{ds^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt} = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

$ds$  taandub välja ja viime sulgudes oleva avaldise teisele poole:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

Tõstame võrrandi kõik liikmed ruutu

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}\right)^2}$$

ja näeme, et ruutjuure avaldis taandub välja:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

Viimane tuletatud võrrand energia ja momendi integraalide jagatisest on identne gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemiga:

$$ds^2 = d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2$$

ehk kui võrrandi mõlemad pooled viime ruutjuure alla ja tekkinud ruutjuure avaldise viime teisele poole:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

Teostatud matemaatiline analüüs näitab väga selgelt, et masside poolt kõverdatud aegruum seisneb füüsikalises mõttes aja dilatatsioonis ja ruumi kontraktsioonis, mis ilmnevad massi tsentrile või massi kesele lähenedes. Kõvera aegruumi füüsikalist olemust käsitleb juba järgmine peatükk palju põhjalikumalt.

#### **1.12.3.4 Gravitatsioonivälja ehk aegruumi kõveruse füüsikaline olemus**

Isaac Newtoni gravitatsiooniteooria järgi on kahe punktmassi vaheline tõmbejõud võrdne nende masside korrutisega ja pöördvõrdeline massidevahelise kauguse ruuduga. Jõudude mõjusirge läbib punktmasse:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

kus  $G$  on gravitatsioonikonstant  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  ( SI süsteemis ). Newtoni seadusest arenes välja gravitatsioonipotentsiaali mõiste:  $\phi = \phi(x, y, z)$ . Sellest tulenevalt saame gravitatsioonijõu  $F$  välja kirjutada järgmise diferentsiaalvõrrandina:

$$F = -m \text{grad} \phi = -m \frac{\partial \phi}{\partial x^i} u^i$$

kus  $i = 1, 2, 3$  ja  $F$  on punktmassile mõjuv gravitatsioonijõud, kuid  $m$  on punktmassi mass. Ruumis asetsevate masside ja gravitatsioonivälja vahel avaldub seos Poissoni võrrandina:

$$\Delta \phi = \text{div grad} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi G \delta$$

kus tähis  $\delta$  on vaadeldavas ruumpunktis olev massitihedus ( vahel on selle tähis ka  $\rho$  ). Viimase diferentsiaalvõrrandi lahendamisel saadakse aga järgmine integraalavaldis:

$$\phi = -G \int \frac{dm}{r}$$

kuid seda ainult siis, kui lõpmatuses  $\phi = 0$ . Ruumis olevate punktmasside korral avaldub viimane võrrand aga summana:

$$\phi = -G \sum \frac{m_i}{r_i}$$

Ruumpunktist, milles arvutatakse potentsiaali  $\phi$ , on  $r_i$   $i$ -nda punktmassi kaugus. Isaac Newtoni gravitatsioonivälja võrrand  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$  ei kirjelda välja ajalist muutumist. Sellisel juhul on liikumisvõrrandid:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\text{grad} \Phi \equiv -\vec{\nabla} \Phi.$$

Newtoni gravitatsioonivälja võrrand on pigem erijuht kirjeldamiseks gravitatsioonivälja. Gravitatsiooni üldisema ja täpsema kirjelduse annab meile Albert Einsteini tuntud gravitatsioonivälja võrrand:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} + g_{ik} \Lambda$$

See valem kirjeldab seda, et kuidas aine ja energia eksisteerimine mõjutavad aegruumi geometriat ehk meetrikat. Samuti ka selle aine või energia liikumine aegruumis.

Aja kulgemine aegleneb kõveras aegruumis ehk gravitatsioonijõu tsentri poole minnes. Matemaatiliselt kirjeldab seda järgmine gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrand:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt$$



kus aja diferentsiaal lõpmatutes on  $dt$ . Kasutades aga binoomilist ekspansiooni

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

on võimalik võrrand viia kujule:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{gR}{c^2} + \frac{3g^2R^2}{2c^4} + \dots \right) = T_0(1 + 6,95 \cdot 10^{-10} + 7,2 \cdot 10^{-19} + \dots)$$

kus  $g$  on siin Maa raskuskiirendus ja  $R$  on siin Maa raadius. Suurust

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

nimetatakse ka taevakeha gravitatsiooniraadiuseks ehk tänapäeval Schwarzschildi raadiuseks. Seega võib gravitatsioonilise aja dilatatsiooni valemi välja kirjutada ka niimoodi:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} dt$$

Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverdus, mida põhjustavad väga rasked massid. See aegruumi kõverdus väljendub selles, et mida enam gravitatsioonivälja tsentri poole minna, seda enam aeg aegleneb ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus väheneb. Selline aja ja ruumi teisenemine jätkub kuni teatud kauguseni tsentrist. Ja seda kaugust kirjeldab meile Schwarzschildi raadius  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

See raadius näitab kaugust gravitatsioonivälja tsentrist, et kust alates on aeg  $t$  ja ruum  $l$  teisenenud lõpmatuseni ehk kust alates avaldub aegruumi lõpmatu kõverdumine ehk aegruumi eksisteerimise absoluutne lakkamine:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

ja

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

Ja seetõttu ei saa midagi eksisteerida näiteks musta augu ehk aegruumi augu Schwarzschildi raadiuse  $R$  sissepoole jäävas „piirkonnas“, mida vahel nimetatakse ka Schwarzschildi pinnaks. See tähendab ka seda, et mingisugust singullaarsust musta augu tsentris ei saa olemas olla. Singullaarsus on lihtsalt üks punkt, kust alates mõõdetakse Schwarzschildi raadius  $R$ , mis määrab ära musta augu ehk aegruumi augu „suuruse“ ehk sellise kujuteldava sfääri suuruse ruumis, kust alates aegruumi

lõpmatu kõverus muutub tsentrist kaugenedes järjest tasasemaks. Seepärast ei saa musta augu mass eksisteerida Schwarzschildi pinna sees, vaid on sellest väljapool nii nagu tähtede ja planeetide korral. Schwarzschildi pind on täiesti kerakujuline ja see ei pöörle. See võib ainult tiirelda mõne teise taevakeha ümber.

Igasuguse ( taevakeha ) gravitatsioonivälja tsentris on aegruumi auk ( mitte ainult musta augu tsentris ). Ka planeet Maa tsentris on olemas aegruumi auk ( mida võib põhimõtteliselt tõlgendada ka musta auguna ). Hoolimata planeedi Maa pöörlemisest ja tiirlemisest ümber Päikese on see täiesti kerakujuline Schwarzschildi pind. Selle olemasolu planeedi Maa tsentris tõestab asjaolu, et kellad käivad seda aeglasemini, mida lähemal on need Maa gravitatsiooni tsentrile ehk kehtib gravitatsiooniline aja dilatatsioon

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} dt$$

ja koos sellega ka gravitatsiooniline pikkuse ( ehk kahe ruumipunkti vahelise kauguse ) kontraktsioon

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

Kellad jäävad seisma ehk aeg „peatub“ teatud kaugusel tsentrist. Seda kaugust tsentrist kirjeldabki meile tuntud Schwarzschildi raadius. Aegruumi augus ( musta augu tsentris ) on aegruum kõverdunud lõpmatuseni ehk aeg on aeglenenud lõpmatuseni ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus vähenenud lõpmatuseni. Maa tsentris olev must auk on aga mõõdetelt väga väike – kõigest 8 cm raadiusega. Aine tihedus Maa tuumas on väga suur. Gravitatsioonijõud Maa tuuma välispinnal on umbes 3 korda suurem kui seda on Maa pinnal. Peaaegu Kuu suurune Maa tahke sisetuum pöörleb palju kiiremini kui planeet ise. See pöörleb ida suunas. Kuid Maa sulametallist välistuum pöörleb lääne suunas ja palju aeglasemalt.

Ka valgust kiirgavate tähtede tsentrites on olemas aegruumi augud ehk mustad augud. Need tegelikult ei teki tähtede kokkuvarisemistest, vaid need on tähtede tsentrites juba eluajal olemas. Tähe suremine algab etapist, mil suurem osa vesinikust on ära kasutatud ehk vesinikud on muutunud heeliumideks. Sellest tulenevalt väheneb tähe energiatootmine ja tasakaal eralduva kiirguse rõhu ning suure gravitatsioonijõu vahel on rikutud. See põhjustab tähe tuuma kokkutõmbumist, mille jooksul tõuseb seal temperatuur ja rõhk ning ägenevad termotuumareaktsioonid. Kuid samal ajal paisub tähe väliskest, mis jaheneb. Sellest tulenevalt paisub täht mitmekordselt ja tähe pinnatemperatuur väheneb. Nii muutubki täht suremise etapil punaseks hiiuks. Tähe tuum aga tõmbub kokku ja kuumeneb. Heeliumi tuumad hakkavad ühinema alles siis, kui temperatuur on jõudnud  $10^8$  K-ni. Mingisugusel eluetapil tähe tuumasünteesireaktsioonid lõpevad ehk ei ole enam energiat tulevasteks tuumareaktsioonideks. Sellisel juhul tõmbub täht gravitatsioonijõudude mõjul kokku. Kui tähe mass on suurem kolmest Päikese massist, siis tema suure gravitatsioonijõu tõttu ületab tähe tihedus tavalise aatomituuma tiheduse. Nii väidetavalt tekibki must auk – kokkuvarisevatest tähetuumadest. Mustad augud tegelikult nii ei teki, vaid need on tähtede tsentrites juba olemas. Tähe tuuma kokku tõmbumisel ( suure gravitatsioonijõu tõttu ) muutuvad tähe tuuma mõõtmed juba tuumas oleva musta augu ehk aegruumi augu suuruseks. Mustad augud tegelikult ei teki tähtede kokkuvarisemistest, vaid need lihtsalt muutuvad nähtavateks tähtede tuumade kokku tõmbumisel. Need on tähtede tsentrites juba eluajal olemas.

Gravitatsioon on aegruumi kõverus. Aegruumi kõveruse tekitab aegruumi auk. Kuid aegruumi augu tekitab omakorda keha mass ( s.t. massi tihedus ). Seejuures ei ole keha mass aegruumi augu sees, vaid sellest väljapool. Aegruumi kõverusi tekitavad aegruumi augud ja seega gravitatsiooni-

välja allikas on aegruumi auk, mida omakorda on võimalik tõlgendada ka aegruumi tunnelina. Näiteks aegruumi auku kirjeldab Schwarzschildi ja objekti raadiuse suhe. Mida enam aegruumi augu poole söösta, seda enam aeg ja ruum teisevad. Schwarzschildi raadius määrab ära aegruumi augu suuruse ja taevase objekti raadius määrab objekti enda suuruse. Aegruumi auk asub enamasti taevaste objektide tsentris. Schwarzschildi raadiust ehk sündmuste horisonti  $R_s$ , mida arvutas välja Schwarzschild ise, kasutatakse tegelikult kõikides üldrelatiivsusteooria võrrandites. Näiteks meetriline tensor  $g$  sisaldab Schwarzschildi raadiust ehk aegruumi auku:

$$G = (g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Niisamuti ka Schwarzschildi meetrika sõltub aegruumi augu raadiusest  $R$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Seda kasutatakse ka tähtede ehituse mudelites, mida arvutatakse välja klassikalise gravitatsiooni-teooria võrranditest.

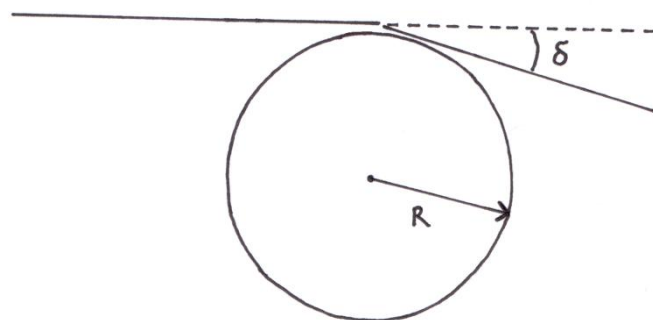
Näiteks olgu meil täht massiga  $M$ , tema Schwarzschildi raadius  $R_s$  ja tähe tegelik raadius  $R$ . Järgnevalt uurime tähe tegeliku ja Schwarzschildi raadiuse suhet. Valguse punanihkkest saadud valemi järgi on võimalik välja arvutada sageduse muutus  $\Delta f = f - f'$ . Kuid seda eeldusel, et valgus lähtub tähelt massiga  $M$  ja raadiusega  $R$  lõpmata kaugele. Seda seost kirjeldab meile järgmine valem:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{R_s}{R}$$

Ka nii on võimalik välja arvutada valguskiire paindumisnurk ( radiaanides )  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{R_s}{R}$$

Selle tegelik kuju on üldrelatiivsusteoorias aga  $\alpha = 2R_s / R$ . Kuid sellest hoolimata on suurusjärk ikkagi umbes  $R_s / R$ . Vaatame aga järgmist joonist:



Joonis 28 Valguskiire paindumine tähe raskusväljas.

Valguse kiir möödub tähest raadiusega  $R$  ja selle tulemusena see paindub. Tähe raadiuste suhe  $R_s / R$  esineb ka seoseenergiast  $E_s$ , mida põhjustab tähe gravitatsioonijõud. Seda nimetatakse massikaoks ja selle matemaatiline avaldis on  $E_s = c^2 \Delta M$ . See sarnaneb aatomituumade seoseenergiaga, mis vabaneb raskete tuumade lagunemisel või kergete tuumade ühinemisel. Kuid see tähendab ka seda, et näiteks samasugust energiat  $c^2 \Delta M$  oleks vaja tähe massiga  $M$  hajutamiseks lõpmata hõredaks gaasiks. Seda aga väljendab järgmine massikao ja massi suhe:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{R_s}{R}$$

Viimase seose paremale poolele annavad palju täpsemad arvutused kordaja 0,6. Kui me hindame ainult suurusjärku, siis seda kordajat valemis vaja ei lähe. Ka siis on võimalik viimast seost kasutada paljude tähemudelite välja arvutamiseks. Raadiuste suhe  $R_s / R$  esineb ka helikiiruse valemis. Heli on füüsikalises mõttes rõhuärituse levimine ruumis. Näiteks keskkonna tiheduse  $\sigma$  muutudes  $\Delta \sigma$  võrra muutub ka rõhk  $\Delta p$  võrra. Helikiirus avaldub seega järgmiselt:

$$v_s^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \sigma}$$

Tähe gravitatsioonijõu ja rõhu valemid võimaldavad helikiiruse ja valgusekiiruse suhte suurusjärguks järgmise avaldise:

$$\left(\frac{v_s}{c}\right)^2 = \frac{R_s}{R}$$

Muutliku tähe pulseerimise perioodi  $T$  saame rõhuärituse levimiskiirusest järgmiselt:

$$T_s = \frac{R}{v} = \frac{R}{c} \sqrt{\frac{R}{R_s}}$$

Astronoomiline objekt muutub nähtamatuks, kui Schwarzschildi raadius on suurem objekti mittepöörleva kerakujulise keha raadiusest. Nii tekib väidetavalt must auk. Neutronitähed on kõige tihedamad objektid Universumis. ( Keskinen ja Oja 1983, 71-74 ).

Pöörlevat musta auku ümbritseb kaks horisonti: statsionaarsusraja ja sündmuste horisont. Statsionaarsusraja on kokku surutud musta augu pooluste kohalt, kuid ekvaatori juures ulatub see natuke väljapoole sündmuste horisonti. Musta augu sündmuste horisont ( ehk musta augu pind ) ise on aga täiesti kerakujuline ja mittepöörlev ning selle tsentris asub singulaarsus ( mida tegelikult pole olemas ). Nende kahe horisondi vahel asub ergosfäär, kus absoluutselt kõik kehad pöörlevad ümber musta augu ja nende pöörlemissuunad ühtivad musta augu pöörlemissuunaga. Ergosfääris ei püsi paigal mitte ükski keha, kuid sealt on võimalik välja pääseda. Musta augu sündmuste horisondist ei ole võimalik välja pääseda.

Aja kulgemine erinevates taustsüsteemides on erinev ehk see on suhteline, mis sõltub vaatleja asukohast ruumis ehk sõltub taustsüsteemi valikust. Näiteks kui mingi vaatleja siirduks oma tähelaevaga kosmosesse kiirusega, mis läheneb valguse kiirusele vaakumis ja tuleks 22 aastat hiljem maa peale tagasi, siis maa peal on möödunud selle aja jooksul peaaegu 1000 aastat. Seega vaatleja rändas ajas tulevikku. Ületada valguse kiirust vaakumis pole reaalselt võimalik, sest lõpmatut energiat pole kusagilt võtta. Sama on tegelikult ka aegruumi auguga ( ehk aegruumi tunneliga ). Näiteks aegruumi augu tsentrisse pole võimalik reaalselt liikuda, sest sarnaselt valguse kiirusega vaakumis aegleneb aeg ja keha pikkus lüheneb aegruumi augule lähenemisel. Seetõttu

lähenedes augule reisib keha ajas tulevikku ja augu servale jõudmiseks peab keha rändama ajas lõpmata kaugesse tulevikku. Kuid ajas ja ruumis ei eksisteeri mitte miski lõpmata kaua – isegi ka aegruumi auk ise, sest need aja jooksul kvantaurustuvad. Näiteks mustad augud aja jooksul „auravad“, mida tuntakse Hawkingi kiirgusena. Selle käigus tekivad osakeste paarid, mida põhjustab musta augu energia. Osakeste paarist langeb üks osake musta auku, kuid teine osake kiirgub eemale. Ka musta augu pöörlemise tõttu emiteerivad pöörlemistelje poolused materiat, mis viib lõpuks musta augu hääbumiseni. Igasugune aine, mis langeb musta auku, tekitab elektromagnetkiirguse voo musta augu ümbritsevasse ruumi. Musta augu pöörlemistelje poolustelt väljuvad üksteisele vastandsuundades ümbritsevasse ruumi suured kiirgusvood. Nende järgi on võimalik välja arvutada musta augu energia.

Samas ei pääse musta augu tsentrist ka mitte miski välja, isegi mitte valgus. Täpsemalt öeldes pääseb valgus musta augu tsentrist küll välja, kuid see võtab lihtsalt lõpmatult kaua aega. Aja ( ja ruumi ) teisenemised gravitatsiooniväljas ehk aegruumi augu ümbritsevas aegruumis avalduvad väga selgesti järgmises katses. Näiteks oletame, et tsentraalsümmeetrilises väljas asetsevad kaks kiirgusallikat kaugusel  $r_1$  ja  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) välja tsentrist. Need kiirgusallikad on ühesugused ja nende omaajad on aga järgmised:

$$s_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_1}} t_1 \approx \left(1 - \frac{\alpha}{2r_1}\right) t_1$$

$$s_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_2}} t_2 \approx \left(1 - \frac{\alpha}{2r_2}\right) t_2$$

kus  $\alpha$  on Schwarzschildi raadius:

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2}$$

ja sümmeetriatsentrist lõpmatuses on

$$s_3 = t_3.$$

Aja mõõt välja punktides seisneb selles, et selle välja kõikides punktides peavad kiirgusperioodi omaajad olema võrdsed. Seega:

$$s_1 = s_2 = s_3.$$

ja niimoodi avaldubki järgmine seos:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2r_1}\right) t_1 = \left(1 - \frac{\alpha}{2r_2}\right) t_2 = t_3$$

$$\text{ehk} \quad t_1 > t_2 > t_3.$$

kus  $t_1$ ,  $t_2$  ja  $t_3$  on lõpmatuses mõõdetud vastavate kiirgusallikate perioodid. Kiirgusallika periood on seda suurem, mida lähemal see on gravitatsioonitsentrile. Toimub punanihe – spektris olev kiirgusallikate joon nihkub lõpmatuses vaadates punase osa poole. Aatomite poolt kiiratud valgus nihkub gravitatsiooniväljas spektri punase osa poole. Mida enam gravitatsioonivälja tsentrile lähemal asub kiirgav aatom, seda enam väheneb valguse võnkesagedus. ( Silde 1974, 176-177 ).

### 1.12.3.5 Gravitatsiooniväljade ehk aegruumi kõveruste matemaatiline kirjeldamine

Mida lähemale gravitatsiooni tsentrile, seda enam väheneb kahe ruumipunkti vaheline kaugus ehk ruumi eksisteerimine lakkab. Seda põhjustab massi olemasolu. Ruum pole enam eukleidiline ja seetõttu öeldaksegi, et ruum on kõver. Kahe ruumipunkti vahelist kaugust kirjeldab selline matemaatika haru, mida nimetatakse meetrikaks. Ja meetriline formalism ongi kõverate (aeg)ruumide klassikaline ( võiks öelda, et isegi peamine ) matemaatiline aparatuur. Näiteks kahe punkti või kahe sündmuse vahelist kaugust  $ds$  kõveras aegruumis kirjeldab järgmine võrrand:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Mõiste „kõver aegruum“ on seega puhtalt matemaatiline väljendusviis ( s.t. matemaatikast tulenev ), mille füüsikaliseks sisuks on tegelikult aegruumi eksisteerimise lakkamine. Kuna peale ruumi teisenemise teiseneb ka aeg ( sest gravitatsioonitsentrile lähenedes aegleneb aeg ), siis seega kasutatakse aegruumi kõveruse matemaatiliseks kirjeldamiseks ka tensoreid. Näiteks kahe punkti vahelist kaugust  $ds$  kõveras aegruumis kirjeldavad ka tensorid:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \text{kus} \quad \eta = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorid piirduvad ainult kolmemõõtmelisusega, kuid enamamõõtmelisi „objekte“ ( nagu näiteks neljamõõtmelist aegruumi ) kirjeldavad juba tensorid. Seetõttu on tensormatemaatika samuti kõverate aegruumide üheks peamiseks matemaatiliseks kirjeldusviisiks.

Üldrelatiivsusteoorias esineb peamiselt kahte liiki võrrandeid. Ühed on need, mis kirjeldavad kahe punkti vahelise kauguse muutumist kõveras aegruumis ( võrreldes tasase aegruumiga ). Need meetrilised võrrandid kirjeldavad ka seda, et kuidas muutuvad aeg ja ruum taevakeha tsentrile lähenemisel. Teised on aga need, mis kirjeldavad materია mõju aegruumile. Need tensorvõrrandid kirjeldavad seda, et keha mass kõverdab ümbritsevat aegruumi ja aegruumi kõverdus omakorda mõjutab kehade liikumisi selles. Just aine ja energia eksisteerimine mõjutavad aegruumi geomeetria ehk meetrikat. Samuti ka selle aine või energia liikumine aegruumis. Seda kirjeldab matemaatiliselt näiteks A. Einsteini võrrand:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

Riemanni geomeetria tensorid kirjeldavad Riemanni mitte-eukleidilist ehk kõverdunud ruumi. Meetriline tensor on vektorist palju üldisem ja keerulisem. Vektor näitab ainult suunda ja pikkust. Meetriline tensor näitab punktide omavahelisi kaugusi kõverdunud ruumides. Kahemõõtmelise, kolmemõõtmelise ja neljamõõtmelise ruumi meetrilisel tensoril on vastavalt kolm, kuus ja kümme sõltumatut komponenti. Riemanni tensorid ja Einsteini ning Grossmanni poolt kohandatud, Itaalia matemaatikute Gregorio Ricci-Carbastro ja Teulli Levi-Civita tensorid on kovariantsed. Ruumi ja aja koordinaatsüsteemide suvaliste muutuste või pöörete korral jäävad nende tensorite komponentide omavahelised suhted samasugusteks. Füüsikaliselt väljendub see selles, et kuna Universum on kõikjal üks ja sama, siis seega peavad loodusseadused olema samasugused ka erinevates ehk kõikides koordinaatsüsteemides. Einsteini gravitatsiooni väljavõrrandid on:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Tensor  $G$  on Einsteini tensor, mis koosneb Ricci tensori  $R$  ja meetrilise tensori  $g$  kombinatsioonist. Materია liikumist gravitatsiooniväljas kirjeldab tensor  $T$ . Indeksid  $\mu$  ja  $\nu$  on tensorite erinevad komponendid. Einsteini tensor  $G$  näitab seda, et kuidas füüsilised kehad kõverdavad ümbritsevat aegruumi geomeetriat. Einsteini võrrand näitab seda, et kuidas kehad kõverdavad aegruumi ja kuidas sama aegruumi kõverus paneb kehad liikuma.

„Meetrilise formalismi esitusviis on üldrelatiivsusteooria „klassikaline“ esitus. Kuid seda klassikalist formalismi on täiustatud. On välja arendatud üldrelatiivsusteooria matemaatiliste aluste üldiselt komplitseeritumad käsitlused. Need aga lähtuvad üldisematest matemaatilistest kontseptsioonidest, mõistetest. Sellisel juhul alustatakse tavaliselt aegruumi kui diferentseeruva muutkonna lokaalsete pseudoeukleidiliste puuteruumide, nendest moodustatud puutujavektorkonna, puuteruumis Lorentzi rühma taandamatute esitustega defineeritavate matemaatiliste suuruste ( spiiinorite, tensorite ) vaatlemisest. Pärast seda arvestatakse ka kogu tänapäeva diferentsiaalgeomeetriat. Kasutatakse topoloogilisi meetodeid, mitmeid eripäraseid ja efektiivseid arvutusmeetodeid. Näiteks Cartani välisdiferentsiaalvormide arvutust. Seejärel see kõik rakendatakse aegruumi ( kui kõvera Riemanni ruumi ) omaduste detailse uurimise teenistusse. Näiteks nn. spiiinorformalism on tensorformalismist fundamentaalsem käsitlusviis. See formuleerib üldrelatiivsusteooriat spiiinorite keeles. Kuid spiiinorformalismilt on võimalik üle minna tensorformalismile. Seda on võimalik arendada kasutades globaalseid koordinaate, mis annabki meetrilise formalismi. Meetriliselt formalismilt on omakorda võimalik üle minna tensorformalismile. Näiteks aegruumi intervalli kirjeldavad samaaegselt nii meetrika kui ka tensorid:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dr^\mu dr_\mu = g_{\mu\nu} dr^\mu dr^\nu,$$

kus  $r^\mu \rightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$  ja  $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Kui aga koordinaadid

võrduvad  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi)$ , siis saame

$$G = (g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Kuna meetriline tensor  $g$  saab võrduda:  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ , siis võib seda avaldada ka järgmise maatriksina

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\eta^{\mu\nu})$$

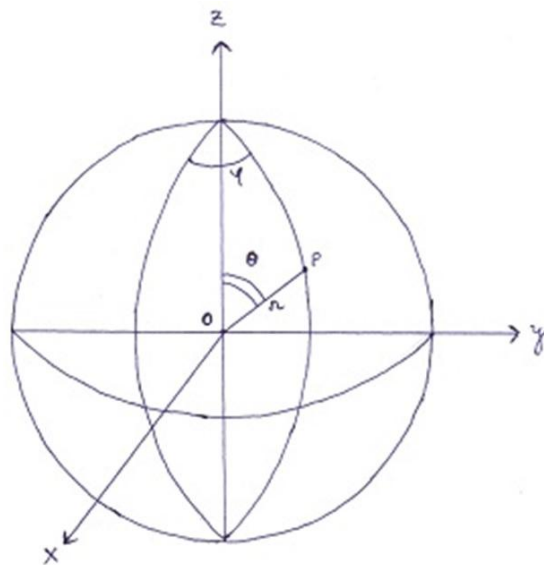
Seda kirjeldab meile põhjalikumalt juba Minkovski meetrika. Teise võimalusena saab kasutada aga lokaalseid reepereid iseloomustavaid suurusi – selline formuleerimisviis on tegelikult üldisem. See kujutab endast üldrelatiivsusteooria esitust reeperformalismis ehk tetraadformalismis.

Reeperformalmismi erijuht ongi tegelikult selline meetriline formalism, kui kasutada holonoomseid reepereid ehk koordinaatreepereid.“ ( Koppel 1975, 123-127 ). Järgnevalt hakkamegi nüüd lähemalt vaatama neid võrrandeid ehk matemaatilisi formalisme, mis kirjeldavad kõvera aegruume ehk

gravitatsiooniväljasid.

### 1.12.3.5.1 Kerapind kui kõverruum

Oletame seda, et meil on kera tsentriga  $O$ , mis on samas ka sfääriliste koordinaatide alguspunktiks. Sellistes koordinaatides on kerapind selliste ruumi punktide geomeetriliseks kohaks, mille korral  $r$  on 1.



Joonis 29 Sfäärilised koordinaadid, kus  $\theta = x_1$  ja  $\varphi = x_2$ .

Sfäärilistes koordinaatides on Eukleidese „3-ruumi meetriline vorm“ esitatav aga järgmiselt:

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2$$

kuid selline meetriline vorm on juhul  $r = 1$  järgmise kujuga:

$$(dl)^2 = (d\theta)^2 + (\sin \theta d\varphi)^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2$$

Ülal olev avaldis ongi kerapinna meetriline vorm. Koordinaadistik, mida kasutatakse kerapinnal, on peaaegu sama geograafilise koordinaadistikuga:  $x_1$ -koordinaatjooned vastavad meridiaanidele ja  $x_2$ -koordinaatjooned on sarnased paralleelidega. Kuid peab arvestama seda, et koordinaat  $x_1$  muutub selles koordinaadistikus vahemikus:

$$0 \leq x_1 \leq \pi$$

Kui aga kasutada geograafilisi koordinaate, siis vahemikus:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$$



$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < 0$$

Need oleksid nagu põhjalaiuskraadid. Kui  $x_1 = 0$ , siis see on ekvaator. Kuid vahemikus

$$0 < x_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

on tegemist nagu lõunalaiuskraadidega.

Kerapinna meetrilisele vormile

$$(dl)^2 = (d\theta)^2 + (\sin\theta d\varphi)^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2$$

vastab meetrilise tensori maatriks:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 x_1 \end{pmatrix}$$

mille determinant võrdub

$$g = \sin^2 x_1$$

Valemi

$$g^{\mu H} = \frac{\min(g_{\mu H})}{g}$$

järgi on meetrilise tensori kontravariantsed komponendid

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2} x_1 \end{pmatrix}$$

valemi

$$\Gamma_{\rho\mu,v} = \frac{1}{2}(g_{v\mu,\rho} + g_{\rho v,\mu} - g_{\rho\mu,v})$$

järgi arvutades suurused

$$\Gamma_{AB,C}$$

saame

$$\begin{cases} \Gamma_{11.1} = \Gamma_{11.2} = \Gamma_{12.1} = \Gamma_{22.2} = 0 \\ \Gamma_{12.2} = \sin x_1 \cos x_1 \\ \Gamma_{22.1} = -\sin x_1 \cos x_1 \end{cases}$$

Valemite abil arvutades

$$\Gamma_{\rho\mu}{}^H = \frac{1}{2} g^{Hv} (g_{v\mu,\rho} + g_{\rho v,\mu} - g_{\rho\mu,v})$$

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2} x_1 \end{pmatrix}$$

saame kätte Christoffeli koefitsendid:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = \cot x_1 \\ \Gamma_{22}^1 = -\sin x_1 \cos x_1 \end{cases}$$

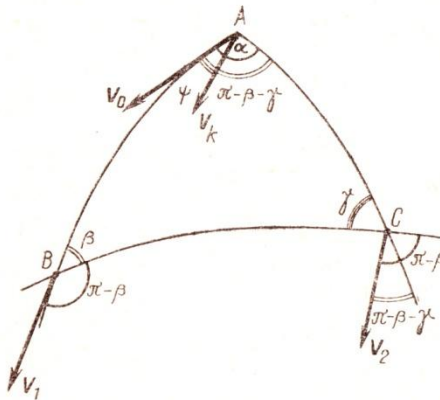
2-ruumi Riemanni-Christoffeli tensori ainsa sõltumatu komponendi  $R_{1212}$  saame valemi

$$R_{H\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{H\nu,\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,H,\nu} - g_{\lambda\nu,H,\mu} - g_{H\mu,\lambda,\nu}) + g^{\sigma\tau}(\Gamma_{\lambda\mu,\tau}\Gamma_{H\nu,\sigma} - \Gamma_{\lambda\nu,\tau}\Gamma_{H\mu,\sigma})$$

järgi avaldada nõnda:

$$R_{1212} = \sin^2 x_1 \neq 0$$

Seega on võimalik järeldada seda, et kerapind ehk sfäär kuulub kõverate ruumide hulka. ( Koppel 1975, 123-127 ). Sfääri raadiuse on võimalik välja arvutada näiteks sfääri pinnal sooritatud mõõtmistest. Näiteks oletame seda, et meil on sfäär ja selle peal on kolmnurk ABC, mille nurgad on  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ .



Joonis 30 Kolmnurk kera pinnal.

Kolmnurga ABC küljed on suuringjoonte kaared. Kolmnurga külje AB puutuja suunaline vektor  $v_0$  on antud punktis A. Kui aga see vektor liigub ( pseudoparalleelselt ) mööda külge AB, siis jääb see vektor külje AB puutuja suunaliseks seni kuni see jõuab punkti B ( asend  $v_1$  ). Küljega BC moodustab see nurga  $\pi - \beta$ . Mööda joont BC liikudes ( pseudoparalleelselt ), jääb nurk  $\pi - \beta$  kuni punkti C jõudmiseni ( asend  $v_2$  ). Punktis C ehk asendis  $v_2$  moodustab ta küljega AC nurga  $\pi - \beta - \gamma$ . Selline nurk jääb seni kuni ta jõuab tagasi punktini A ( asend  $v_k$  ). Vektoriga  $v_0$  moodustab ta sellises asendis nurga

$$\psi = \alpha - (\pi - \beta - \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

kus nurk  $\psi$  on kolmnurga ABC sfääriline ekstsess ja radiaanides on see

$$\psi = \frac{S}{R^2}$$

kus S on kolmnurga ABC pindala ja R on sfääri raadius. Kui aga vektorit liigutada pseudoparalleelselt suvalist joont mööda, siis viimane valem jääb ikkagi kehtima. Kui sooritada mõõtmisi sfääri pinnal, siis on võimalik välja arvutada sfääri raadiuse. ( Silde 1974, 142-143 ).

### 1.12.3.5.2 Albert Einsteini võrrandid

Aegruumi kõveruse põhjustab ruumis eksisteeriv energia ja mass, kuid nüüd me teame seda, et aeg ja ruum tegelikult ei „kõverdu“, vaid need hoopis „kaovad“ - lakkavad eksisteerimast vastavalt ajas rändamise teooriale. Seda siis kirjeldatakse aegruumi kõverdusena (geomeetriaga). Sündmuste koordinaatidel ei ole kõveras aegruumis enam meetrilist mõtet. Riemanni meetrika kirjeldab sündmuste vahelist kaugust ds:

$$(ds)^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik}(x) dx_i dx_k$$

$g_{ik}(x)$  on siis funktsioon, mis sõltub kuueteistkümnest aegruumi punktist  $x$  ja seda nimetatakse meetrilise tensori  $g(x)$  komponentideks – meetriliseks tensoriks või lihtsalt meetrikaks. Meetriline tensor on sümmeetriline:

$$g_{ik} = g_{ki}$$

ja sellepärast on 10 sõltumatut komponenti meetriliselt tensoril, mis on igas aegruumi punktis. Taustsüsteemi ehk koordinaatsüsteemi valikust sõltub meetrilise tensori komponentide kuju. Kuid viimase valemi koordinaatsüsteemi valikust ei sõltu kahe sündmuse vaheline kaugus ehk intervall. Erinevad meetrilised tensorid  $g(x)$  kirjeldavad meetrikat, mis on erinevates kõverates aegruumides.

Just aine ja energia eksisteerimine mõjutavad aegruumi geomeetriat ehk meetrikat. Samuti ka selle aine või energia liikumine aegruumis. Seda kirjeldavad matemaatiliselt A. Einsteini võrrandid:

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

kus  $g(x)$  on

$$g(x) = g_{ik}(x)$$

ja  $g_{ik}$  avaldub maatriksina järgmiselt:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

ning  $g_{ik}(x)$  maatriksi kuju on

$$g_{ik}(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kus meetrilise tensori  $g$  komponendid on vastavalt:

$$g_{00}(x) = 1$$

$$\begin{aligned}g_{10} &= 0 \\g_{11} &= -1 \\g_{22} &= -1 \\g_{33} &= -1\end{aligned}$$

Einsteini võrrandis kirjeldab  $g_{ik}$  liige Universumis eksisteerivat tume energiat.  $G$  on sümmeetriline tensor, mida nimetatakse ka Einsteini tensoriks. Einsteini tensoril on aga 10 sõltumatut komponenti  $G_{ik} = G_{ki}$ . Need avalduvad meetrilise tensori  $g$  komponentide ja nende esimest ja teist järku tuletiste kaudu. Einsteini tensor kirjeldab seda, et kui kõver on aegruum. Energia-impulssstensor  $T$  on ka sümmeetriline tensor, millel on kümme sõltumatut komponenti:

$$T_{ik} = T_{ki}$$

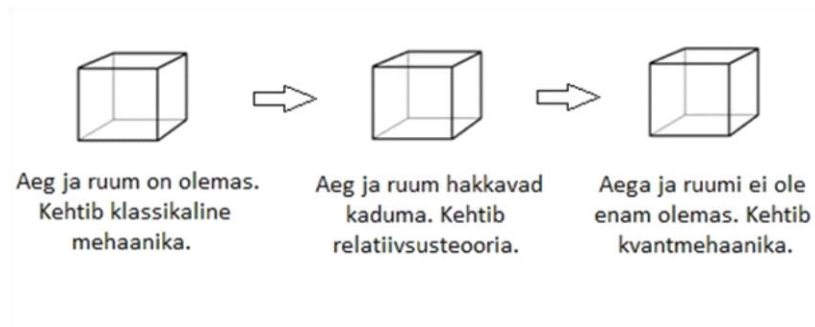
Tensor  $T$  kirjeldab seda, et kuidas aine liigub aegruumis ja kuidas on jaotunud energia ja aine aegruumis.

Need võrrandid on omavahel seotud kümne mittelineaarse teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemiga. Aine ja energia jaotus ja liikumine põhjustab aegruumi kõverust – seda need võrrandid kirjeldavadki. Need võrrandid kirjeldavad ka kõvera aegruumi mõju aine – energia – jaotusele ja liikumisele. Tensor on füüsikalist või geomeetrilist suurust kirjeldav matemaatiline objekt. Koordinaatsüsteemi valikust sõltuvad tensorit kirjeldavad komponendid, kuid tensor ise ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust. Need võrrandid kirjeldavad gravitatsioonivälja ( aegruumi kõveruse ) tekitamist materiaalse objektide poolt ja selle tekitatud välja mõjust objektide liikumisele. ( Mankin, Räim, Laas; 1.7. ).

## 1.13 Kvantmehaanika ajas rändamise teoorias ( vanem materjal )

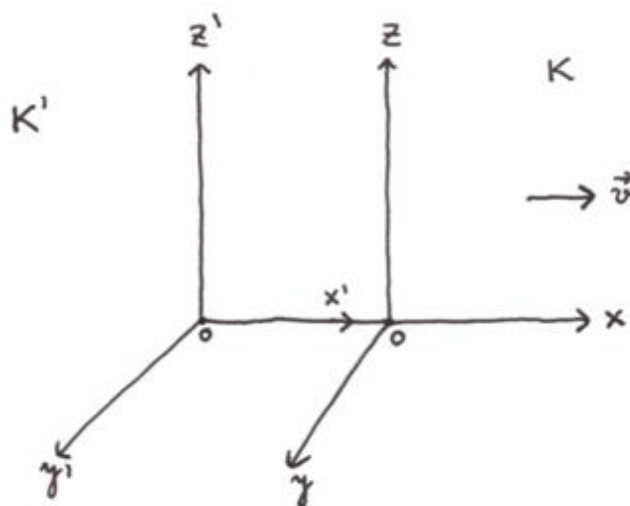
### 1.13.1 Sissejuhatus

Klassikalises mehaanikas käsitletakse kehade liikumist ( kinemaatikat, dünaamikat ja staatikat ) juhul, mil aeg ja ruum on kindlalt olemas. Kehade liikumised toimuvad ju alati ruumis ja see võtab ka alati aega. Kuid juba relatiivsusteoorias hakkavad aeg ja ruum teisenema. Aeg ja ruum hakkavad kaduma, mis väljendub aja aeglenemises ja kehade pikkuste lühenemises. Need aga avalduvad ainult siis, kui keha liikumiskiirus läheneb valgusekiirusele vaakumis ( erirelatiivsusteooria ) või kui keha läheneb gravitatsioonitsentritele ( üldrelatiivsusteooria ). Relativistlik mehaanika käsitleb kehade liikumist juhul, mil aeg ja ruum teisevad. Kuid sellisel juhul jääb üle veel üks juht – uurida kehade mehaanikat juhul, kui aega ja ruumi enam ei eksisteerigi. See tähendab seda, et aega ja ruumi poleks enam olemas. Relatiivsusteooria keeles öeldes oleks siis aeg aeglenenud lõpmatuseni ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus on lõpmatult väike. Tekibki küsimus, et mis siis juhtub kehade mehaanikaga? Järgnevalt hakkame nägema, et siis tekivad kvantmehaanikale sarnased efektid. See tähendab seda, et kvantmehaanika kirjeldab kehade ( osakeste ) mehaanikat juhul, mil aega ja ruumi ei ole enam olemas.



*Joonis 31 Aeg ja ruum erinevates füüsikateooriates.*

Kuid eelmisest võib aga järeldada järgmist. Klassikaline mehaanika kehtib ainult siis, kui aeg ja ruum on olemas ja need ei teisene. See tähendab seda, et kehade liikumised toimuvad ainult K-s ehk tavaruumis. Relatiivsusteooria kehtib ainult siis, kui aeg ja ruum hakkavad kaduma. Aeg ja ruum teisenevad seda enam, mida kiiremini keha liigub või mida enam keha läheneb gravitatsiooni-tsentrile. Sellisel juhul toimub keha „siire“ tavaruumist hyperruumi. Kvantmehaanika kehtib ainult siis, kui aega ja ruumi ei ole enam olemas. See tähendab siis seda, et kehad „liiguvad“ ainult hyperruumis, kuid näiliselt „liiguvad“ nad ainult tavaruumis.



Joonis 32  $K$  on tavaruum ja  $K'$  on hyperruum.  $K$  liikumine  $K'$  suhtes ( või vastupidi ) ei ole tegelikult pidev.

See tähendab ka seda, et füüsikaliselt on relatiivsusteooria ja kvantmehaanika üksteisega väga seotud. Ainuüksi see, et nad eksisteerivad ühes ja samas Universumis. Neil kahel füüsikateoorial on füüsikaliselt ühine päritolu. Relatiivsusteoorias esinevad aja ja ruumi efektid ehk aja aeglenemine ja pikkuste lühenemine. Sellest tulenevalt ei ole olemas absoluutset aega ja ruum ei ole eukleidiline. Kuid kvantmehaanikas eksisteerivad osakesed ajatus ja ruumitus dimensioonis. Osakeste jaoks aega ega ruumi enam ei ole olemas. Relatiivsusteooria ei oska seda matemaatiliselt kirjeldada. Üldrelatiivsusteooria võrrandid kaotavad kvantmehaanikat uurides oma kehtivuse. Kuid just siin ilmnebki kõige põhilisem füüsikaline seos relatiivsusteooria ja kvantmehaanika vahel. Kui relatiivsusteoorias esinevad aja ja ruumi kadumised ( mis väljenduvad aja dilatatsioonis ja pikkuste kontraktsioonis ), siis kvantmehaanikas aega ja ruumi enam ei eksisteerigi ( see väljendub osakeste teleportreerumistes aegruumis ). Füüsikalised kehad on võimelised teleportreeruma aegruumis ainult sellest väljas olles.

Kvantmehaanika seadused kehtivad mistahes osakeste korral – nii seisumassiga ( näiteks elektronid, kvargid ) kui ka seisumassita ( näiteks footonid ) osakeste korral ja aineosakeste ( elektronid ) ning väljaosakeste ( footonite ) korral. Kvantmehaanika seadused kehtivad ka aatomite ja molekulide korral. Kõik osakesed alluvad ka üheaegselt nii relatiivsusteooria kui ka kvantmehaanika seadustele. Selline asjaolu võib viidata kahe suure füüsikateooria ühisele päritolule või nende seotusele ( näiteks inglise füüsiku P. Diraci järgi on osakese spinn relativistlik kvantefekt, mis tuleneb erirelatiivsusteooriast ). Selleks aga koostame järgmise skeemi, kus me võrdleme omavahel footonit ja elektroni kahes suures, kuid pealtnäha erinevas füüsikateoorias:

Valguse osakeste ehk footonite korral:

Elektronide korral:

Relatiivsusteooria:

Relatiivsusteooria:

Valgus liigub vaakumis kiirusega  $c$ , kuid aines väiksema kiirusega. Footoni omaajas jõuab valgus hetkega ükskõik millisesse sihtkohta ruumis. Kuid meie ( vaatleja ) ajas läbib valgus vaakumis ühe sekundi jooksul

Elektronid ei liigu vaakumis kiirusega  $c$ , vaid liiguvad alati sellest väiksema kiirusega. Mida lähemale valguse kiirusele  $c$ , seda enam aeg aegleneb ja keha pikkus lüheneb.

ligikaudu 300 000 km vahemaa.

#### Kvantmehaanika:

Valgusel esinevad difraktsiooni ja interfereentsi nähtused. Osakeste korral esinevad tuntud määramatuse seosed. Osakeste käitumine on tõenäosuslik ja seega valguse osakesed ehk footonid teleportreeruvad aegruumis.

#### Kvantmehaanika:

Elektronide kvantmehaanilised aspektid on kõik täpselt samad, mis footonite korralgi.

Antud juhul käsitleme siin peamiselt kvantmehaanika füüsikalisi aluseid, mitte niivõrd selle matemaatikat. Nii tegime ka relatiivsusteoorias. Püüame arusaada ja mõista nende füüsikateooriate just füüsikalist olemust laskumata seejuures nii väga sügavale matemaatikasse.

Teleportmehaanika ( teleportatsiooni ) peatükis oli käsitletud teleportatsiooni olemusest ja selle liikidest. Kuid nüüd hakkame me vaatama seda, et kuidas teleportatsioon ( selle mehaanika ) on seotud kvantmehaanikaga. Edaspidi hakkame me veenduma selles, et ka kvantmehaanika ei ole tegelikult midagi muud kui sisuliselt teleportmehaanika üks avaldumisvorme, mis on täiesti kooskõlas ajas rändamise teooriaga. Et aga selles veenduda, tuli kõige pealt tutvust teha just teleportatsiooni peatüki endaga.

Kvantfüüsika formalismi järgi on mikroosakesel korpuskulaarsed omadused ja veel lisaks ka lainelised omadused. Osakese korpuskulaarsed füüsikalised suurused on näiteks mass, impulss, energia jne. Osakese laine füüsikalised suurused on aga lainepikkus, sagedus, periood jne. Ajas rändamise teooria seisukohast lähtudes on aga osakese laine füüsikalised suurused seotud just osakese pideva teleportreerumistega aegruumis. Järgnevalt hakkame kõiki neid osakese kvantefekte pikemalt uurima.

### 1.13.2 Kvantmehaanika formalism

Inimesed näevad igapäevaselt liikuvaid füüsilisi kehasid. Näiteks mingi keha liigub ruumis ruumipunktist A ruumipunkti B ja selgelt näib, et keha läbib oma liikumistrajektooriga kõik ruumipunktide A ja B vahel olevaid punkte. Selles seisnebki sügav füüsikaline probleem: nimelt keha ei saa läbida oma liikumistrajektooriga kõiki A ja B vahelisi ruumipunkte, sest neid oleks lihtsalt lõpmatult palju ehk ruumipunktide A ja B vaheline kaugus oleks lõpmatult suur ja seega kestaks keha liikumine ruumipunktist A ruumipunkti B lõpmatult kaua. See aga tegelikkuses nii ei ole ja järelikult keha „liikumine“ ruumipunktist A ruumipunkti B ei ole tegelikult pidev ( ei läbita liikumistrajektooriga olevaid kõiki ruumipunkte ), vaid keha „liikumine“ on „kvanditud“ ehk keha läbib ainult osalisi ruumipunkte oma liikumistrajektooriga. Seetõttu võib arvata, et aegruum on tegelikult „kvanditud“ ehk kehade liikumised Universumis ei ole pidevad. Formaalselt mõistame me seda kehade teleportreerumistena aegruumis. Kvanditud ei ole tegelikult aegruum ise, vaid osakese liikumine aegruumis, mis jätab kvanditud aegruumi mulje. Makrokehade liikumise mittepidevus avaldub alles aegruumi kvanttasandil nii nagu ainete mittepidevus aegruumi kvanttasandil molekulide ja aatomitena. Seetõttu mikroosakesed teleportreeruvad aegruumis ehk nende liikumised aegruumis ei ole enam pidevad.

R. Feynmann andis kvantmehaanikast aga teistsuguse tõlgenduse ( formalismi ). Tema loodud integraalid arvutavad välja osakese kõikvõimalikke trajektoore. Selle uue formalismi tõlgendus

kvantmehaanikast oli lühidalt järgmine:

- 1 Osakesed „liiguvad“ aegruumis mööda kõikvõimalikke trajektoore.
- 2 Feynmann kirjeldas igat trajektoori kahe arvuga, milleks oli laine amplituud ja faas. See tähendab seda, et iga trajektoori jaoks arvutatakse välja tõenäosusamplituud.
- 3 Arvutatakse välja tõenäosus osakese jõudmiseks punktist A punkti B. Seda arvutatakse välja osakese lainete liitmisega ( ehk integreerimisega ) ehk kõik trajektooride tõenäosusamplituudid summeeritakse. Kuid liikumistrajektoore on tegelikult lõpmata palju. Seetõttu tuleb integreerida ehk summeerida üle kõikide võimalike trajektooride, sest need lained on seotud osakese kõikvõimalike teedega, mis läbivad mõlemat punkti.
- 4 Lõpuks saame tõenäosuse, mida annab meile sama ka lainefunktsioon.

R. Feynmann'i selline formalism kvantmehaanikast on matemaatiliselt üsna keeruline ja sinna sisse jäävad inimese loogikale mõistmatud tõlgendused osakese kvantmehaanilistest omadustest. Seetõttu esitame järgnevalt kvantmehaanikast hoopis teistsugusema pildi, mille korral tulevad osakese kõik kvantmehaanilised omadused nende endi teleportreerumistest aegruumis. Näiteks kui R. Feynmanni kvantmehaanika formalismi teooria käsitles osakesi, mis liiguvad kõikvõimalikke trajektoore mööda, siis antud formalismi teoorias arvutatakse välja tõenäosused iga ruumipunkti ja ajahetke kohta, kuhu osake teleportreerumisel jõuda võib. See on kahe erineva teooria vaheline erinevus, kuid samas ka sarnasus.

### 1.13.3 Matemaatiline analüüs kvantmehaanika tulenemisest ajas rändamise teooriast

De Broglie arvas esimesena seda, et peale korpuskulaaromaduste on mikroosakestel veel ka lainelised omadused, nii nagu oli valguse puhul. Footonil on energia  $E$

$$E = hf$$

ja impulss  $p$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{2\pi h}{\lambda}$$

De Broglie idee järgi on elektroni või mõne teise osakese liikumine seotud lainega, mille pikkus on

$$\lambda = \frac{2\pi h}{p} = \frac{2\pi h}{mv}$$

ja sagedus  $f$  on



$$f = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$$

De Broglie selline oletus on nüüd tuntud kui De Broglie hüpoteesina, mis on leidnud katseliselt kinnitust. Ülal välja toodud valemities on  $h$  jagatud  $2\pi$ -ga. Antud juhul käsitletakse osakest, millel on lainelised omadused, mitte vastupidi – lainet, millel on korpuskulaarsed ( osakeste ) omadused. Broglie valem seob omavahel osakeste laineomadusi (  $\lambda$  ) ja korpuskulaaromadusi (  $m$ ,  $v$ ,  $p$  ). Osakeste lained on leiutõenäosuse lained ehk leiulained. Laine intensiivsus ( amplituudi ruut ) antud punktis ja hetkel määrab osakese leidmise tõenäosuse selles kohas ja sellel ajal. Osakeste lained ei ole keskkonna lained. Osakeste laineomadused avalduvad osakeste liikumisel ( näiteks difraktsiooni- ja interferentsikatsete käigus ), kuid korpuskulaaromadused avalduvad osakeste vastastikmõjus ( näiteks põrgetel ).

De Broglie hüpotees seisnes selles, et kui valguse osakest footonit oli võimalik käsitleda lainena, siis järelikult võis ka kõiki ülejäänud osakesi vaadelda kui lainena. See tähendab seda, et peale footonite on ka kõikidel teistel osakestel lainelised omadused. Kuid de Broglie ei pannud tähele siin ühte olulist asja. Nimelt valguse osakesed footonid liiguvad vaakumis kiirusega  $c$ , mille korral on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni. Ajas rändamise teooria tõlgenduse järgi eksisteerivad footonid „väljaspool“ aegruumi, sest liikudes vaakumis kiirusega  $c$  on aeg aeglenenud lõpmatuseni ja keha pikkus lühenenud samuti lõpmatuseni ( ehk aega ja ruumi enam ei eksisteeri ). Kui footonitel esinevad lainelised omadused, siis kas see tuleneb sellest, et need footonid eksisteerivad „väljaspool“ aegruumi? Kui see on tõesti nii, siis peaks see kehtima ka kõikide teiste osakeste korral, millel esinevad samuti lainelised omadused. Ajas rändamise teooria tõlgenduse järgi teleportreeruvad „väljaspool“ aegruumi ehk hyperruumis olevad kehad aegruumis.

### 1.13.3.1 Matemaatiline analüüs

Kosmoloogia osas tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c$$

on võimalik teha järgmised matemaatilised teisendused. Juhul kui  $ct = 0$ , saame järgmise võrrandi

$$vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c.$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled  $t'$ -ga:

$$\frac{vt'}{t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{ct'}{t'}$$

ja sellest tulenevalt saame lõpuks järgmise väga olulise võrrandi:

$$v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c$$

ehk visuaalselt paremini esitatuna:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

või

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Viimase võrrandi füüsikaline sisu seisneb järgmises analüüsis. Eelnevalt on teada, et meie tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ . Sellest ongi näha seda, et kui keha  $m$  liikumiskiirus on tavaruumi suhtes  $c$  ehk  $v = c$  (näiteks valguse liikumiskiirus meie tajutavas aegruumis), siis hyperruumi suhtes on keha paigal ehk  $v' = 0$ . Kui aga keha liikumiskiirus on tavaruumi suhtes null (keha on paigal) ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi suhtes on keha liikumiskiirus võrdne  $c$ -ga ehk  $v' = c$ . See tähendab ka seda, et kõik kehad Universumis liiguvad valguse kiirusega  $c$ . Valgus ise on tegelikult paigal. Kuna aja dilatatsiooni võrrand, mis on tuletatud samuti ajas rändamise üldvõrrandist, on kujul

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja seetõttu saame kinemaatilise teguri avaldada järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}.$$

Ajas rändamise üldvõrrandist tuletatud valemi

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

saame seega viia järgmisele matemaatilisele kujule:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{ct}{t'}$$

ehk

$$v = c \frac{t}{t'}.$$

Viime  $t'$  teisele poole

$$vt' = ct$$

ja teisendame viimast võrrandit kujule:

$$v \Delta t = ct,$$

milles  $\Delta t = t'$ . Viimasest tuletatud väga olulisest võrrandist

$$v \Delta t = ct$$

on selgelt näha seda, et keha m liikumiskiirus  $v$  sõltub aja kulgemisest või keha liikumiskiirus ise tingib aja kulgemise iseloomu:

$$v = \frac{ct}{\Delta t}$$

Teepikkus  $ct$  võib olla valguse teepikkus tavaruumis  $K$  või seisumassiga keha teepikkus hyperruumi  $K'$  suhtes:

$$v = \frac{s}{\Delta t},$$

milles  $s = ct$ . Kui me eelnevalt tuletatud võrrandis

$$v \Delta t = ct$$

korrutame mõlemad pooled  $mc$ -ga:

$$mcv \Delta t = mc^2 t$$

milles  $\Delta t = t'$  ja  $mc^2 = E$  on erirelatiivsusteooriast tuntud seisuenergia, siis saamegi seose „energia korda aeg“, mis on Plancki konstandi  $h$  dimensiooniks:

$$mct' = Et = \text{const} = h$$

Suurust, mille dimensiooniks on ENERGIA \* AEG, nimetatakse mehaanikas mõjuks, sellepärast on Plancki konstant ka kui mõjukvant.  $h$  dimensioon ühtib ka impulsimomendi dimensiooniga. Katseandmetest on saadud Plancki konstandile järgmine väärtus:

$$h = 1,054 * 10^{-34} \text{ J*s} = 1,054 * 10^{-27} \text{ erg*s}.$$

Väga tihti on aga Plancki konstant jagatud 2 piiga, seepärast on  $h$ -i tegelik arv väärtus aga järgmine:

$$h = 6,62 * 10^{-34} \text{ J*s} = 6,62 * 10^{-27} \text{ erg*s}.$$

Esimest korda tuleb Plancki konstant  $h$  välja tegelikult Plancki kvandiennergia valemis:

$$E = hf = \frac{2\pi hc}{\lambda}$$

A. Einsteini poolt antud seisuenergia erirelatiivsusteooriast on aga

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

Kuna  $E = E$ , siis  $mc^2 = hf$ . Seega  $h$ -i saame järgmiselt:

$$\frac{mc^2}{f} = h$$

Periood  $T$  ja lainepikkus  $\lambda$  on omavahel seotud:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$$

kus  $c$  on valguse kiirus vaakumis. Järelikult  $h\nu = mc^2$  ehk  $E = h\nu$  ja seetõttu saame  $h$ -i dimensiooniks

$$ENERGIA * AEG = h.$$

Siit on aga näha seda, et mida suurem on osakesel sagedus, seda suurem on ka mass. Mida suurem on aga mass, seda väiksem on lainepikkus. Mida suurem on ka energia, seda väiksem on lainepikkus. See avaldub Plancki konstandina kvandi energia valemis:  $E = hf$ . See sarnaneb impulsi jäävuse seadusega: mida suurem on mass, seda väiksem peab olema kiirus ja vastupidi – mida suurem kiirus, seda väiksem on mass. See tähendab seda, et sellisel juhul on impulsid mõlemal korral samasugused. Mida suurem on mass, seda suurem on ka ju energia vastavalt  $E = mc^2$  seosele.

Konstant  $h$ -i väärtus on ainult eksperimentaalselt mõõdetav:

$$Et = h = \text{const}$$

Eelneva seose tõttu saame järgmise võrrandi:

$$ct' = \frac{Et}{mv} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} = \lambda$$

milles  $\lambda$  on tuntud de Broglie lainepikkusena:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$p$  on osakese impulss. Huvitav on märkida seda, et viimane seos  $ct'$  on seega otseselt tuletatav ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

kui me viime kordaja liikme  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  teisele poole võrdusmärgi:

$$ct' = \frac{ct + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{mv} = \lambda$$

milles teepikkus on võrdne  $l = ct + vt'$ . Kuna antud juhul  $vt' = 0$ , siis saame järgmise väga lihtsa valemi:

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda$$

Kui viimases võrrandis

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{mv} = \lambda$$

on  $mv = mc$  ehk keha liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ :

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{mc}$$

ja viime liikme  $mc$  teisele poole võrdusmärgi

$$\frac{mc^2 t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = h = \text{const}$$

siis saamegi seose „energia korda aeg“:

$$\frac{Et}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = h$$

Viimases võrrandis on  $v = 0$  ehk keha on tavaruumi  $K$  suhtes paigal:

$$Et = h$$

Eespool tuletatud võrrand  $ct' = \lambda$  on tegelikult võrdne ka järgmise valemiga:

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda$$

Näiteks kui me viime kordaja liikme  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  teisele poole võrdusmärgi:

$$ct = \lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ja aja dilatatsiooni võrrandist

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

asendame ruutjuure kordaja järgmiselt

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

saamegi võrduse

$$ct = \lambda \frac{t}{t'}$$

ehk

$$ct' = \lambda$$

Saadud võrdusest saame seose

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{t'} = f$$

mis defineeritakse laine sagedusena. Sellest on näha, et laine sagedus  $f$  ja keha kiirus  $v = c$  on seotud järgmiselt:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Sellest tulenevalt saame

$$\frac{h}{mv} = \lambda = \frac{c}{f}$$

ja kui viimases võrrandis  $mv = mc$  ehk keha liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ , saame:

$$\frac{h}{mc^2} = \frac{1}{f}$$

milles  $mc^2 = E$  on keha seisuenergia:

$$E = hf = mc^2$$

ning  $E = hf$  on keha kvandenergia. Laine sagedus  $f$  on ajaperioodiga  $t$  seotud:  $f = \frac{1}{t}$  ehk  $t = \frac{1}{f}$  ja seetõttu saame võrrandist

$$\frac{h}{mc^2} = \frac{1}{f} = t$$

seose „energia korda aeg“, mis on tuntud ainult kvantmehaanikas:

$$Et = h = \text{const}$$

Nendest lihtsatest seostest saamegi tuletada kvantmehaanikas tuntud kvandenergia võrrandi, mille tuletas 1900. aastal füüsik Max Planck (hoopis teistsuguse analüüsi teel):

$$\frac{mc^2}{\Delta f} = Et = h$$

Eelnevalt oli näha seda, et kvandenergia on võrdne ka tema seisue energiaga:

$$mc^2 = hf$$

või on kvandenergia  $E$  väljendatav ainult tema lainesageduse  $f$  kaudu:

$$E = hf,$$

milles  $f = \Delta f$ . Kvandenergia  $E$  avaldisest on võimalik tuletada kvantfüüsikas tuntud Heisenbergi määramatuse relatsioonid. Selleks teisendame lainesageduse  $f$

$$E = \frac{h}{\Delta t},$$

milles lainesagedus  $f$  on seotud perioodiga  $t$ :

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta t}.$$

Selline matemaatiline teisendamine viibki meid määramatuse relatsioonini energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$E \Delta t = h$$

ehk õigem oleks seda kirjutada järgmiselt:

$$\Delta E \Delta t \geq h.$$

Sarnase analüüsi teel saame ka määramatuse relatsiooni impulsi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel. Selleks teeme kvandenergia ja seisueenergia võrdelises seoses järgmise teisenduse:

$$mc^2 = hf$$

ehk

$$mc = \frac{hf}{c}$$

milles impulss  $p$  on

$$p = \frac{hf}{c}.$$

Impulss  $p$  on teatavasti massi  $m$  ja kiiruse  $v$  korrutis:

$$p = mc = mv,$$

milles kiirus võib olla võrdne valguse kiirusega  $v = c$ . Lainesagedus  $f$  on seotud kiirusega  $c$  ja lainepikkusega  $\lambda$  järgmiselt:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

ehk natuke teisendades

$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

Sellest tulenevalt saame impulsi  $p$  võrrandis

$$p = \frac{hf}{c}$$

teha järgmised matemaatilised teisendused:

$$\frac{c}{f} = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$p\lambda = h.$$

Kuna lainepikkus  $\lambda$  on seotud koordinaadiga  $\Delta x$  järgmiselt:

$$\lambda = \Delta x = c \Delta t,$$

siis seega saamegi lõpuks määramatuse relatsiooni impulsi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel:

$$\Delta p \Delta x = h$$

ehk täpsemalt avaldades

$$\Delta p \Delta x \geq h.$$

Sarnaselt määramatuse relatsioonidega saab tuletada ka de Broglie' lainepikkuse  $\lambda$ , mis on kvantfüüsika üks olulisemaid võrrandeid. Selleks alustame jälle kvandenergia ja seisueenergia võrdusest:

$$mc^2 = hf$$

milles teeme järgmise väga lihtsa teisenduse:

$$m = \frac{hf}{c^2}.$$

Kuna lainesagedus  $f$  on seotud kiirusega  $c$  ja lainepikkusega  $\lambda$

$$f = \frac{c}{\lambda},$$

siis seega saame teostada järgmised matemaatilised teisendused:

$$m = \frac{hc}{c^2 \lambda}$$

$$m = \frac{h}{c \lambda}$$

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

ehk

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

milles kiirus võib olla võrdne ka valguse kiirusega vaakumis  $v = c$ . Peab kindlasti märkima ka seda, et kvandenergia  $E$  avaldises

$$E = \bar{h} f,$$

on Plancki konstant  $h$  tegelikult jagatud  $2\pi$ -ga. See tuleneb otseselt sellest, et lainesagedus  $f$  on samuti seotud  $2\pi$ -ga:

$$f = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

ja seetõttu saame kvandenergia  $E$  avaldise järgmiselt:

$$E = \frac{2\pi \bar{h} c}{\lambda}.$$

Kuna Plancki konstant on tegelikult jagatud  $2\pi$ -ga:

$$\bar{h} = \frac{h}{2\pi},$$

siis seega saame kvandenergia  $E$  avaldises  $2\pi$ -d välja taandada:

$$E = \frac{2\pi h c}{\lambda 2\pi}$$

ehk

$$E = \frac{h c}{\lambda}.$$

Seetõttu on viimased kaks võrrandit omavahel tegelikult võrdsed:

$$E = \frac{h c}{\lambda} = \frac{2\pi \bar{h} c}{\lambda}.$$



Keha seisuenergia  $E$  saab avaldada ka impulsi  $p$  kaudu järgmiselt:

$$E = mc^2 = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

Kuna footonil ehk valguse osakesel ei ole seisumassi  $m_0 = 0$ , siis seega saame eelneva seose järgi  $E = pc$ . Sellest tulenevalt saame teha järgmised matemaatilised teisendused:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar f}{c} = \frac{2\pi \hbar c}{c\lambda} = \frac{2\pi \hbar}{\lambda},$$

milles viimases võrduses olev liige

$$\frac{2\pi}{\lambda}$$

on võrdne lainearvuga  $k$  ehk lainevektori  $k$  mooduliga. Seetõttu on footoni impulss  $p$  vektor kujul esitatav:

$$p = \hbar k.$$

### 1.13.3.2 Füüsikaline analüüs

Kogu eelnev matemaatiline analüüs näitas üsna selgelt seda, et kvantfüüsika üks aluseid kvandenergia võrrand on tuletatav relatiivsusteooria matemaatikast (täpsemalt ajas rändamise üldvõrrandist). Matemaatiline analüüs näitab selgesti, et igasugune keha, mis omab seisuenergia, omab ka kvandenergia. See tähendab seda, et mistahes keha Universumis võib käsitleda ka lainena. Keha seisuenergia ja kvandenergia valemid on ajas rändamise teoorias matemaatiliselt „koos-tuletatavad“ ja seega on need üksteisest ka lahutamatud ehk kehtib lahutamatususe printsiip: seisue energiaga kaasneb ka kvandenergia eksisteerimine ning vastupidi. Sellise arusaamani viis kogu eelnev matemaatiline analüüs ja see on täiesti selge. Küsimus on ainult selles, et kuidas sellist matemaatilist analüüsi füüsikaliselt õigesti tõlgendada. Järgnevalt annamegi kogu eelnevale matemaatilisele analüüsile füüsikalise tõlgenduse.

Näiteks eelnevalt esitatud matemaatilises analüüsis tuletati de Broglie lainepikkus  $\lambda$ :

$$\frac{Et}{mv} = \frac{h}{p} = \lambda$$

mis võrdus ka  $ct' = \lambda$ . Aja dilatatsiooni valemist

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

näeme, et lainepikkus  $\lambda$  võrdub seega:

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda$$

Kui selles on kiirus  $v = 0$  ehk keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal, siis saame lainepikkuseks:

$$ct = \lambda$$

mis tähendab ka seda, et  $t' = t$ . Sellisel juhul  $t = \tau$  on tegemist „omaajaga“, mille valguse kiiruse  $c$ -ga korrutamisel  $c\tau = s$  saame tuntud aegruumi intervalli võrrandi:

$$c\tau = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Aegruumi intervall näitab kahe punkti vahelist kaugust aegruumis. See tähendab ka seda, et eelnevalt tuletatud lainepikkus  $\lambda$  võrdub aegruumi intervalliga:

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \lambda^2$$

ehk

$$\lambda = c\tau = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

Viimases võrrandis me näeme, et valguse korral on aegruumi intervall null, mis kuidagi ei saa võrdsuda valguse enda lainepikkusega  $\lambda$ :

$$0 \neq \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \lambda = \frac{h}{p} \neq 0$$

Seda sellepärast, et lainepikkus on seotud Plancki konstandiga  $h$ , mis iseenesest ei saa kuidagi olla null. Selle võrrandi lahend saab seisneda ainult järgmises füüsikalises analüüsis. Näiteks kiirusega  $c$  liikuva keha enda suhtes ehk nõ. omaajas jõuab see mistahes ruumipunkti Universumis ühe hetkega ehk tema kiirus on seega lõpmata suur. See tähendab seda, et valguse kiirusega liikuvale kehal on liikumiskiirus omaajas lõpmata suur ja seetõttu jõuab osake omaajas mistahes ruumipunkti ja mistahes ajahetke Universumis kõigest 0 sekundiga. Ükskõik kui suur on vahemaa ruumis ehk  $\Delta x = c\Delta t$ , valgus läbib selle teepikkuse omaajas alati 0 sekundiga ehk  $\Delta t = 0$ . Kui mingi keha jõuab mistahes ruumipunkti 0 sekundiga ehk keha läbib mingi vahemaa 0 sekundiga, siis on võimalik seda mõista teleportatsioonina. Osake võib teleportreeruda mistahes ruumipunkti ja mistahes ajahetke ( kuid ajas ainult edasi ). See tähendab seda, et osake teleportreerub ajas ja ruumis korraga ning seda pidevalt ehk lakkamatult. Kui osake teleportreerub ajas ja ruumis lakkamatult, siis seega ei ole võimalik täpselt ette teada, et millisesse ruumipunkti osake teleportreerub ja millisesse ajahetke. Seetõttu arvutatakse välja tõenäosused iga võimaliku ruumipunkti ja ajahetke kohta, kuhu osake ( teleportreerumisel ) jõuda võib. Kõik need tõenäosused on nullist erinevad ja summeerides kõik need tõenäosused saame arvuks 100 %. Osakese tõenäosusjaotust ajas ja ruumis mõjutavad teised füüsikalised kehad nagu näiteks pilu, millest osake võib läbi minna. Seda tõenäosusjaotust ajas ja ruumis võib ettekujutada kui vee lainena, millel on lainelised omadused. Seetõttu võib öelda, et tegemist on osakese tõenäosuslainega, mis levib ajas ja ruumis. See, mis juhtub vee lainega pilu läbimisel, juhtub sama ka osakese tõenäosuslainega, mis läbib samuti pilu. Tulemuseks on osakese laineline käitumine. Lainepikkus  $\lambda$  võibki näidata tõenäosuslaine pikkust ajas ja ruumis, mida põhimõtteliselt võib näidata ka aegruumi intervall. Lainet kirjeldab füüsikas lainevõrrand, mis sisaldab lainepikkust  $\lambda$ . See tuletatakse matemaatiliselt lühidalt järgmiselt. Näiteks lainet, mis liigub ainult  $x$ -telje sihis, kirjeldab järgmine siinusfunktsioon:

$$y = y_0 \sin 2\pi \left( ft - \frac{x}{\lambda} \right)$$

ehk

$$y = y_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

milles  $\omega = 2\pi f$  on laine ringsagedus ja  $\lambda$  on lainepikkus. Kui me võtame viimasest võrrandist esimest järku tuletise

$$\frac{dy}{dx} = y_0 \left[ \cos 2\pi \left( ft - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \left( -\frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

ja ka teist järku tuletise:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y_0 \left[ \sin 2\pi \left( ft - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2$$

saame järgmise diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2$$

Viime viimase võrrandi kõik liikmed ühele poole võrdusmärgi:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 y = 0$$

ja teeme asenduse  $y = \Psi$ , tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \Psi = 0$$

mida füüsikas nimetatakse lainevõrrandiks. Lainearv  $k$  on seotud lainepikkusega  $\lambda$  järgmiselt:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k$$

Võime oletada, et viimati esitatud lainevõrrand kirjeldab ka osakese tõenäosuslainet ajas ja ruumis. Seetõttu asendame lainepikkuse  $\lambda$  meie eelnevalt tuletatud seosest:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$$

ja edaspidi arvestame ainult Laplace'i operaatoriga

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = \Delta \Psi$$

tulemuseks saame järgmise lainevõrrandi:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \left( \frac{2\pi}{h} \right)^2 p^2 \Psi = 0$$

Järgnevalt avaldame impulsi  $p$  energia kaudu. Näiteks teades, et impulss  $p$  on seotud kineetilise

energiaga  $E_k$  ja kineetiline energia on seotud omakorda energia jäävuse seadusega  $E$  järgmiselt:

$$E = E_k + E_p$$

milles  $E$  on kogueenergia ja  $E_p$  on potentsiaalne energia, saame impulsi  $p$

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

kujuks järgmise avaldise:

$$p^2 = 2m(E - E_p)$$

Viime selle impulsi  $p$  lainevõrrandisse ja saame:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - E_p)\Psi = 0$$

Saadud lainevõrrandit nimetatakse kvantmehaanikas Schrödingeri lainevõrrandiks

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}E\Psi = 0$$

mis kirjeldab siis osakese tõenäosuslainet ajas ja ruumis. Kuid peab märkima seda, et viimane võrrand kehtib siis kui osakese potentsiaalne energia ei muutu ajas või see võrdub nulliga:

$$E_p = U = 0$$

Sellisel juhul näitas aegruumi intervall tõenäosuslaine pikkust ehk lainepikkust  $\lambda$ . Aegruumi intervalli võrrand on tuletatud enamasti erirelatiivsusteooriast, mille korral aeg ja ruum teisevad välisvaatleja suhtes, kui keha liikumiskiirus läheneb valguse kiirusele  $c$  vaakumis.

Aja ja ruumi teisenemist valguse kiirusele  $c$  lähenemisel vaakumis näitab ka keha kiiruse suhtelisus tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  füüsikalises süsteemis. Selle kirjeldava valemi on võimalik tuletada ka ainult lainepikkuse  $\lambda$  avaldisest:

$$ct' = \lambda = \frac{h}{p}$$

Näiteks  $ct'$  ehk  $\lambda$  võrduse saame ka otse ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

kui me viime ruutjuure avaldise teisele poole võrdusmärgi:

$$ct' = \frac{ct + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda$$

Saadud avaldis võrdubki lainepikkusega  $\lambda$ . Kui me aga arvestame viimases võrrandis olevas seoses:

$$l = ct + vt'$$

seda, et  $ct = 0$  ja seega  $l = vt'$ , saame järgnevalt:

$$\frac{vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda$$

Viime ruutjuure avaldise teisele poole võrdusmärgi:

$$vt' = \lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ja arvestame ka ühte eelnevat seost  $\lambda = ct'$ . Sellest tulenevalt saame võrrandi

$$vt' = ct' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ehk  $t'$ -i välja taandumisel:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Saadud viimane võrrand sarnaneb lainepikkuse  $\lambda$  võrrandiga:

$$c\tau = \lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

milles  $c\tau = s$  ongi aegruumi intervall:

$$s = \lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ehk lahti kirjutatuna:

$$\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \lambda \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Viimases võrrandis me näeme, et kui keha liikumiskiirus  $v$  on tavaruumi  $K$  suhtes võrdne valguse kiirusega  $c$  ehk  $v = c$ , siis saame aegruumi intervalliks nulli:

$$\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \lambda \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$$

Näiteks aegruumi intervall on null vaakumis liikuval valgusel. Kui aga keha liikumiskiirus  $v$  on tavaruumi  $K$  suhtes null ehk  $v = 0$ , siis saame puhtalt lainepikkuse  $\lambda$  võrduse:

$$\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \lambda = \frac{h}{p} \neq 0$$

Sellisel juhul peab aegruumi intervall olema null hyperruumi  $K'$ -i suhtes, kuid samas ei saa see null olla, sest teisel pool võrdusmärgi olev avaldis ei saa olla null. Lainepikkus  $\lambda$  on siin vaadeldav ainult tavaruumi  $K$  suhtes. Antud vastuolu lahendus seisneb järgnevas füüsikalises analüüsis. Kuna viimase võrrandi ja eelnevalt tuletatud kiiruste suhtelisuse võrrandi

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ainus vahe seisneb selles, et kiiruste asemel on põhimõtteliselt „teepikkused“, siis järgnevalt uurime lainepikkuse  $\lambda$  seost aegruumi intervalliga ainult läbi viimase võrrandi analüüsi. Näiteks kui keha massiga  $m$  liigub tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$  ( see võib olla näiteks valguse liikumine vaakumis ), siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal ehk  $v' = 0$ . Eelnevalt tuletatud valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on sellisel juhul  $v = c$ :

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}$$

ja saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks

$$v' = 0.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui keha liigub vaakumis kiirusega  $c$  mistahes vaatlaja suhtes, siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal ( s.t. „absoluutselt paigal“ ). Kuna keha  $m$  liigub sellisel juhul tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$ , siis aeg on tavaruumi  $K$  suhtes teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja seetõttu saame hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0.$$

See tähendab seda, et kui keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes liikumiskiiruseks  $c$  ehk  $v = c$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

Kui aga keha  $m$  on hyperruumi  $K'$  suhtes paigal ehk  $v' = 0$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes on aeg teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$v' = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui mingi keha liigub vaakumis kiirusega  $c$ , siis see on

konstantne kiirus mistahes vaatleja jaoks, kes vaakumis parajasti eksisteerivad. See tuleneb otseselt sellest, et mida lähemale jõuame keha liikumiskiirusele  $c$ , seda aeglasemini kulgeb aeg välisvaatleja suhtes. Kiirusel  $c$  liikudes läheb ajavahe  $\Delta t$  lõpmata suureks ehk

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja see tähendab seda, et välisvaatleja suhtes kulgeb aeg lõpmata aeglaselt, kuid keha enda suhtes (nõ. keha „omaajas“) kulgeb aeg lõpmata kiiresti. See tähendab seda, et keha jõuab omaajas tavaruumis  $K$  (näiteks vaakumis) mistahes ruumpunkti hetkega ehk lõpmata suure kiirusega:  $v \rightarrow \infty$ . Kuid hyperruumi  $K'$  suhtes on keha „absoluutselt“ paigal ja seetõttu ei ole hyperruumi  $K'$  suhtes ka aja teisenemist ehk:

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t.$$

See tähendab seda, et hyperruumi  $K'$  suhtes on keha kiirus „omaajas“ lõpmata väike. Kui keha massiga  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes aga hoopis paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes liigub see kiirusega  $v' = c$ . Näiteks kui me kiiruse teisenemise valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

on kiirus  $v$  võrdne nulliga ehk

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}$$

siis saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks  $c$ :

$$v' = c.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et absoluutselt kõik kehad Universumis, millel on seisumass  $m_0$  ja seega seisuenergia  $E_0 = m_0 c^2$ , liiguvad valguse kiirusega  $c$  hyperruumi  $K'$  suhtes, kuid samas võivad need meie tavaruumis  $K$  olla paigal. Ka valguse suhtes liiguvad kõik kehad kiirusega  $c$ . Kuna keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t$$

ja seetõttu saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

See tähendab seda, et kui keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes

on aeg teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{s}{\infty} = 0.$$

Kui keha  $m$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v' = c$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$v' = \frac{s}{\Delta t} = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

See tähendab seda, et kui valguse korral oli nii, et liikudes vaakumis ehk tavaruumis  $K$  kiirusega  $c$  ja seetõttu omaajas jõudis valgus hetkega mistahes ruumipunkti tavaruumis, siis siin antud juhul on olukord aga vastupidine. Näiteks seisumassiga kehad liiguvad hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$  ja sellest tulenevalt on hyperruumi ja tavaruumi ajavahe lõpmata suur. See tähendab seda, et hyperruumi  $K'$  poolt vaadatuna kulgeb aeg tavaruumis ehk kogu meie Universumis tervikuna lõpmata kiiresti, kuid tavaruumis olles kulgeb aeg vaatleja jaoks tavapärase tempos ja aja kulgemine ei näi mitte kunagi katkevat ehk selle eksisteerimine näib olevat igavikuline. Kuna kõik kehad liiguvad hyperruumi  $K'$  suhtes kiirusega  $c$ , siis seega hõlmab „omaaeg“ hyperruumi suhtes vaadatuna üle kogu Universumi ehk kogu tavaruumi  $K$ . Selles mõttes kõik kehad Universumis, millel on seisumass ja seisuenergia ning mis liiguvad hyperruumi suhtes kiirusega  $c$ , liiguvad hyperruumi poolt vaadatuna ( ehk n.ö. hyperruumi omaajas ) lõpmata suure kiirusega ehk  $v \rightarrow \infty$ , sest aeg kulgeb lõpmata suure kiirusega.

Selle paremaks mõistmiseks toome järgnevalt välja ühe mõttelise eksperimendi. Näiteks kogu meie paisuv Universum on nagu üks hiigel suur taustsüsteem, milles esineb üleüldine ehk globaalne aja ja ruumi teisenemine. Selles hiigel suures taustsüsteemis ( mis on Universumi suurune ) eksisteerivad lõputu hulk väiksemaid taustsüsteeme nagu näiteks liikuvad ehk inertsiaalsed taustsüsteemid ( milles avalduvad erirelatiivsusteooria seaduspärasused ) ja mitteinertsiaalsed taustsüsteemid ehk gravitatsiooniväljad ( milles avalduvad üldrelatiivsusteooria seaduspärasused ). Oletame, et meil on kaks vaatlejat, kellest üks asub meie paisuvas Universumis ja teine hüpoteetiline vaatleja asub sellest väljapool. Paisuva Universumi sees olevale vaatlejale tunduvad Universumis toimuvad sündmused kulgevad normaalset jadapidi, kui välja arvata erinevates taustsüsteemides esinevaid aja kulgemisi, mille erinevusi võivad põhjustada kehade liikumiskiiruste või raskusjõu erinevad vahekorrad. Kuid teisele vaatlejale, kes asub paisuvast Universumist väljapool, tundub aeg Universumis kulgevat lõpmata kiiresti.

Valgus liigub tavaruumi  $K$  suhtes ehk vaakumis kiirusega  $c$  ja see on konstantne mistahes vaatleja jaoks, kes parajasti vaakumis eksisteerivad. See tuleneb otseselt sellest, et mida lähemale jõuab keha kiirus valguse kiirusele vaakumis, seda aeglasemini kulgeb aeg ja seda lühem on keha pikkus välisvaatleja suhtes. Kui mingi keha või taustsüsteem liigub täpselt valguse kiirusega  $c$ , siis aeg on välisvaatleja suhtes aeglenenud lõpmatuseni:

$$v = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0$$

Välisvaatleja jaoks on valguse kiirusega liikuvale kehal kiiruseks  $c$ , kuid kiirusega  $c$  liikuva keha enda suhtes ehk n.ö. omaajas jõuab see mistahes ruumipunkti ühe hetkega ehk tema kiirus on seega lõpmata suur. See tähendab füüsikaliselt seda, et valguse kiirusega liikuvale kehal on liikumiskiirus omaajas lõpmata suur, kuid välisvaatleja suhtes on selle keha kiirus ruumis ikkagi  $c$ . Ükskõik kui suur on vahemaa ruumis ehk  $\Delta x = c\Delta t$ , läbib valguse kiirusega liikuv keha selle teepikkuse omaajas alati 0 sekundiga ehk  $\Delta t = 0$ :

$$v = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{0} = \infty$$



Oluline on märkida seda, et viimane valem tuleb matemaatikast otseselt välja:

$$v = \frac{ct}{\infty} \neq \frac{ct}{0}.$$

Seda on võimalik tuletada järgmise analüüsi teel. Näiteks mida enam aeg teiseneb välisvaatleja suhtes, seda väiksema „omaaajaga“ mingisugust vahemaad ruumis läbitakse ehk seda suuremaks muutub keha „omakiirus“. Seda näitab aegruumi intervalli meetriline võrrand, mis kirjeldab kahe punkti vahelist kaugust ds neljamõõtmelises aegruumis. Järgnevalt näitamegi seda matemaatilise analüüsi teel. Näiteks eespool matemaatiliselt tuletatud lainepikkuse  $\lambda$  valem

$$ct' = \lambda = \frac{h}{p}$$

võrdub ka järgmise avaldisega:

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda$$

mille tuletust me eespool juba tõestasime. Seetõttu saamegi järgmise väga olulise võrduse:

$$\frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = ct'$$

milles valguse kiirus  $c$  taandub välja ja saadud avaldis

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

on erirelatiivsusteooriast tuntud aja dilatatsiooni võrrand. Järgnevalt teostame aja dilatatsiooni valemis järgmised matemaatilised teisendused:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

milles  $\tau$  on keha „omaaeg“. Tõstame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2$$

milles  $dt$  on

$$dt = \Delta t = t_2 - t_1$$

ja seega saame viimase võrrandi kirjutada kujul

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(t_2 - t_1)^2$$

Kahe ruumipunkti vahelist kaugust kolmemõõtmelises ruumis kirjeldab valem

$$l^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

milles kolme ruumikoordinaadi liikmed on vastavalt

$$\begin{aligned} dx &= x_2 - x_1 \\ dy &= y_2 - y_1 \\ dz &= z_2 - z_1 \end{aligned}$$

Klassikalises mehaanikas defineeritakse keha liikumiskiirust  $v$  teepikkuse  $l$  ja aja  $t$  jagatisena:

$$v = \frac{l}{t}$$

Tõstame kiiruse  $v$  võrrandi mõlemad pooled ruutu ja arvestame sealjuures ka eelmisi seoseid:

$$v^2 = \frac{l^2}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}$$

Viime selle kiiruse ruudu eelnevalt tuletatud võrrandisse:

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(t_2 - t_1)^2$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$  ruuduga, tulemuseks saamegi aegruumi intervalli, mis kirjeldab kahe punkti vahelist kaugust neljamõõtmelises aegruumis:

$$c^2\tau^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Võtame tähistuseks  $s$ -i:

$$c\tau = s$$

ja saame aegruumi intervalli meetriliseks võrrandiks järgmise kuju

$$s^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Füüsikaline keha, mis liigub vaakumis valguse kiirusega  $c$ , on „omaaeg“ võrdne nulliga

$$\tau = 0$$

ja seetõttu tuleb aegruumi intervall sellisel juhul samuti null:

$$0 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Keha liikumiskiirus  $v$  näitab, et kui suure teepikkuse  $l$  läbib keha ajaühikus  $t$ :

$$v = \frac{l}{t}$$

ja kahe ruumipunkti vahelist kaugust kolmemõõtmelises ruumis näitab võrrand

$$l^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ehk

$$l = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Kuna valguse kiirusega liikuval kehal on omaaeg null, siis see tähendab füüsikaliselt seda, et mistahes suure vahemaa ruumis läbib keha omaajas lõpmata suure kiirusega:

$$v = \frac{l}{\tau} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (t_2 - t_1)} = \frac{l}{0} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{0} = \infty$$

ehk keha liikumiskiirus  $v$  ( s.t. „omakiirus“ ) on lõpmatult suur:

$$v = \infty$$

Kui mingi keha jõuab mistahes ruumipunkti 0 sekundiga ehk keha läbib mingi vahemaa 0 sekundiga, siis on võimalik seda mõista teleportatsioonina. Kehad teleportreeruvad aegruumis, kui nende liikumiskiirused lähenevad lõpmatuseni:  $v \rightarrow \infty$ . Lõpmata suure kiiruse korral jõuab keha mistahes ruumipunkti Universumis kõigest 0 sekundiga.

Välisvaatleja jaoks on valguse kiirusega liikuval kehal kiiruseks  $c$ , kuid kiirusega  $c$  liikuva keha enda suhtes ehk n. omaajas jõuab see mistahes ruumipunkti Universumis ühe hetkega ehk tema kiirus on seega lõpmata suur. See tähendab seda, et valguse kiirusega liikuval kehal on liikumiskiirus omaajas lõpmata suur, kuid samas välisvaatleja suhtes on selle keha kiirus ikkagi  $c$ . Tekib küsimus, et kui osake jõuab omaajas mistahes ruumipunkti ja ajahetke Universumis kõigest 0 sekundiga, siis kuidas saab osakese liikumiskiirus välisvaatleja suhtes olla  $c$  ehk võrdne valguse kiirusega vaakumis või sellest väiksem kiirus? Ükskõik kui suur on vahemaa ruumis ehk  $\Delta x = c\Delta t$ , valgus läbib selle teepikkuse omaajas alati 0 sekundiga ehk  $\Delta t = 0$ . Kui mingi keha jõuab mistahes ruumipunkti 0 sekundiga ehk keha läbib mingi vahemaa 0 sekundiga, siis on võimalik seda mõista teleportatsioonina ja keha teleportatsioon ei sõltu vaatlejast ehk see ei ole suhteline nähtus – s.t. teleportatsioon on mistahes vaatleja suhtes ikka teleportatsioon. Kehad teleportreeruvad aegruumis, kui nende liikumiskiirused lähenevad lõpmatuseni:  $v \rightarrow \infty$ . Lõpmata suure kiiruse korral jõuab keha mistahes ruumipunkti Universumis kõigest 0 sekundiga.

Eelnevalt püstitatud dilemma lahendus seisneb selles, et osake teleportreerub ruumipunktist A ajahetkel  $t_1$  ruumipunkti B ja ajahetke  $t_2$ , ruumipunktist B ajahetkel  $t_2$  ruumipunkti C ja ajahetke  $t_3$  jne jne. Osake võib teleportreeruda mistahes ruumipunkti ja mistahes ajahetke ( kuid ajas ainult edasi ). See tähendab seda, et osake teleportreerub ajas ja ruumis korraga ning seda pidevalt ehk lakkamatult. Kui osake teleportreerub ajas ja ruumis lakkamatult, siis seega ei ole võimalik täpselt ette teada, et millisesse ruumipunkti osake teleportreerub ja millisesse ajahetke. Seetõttu arvutatakse välja tõenäosused iga võimaliku ruumipunkti ja ajahetke kohta, kuhu osake ( teleportreerumisel ) jõuda võib. Kõik need tõenäosused on nullist erinevad ja summeerides kõik need tõenäosused saame arvuks 100 %. Osakese tõenäosusjaotust ajas ja ruumis mõjutavad teised füüsikalised kehad nagu näiteks pilu, millest osake läbi läheb. Seda tõenäosusjaotust ajas ja ruumis võib ettekujutada kui vee lainena, millel on lainelised omadused. Seetõttu võib öelda, et tegemist on osakese tõenäosuslainega, mis levib ajas ja ruumis. See, mis juhtub vee lainega pilu läbimisel, juhtub sama ka osakese tõenäosuslainega, mis läbib samuti pilu. Tulemuseks on osakese laineline käitumine. On täiesti selge, et kui osakesel esinevad lainelised omadused ( nagu me eelnevalt ka nägime ), siis seda osakest on võimalik kirjeldada ka lainena. Järgnevalt uurimegi seda asja veidi lähemalt. Selleks kirjutame välja siinuselise laine võrrandi, mis liigub x-telje sihis:

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

k on lainearv ja see on seotud lainepikkusega:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Tavaliselt esitatakse selline laine kompleksarvulisel kujul:

$$\psi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)}$$

Esitatakse kompleksarvulisel kujul sellepärast, et eksponente on matemaatiliselt lihtne diferentseerida ja integreerida. Klassikalises füüsikas on lihtne just laine kompleksarvulisel kujul teha matemaatilisi arvutusi. Kuna füüsikalised suurused on reaalarvulised, siis tuleb pärast arvutusi reaalsosa eraldada. Viimane seos ongi välja toodud kompleksarvulise laine reaalsosa. Kuid viimase seose ( laine ) on võimalik avaldada ka energia E ja impulsi p kaudu:

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$$

$$\psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

Viimane siinuseline laine on välja toodud osakese-karakteristikute kaudu ( näiteks energia, impulss, mass jne ), kuid varem oli laine kuju antud laine-karakteristikute kaudu ( näiteks sagedus, lainearv jne ). Järgnevalt leiame de Broglie laine faasikiiruse:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

Albert Einsteini erirelatiivsusteoorias tuntakse osakese impulsi ja energia vahelist seost:

$$v_f = \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{p} > c$$

Kuid siin on näha seda, et de Broglie laine faasikiirus on valguse kiirusest ( vaakumis ) suurem. Kuna valguse kiirust vaakumis ei saa ületada, siis de Broglie laine ei saa ilmselt reaalselt osakest kirjeldada. Siinuseline laine, mis on lõputu, on tegelikult idealiseeritud, sest seda tegelikult ei ole looduses olemas. Faasikiirus näitab aga sama faasiga punktide levimiskiirust, mitte aga konkreetse osakese levimiskiirust. Uurida tuleb laine rühmakiirust. Olemasolevad lained on üldjuhul ruumis ikkagi lokaliseeritud. Need kujutavad endast mitme ( tihti lõputu ) siinuselise laine superpositsiooni. Just ruumis liikuvat osakest võibki selline lokaliseeritud lainet ehk lainepaketti kujutada. Laine rühmakiirus annab levimiskiiruse järgmiselt:

$$v_r = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$$

ehk

$$v_r = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}.$$

Vaakumis liikuva valguslainete faasi- ja rühmakiirused omavahel ühtivad. Rühmakiiruse valemit saab kasutada ainult siis, kui esineb dispersioon ehk kui lainete faasikiirus sõltub sagedusest. Kui dispersioon on null ehk:

$$\frac{dv_f}{d\lambda} = 0,$$

siis rühmakiirus  $v_r$  on võrdne faasikiirusega  $v_f$ . Rühmakiirus  $v_r$  võib faasikiirusest  $v_f$  olla suurem või väiksem. Relatiivsusteooriast on teada energia, massi ja impulsi vahelist seost:

$$E = mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

ja siin ongi näha seda, et de Broglie osakese rühmakiirus on võrdne osakese tegeliku liikumiskiirusega  $v$ :

$$v_r = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v$$

Nendest võrranditest jäeldub selgesti ka see, et osakese kirjeldamine lainena on täiesti võimalik. Siinkohal tuleb märkida ka veel seda, et osakese lainepikkused  $\lambda$  on rühma kuuluvate lainete varieeruvad lainepikkused või osakese lainepikkus  $\lambda$  vastab rühma moodustavate komponentlainete näitajatele.

Kuna valguse kiirus vaakumis on looduse piirkiirus, siis esmapilgul tundub, et osakeste teleportreerumised ajas ja ruumis võimaldavad ületada valguse kiirust vaakumis või lihtsalt ei allu selle looduse piirkiirusele. Keha teleportatsioon ajas ja ruumis on ju võrdne keha lõpmatu suure kiirusega. Kuid sellegipoolest osakesed siiski alluvad relatiivsusteooria nõuetele. Näiteks mitte ükski keha Universumis ei ületa valguse kiirust vaakumis. Osakesed küll tõesti teleportreeruvad ajas ja ruumis, kuid see põhjustab ju osakeste lainelisi omadusi ehk osake käitub kui laine. Seetõttu võib aegruumis liikuvat osakest kujutada lainepaketina ehk lokaliseeritud lainena, mis kujutab endast mitme või lõputu siinuselise laine superpositsiooni. See tähendab ka seda, et osakese lainepakett kannab endas impulsi ja energiat ning selle lainepaketi levimiskiirust näitab laine rühmakiirus, mis ongi võrdne ka osakese reaalse liikumiskiirusega. Ja see allub juba täielikult relatiivsusteooria põhinõuetele. Osakesed järgivad seega relativistliku mehaanika seadusi.

#### 1.13.4 Lainefunktsiooni füüsikaline olemus

Kui mingi keha jõuab mistahes ruumipunkti 0 sekundiga ehk keha läbib mingi vahemaa 0 sekundiga, siis on võimalik seda mõista teleportatsioonina. Kehad teleportreeruvad aegruumis, kui nende liikumiskiirused lähenevad lõpmatuseni:  $v \rightarrow \infty$ . Lõpmata suure kiiruse korral jõuab keha mistahes ruumipunkti Universumis kõigest 0 sekundiga.

Teleportreerumisel ei läbi keha ruumis kõiki ruumipunkte nagu tavalise liikumise puhul. Sama on tegelikult ka ajas teleportreerumisega. Näiteks kui keha teleportreerub ajas, siis see läbib samuti erinevaid tõkkeid nagu ruumi teleportatsiooni korralgi. See tähendab seda, et kui keha X teleportreerub ühest ajahetkest teise ajahetke ja nende ajahetkede vahepeal eksisteeris keha Y, siis

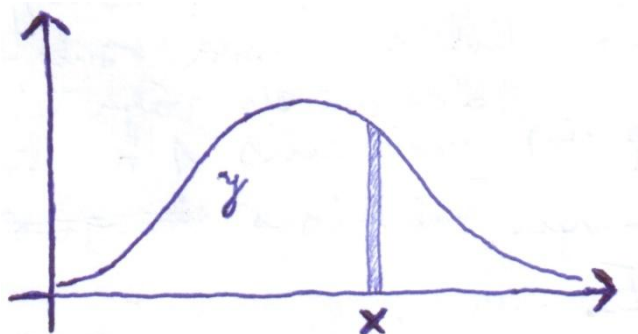
see keha Y ei sega kehal X jõuda ühest ajahetkest teise ajahetke.

Järgnevalt esitame mõned postulaadid, mis kirjeldaksid olukorda ( loogiliselt peaksid paika ), kui füüsilised kehad ehk järgneval juhul osakesed teleportreerusid ajas ja ruumis:

1. Osake teleportreerub ruumipunktist A ajahetkel  $t_1$  ruumipunkti B ja ajahetke  $t_2$ , ruumipunktist B ajahetkel  $t_2$  ruumipunkti C ja ajahetke  $t_3$  jne jne. Osake võib teleportreeruda mistahes ruumipunkti ja mistahes ajahetke ( kuid ajas ainult edasi ). Osake teleportreerub ajas ja ruumis korraga ning seda pidevalt.
2. Teleportreerumisel ruumis asub osake mistahes ruumipunktis  $x$  ainult 0 sekundit. Kuid ühest ajahetkest teise ajahetke teleportreerumisel ilmneb selge aja vahe. Osakese teleportreerumine ajas toimub ainult tuleviku suunas ( osake teleportreerub ajas edasi ).
3. Osake teleportreerub ruumipunktist A ajahetkel  $t_1$  ruumipunkti B ja ajahetke  $t_2$  ning ruumipunktist B ajahetkel  $t_2$  edasi ruumipunkti C ja ajahetke  $t_3$  jne. Osake võib teleportreeruda mistahes ruumipunkti, kuid ajas ainult edasi. Järelikult oma teleportreerumistel ajas ja ruumis „eksisteerib“ osake mistahes ruumipunktis ( kuhu ta teleportreerub ) ja mistahes ajahetkel ( millisesse ajahetke ta teleportreerub ) 0 sekundit ning osake ei eksisteeri ka ajahetkede vahepealsel perioodil, mil osake teleportreerub ühest ajahetkest teise. Samuti ka ruumipunktide vahelises piirkonnas, mil osake teleportreerub ühest ruumipunktist teise ruumipunkti. Kuna osake ei eksisteeri üheski aegruumi punktis, siis seega pole osakest reaalselt ka olemas. Osake ei asu kõikjal aegruumis korraga, nagu siiani on seda arvatud. Sellest tulenebki osakese füüsiliste parameetrite ( mass, kiirus, impulss, energia jne ) määramatused. Küll aga osake teleportreerub teatud aegruumi osas ( näiteks elektron mingisugusel aatomi kindlal orbiidil ) ja selles osas on osake olemas.
4. Osakese asukoha täpsus ruumis sõltub sellest, et kui suures ruumimõõtkavas me osakest jälgime. Näiteks väga suures ruumimõõtkavas on osakese asukoht ruumis alati täpselt teada. Kuid samas väga väikeses ruumimastaabis ilmneb juba osakese asukoha määramatus. Osakese asukoht ruumis ei ole enam nii kindlalt fikseeritud. See tähendab ka seda, et teatud üliväikeses ruumiipiirkonnas osake teleportreerub aegruumis. Näiteks elektroni asukoha määramatus on vesiniku aatomis nii suur, et see on peaaegu võrdne aatomi enda raadiusega. Seepärast elektroni ei vaadelda kindlat trajektoori mööda liikuva osakesena, vaid elektroni kujutatakse ette aatomis tuuma ümber oleva elektronpilvena. Aatomis kaob elektron ühelt orbiidilt ja ilmub välja siis teises kohas orbiidil. Kuid selline nähtus on ju sisuliselt teleportatsioon. Seetõttu ongi elektroni liikumine aatomis tõenäosuslik. Osakese liikumistrajektoori ei ole.
5. Energia jäävuse seaduse järgi ei kao ega teki juurde energiat. Kui aga keha teleportreerub ühest ruumipunktist teise, siis jääb mulje, et sellest samast kehast tekib „hetkeks“ kaks samasugust keha, sest teleportreerumine ruumis ei võta enam aega. Keha ( ehk energia ) juurde tekkimine mitte millegi arvelt on vastuolus energia jäävuse seadusega. Kuna keha teleportreerub ruumis lõpmata väikese aja perioodi jooksul ja seega eksisteerib üks keha kahes erinevas ruumipunktis korraga lõpmata väikese ajaperioodi jooksul, siis seega energia jäävuse seaduse rikkumist ei ole võimalik otseselt tuvastada.

Nendest postulaatidest ongi võimalik järeldada seda, et kui osake teleportreerub ajas ja ruumis pidevalt, siis seega ei ole võimalik täpselt ette teada seda, et millisesse ruumipunkti osake teleportreerub ja millisesse ajahetke. Seetõttu arvutatakse välja tõenäosused iga võimaliku ruumipunkti ja ajahetke kohta, kuhu osake ( teleportreerumisel ) jõuda võib. Kõik need tõenäosused on nullist erinevad ja summeerides kõik need tõenäosused saame arvuks 100 %. Osakese tõenäosus-jaotust ajas ja ruumis mõjutavad teised füüsilised kehad, näiteks pilu, millest osake läbi läheb. Seda

tõenäosusjaotust ajas ja ruumis võib ettekujutada kui vee lainena, millel on lainelised omadused. Seetõttu võib öelda, et tegemist on osakese tõenäosuslainega, mis levib ajas ja ruumis. See, mis juhtub vee lainega pilu läbimisel, juhtub sama ka osakese tõenäosuslainega, mis läbib samuti pilu. Tulemuseks on osakese laineline käitumine.



Joonis 33 Tõenäosus ainult teatud punktis (x), mitte kogu ruumalas (y).

Osakese ajas ja ruumis levivat tõenäosuslainet ( või lihtsalt osakese füüsikalist olekut ) kirjeldab matemaatiliselt lainefunktsioon:

$$\psi = \psi(x, y, z)$$

ja selle lainefunktsiooni mooduli ruut

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

annabki tõenäosustiheduse osakese asukoha leidmiseks ajahetkel t.  $\psi^*$  on  $\psi$  kaaskompleks. Sellest tulenevalt saame leida osakese asukoha tõenäosuse ruumielemendis dV:

$$dW = |\psi|^2 dV.$$

See tähendab seda, et lainefunktsiooni absoluutväärtuse ruut on võrdeline tõenäosusega leida osakest vastavas ruumipunktis ja vastaval ajahetkel. Osakese lainefunktsioon peab olema ühene, lõplik ja pidev funktsioon. Ka selle tuletis peab olema pidev. Lainefunktsioon peab olema normeeritud

$$\int |\psi|^2 dV = 1,$$

mis tähendab seda, et osakest on võimalik kusagil ruumis leida. Tõenäosuste summa on alati 1 ( diskreetsel kujul ):

$$\psi^*(z_1) * \psi(z_1) + \psi^*(z_2) * \psi(z_2) + \dots + \psi^*(z_n) * \psi(z_n) = 1 \quad \text{ehk} \quad \sum_n \psi_n^* \psi_n = 1,$$

kuid pidevuse kujul:  $\int \psi^*(z) \psi(z) dz = 1$  ehk  $\int \psi^* \psi d\vec{x} = 1$ , kus  $d\vec{x} = x_1 x_2 x_3$ . Olekufunktsiooni võime alati korrutada mistahes arvuga. Lainefunktsioon otseselt mõõdetav füüsikaline suurus ei ole, mõõta saab ainult tõenäosust:

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

kus A on normeerimiskordaja, lainefunktsiooni ruumiline osa  $\psi \sim e^{\frac{i}{\hbar}px}$  ja ajaline osa  $\psi \sim e^{2\pi i f t}$  ( milles A on nendes mõlemates 1 ). Kuid vabaoleku osakese funktsioon on

$$\psi \sim e^{2\pi i k x}.$$

Kuna aga lainefunktsioon annab tõenäosuse, nimetatakse seda tihti ka tõenäosusamplituudiks. Lainefunktsiooni mooduli ruut annab tõenäosustiheduse. Lainefunktsiooniga on määratud vaadeldava osakese olek ja tema edaspidine käitumine. Statsionaarsete olekute lainefunktsioon on aga

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t} \psi(x, y, z).$$

Sellisel juhul ei sõltu lainefunktsiooni tõenäosustihedus ajast:

$$\Psi\Psi^* = e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t} \psi e^{i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t} \psi^* = \psi\psi^*$$

Kompleksed suurused on lainefunktsioon ja selle ruut, kuid reaalarvuna võib väljenduda ainult tõenäosus.

Osakese tõenäosuslainet on võimalik kirjeldada lainepaketina, mis on ruumis lokaliseeritud ja mida on võimalik esitada teatud lainepikkusega siinuseliste lainete superpositsioonina. Järgnevalt näeme seda, et mida suurem on superpositsiooni lainearvude vahemik, seda kitsam on lainepakett. See kehtib ka vastupidisel juhul. Lainearv ja impulss on omavahel seotud. Järgnevat analüüsi alustame aga Fourier'i integraalist. Fourier'i integraal on Fourier'i rea üldistuseks mitteperioodiliste funktsioonide juhule. Ühe muutuja funktsiooni  $f(x)$  Fourier'i integraal on

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dx$$

$g(k)$  funktsioon on  $f(x)$  funktsiooni Fourier'i pööre, mida on võimalik  $f(x)$  funktsiooni kaudu välja arvutada järgmiselt:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dk.$$

Praeguses näites vaatame aga teatud kindlal ajahetkel olevat lainepaketti. Lainepaketi kuju on võimalik esitada Gaussi jaotusena:

$$f(x) = A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

$\sigma$  nimetatakse dispersiooniks, mis iseloomustab jaotuse laiust. Antud näites saab osakese tõenäosuslainet kirjeldada lainepaketina. Järelikult dispersioon kirjeldab siin osakese asukoha määramatust  $\Delta x = \sigma$ . Kui me  $f(x)$  funktsiooni esitame Fourier'i integraalina, siis avaldub  $f(x)$  siinuseliste lainete  $e^{ikx}$  superpositsioonina.  $k$  on lainearv ja  $\lambda$  on lainepikkus

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Lainepaketi lainearvu ja amplituudi komponente näitabki eespool väljatoodud  $g(k)$  funktsioon. Kui me  $g(k)$  funktsioonis asendame  $f(x)$  funktsiooniga

$$f(x) = A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

saame järgmise integraali

$$g(k) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-ikx} dx =$$



$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx} dx.$$

Arvestades kompleksmuutuja funktsioonide teooriat saame integraali arvutada niimoodi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + i\beta} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

kus

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma^2} \quad \text{ja} \quad \beta = -k.$$

Integraal võtab kuju

$$g(k) = A\sigma e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}.$$

Viimane seos näitab, et ka Fourier'i pööre on Gaussi jaotus, kuid lainearvu funktsioonina. Suurus

$$\frac{1}{\sigma}$$

näitab dispersiooni. Lainearvu määramatus avaldub

$$\Delta k = \frac{1}{\sigma}.$$

Kui me määramatusi korrutame, saame  $\Delta x \Delta k = 1$ . See näitabki eespool väljatoodud seost, et mida suurem on superpositsiooni lainearvude vahemik, seda kitsam on lainepakett ja vastupidi. Lainearv ja osakese impulss on seotud  $p = \hbar k$ . Ja seega saamegi määramatuse seose osakese asukoha ja impulsi vahel järgmiselt:

$$\Delta x \Delta p = \hbar.$$

Nagu me näeme on tulemus täpselt sama mis on juba eespool matemaatiliselt välja tuletatud. See tähendab, et osakeste määramatuse seoseid on võimalik tuletada puhtalt lainet kirjeldavatest võrranditest ja samas ka (eri)relatiivsusteooria võrranditest (s.t. antud juhul ajas rändamise teooria üldvõrrandist). Kuna lõpptulemused on matemaatiliselt täpselt samad ehk omavahel ekvivalentsed, siis võib füüsikaliselt järeldada seda, et osakeste lainelised omadused tulenevad just sellest, et need osakesed teleportreeruvad meie tajutavas aegruumis. Näiteks valguse osakesed „footonid“ liiguvad vaakumis kiirusega  $c$ , mille korral on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni. Ajas rändamise teooria tõlgenduse järgi eksisteerivad footonid „väljaspool“ aegruumi, sest liikudes vaakumis kiirusega  $c$  on välisvaatleja suhtes aeg aeglenenud lõpmatuseni ja keha pikkus lühenenud samuti lõpmatuseni (ehk aega ja ruumi enam ei eksisteeri). Footonite lainelised omadused tulenevad just sellest, et need osakesed eksisteerivad „väljaspool“ aegruumi ja see kehtib ka kõikide teiste osakeste korral, millel esinevad samuti lainelised omadused. Ajas rändamise teooria üldvõrrandi diferentsiaaltõlgenduse järgi teleportreeruvad „väljaspool“ aegruumi ehk hyperruumis olevad kehad meie tajutavas aegruumis.

Osakeste teleportatsiooni omaduse üks nähtusi esineb näiteks osakeste tunneleefektis. Kui mikroosake teleportreerub, siis on tal võimalus läbida tõkkeid (s.t. barjääre). See tähendab seda, et selline nähtus kvantfüüsikas on võimalik ainult mikroosakese teleportreerudes aegruumis.

Tunnelefekt seisneb osakese potentsiaalibarjääri läbimises. Näiteks potentsiaalibarjäärile langegu vasakult paremale liikuv osake. Selle kõrgus on  $U_0$  ja laius  $l$ . Kui eksisteerib juht  $E < U_0$ , siis on olemas nullist erinev tõenäosus selleks, et osake läbib barjääri ja satub barjääri välisesse piirkonda. Potentsiaalibarjääri  $E < U$  korral osakesed ka peegelduvad barjäärilt tagasi. Osakesed võivad viibida barjääri sees teatud lõpliku aja. Nad läbivad ka üksteisest. See tähendab seda, et potentsiaalbarjääriks võib olla ka teine osake.

Tõenäosus, et osake läbib potentsiaalbarjääri, sõltub aga barjääri laiusel  $l$  ja suurusel  $U_0 - E$ :

$$D \approx e^{-2\beta l} = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} l}$$

Seda avaldist nimetatakse läbilaskvusteguriks  $D$ .  $D$  väheneb väga kiiresti osakese massi  $m$  suurenemisel. Kuid viimase võrrandi e astmes oleva avaldise on võimalik kirjutada järgmisele kujule:

$$-\frac{2\sqrt{2m(U_0 - E)}l}{\hbar} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}l} + \frac{\hbar}{2\sqrt{2mE}l}$$

Kuna osakese lainepikkuse  $\lambda$  avaldis on järgmine

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{mv}$$

siis saame e astmeks järgmise avaldise:

$$+\frac{\lambda}{2l}, \quad -\frac{2l}{\lambda}, \quad e^{-\frac{2l}{\lambda}}.$$

Kuid läbilaskvusteguri  $D$  avaldisel on ka üldisem kuju:

$$D \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U-E)} dx}$$

kus  $U = U(x)$ . Sellist nähtust nimetatakse sageli tunneliefektiks. Suurus  $U_0 - E$  on ju tegelikult osakese (kineetiline) energia. Osakese lainepikkus ja energia on omavahel väga seotud. Osakese lainepikkus  $\lambda$  ju sõltub energiast  $E$  järgmiselt:

$$l = \lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}$$

Siin on näha seda, et mida suurem on osakese energia ja/või mass, seda väiksem on osakese lainepikkus. Kui aga lainepikkus on võrdne barjääri laiusel või on sellest suurem ehk kui  $E < U_0$ , siis on olemas nullist erinev tõenäosus selleks, et osake läbib potentsiaalbarjääri, mis on täiesti võimatu klassikalise mehaanika järgi.

Osakeste tunneleffekt võimaldab reaalses maailmas näiteks aatomi tuumade  $\alpha$ -lagunemist. Tuuma  ${}_Z^AX^A$   $\alpha$ -lagunemisel tekib tuum  ${}_{Z-2}Y^{A-4}$  ja  $\alpha$ -osake. Seda kirjeldab järgmine matemaatiline võrrand:  ${}_Z^AX^A \rightarrow {}_{Z-2}Y^{A-4} + \alpha$ . Peaaegu alati kindla energiaga  $\alpha$ -osakesi kiirgavad  $\alpha$ -radioaktiivsed tuumad, mille energia on 4-10 MeV. See energia on kõikidel rasketel tuumadel potentsiaalbarjääri kõrgusest väiksem. Tuuma sees võib arvestada potentsiaalset energiat, mille väärtus on null. Kuid väljaspool tuuma võime arvestada sellise elektrilise potentsiaalse energiaga  $U$ , mida kirjeldab võrrand:

$$U(r) = \frac{b(z-2)2e^2}{r}, r \geq R,$$

kus  $(z-2)e$  on tuumalaeng ja  $2e$  on  $\alpha$ -osakese laeng. Seda sellepärast, et väljaspool tuuma peame arvestama tekkinud uut tuuma ja  $\alpha$ -osakest.  $U_0=U(R)$  võime lugeda potentsiaalbarjääri kõrguseks, mis füüsikaliselt tähendab lähtetuuma raadiuse kaugusel olevat tekkinud elektrilise potentsiaalse energia väärtust. Tuuma  $\alpha$ -lagunemine toimub siis, kui  $E < U_0$  ja seda tunneleefekti tõttu.

Osakeste tunneleefektis on täiesti selgelt näha seda, et esineb osakeste teleportatsiooni omaduse üks nähtusi. Kui mikroosake teleportreerub, siis on tal võimalus läbida tõkkeid ( barjääre ) ja seda me siin ju nägimegi. See tähendab seda, et selline nähtus kvantfüüsikas on võimalik ainult mikroosakese teleportreerudes aegruumis. Seda me juba käsitlesime pisut ka teleportmehaanika aluste peatükis.

Kui barjäär on väga õhuke ( hinnanguliselt – umbes osakese lainepikkuse suurusjärgus ), võib siis osakese laine levida läbi barjääri, jätkudes teisel pool taas siinuslainena, kuid palju väiksema amplituudiga ( leiutõenäosusega ). Elektromagnetlaine peegeldumisel pinnast aga satuvad osakesed ( footonid ) väga lühikeseks ajaks pinna sisse.

Kuna osake võib teatud tõenäosusega läbida potentsiaalbarjääri, siis seega tuleneb see osakese laine omadustest või osakese teleportreerumistest aegruumis, mis omakorda põhjustab osakese lainelist omadust. Seda sellepärast, et absoluutselt igasugune füüsiline keha saab läbida teisi kehasid ainult aegruumis teleportreerudes ja seda reedabki osakese võime läbida erinevaid potentsiaalbarjääre. Mõlemad füüsikalised tõlgendusviisid on ühtaegu võimalikud. Mikroosakeste käitumised võivad olla põhjustatud nende osakeste teleportreerumistest aegruumis.

Kvantmehaanika sellist teleportmehaanilist formalismi ( kvantmehaanika on tegelikult teleportmehaanika ) on võimalik katseliselt ka tõestada. See seisneb järgnevas. Eksperimentaalsel ajas rändamisel pannakse inimene ruumis teleportreeruma ( inimest teleportreeruda ajas ja ruumis korraga ei saa ). See tähendab seda, et inimene teleportreerub ruumipunktist A ruumipunkti B. Ruumipunktide A ja B vahel võib eksisteerida mingi suvaline tõke – näiteks betoonsein. Sellisel juhul inimene teleportreerub läbi betoonseina. Kuid taoline nähtus esineb ka kvantmehaanikas, kus osake võib teatud füüsikalistel tingimustel läbida potentsiaalbarjääri. Antud katses on potentsiaalbarjääriks betoonsein ja inimene on väga suure massiga, kui võrrelda seda osakese massiga. Mõlemad nähtused on väga sarnased ( mis viitab identsusele ) ja see tähendab seda, et need kaks nähtust on sisuliselt üks ja sama. Nii füüsikas tõestataksegi eksperimentaalselt kvantmehaanika teleportatsiooni olemust ja päritolu.

### 1.13.5 Lainefunktsiooni seaduspärasused

Lainefunktsiooni reaalseks näiteks vaatleme järgnevalt mingi suvaliselt valitud pinna valgustatust. Valguslaine elektrivektori ruudu keskväärtsus mõõdab valguse intensiivsust. Valguslaine amplituudi ruut on laineteooria järgi võrdeline valgustatusega pinna mingisuguses punktis, kuid kvantteooria järgi on valgustatus ( ja seega valguslaine amplituudi ruut ) võrdeline hoopis valguse osakeste voo tihedusega. Valgusosake ehk footon kannab endas energiat ja impulsi. Footoni langemisel mingis pinna punktis vabaneb seal energia. Footoni langemist pinna mingisugusesse punkti määrab ära tõenäosus, mis sõltub valguslaine amplituudi ruudu väärtusest. Footoni leidmise tõenäosust ruumalas  $dV$  kirjeldab diferentsiaalvõrrand:  $dW = \chi A^2 dV$ , kus  $\chi$  on võrdetegur ja  $A$  on valguslaine amplituud. Tõenäosustihedus avaldub nõnda:

$$\frac{dW}{dV} = \lambda A^2$$

Oletame, et meil on selline lainefunktsioon, mis on normeeritud ühele ehk  $\psi'(r,t) = N\psi(r,t)$ , kus  $N$  on mingi konstant. Mõlemad lainefunktsioonid ehk  $\psi'(r,t)$  ja  $N\psi(r,t)$  kirjeldavad füüsikalist olekut, mis on tegelikult üks ja sama. Teades seda, et  $|\psi'|^2 = |\psi|^2$  ja

$$\int_{\infty} |\psi(r, t)|^2 dV = A,$$

kus arv  $A$  on lihtsalt selle integraali väärtus, saame leida normeerimisteguri  $N$  järgmiselt:

$$\int_{\infty} |\psi'(r, t)|^2 dV = 1 = |N|^2 \int_{\infty} |\psi(r, t)|^2 dV = |N|^2 A$$

ehk  $|N|^2 A = 1$ . Kuid  $N$  võib olla reaalarvuline ja seega saame:

$$N = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

See näitab seda, et näiteks Schrödingeri võrrandi lahend ( mida me hiljem vaatame palju täpsemalt ) - lainefunktsioon üldse - on tegelikult määratud konstantse faasiteisenduste täpsuseni ehk mitte üheselt, sest kehtib järgmine faasiteisendus:

$$|\psi'|^2 = (\psi')^* \psi' = e^{-i\alpha} \psi^* e^{i\alpha} \psi = \psi^* \psi = |\psi|^2,$$

kus  $\alpha$  on suvaline reaalarv. Summaarne tõenäosus on alati võrdne ühega. Alguses leitakse võrrandi mingi üldine lahend ja siis seda kasutades sobiv normeerimistegur.

Kui aga lainefunktsiooni integraal

$$\int |\psi(r, t)|^2 dV$$

pole lõplik ehk

$$\int_{\infty} |\psi(r, t)|^2 dV \rightarrow \infty,$$

siis lainefunktsioon ei ole normeeritav, ehkki võib olla pidev ja lõplik. Vaatame näiteks ühte kindla energia ja impulsiga osakest, mis „liigub“  $x$ -telje sihis, mida kirjeldab võrrand  $\varphi_1(x) = Ae^{ikx}$ . Selle ( lainefunktsiooni ) mooduli ruut ( mis on seotud osakese leidmise tõenäosusega ) tuleb:

$$|\varphi_1(x)|^2 = A^* e^{-ikx} A e^{ikx} = |A|^2.$$

Kuna osakesel on kindel impulss, siis tema impulsi määramatus on  $\Delta p = 0$  ja seetõttu on ka osakese asukoht  $x$ -teljel määramata ehk  $\Delta x = \infty$ . See tähendab seda, et osakese leidmise tõenäosus on kõikjal ühesugune ehk osakest on võimalik leida võrdse tõenäosusega mistahes  $x$ -telje punktist. Sellest tulenevalt ei saa  $|\varphi_1|^2$  normeerida üheks. Näiteks

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx = \infty.$$

Kuid sellegipoolest on  $|\psi|^2 dV$  peaaegu võrdne tõenäosusega leidmaks osakest mingis asukohas ruumis  $dV$  ehk  $dP \sim |\psi(r,t)|^2 dV$ . Viimase järgi saame võrrelda omavahel erinevates ruumipunktides olevaid tõenäosusi.

Mikroosakeste süsteemi olekufunktsioonis ehk  $\Psi(q_1, q_2) = \psi_1(q_1) * \psi_2(q_2)$  on olemas näiteks kaks osakest:  $\psi_1(q_1)$  ja  $\psi_2(q_2)$ , kus  $q_1$  ja  $q_2$  on koordinaadid. Osake või kvantsüsteem võib olla kahes erinevas olekus, mida kirjeldavad vastavalt lainefunktsioonid  $\psi_1^{(1)}$  ja  $\psi_1^{(2)}$ . Sellisel juhul võib osake olla ka olekutes, mida kirjeldatakse olekute  $\psi_1^{(1)}$  ja  $\psi_1^{(2)}$  lineaarse kombinatsioonina:

$$\Psi = c_1 \psi_1^{(1)} + c_2 \psi_1^{(2)}.$$

Kui aga  $\psi_1^{(1)}$  ja  $\psi_1^{(2)}$  ei ole ortogonaalsed, siis saab neist moodustada 2 lineaarset kombinatsiooni, mis on omavahel ortogonaalsed:

$$\hat{L} \Psi = c_1 \hat{L} \psi_1^{(1)} + c_2 \hat{L} \psi_1^{(2)} = c_1 \lambda_1 \psi_1^{(1)} + c_2 \lambda_1 \psi_1^{(2)} = \lambda_1 \Psi.$$

Koefitsientide  $c_1$  ja  $c_2$  mooduli ruudud

$$|c_1|^2 \text{ ja } |c_2|^2$$

annavad vastavate olekute esinemise tõenäosused. Seda nimetatakse superpositsiooniprintsiibiks. Superpositsiooniprintsiibi korral liituvad osakeste olekufunktsioonid, mitte tõenäosused:

$$\psi^* \psi = (c_1^* \psi_1^* + c_2^* \psi_2^*)(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = |c_1|^2 |\psi_1|^2 + |c_2|^2 |\psi_2|^2 + c_1^* c_2 \psi_1^* \psi_2 + c_2^* c_1 \psi_2^* \psi_1$$

milles olev avaldis

$$c_1^* c_2 \psi_1^* \psi_2 + c_2^* c_1 \psi_2^* \psi_1$$

on interfereents liikmed. Kaaskompleks on imaginaararvu vastas märk.

Superpositsiooniprintsiibi järele on osakeste põimunud olekud, kui tegemist on enam kui ühe osakesega. Omavahel ühenduses olnud kaks footonit ( näiteks on need kiiratud üheskoos välja mõnest aatomist ) jäävad ühendusse ka mistahes suure vahemaa korral. See tähendab ka seda, et samas protsessis tekkivate osakeste vahel kehtivad jäävusseadused. Põimunud olekud on superpositsiooniprintsiibi järele, kui tegemist on enam kui ühe osakesega. Superpositsiooniprintsiibi järgi viibib footon mitmes olekus ühe korraga. Teaduskeeles öelduna seisneb superpositsiooniprintsiip üksteist välistavate ehk ortogonaalsete olekute koosseisus. Superpositsiooniprintsiibi korral liituvad osakeste olekufunktsioonid, mitte tõenäosused. Kvantpõimumise korral on mõlemad osakesed enne mõõtmist tundmatu olekus. Ühe osakese mõõtmine annab infot ka teise osakese kohta. See tähendab seda, et ühe osakese mõõtmise tulemus mõjutab teist osakest silmapilkselt, mis ei sõltu osakeste vahekaugusest. Põimunud olekud taanduvad mõõtmisel klassikalisteks olekuteks.

Kvantpõimituse korral ( mida mõnikord nimetatakse ka kvantteleportatsiooniks ) ei teleportreeru osake otseselt ühest ruumipunktist või ajahetkest teise, vaid ühe osakese mõõtmise tulemus mõjutab teist osakest silmapilkselt, mis ei sõltu osakeste vahekaugusest. Seetõttu on kvantpõimitus teleportatsiooni eriliik ( s.t. erijuht ) nii nagu oli näiteks aja dilatatsioon erijuht rändamaks ajas tulevikku kui selle asemel saaks kasutada aegruumi tunnelit ehk teleportatsiooni. Kvantpõimitus näitab väga selgelt kvantmehaanika tulenemist osakeste teleportreerumistest aegruumis nii nagu seda näitab ka osakeste läbimine barjäärist teatud tõenäosuse olemasolul.

Ruumis liikuvat elektromagnetlainet võib käsitleda ka kui footoni liikumisena. Footoni käitumist kirjeldab kvantmehaanika. Osakese käitumine aegruumis on tõenäosuslik ja sellest tulenevalt on footonil kui osakesel lainelised omadused. Footonit kirjeldab tõenäosuslaine, mis „koosneb“ erinevate arväärtustega leiutõenäosustest. Tõenäosuslaine amplituud määrab ära osakese maksimaalse leiutõenäosuse. Kvantmehaanika seaduste järgi võib footonite tõenäosuslained olla omavahel seotud läbi kvantpõimumise ja see tähendab seda, et ka elektromagnetlained võivad olla omavahel seotud läbi kvantpõimumise. Osakeste vahel esineb kvantpõimumine ainult siis, kui need osakesed on tekkinud ühes ja samas protsessis ( näiteks footonid võivad olla kiiratud üheskoos välja mõnest aatomist ).

### 1.13.6 Schrödingeri lainevõrrand

Kui osakest on võimalik kirjeldada lainena ja määramatuse relatsioonid tulenevad osakese lainelistest omadustest, siis oleks võimalik tuletada osakese lainelistest omadustest ka selline diferentsiaalvõrrand, mille kaudu on võimalik välja arvutada osakese tõenäosuslainne sõltuvuse koordinaatidest ja ajast, kui on teada osakese mass ja talle mõjuvad jõud. Näiteks mikroosakeste difraktsioonikatsetest järeldub, et osakeste paralleelsel joal on osakeste liikumissuunas leviva tasalaine omadused. x-telje positiivses suunas leviva tasalaine võrrand on aga järgmine:

$$\xi(x, t) = a \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

ja komplekskujul on see avaldis

$$\xi(x, t) = a e^{-i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)}$$

Saadud avaldises tuleb arvestada ainult reaalosa. Kuna sagedus ja lainepikkus on avaldatavad

$$\omega = f = \frac{E}{h}$$

$$\lambda = \frac{2\pi h}{p}$$

siis saame vaba osakese, mis liigub x-telje positiivses suunas, laine funktsiooni järgmiselt:

$$\Psi(x, t) = a e^{-i\left(\frac{E}{h}t - \frac{p}{h}x\right)} = a e^{-\frac{i}{h}(Et - px)}$$

Impulsi p ja energia E vahel kehtib seos

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Kasutame seda seost ja võtame esimese tuletise aja t järgi ja teise tuletise asukoha x järgi:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{i}{h} E \Psi$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \left(-\frac{i}{h} p\right)^2 \Psi = -\frac{p^2}{h^2} \Psi.$$

Saadud avaldistest on võimalik E ja  $p^2$  avaldada  $\Psi$  ja selle tuletiste kaudu järgmiselt:

$$E = -\frac{h}{i} \frac{d\Psi}{dt} * \frac{1}{\Psi} = i h \frac{d\Psi}{dt} * \frac{1}{\Psi}$$

$$p^2 = -h^2 \frac{d^2\Psi}{dx^2} * \frac{1}{\Psi}$$

Asendame saadud seosed järgmisesse seosesse

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

mille tulemuseks saame diferentsiaalvõrrandi:

$$-\frac{h^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

ehk kolmemõõtmelise ruumi korral

$$-\frac{h^2}{2m} \left( \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} \right) = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

Kuid selline võrrand ühtib Schrödingeri lainevõrrandiga

$$-\frac{h^2}{2m} \Delta\Psi + U\Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

mis kehtib ainult siis kui osake on vaba ehk  $U = 0$ . Kuid nüüd teostame selles võrrandis asenduse

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t} \Psi(x, y, z).$$

Kuna  $U = 0$  ( see ei sõltu ajast ), saame statsionaarsete olekute Schrödingeri võrrandi järgmiselt:

$$-\frac{h^2}{2m} \Delta\Psi e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t} + U\Psi e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t} = i\hbar \left( -i\frac{E}{\hbar} \right) \Psi e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t}$$

ehk

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi = 0$$

Kui  $U = 0$ , siis saadud võrrand ühtib järgmise võrrandiga:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\Psi = 0$$

Selline on siis vabalt liikuva osakese Schrödingeri võrrand. Koguenergia  $E$  ühtib kineetilise energiaga  $T$  – suurus  $E$  võib viimases võrrandis tõlgendada kas osakese kogu- või kineetilise energiana. See on nii siiski vaba osakese korral. Kuid osakesele mõjuvate jõudude olemasolu korral on vaja  $E$  asemele viia siiski osakese kineetiline energia  $T = E - U$ .

Selline ongi lainefunktsioon, mis kirjeldab mikroosakese olekut. Selline koordinaatide ja aja funktsioon ongi leitav sellise võrrandi lahendamisel.  $i$  on imaginaarühik,  $\hbar$  on Plancki konstant, mis on jagatud 2 piiga,  $m$  on osakese mass,  $U$  on osakese potentsiaalne energia ja Laplace'i operaator:

$$\Delta\Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2}$$

Lainefunktsiooni kuju on üldjuhul määratud siiski potentsiaalse energiaga  $U$  – osakesele mõjuvatele jõudude iseloomuga.  $U$  on koordinaatide ja aja funktsioon.

Schrödingeri võrrandit on võimalik esitada ka operaatorkujul:

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

ja niisamuti ka impulssi:

$$\hat{p} = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Energia operaatori ( mis on põhimõtteliselt lainefunktsiooni ajaline käitumine ) saame järgmiselt:

$$E\psi = -\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad \rightarrow \quad \hat{E} = -\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t} \equiv \hat{H}.$$

Schrödingeri võrrandit ei ole tegelikult võimalik tuletada. Kõik eelnev diferentsiaalmatemaatilise „tuletus“ oli lihtsalt elav näide sellest, kuidas sellise osakese kui lainet kirjeldava diferentsiaalvõrrandini jõuda. Schrödingeri võrrand on kvantmehaanika teoreetiliseks aluseks. See on diferentsiaalvõrrand, mille kaudu on võimalik välja arvutada osakese tõenäosuslaine sõltuvuse koordinaatidest ja ajast, kui on teada osakese mass ja talle mõjuvad jõud. Kuid Schrödingeri võrrandil kui diferentsiaalvõrrandil ei ole üheseid, lõplikke ja pidevaid lahendeid parameetri  $E$  ( koguenergia ) meelevaldsete väärtuste juures. Lahendeid saadakse ainult mõningatel kindlatel väärtustel. Neid kindlaid väärtusi nimetatakse parameetri omaväärtusteks ja neile vastavaid võrrandi lahendeid ülesande omafunktsioonideks.

Schrödingeri võrrand on kvantmehaanika põhivõrrand. See võrrand seob omavahel üldist lainevõrrandit ( mis kirjeldab igasuguseid laineid ) ja de Broglie' lainevõrrandit:

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Tulemuseks on diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab endas tuletisi. Sellise diferentsiaalvõrrandi lahendid on funktsioonid ehk osakese leiulainet esitavad lainefunktsioonid. Algebralisel võrrandil on lahenditeks aga arvud.

Kvantsüsteemi energiat kirjeldab hamiltoniaan  $H$ . Schrödingeri võrrand on kvantmehaanika põhivõrrand. Selle järgi kirjeldab hamiltoniaan kvantsüsteemi ajalist arengut. Schrödingeri esituses antud olekufunktsioonide korral kirjeldab lainefunktsiooni Schrödingeri võrrand. Kuid Heisenbergi esituses on olekufunktsioonid ajas muutumatud, kuid ajalisk arengut kirjeldavad operaatorid. See on tegelikult sisuliselt sama mis Schrödingeri esitus. Kvantväljateoorias aga kasutatakse interaktsiooni- esitust, mille korral sõltub olekufunktsiooni ajaline areng ainult interaktsioonihamiltoniaanist, mitte vabade väljade hamiltoniaanist. Hamiltoniaan ise koosneb vabade väljade hamiltoniaanist ja interaktsioonihamiltoniaanist. Väljavektor sisaldab elektron-positron- ja elektromagnetvälja. Väljavektori muutust kirjeldatakse mingisuguse operaatoriga  $S$ , mida kujutatakse ka maatriksvõrrandina. Seda nimetatakse hajumise maatriksiks ehk  $S$ -maatriksiks. Erinevaid kvantolekuid erinevates ajahetkedes seob  $S$ -maatriksi mingi element. Vastava kvantoleku ülemineku tõenäosust saab välja arvutada siis, kui on teada vastava maatrikselemendi väärtust.

Järgnevalt esitame näitena matemaatilise analüüsi Schrödingeri võrrandi ja lainefunktsiooni lahendamise kohta ehk kvantmehaanika üldisest arvutamisest. Näiteks leiame vabaosakese statsionaarsed olekud, mil energia ei muutu ajas ja kui osake liigub ühemõõtmelises piirkonnas (  $0 \leq x \leq a$  ). Sellisel juhul on tegemist lõpmata seintega potentsiaaliauguga. Järgnevalt leiame vabaosakese energia  $E$  ja lainefunktsiooni  $\psi(x)$ , mis iseloomustab osakese leidmise tõenäosust. Schrödingeri võrrand esitatakse kvantmehaanikas sageli Hamiltoniaanina  $\hat{H}$  ehk energia operaatorina:

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2m} \Delta + U(\vec{r})$$

milles olev kordaja



$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

on Laplace'i operaator kolmemõõtmelise koordinaatsüsteemi korral. Kuna meil on tegemist ühemõõtmelise piirkonnaga, siis saame Hamiltonaani võrrandi kujuks:

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

ja tegemist on vabaosakesega, mis eksisteerib potentsiaaliaugus:

$$U(x) = 0$$

Lõplik Hamiltonaani võrrand tuleb seega:

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Järgnevalt peame lahendama energia operaatori omaväärtusülesande:

$$\hat{H}\psi_{(x)} = E\psi_{(x)}$$

milles  $\hat{H}$  on juba tuntud Hamiltoniaan:

$$-\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{(x)} = E\psi_{(x)}$$

Viimases võrrandis viime liikme  $-\frac{h^2}{2m}$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{(x)} = -\frac{2m}{h^2} E\psi_{(x)}$$

ja viime uuesti tagasi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{(x)} + \frac{2m}{h^2} E\psi_{(x)} = 0$$

Viimast võrrandit on võimalik lahendada järgmise matemaatikast tuntud diferentsiaalvõrrandiga:

$$y'' + k^2 y = 0$$

millega lahend on

$$y(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Selle järgi on  $k^2$  väärtus järgmine:

$$k^2 = \frac{2m}{h^2} E$$

ja sellest tulenevalt saame võrrandi kujuks:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{(x)} + k^2 \psi_{(x)} = 0$$

Viimase võrrandi lahendamegi eelnevalt esitatud seosega:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Kuna tegemist on potentsiaaliauguga, siis ääritingimus on antud juhul  $\psi(0) = \psi(a) = 0$ . Sellest tulenevalt saame määrata A ja B järgmiselt:

$$\psi(0) = Ae^{ik0} + Be^{-ik0} = A + B = 0$$

sest

$$e^0 = 1$$

Sellisel juhul kehtib võrdus  $A = -B$ . Kui aga  $x = a$  ehk:

$$\psi(a) = Ae^{ika} + Be^{-ika} = 0$$

ja ka eelneva seose järgi  $A = -B$ , siis saame järgmise lahendatava võrrandi

$$Ae^{ika} - Ae^{-ika} = A(e^{ika} - e^{-ika}) = 0$$

milles kehtib võrdus  $A = -B \neq 0$ . Seetõttu peab kehtima järgmine võrdus:

$$e^{ika} - e^{-ika} = 0$$

Viimast võrrandit on võimalik lahendada matemaatikast tuntud seosega:

$$e^{if} - e^{-if} = (\cos f + i \sin f) - (\cos f - i \sin f) = 2i \sin f$$

milles antud juhul on f võrdne

$$f = ka$$

Sellisel juhul saame võrrandi kujuks

$$e^{ika} - e^{-ika} = 2i \sin(ka) = 0$$

ja see tähendab omakorda seda, et  $\sin(ka)$  on null:

$$\sin(ka) = 0$$

milles lainete arv

$$ka = n\pi$$

$n = 1, 2, 3, \dots$  Kui me viime a teisele poole võrdusmärgi, siis saame k väärtuseks

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

Kuid eelnevalt on teada  $k^2$  väärtus, milleks on:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

Viimasest seosest saamegi kätte vabaosakese energia E väärtuse:

$$E_n = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

ehk

$$E_n = \frac{h^2 \pi^2}{2a^2 m} n^2$$

milles  $n = 1, 2, 3, \dots$  on vabaosakese energiatasemed. Järgnevalt hakkame leidma vabaosakese lainefunktsiooni:

$$\psi_n(x) = 2iA \sin(kx) = 2iA \sin \frac{n\pi x}{a}$$

milles  $k$  väärtus on juba eelnevalt teada:

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

See tähendab seda, et otsime normeerimiskordaja  $A$  väärtust. Lainefunktsioonil kehtib normeerimistingimus:

$$\int_0^a \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = 1$$

mis tähendab seda, et kõik tõenäosused peavad kokku saama väärtuseks ühe. Sellest tulenevalt saamegi

$$2iA \sin \frac{n\pi x}{a} \left( -2iA \sin \frac{n\pi x}{a} \right) = -4i^2 A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} = 4A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a}$$

Võtame viimasest saadud seosest integraali  $x$ -i järgi ja saame:

$$\begin{aligned} \int_0^a 4A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx &= \frac{1}{2} 4A^2 \int_0^a \left( 1 - \cos \left( \frac{2n\pi x}{a} \right) \right) dx = 2A^2 \left( x - \frac{\sin \frac{2n\pi x}{a}}{\left( \frac{2n\pi}{a} \right)} \right) = \\ &= 2A^2 a \left( 1 - \frac{\sin 2\pi n}{2\pi n} \right) = 2A^2 a 1 = 2A^2 a \end{aligned}$$

Integraali arvutamisel arvestasime järgmisi matemaatilisi seoseid:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

ja

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Nii saamegi lainefunktsiooni normeerimistingimuseks:

$$\int_0^a \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = 1 = 2A^2 a$$

Viimasest seosest on normeerimiskordaja  $A$  leidmine juba väga lihtne:

$$A = \pm \sqrt{\frac{1}{2a}}$$

ehk

$$A = -\frac{i}{\sqrt{2a}}$$

Nüüd saamegi vabaosakest kirjeldava lainefunktsiooni matemaatilise võrrandi:

$$\psi_n(x) = 2i \left( -\frac{i}{\sqrt{2a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

milles  $n = 1, 2, 3, \dots$

### 1.13.7 Fotoefekti võrrandi tuletamine

Eespool tuletatud väga olulisest võrrandist:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2 - mcv$$

millest on tuletatud kosmoloogia põhivõrrand ehk sisuliselt energia jäävuse seadus, on võimalik tuletada ka kvantfüüsikast tuntud fotoefekti võrrand, mis samuti baseerub energia jäävuse seadusel. Näiteks viime viimases võrrandis oleva liikme  $-mcv$  teisele poole võrdus märki:

$$\frac{mv^2}{2} + mcv = mc^2$$

Kui liige võrdub  $+mcv = 0$  ehk keha liikumiskiirus  $v$  on tavaruumi  $K$  suhtes null:  $v = 0$ , siis saame:

$$\frac{mv^2}{2} = mc^2$$

Viimases võrduses olev tuntud seisuenergia võib avaldada ka järgmiselt:

$$mc^2 = mcv$$

milles  $v = c$ . Sellest tulenevalt saame:

$$\frac{mv^2}{2} = mcv$$

Kineetiline energia võrdub tehtud tööga  $A$  järgmiselt:

$$mcv = \frac{mv^2}{2} = A$$

ja keha seisuenergia on võrdne ka Plancki kvandienergia võrrandiga:

$$mc^2 = hf$$

Pannes need avaldised eelnevalt tuletatud võrrandisse:

$$\frac{mv^2}{2} + mcv = mc^2$$

saamegi tuntud fotoefekti võrrandi:

$$\frac{mv^2}{2} + A = hf$$

ehk

$$hf = A + \frac{mv^2}{2}$$

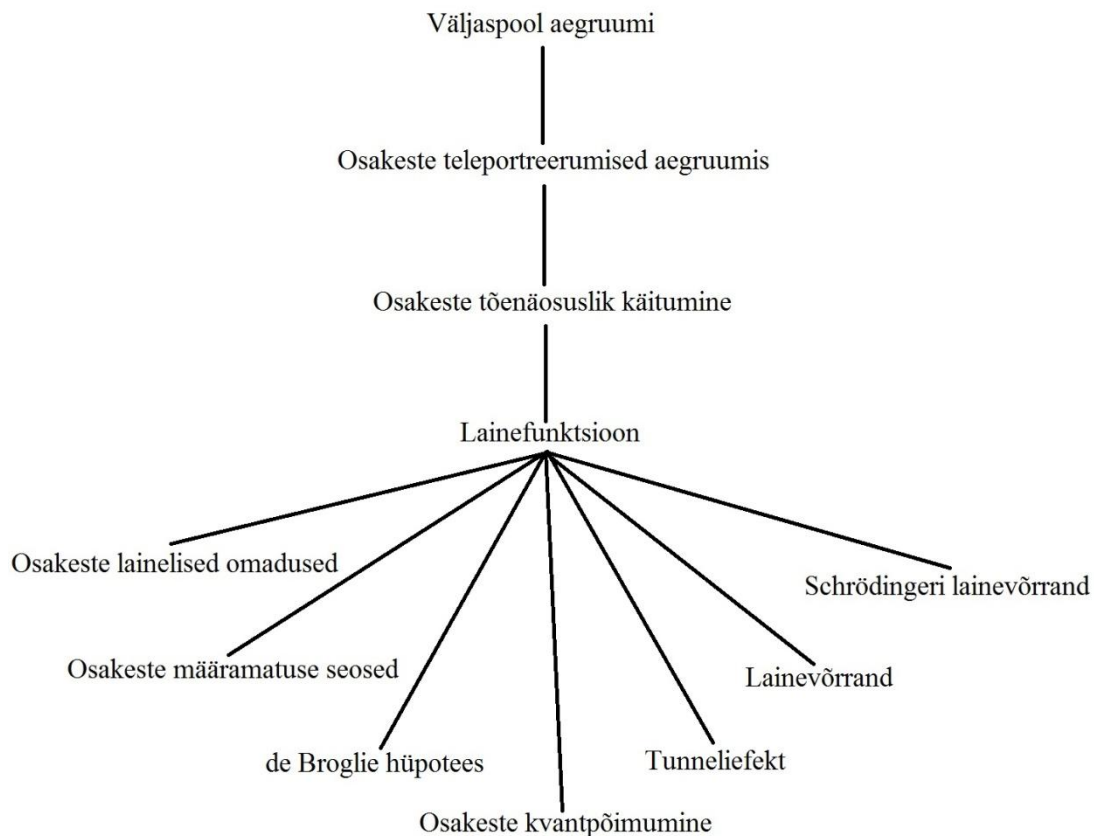
Saadud võrrandit nimetatakse kvantfüüsikas fotoelektrilise efekti ehk lihtsalt fotoefekti võrrandiks ( vahel ka Einsteini võrrandiks ), mis seisneb laetud osakeste väljalöömises metalli pinnalt valguse mõjul. Viimane võrrand seletab fotoelektrilise efekti peamisi seaduspärasusi.

Kvantteooria järgi on valgus osakeste ehk footonite voog. Footonitel on olemas impulss ja seega kui footonid langevad mingile kehale või pinnale, siis footoni impulss kandub üle sellele kehale või pinnale. Sellisel juhul suureneb impulsi jäävuse seaduse järgi keha impulss ja see tähendab ka kehale mõjuva jõu tekkimist. Niimoodi on pinnaühiku kohta tulev jõud ja avaldatav rõhk omavahel võrdsed. Valguse rõhk on seda suurem, mida rohkem footoneid ajaühikus pinnale langeb ehk seega valguse rõhk on võrdeline valguse intensiivsusega.

Valguse rõhku on võimalik seletada ka laineteooria abil. Näiteks aines eksisteerivale elektronile mõjub valguslaine elektriväli. Kehas olevad elektronid hakkavad võnkuma elektrivälja muutumise tõttu. Niimoodi tekib elektrivool, mille suund on muutuv. Seda tekkivat elektrivoolu mõjutab omakorda valguslaine magnetväli, mille korral hakkab elektronidele mõjuma Lorentzi jõud. See vektoriaalne jõud on samasuunaline valguse levimise suunaga ja see tekkiv jõud avaldabki pinnale või kehale rõhku.

### 1.13.8 Kvantmehaanika füüsikalised alused

Järgnevalt uurime palju lähemalt mikroosakeste kvantmehaaniliste ilmingute tulenevust nende samade osakeste lainelistest omadustest, kuna osakeste lainelised omadused tulenevad omakorda osakeste teleportreerumistest aegruumis ( mida me kohe alljärgnevalt näeme ).



*Joonis 34 Kõik kvantmehaanilised aspektid tulenevad osakese lainelisest olemusest ehk lainefunktsioonist. Lainefunktsioon tuleneb omakorda osakese tõenäosuslikust käitumisest aegruumis, mille põhjustab osakeste teleportreerumised aegruumis. Osakese teleportreerumine saab toimuda ainult väljaspool aegruumi ehk ainult siis, kui aega ja ruumi enam ei eksisteeri.*

#### **1.13.8.1 Osakeste lainelised omadused**

Osakeste liikumises esinevad interferentsi- ja difraktsiooni nähtused. Seega ilmnevad osakeste liikumises laineomadused. Oxfordi Ülikooli füüsik Ian Walmsley testis De Broglie kuulsat hüpoteesi eksperimentaalse katsega. Nimelt ta tulistas kaamera poole valguse osakesi mööda pimedat toru ja seda siis üks haaval. Eksperimendi teostus oli üldiselt lihtne. Valgust registreeriv kaamera võttis vastu eemal oleva elektripirni valguse osakesed. Kuid kaamera ja elektripirni vahel ( umbes keskel ) asus kahe piluga klaasitükk. Nendest piludest pidid footonid ( valguse osakesed ) läbi minema, et jõuda kaamera poole. Kogu katse alguses lastakse üksikud footonid läbi ühe pilu. Ühe footoni saabumist tähendas ühte punkti ekraanil. Ekraanil registreeriti footoni kohale jõudmist. Suur osa footonitest sattus ekraani tsentri ümbrusesse. Nende jaotus on ekraanil enam-vähem ühtlane. Kuid pärast seda korraldati seda katset nüüd hoopis kahe avatud piluga. Iga üksik footon pidi sellisel korral läbima neist kahest avatud piludest ainult ühe ja tulemus jääb eelmise katsega võrreldes samaks. Kahe avatud pilu korral peaks tulemus olema mõlema mustri summa. Kuid ekraanilt paistis hoopis footonite interferentsimuster. See lubab oletada seda, et footon läbib korraga

mõlemat pilu. See tähendab seda, et footon läbib kahte avatud pilu ühel ja samal ajal. Footon asub korraga nii kahes kohas kui ka kahes ajas. Antud katse tõestab seda, et üksik footon on võimeline eksisteerima korraga kahes kohas ehk osakesed võivad olla delokaliseeritud. Footon eksisteerib korraga ka kahes erinevas ajas. See lubab järeldada seda, et osakese aeg ja ruum on delokaliseeritud ja fragmenteeritud. Kuid sellised osakese omadused on kooskõlas teooriaga, et osakesed teleportreeruvad ruumis ja ajas. Sellest tulenevadki osakeste lainelised omadused nagu näiteks difraktsioon ja interferents. Näiteks arvutatakse välja tõenäosused iga võimaliku ruumipunkti ja ajahetke kohta, kuhu osake ( teleportreerumisel ) jõuda võib. Kõik need tõenäosused on nullist erinevad, kuid kõik need tõenäosused kokku annavad väärtuseks 1-he. Võtame näiteks tuntud pilu katse. Osakese tõenäosusjaotust ajas ja ruumis mõjutabki see pilu, millest osake läbi läheb. See tõenäosusjaotus ajas ja ruumis on nagu vee laine. Tegemist on osakese tõenäosuslainega, mis levib ajas ja ruumis. See, mis juhtub vee lainega pilu läbimisel, juhtub sama ka osakese tõenäosuslainega, mis läbib samuti pilu. Tulemuseks on osakese laineline käitumine. Näiteks elektronil esineb difraktsiooni nähtus, kui elektron läbib pilu. Just pilu laiuse  $\Delta y$  täpsusega on määratud diffrageeruva elektroni y-koordinaat. Esimese difraktsiooniiniimumi järgi on hinnatav  $\Delta p_y$  :

$$\Delta p_y = p \sin \theta.$$

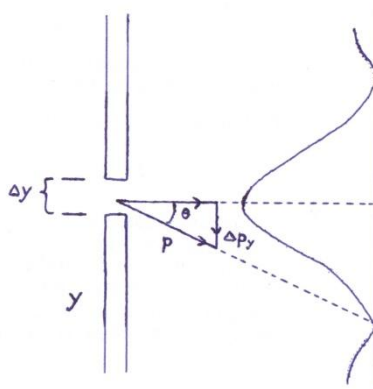
Kuid optikast on ju teada seda, et  
Seega:

$$\sin \theta = \lambda / \Delta y \quad \text{ehk} \quad \Delta y = \lambda / \sin \theta.$$

$$\Delta p_y \Delta y = p_y \sin \theta ( \lambda / \sin \theta ) = p_y ( h / p_y ) = h.$$

Siin on arvestatud ka seda, et osakese määramatuse relatsioonid tulenevad lainelistest omadustest.

Joonis 35 Osakese pilu difraktsioon.



Mida suurem on osakese lainepikkus, seda rohkem avaldub osakese laineline iseloom. Kuid mida väiksem on osakese lainepikkus, seda rohkem avaldub osakese korpuskulaarne iseloom. Lainelised omadused esinevad nii üksikul osakesel kui ka siis, kui osakesi on väga palju. Näiteks C. J. Davisson ja L. H. Germer avastasid, et kristallplaadilt hajuv elektronide juga tekitab difraktsioonipildi. G. P. Thomson ja temast sõltumatult P. S. Tartakovski avastasid difraktsioonipildi elektronide joa läbiminekul metall-lehest. Ka niimoodi leidis De Broglie´ hüpotees hiilgavat eksperimentaalset kinnitust. O. Stern ja tema kaastöötajad näitasid seda, et difraktsiooninähtused ilmnevad ka aatomite ja molekulide jugades. Difraktsioonipilt vastab lainepikkusele  $\lambda$ , mis on määratud avaldisega:

$$\lambda = \frac{2\pi h}{p} = \frac{2\pi h}{mv},$$

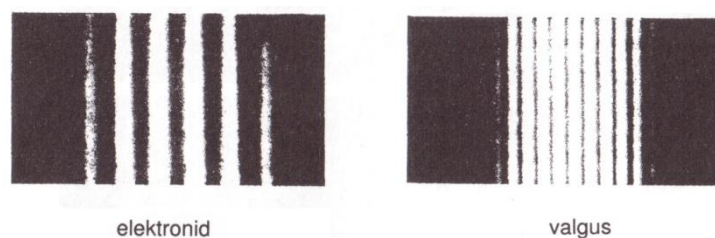
kus  $h$  on jagatud  $2\pi$ -ga.

Mikroosakeste juga tekitab difraktsioonipildi, mis sarnaneb tasalaine poolt tekitatud difraktsioonipildiga:



Joonis 36 Elektronide difraktsioon. ( Saveljev 1979, 239 ).

Järgmistelt joonistelt on näha kaksikpilu-inteferentsipilti, mille annab kaksikpilu läbinud elektronkimp luminesseerival ekraanil või fotoplaadil. Võrdluseks on see kõrnutatud valguse kaksikpilu-inteferentsipildiga. On näha väga suurt sarnasust.



Joonis 37 Elektronide ja footonite inteferents.

Uurime lähemalt elektronide interferentsikatset, mille korral kasutatakse ainult kahte ava. Elektroni ekraanile jõudmise tõenäosusamplituud ( mingisse punkti X ) on vastavalt  $\varphi_1=2$  ja  $\varphi_2=6$ . Ühikud on valdavalt suhtelised. Kui aga esimene ava ( ava 1 ) on suletud, siis jõuab punkti X 100 elektroni ühes sekundis. See tähendab seda, et  $\alpha_2=100$  ja  $P_2=36$ . Kui aga mõlemad avad on avatud, siis:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$P = |\varphi|^2$$

Interferentsi maksimum oleks seega  $\varphi = 2+6 = 8$  ja interferentsi miinimum  $\varphi = 2-6 = 4$ . Arvestada tuleb ka järgmist seost:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Sellest seosest saame:

$$\alpha_1 = \frac{P_1 \alpha_2}{P_2}$$

Viimasest järeldub see, et kui teine ava on suletud, siis  $P_1=4$  ja punkti X jõuab 11 elektroni sekundis (  $\alpha_1$  ). Kuid seosest

$$\alpha_{12} = \frac{\alpha_1 P}{P_2}$$

järeldub see, et kui mõlemad avad on avatud, siis  $P = 64$ ,  $P_2 = 36$  ja punkti X jõuab 178 elektroni



sekundis. Punktis X on tegemist interferentsi miinimumiga.

Lainetel on palju seaduspärasusi, mis kanduvad üle ka siis osakestele. Eelnevalt vaatasime pikalt osakeste difraktsiooni- ja interferentsinähtusi. Kuid need pole kaugeltki ainsad efektid, mis osakestel esinevad. Näiteks on teada seda, et statsionaarsetele orbiitidele mahub ainult täisarv elektronlaineid. Võtame näiteks mõne suvalise vesinikuaatomi statsionaarse orbiidi raadiusega  $r$ . Arvutame välja lainepikkuse ja ringjoone suhte:

$$\frac{2\pi r}{\lambda}$$

Saadud valem näitab seda, et mitu lainepikkust mahub antud orbiidile. Selleks avaldame raadiuse Bohri kvanttingimusest:

$$2\pi r = n \lambda = n (h / mv) \quad \text{ehk} \quad mvr = nh$$

Valemist

$$\lambda = \frac{2\pi h}{mv}$$

saame välja arvutada lainepikkuse. Siis saame

$$n = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

Viimane seos näitab seda, et kui palju mahub vesiniku aatomi  $n$ -dale orbiidile  $n$  de Broglie lainepikkust.

Elektron on laine ja seetõttu moodustub aatomi statsionaarsetel elektronorbiitidel seisev laine. Selle järgi ei tiirle elektronid mööda aatomi kindlapiirilisi orbiite. Elektronide „paiknemist“ aatomis (täpsemalt ümber aatomi tuuma) kujutatakse „elektronpilvena“, mis vastab elektronide tõenäosimatele asukohtadele ümber tuuma. Näiteks vesinikuaatomi elektronpilv on põhioleku korral (ehk kui  $n=1$ ,  $l=0$ ,  $m_l=0$ ) ja ka ergastatud olekus (kui  $l=0$  ja  $n=2$ ) sfääriliselt sümmeetriline, kuid kvantoleku  $n=2$  ja  $l=1$  korral on see hantlikujuline. Elektroni võimalikku paiknemist aatomis näitab  $\psi^2$  sõltuvus elektroni ja tuuma vahelisest kaugusest  $r$  erinevate kvantolekute korral ( $n$ ,  $l$ ,  $m_l$ ,  $m_s$ ).  $\psi^2$  maksimumi asukoht (ehk elektroni suurim leiutõenäosus) määrab ära Bohri teooria statsionaarse orbiidi raadiuse  $r_n$ .

### 1.13.8.2 Relativistlik kvantmehaanika

Kuna valguse kiirus vaakumis on looduse piirkiirus, siis esmapilgul tundub, et osakeste teleportreerumised ajas ja ruumis võimaldavad ületada valguse kiirust vaakumis või lihtsalt ei allu selle looduse piirkiirusele. Keha teleportatsioon ajas ja ruumis on ju võrdne keha lõpmatu suure kiirusega. Kuid sellegipoolest osakesed siiski alluvad relatiivsusteooria nõuetele. Näiteks mitte ükski keha Universumis ei ületa valguse kiirust vaakumis. Kuid seevastu sõltumatute protsesside jada võib liikuda mistahes kiirusel (isegi kiiremini kui valguse kiirus vaakumis). Osakesed küll tõesti teleportreeruvad ajas ja ruumis, kuid see põhjustab ju osakeste lainelisi omadusi ehk osake käitub kui laine. Seetõttu võib aegruumis liikuvat osakest kujutada lainepaketina ehk lokaliseeritud lainena, mis kujutab endast mitme või lõputu siinuselise laine superpositsiooni. See tähendab ka

seda, et osakese lainepakett kannab endas impulsi ja energiat ning selle lainepaketi levimiskiirust näitab laine rühmakiirus, mis ongi võrdne ka osakese reaalse liikumiskiirusega. Ja see allub juba täielikult relatiivsusteooria põhioletustele. Osakesed järgivad relativistliku mehaanika seadusi. Näiteks relativistliku dünaamika põhivõrrand on  $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ . Kasutades kvantmehaanikas tuntud osakese energia ja impulsi avaldise

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

on relativistliku dünaamika põhivõrrandist tuletatud relativistliku kvantmehaanika üks põhivõrrandeid:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0.$$

Kui aga kasutame d'Alamberti operaatorit

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$$

ehk lihtsalt d'Alamberti ja võtame dimensionaalselt  $\hbar=c=1$ , siis saamegi Klein-Gordoni võrrandi:

$$(\square - m_0^2) \psi = 0.$$

Elektroni relativistlik võrrand saadakse Cliffordi algebra ja Pauli maatriksite arvutuste tulemusena Diraci võrrandist:

$$\left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_0 \right) \psi = 0.$$

Kui kiirused on väga suured, siis osakesed muunduvad üksteiseks.

### 1.13.8.3 Plancki konstant

Plancki konstant  $h$  on kvantmehaanikas väga oluline parameeter, sest ilma selleta ei saa teha mitte ühtegi matemaatilist arvutust kvantmehaanikas. Ka valguse kiirus  $c$  oli samuti määrava tähtsusega relatiivsusteoorias. Seepärast on oluline näidata seda, et mis see konstant on ja kust see füüsikast välja tuleb. Esimest korda tuleb Plancki konstant  $h$  välja tegelikult hoopis Plancki valemis:

$$E = hf = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$$

A. Einsteini poolt antud seisueenergia erirelatiivsusteooriast on aga

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

Kuna  $E = hf$ , siis  $mc^2 = hf$ . Seega  $h$  saame järgmiselt:

$$\frac{mc^2}{f} = h$$

Periood  $T$  ja lainepikkus on omavahel seotud:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$$

kus  $c$  on valguse kiirus vaakumis. Järelikult  $hmc^2 = hf$  ehk  $h = hf$ ,  $h$  dimensiooniks saame

$$ENERGIA * AEG = h.$$

Siit on aga näha seda, et mida suurem on osakesel sagedus, seda suurem on ka mass. Mida suurem on aga mass, seda väiksem on lainepikkus. Mida suurem on ka energia, seda väiksem on lainepikkus. See avaldub Plancki konstandina kvandi energia valemis:  $E = hf$ . See sarnaneb impulsi jäävuse seadusega: mida suurem on mass, seda väiksem peab olema kiirus ja vastupidi – mida suurem kiirus, seda väiksem on mass. See tähendab seda, et sellisel juhul on impulsid mõlemal korral samasugused. Mida suurem on mass, seda suurem on ka ju energia vastavalt  $E = mc^2$  seosele. Kui me ei teaks Plancki konstandi arvvaartust, siis ei saaks teha peaaegu mitte ühtegi kvantmehaanilist arvutust. Nii et see Plancki konstant on tegelikult väga tähtis, seepärast tulebki ta sisu mõista. Ilmselt etendab ta kvantmehaanikas samasugust rolli nagu valguse kiiruse konstantsus ( vaakumis ) relatiivsusteoorias. Katseandmetest on saadud Plancki konstandile järgmine väärtus:

$$h = 1,054 * 10^{-34} \text{ J*s} = 1,054 * 10^{-27} \text{ erg*s}.$$

Suurst, mille dimensiooniks on  $ENERGIA * AEG$ , nimetatakse mehaanikas mõjuks, sellepärast on Plancki konstant ka kui mõjukvant.  $h$  dimensioon ühtib ka impulsimomendi dimensiooniga. Väga tihti on aga Plancki konstant jagatud 2 piiga, seepärast on  $h$ -i tegelik arvvaartus aga järgmine:

$$h = 6,62 * 10^{-34} \text{ J*s} = 6,62 * 10^{-27} \text{ erg*s}.$$

#### 1.13.8.4 Kompleksarvud kvantmehaanikas

Schrödingeri võrrand

$$-\frac{h^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i \hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

sisaldab imaginaarühikut ja seega on selle võrrandi kõik lahendid üldiselt kompleksarvuliste väärtustega. Arvestada tuleb ainult võrrandi reaalsosa. Kompleksarve ei ole võimalik järjestada.

Kompleksarvud füüsikas ise ei oma tegelikult füüsikalisi tähendusi, vaid tuleneb ainult matemaatikast. Paljud füüsika võrrandid kirjutatakse sageli komplekskujul, sest siis on lihtsam sooritada arvutusi (näiteks tuletusi ja integreerimist). Kuna Schrödingeri võrrand on kvantmehaanika põhivõrrand, mis on ka komplekskujul, siis peaaegu ka kõik teised kvantmehaanika matemaatilised avaldised on kompleksed. Näiteks x-telje positiivses suunas leviva tasalaine võrrand

$$\xi(x, t) = a \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

esitatakse ka komplekskujul:

$$\xi(x, t) = a e^{-i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)}$$

### 1.13.8.5 Osakeste määramatuse seosed ja operaatorid

Tavaliselt tuletatakse määramatuse seos osakese koordinaadi ja impulsi vahel nende operaatorite mittekommuteeruvuse kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned} [\widehat{p}_k, x_j] \Psi &= \widehat{p}_k x_j \Psi - x_j \widehat{p}_k \Psi = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} x_j \Psi - x_j \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi = \frac{h}{i} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j \Psi) - x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) = \\ &= \frac{h}{i} \left( \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \Psi + x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) = \frac{h}{i} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \Psi = \frac{h}{i} \delta_{jk} \Psi \end{aligned}$$

Saadud seos näitab seda, et osakese impulsi ja koordinaadi operaatorid omavahel ei kommuteeru:

$$[\widehat{p}_k, \widehat{x}_j] = \frac{h}{i} \delta_{jk}$$

ja see näitabki ainult matemaatiliselt määramatuse seost osakese koordinaadi ja impulsi vahel:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h$$

Analoogilisel teel saadakse ka määramatuse seos osakese energia ja aja vahel:

$$\Delta t \Delta E \geq h$$

Kuid see oli matemaatiline tuletus ja kirjeldus osakese määramatuse seosest impulsi ja koordinaadi vahel. Füüsikaline tuletus ja kirjeldus sellest oli esitatud eespool lainefunktsiooni integraalidega ja lainepakettidega. Osakese määramatuse seosed tulenevad ju osakese lainelistest omadustest, mitte aga lihtsalt „suvaliselt“ matemaatilistest võrranditest. Matemaatilise lähenemise korral lahendatakse operaatori omaväärtusülesanne, mille korral tuleb leida omaväärtused ja seega omaolekud (diskreetsel juhul):

$$\hat{A}f = af,$$

kus  $\hat{A}$  on operaator ( operaator on alati katusega ) ehk füüsikaline suurus,  $f$  on omaolek ehk omafunktsioon ja tundmatu  $a$  on omaväärtus ehk füüsikalisele suurusele vastav kindel arvuline väärtus. Füüsikaliste suuruste arvud peavad olema reaalarvud. Omaväärtusülesanne ei anna meile normeeritud kuju. Operaator on arvude üldistus. Igale füüsikalisele suurusele vastab operaator, mis toimib olekufunktsioonina. Operaator on teisenemise eeskiri, mille järgi saame ühest funktsioonist teise funktsiooni. Funktsioon  $f = \psi_a = \varphi_n$  on lõpmata mõõtmeline vektor ehk lõpmata komponentne vektor, milles on olemas funktsioonid  $\varphi_n$  ( kus  $n = 1, 2, 3, \dots$  ). Operaatori omaväärtusülesanne on pidevuse kujul esitatav aga järgmiselt:

$$\hat{A}\psi(x, a) = a\psi(x, a),$$

milles  $a$  väärtus võib muutuda nullist kuni lõpmatuseni ehk pidevalt ja

$$\psi = \sum_a c_a \psi_a = \int c(a) \psi(x, a) da,$$

milles  $a$  on konkreetset väärtused,  $|c_a|^2$  on ühe konkreetse väärtuse tõenäosus,  $|c(a)|^2$  näitab tõenäosuse tihedust ja  $\psi_a$  on omafunktsioonid.

Illustreerimaks operaatori omaväärtusülesannet, püüame järgnevalt lahendada ühte kõige lihtsamat varianti. Näiteks impulsi omaväärtusülesande korral on meil vaja teada de Broglie' lainepikkuse  $\lambda$  valemit, mis avaldub Plancki konstandi  $h$  ja impulsi  $p$  jagatisena

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

milles Plancki konstant  $h$  on jagatud  $2\pi$ -ga

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar$$

ja  $k$  näitab lainearvu

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

Lainefunktsiooni rahuldab siinuseline lainevõrrand ( antud juhul koordinaadi  $x$ -i järgi )

$$\sin(2\pi kx)$$

ja seda lainevõrrandit on võimalik esitada ka imaginaarsel kujul

$$e^{i2\pi kx} = e^{i\frac{2\pi}{k}px} = e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

kuna see rahuldab järgmist matemaatilist reeglit:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Järgnevalt peame arvestama ka järgmise matemaatilise eeskirjaga:

$$\frac{d}{d\alpha} e^{i\alpha} = ie^{i\alpha}$$

Impulsi operaatori leidmiseks tuleb ära lahendada impulsi omaväärtusülesanne:

$$\hat{p}_x \psi = p_x \psi$$

milles  $\hat{p}_x$  on füüsikaline suurus ehk operaator,  $\psi$  on omaolekud ehk omafunktsioonid ja  $p_x$  on omaväärtus ehk füüsikalisele suurusele vastav kindel arvuline väärtus. Viimasest võrrandist võrdub  $\psi$  järgmise avaldisega

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}$$

ja seega saame impulsi omaväärtusülesande järgmise kuju

$$\hat{p}_x e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} = p_x e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}$$

Tehes ära viimases võrrandis mõned lihtsad matemaatilised teisendused, saame järgmise avaldise

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{i}{\hbar} p_x \psi$$

Viime  $i$  ja  $\hbar$  jagatise teisele poole

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = p_x \psi$$

ning lõpuks saamegi impulsi operaatori

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Koordinaadi operaator võrdub alati iseendaga:

$$\hat{x} = x.$$

Osakese olekut kirjeldab kvantmehaanikas lainefunktsioon  $\Psi$ . Sellest lainefunktsioonist peab kätte saama kogu informatsiooni mingite matemaatiliste operatsioonidega. Nende matemaatiliste operatsioonide aluseks ongi operaatorid, mis teisendavad ühtesid funktsioone teisteks. Operaatorid kuuluvad kvantmehaanika põhimõistete hulka ja seetõttu ei saa ilma nendeta mõista kvantmehaanika formalismist ega ka füüsikalisest sisust. Operaator on matemaatikas eeskiri, mille abil on võimalik saada mingist funktsioonist teise funktsiooni. Kvantmehaanikas on vaja ainult arvuga korrutamise operaatoreid ja diferentseerimisoperaatoreid. Operaatorid, mida kasutatakse kvantmehaanikas, on enamasti lineaarsed. Operaatorite korrutamine tähendab nende järjestikust rakendamist ja seetõttu on korrutises operaatorite järjekord üldiselt oluline. Tulemus ei sõltu operaatorite rakendamise järjekorrast siis, kui operaatorid omavahel kommuteeruvad. Operaatorite rakendamise järjekord on oluline omavahel mittekommuteeruvate operaatorite korral. Tuleb kindlasti märkida ka seda, et operaatorid mõjuvad alati funktsioonidele.

Kvantmehaanikas vastab igale füüsikalisele suurusele ( energia, impulss vms ) mingi kindel operaator. Füüsikaliste suuruste operaatorite saamiseks on enamasti vaja teada ainult koordinaadi ja impulsi operaatoreid. Koordinaadi operaatorid ( ristkoordinaatides ) on vastavad koordinaadid ise. Need on arvuga korrutamise operaatorid. Kuid impulsi operaatori korral on tegemist juba arvuga korrutamise operaatori ja diferentseerimisoperaatori korrutisega. Igale füüsikalisele suurusele vastab mingi kindel operaator ja operaatori omaväärtused annavad selle füüsikalise suuruse mõõdetavad väärtused. Füüsikaliste operaatorite omaväärtused peavad olema reaalarvulised, mitte imaginaarsed, sest kõik füüsikaliselt mõõdetavad suurused on reaalarvulised. Kuid kvantmehaanikas leiduvad ka selliseid lineaarse operaatori omaväärtused, mis ei ole reaalsed. Hermiitilise operaatori korral on kaasoperaator võrdne selle operaatori endaga. Füüsikaliste suuruste operaatorid peavad kvantmehaanikas olema hermiitilised, mille korral on selle omaväärtused reaalsed.

Määramatuse seos osakese koordinaadi ja impulsi vahel  $\Delta x \Delta p = \hbar$  on seotud määramatuse seosega osakese energia ja aja vahel järgmiselt. Osakese määramatuse seos koordinaadi ja impulsi vahel on  $\Delta x \Delta p = \hbar$ . Näiteks footon liigub vaakumis kiirusega  $c$  ja seega võib viimases seoses  $\Delta x$  avalduda nii:  $\Delta x = c \Delta t$ . Määramatuse seos avaldub nüüd niimoodi:  $c \Delta t \Delta p = \hbar$ . Kuna osakese energia avaldub valemiga  $E = mc^2$  (  $E = mc^2 = \hbar f$  ) ja impulss  $p = mc$  ( kuna siin  $v = c$  ), siis saamegi

osakese määramatuse seose energia ja aja vahel:  $c\Delta t\Delta(mc)=h$ , seega  $\Delta E\Delta t=h$ . Viimane seos näitab seda, et osakese energia täpseks mõõtmiseks kestab mõõtmisprotsess lõpmata kaua. See tähendab sisuliselt seda, et osakese energiat  $E$  ( kui osakese energiatase eksisteerib mingi  $\Delta t$  jooksul ) ei ole võimalik määrata täpsemalt kui  $\Delta E = h / \Delta t$ . Energia ja aja määramatuse seosest on võimalik määrata kiirgussuure kestvust  $\Delta t$ . See on umbkaudu sellises suurusjärgus, mis jääb  $10^{-9} - 10^{-8}$  sekundit. Kuid valguse võnkumise sagedus on umbes  $10^{14}$  Hz. Kiirguvas valguse laines jõuab selle ajaga toimuda sadu tuhandeid kuni miljoneid valguse võnkeid. Footon, mida kiiratakse, on nagu lainejada, milles võib sisalduda  $10^5 - 10^6$  võnget. Valguse laine sagedus on teatavasti  $f = c / \lambda$ . Selle järgi on võimalik välja arvutada ka footoni energia. Aja perioodi  $\Delta t$ , mille jooksul kiiratakse, on nimetatud ka kestust, mille jooksul aatom on ergastatud. Aatomite kiirgumised kestavad lõpmatult kaua ainult siis, kui  $\Delta E$  läheneb nullile. Kuid kui  $\Delta E$  läheneb lõpmatusele, siis aatomi kiirgumisaeg  $\Delta t$  läheneb nullile. Määramatuse seose tulemus osakese energia ja aja vahel näitab mõlema määramatuse seose omavahelist seost ja ühist päritolu ( tulenevust osakese laineomadustest ).

Määramatuse relatsioonid on meie mikromaailmas üsna olulised. Näiteks klassikalise teooria järgi peaksid elektronid aatomis kiirgama ja mõne ajavahemiku tagant aatomituuma kukkuma. Kuid sellise protsessi välistavad just kvantmehaanikas tuntud määramatuse seosed. Näiteks elektroni asukoha määramatus väheneb aatomituumale lähenedes, kuid seevastu elektroni impulss suureneb. Selle tulemusena elektron eemaldub aatomituumast, sest elektroni energia suureneb. Elektriliste jõudude tõttu tõmbuvad omavahel aatomituum ja elektron, kuid seevastu määramatuse seosed takistavad seda. Ja sellepärast tekibki aatomituuma vahetus ümbruses teatud kindla konfiguratsiooniga elektronpilv. Kuid, nagu me juba eespool nägime, tulevad määramatuse seosed lainelistest omadustest ja need omakorda aga osakeste teleportatsiooni omadustest. Elektroni „liikumine“ ümber aatomi tuuma on jällegi seotud tema pideva teleportreerumise omadustega aegruumis.

Määramatuse seosed on üsna olulised ka kvantelektrodünaamika valdkonnas. Elektromagnetväli on kvantelektrodünaamika järgi ka kui footonite kogum või nende voog. Elektriliselt laetud osakeste omavaheline vastastikmõju ehk interaktsioon seisneb tegelikult selles, et üks osake neelab ühe footoneist, mille kiirgas esimene. See tähendab seda, et laetud osakesed vahetavad omavahel footoneid. Iga laetud osake tekitab enda ümber välja, mis tegelikult seisneb footonite kiirgamises ja neelamises. Need footonid pole aga reaalsed, vaid neid mõistetakse virtuaalsetena. Neid virtuaalseid osakesi pole võimalik avastada nende eksisteerimise ajal. See teebki need „virtuaalseteks“. Tavaliselt on footoni ja mingi laetud osakese summaarne energia suurem kui paigaloleval laetud osakesel ( footonil laengut ei ole ). See aga rikub energia jäävuse seadust. Kuid kui laetud osakese poolt kiiratud footon neelatakse sama või mõne teise laetud osakese poolt enne ajavahemikku  $\Delta t=h/\hbar$  möödumist, siis ei ole võimalik avastada energia jäävuse seaduse rikkumist. Reaalne footon, mis võib kiirguda näiteks kahe laetud osakese pöörkel, võib eksisteerida aga piiramatult kaua. Kahe punkti vahel, mille vahekaugus on  $l = c\Delta t$ , on virtuaalsel footonil võimalik anda vastastikmõju ja seda siis  $\Delta t$  jooksul. Elektromagnetjõudude mõjuraadius võib olla mistahes suur, sest footoni energia  $E=\hbar\omega$  saab olla ükskõik kui väike.

Ka osakeste tekkimise ja kadumise ajavahemikku vaakumis ehk nende eluiga on võimalik välja arvutada määramatuse relatsioonist osakese energia ja aja vahel.

## 1.14 Elektrilaengu mõju aegruumi meetrikale, väljade ühendteooria ja väljade kvantteooria ( vanem materjal )

### 1.14.1 Gravitatsiooniväli ehk aegruumi kõverus ja aegruumi lõkspinna mõiste

Masside vahel avaldub Newtoni gravitatsiooniline vastastikmõju:

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

mille tõttu on kehal gravitatsiooniline potentsiaalne energia  $U$ :

$$U = - \int_r^\infty \vec{F} d\vec{r} = - \frac{GMm}{r}.$$

Viimast integreerimisvõtet analüüsime järgnevalt põhjalikumalt. Näiteks klassikalises mehaanikas defineeritakse tööd  $A$  jõu  $F$  ja nihke  $s$  korrutisena:

$$A = Fs$$

Viimasest seosest võtame nihkest  $s$  integraali:

$$U(R) = \int_\infty^R -F ds, \quad s = R$$

Kuna antud juhul teeb tööd  $A = U(R)$  gravitatsioonijõud  $F$

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{R^2} \vec{R}$$

siis saame võtta kauguse ehk raadiuse  $R$  integraali gravitatsioonivälja tsentrist:

$$U(R) = - \int_\infty^R -G \frac{Mm}{R'^2} dR'$$

Integraalivalemis viime kõik konstandid ühele poole

$$U(R) = GMm \int_\infty^R \frac{1}{R'^2} dR'$$

ja teades integraalarvutuste ühte põhireeglit

$$\int R'^{-2} = -\frac{1}{R} + C$$

saame lõpuks leida gravitatsioonipotentsiaali  $U$  avaldise. Kuna arvuga jagamine lõpmatusega annab tulemuseks nulli



$$U(R) = + \frac{GMm}{\infty} - \frac{GMm}{R}$$

saame gravitatsioonipotentsiaali U valemi:

$$U(R) = - \frac{GMm}{R}$$

Null punkt asub lõpmatuses  $\infty$ . Gravitatsiooniväljal endal ei ole energiat ehk gravitatsiooniväli ei ole energiaväli nii nagu seda on näiteks elektriväli. Kuid füüsikaline keha omab potentsiaalset energiat gravitatsiooniväljas olles. Seda see gravitatsioonipotentsiaali võrrand tähendabki.

Selleks, et füüsikaline keha saaks jäädavalt lahkuda gravitatsioonijõu F mõjusfäärist musta augu pinnal, peab keha kineetiline energia E olema võrdne tööga A:

$$\frac{mv^2}{2} = A$$

milles A on gravitatsioonijõu  $F_g = G \frac{Mm}{R^2}$  töö keha liikumisel musta augu pinnast ehk R-st kuni lõpmatuseni:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}_s d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F}_R d\vec{r}, \quad \text{milles } R_2 = \infty$$

Kineetiline energia E on võrdeline tehtud tööga:

$$Fs = ma = mg = m \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds} = mv \frac{dv}{ds}$$

ehk

$$Fs = mv \frac{dv}{ds}$$

Viimasest seosest ongi näha seda, et töö A avaldise diferentseerimisel saame kineetilise energia valemi järgmiselt:

$$dA = Fsds = mvdv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Integreerides viimast avaldist:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} s d\vec{s}$$

saamegi kineetilise energia matemaatilise avaldise:

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{mv^2}{2}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2}{2}$$

Kuna gravitatsioonipotentsiaal on võrdne tööga A:

$$A = G \frac{Mm}{R}$$

siis keha liikumiskiiruse v sõltuvuse gravitatsiooni raadiusest R saame järgmiselt:

$$\frac{mv^2}{2} = G \frac{Mm}{R}$$

$$R = \frac{2GM}{v^2}$$

Musta augu paakiirus ehk teine kosmiline kiirus  $v$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

on musta augu pinnal ehk tsentrist kaugusel  $R$  võrdne valguse kiirusega  $c$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Albert Einsteini üldrelatiivsusteoorias asendatakse aja dilatatsiooni võrrandis olevas ruutjuure avaldises

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{t'}$$

$v^2$  Newtoni gravitatsiooniteoorias tuntud teise kosmilise kiirusega

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

ehk

$$v^2 = \frac{2GM}{r} .$$

$\frac{GM}{r}$  on gravitatsioonipotentsiaal ja  $\frac{v^2}{2}$  on liikuva keha kineetiline energia:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} .$$

Sellest tulenevalt saadakse järgmised matemaatilised teisendused:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = \sqrt{1 - \frac{R}{r}} ,$$

milles

$$\frac{2GM}{c^2} = R$$

on Schwarzschildi raadiuse avaldis ja  $r$  on kaugus planeedi tsentrist. Teine kosmiline kiirus on keha kiirus, mis võimaldab mingisuguse planeedi mõjusfäärist jäädavalt lahkuda. Seda nimetatakse ka paakiiruseks ja näiteks musta augu pinnal ehk aegruumi kõveruse Schwarzschildi pinnal on see võrdne valguse kiirusega  $c$ . Schwarzschildi raadius  $R$

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

moodustab tsentraalsümmeetrilise pinna S

$$S = 4\pi R^2$$

mille „pinnal“ on näiteks aeg

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \infty$$

sest  $R = r$ . Seetõttu on kordaja y lõpmatu suure väärtusega:

$$\frac{t'}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = y = \infty$$

Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverlus, mida põhjustavad väga rasked massid. See aegruumi kõverlus väljendub selles, et mida enam gravitatsioonivälja tsentri poole minna, seda enam aeg aegleneb ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus väheneb. Selline aja ja ruumi teisenemine jätkub kuni teatud kauguseni tsentrist ja seda kaugust kirjeldab meile Schwarzschildi raadius R:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

See raadius näitab kaugust gravitatsioonivälja tsentrist, et kust alates on aeg t ja ruum l teisenenud lõpmatuseni ehk kust alates avaldub aegruumi lõpmatu kõverdumine ehk aegruumi eksisteerimise absoluutne lakkamine:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

ja

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

ja seetõttu ei saa midagi eksisteerida näiteks musta augu ehk aegruumi augu Schwarzschildi raadiuse R sissepoole jäävas „piirkonnas“, mida vahel nimetatakse ka Schwarzschildi pinnaks. See tähendab ka seda, et mingisugust singullaarsust musta augu tsentris ei saa olemas olla. Singullaarsus on lihtsalt üks punkt, kust alates mõeldakse Schwarzschildi raadius R, mis määrab ära musta augu ehk aegruumi augu „suuruse“ ehk sellise kujuteldava sfääri suuruse ruumis, kust alates aegruumi lõpmatu kõverus muutub tsentrist kaugenedes järjest tasasemaks. Seepärast ei saa musta augu mass eksisteerida Schwarzschildi pinna sees, vaid on sellest väljapool nii nagu tähtede ja planeetide korral. Schwarzschildi pind on täiesti kerakujuline ja see ei pöörle. See võib ainult tiirelda mõne teise taevakeha ümber.

Keha mass kõverdab aegruumi, milles seisnebki gravitatsiooni füüsikaline olemus. Ajas muutumatut tsentraalsümmeetrilist gravitatsioonivälja kirjeldab meile järgmine tuntud võrrand, mis oli tegelikult tuttav juba eespoolt:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

1916. aastal leidis sellise lahendi teadlane nimega Schwarzschild ja seetõttu nimetatakse seda Schwarzschildi meetrikaks. Kui aga võtta viimases võrrandis  $r$ -i asemele

$$r + \frac{R}{2}$$

ja tehes mõningaid teisendusi, saame aga järgmise kuju:

$$ds^2 = \frac{r - \frac{R}{2}}{r + \frac{R}{2}} dt^2 - \frac{r + \frac{R}{2}}{r - \frac{R}{2}} dr^2 - \left(r + \frac{R}{2}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Saadud avaldist peetakse Foki gravitatsioonivälja põhivormiks. Antud võrrand kirjeldab sellist välja, mis ajas ei muutu ja on tsentraalsümmeetriline. Selline vorm on esitatud harmoonilistes koordinaatides.  $R$  on n. Schwarzschildi raadius:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

kus  $c$  on valguse kiirus vaakumis,  $G$  on gravitatsioonikonstant ja  $M$  on taevakeha mass.  $R_s$  (Schwarzschildi pind) on täiesti tsentraalsümmeetriline ehk kerakujuline ja mittepöörlev. Selle kera ruumala (ühikuks  $m^3$ ) on avaldis

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3$$

ja sfääri pindala (ühikuks  $m^2$ ) on järgmine

$$S = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

Analüüsides eelnevaid võrrandeid ei ole järelikult mustade aukude tsentrites aega ega ruumi ehk aegruum on lakanud eksisteerimast. See tähendab seda, et aeg  $t$  on lõpmatuseni aeglenenud ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus  $l$  on lõpmatult väike. Kuid aja ja ruumi selline lakkamine esineb ajas rändamise teooria järgi ainult hyperruumis. Piltlikult väljendades ei eksisteeri „väljaspool aegruumi“ (ehk hyperruumis) enam aega ega ruumi. Järelikult mustade aukude tsentrid (see tähendab Schwarzschildi pinnad) on tegelikult „sissepääsud“ hyperruumi ehk aegruumi auku on võimalik tõlgendada „sissepääsuna“ hyperruumi ja ka „väljapääsuna“ hyperruumist. Tavaruumi (meie igapäevaselt kogetavat aegruumi) seal ei ole enam olemas. Ajas rändamise teooria järgi rändame ajas, kui „liigume“ hyperruumis. „Seal“ avaldub inimese ajas rändamise võimalus.

Schwarzschildi meetrika näitab meile sisuliselt seda, et mida lähemale aegruumi augu pinnale, seda aeglasemalt liigub aeg ja keha pikkus lüheneb välisvaatleja suhtes.  $R$  on Schwarzschildi raadius

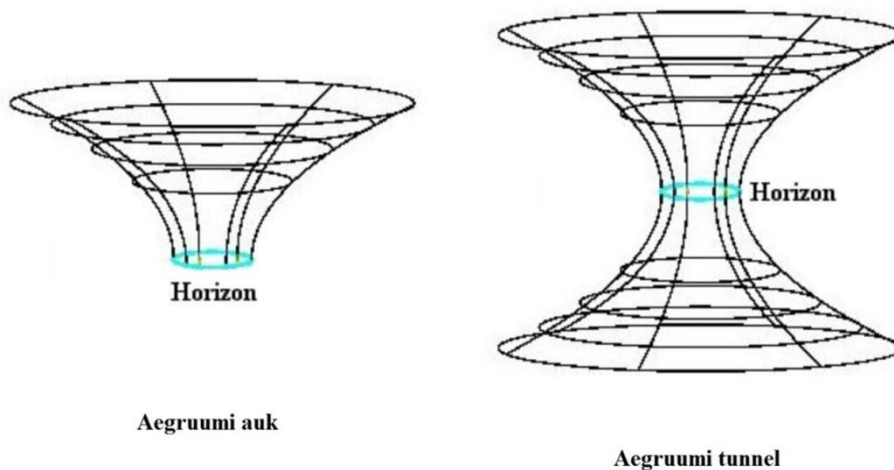
$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

mis näitabki aegruumi augu suurust. Aegruumi auku ja aegruumi tunnelit kirjeldavad meetrikad on omavahel sarnased. See viitab sellele, et aegruumi tunnelit kirjeldavat meetrikat tuletatakse välja aegruumi auku kirjeldavatest meetrikatest. Matemaatiliselt kirjeldab aegruumi auku näiteks

Schwarzschildi meetrika ja seega võib kirjeldada see sama meetrika ka aegruumi tunnelit. Näiteks kõige tuntum aegruumi tunnelit kirjeldav matemaatiline võrrand on meetrika, mida nimetatakse Einstein-Roseni sillaks:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Täpsemalt öeldes kirjeldab Schwarzschildi meetrika seda, et kuidas muutuvad aeg ja ruum, kui läheneda taevakeha (näiteks musta augu) tsentrile. Kuid ussiaugu meetrika kirjeldab aga seda, et aegruumi auk ehk aegruumi tunnel „ühendab“ omavahel kaks erinevat aegruumi punkti nii, et nende vaheline teepikkus on kahanenud lõpmata väikeseks. USSIAUK painutab aegruumi nii, et on võimalik kasutada otseteed läbi teise dimensiooni. Seetõttu näidatakse ussiauku mudelites sageli pigem kahemõõtmelisena, mis näeb välja nagu ring. Kuid kolmemõõtmeline ring näeb välja kui kera ja seepärast näeb ussiauk tegelikkuses välja just kerana. See tähendab seda, et ussiauk on tegelikult kerajas auk ehk aegruumi auk ja seetõttu on aegruumi auku võimalik tõlgendada aegruumi tunnelina (ehk ussiauguna). See tähendab seda, et aegruumi auk ja aegruumi tunnel on tegelikult üks ja sama füüsikaline „objekt“.



Joonis 38 Aegruumi augu suurus ehk sündmuste horisoni raadius näitab aegruumi tunneli sisse- ja väljakäigu suurust.

### 1.14.2 Elektrilaengu mõju aegruumi meetrikale

Albert Einstein lõi oma üldrelatiivsusteooria inertse massi ja raske massi samasusele. See tähendab seda, et raske mass ja inertne mass on võrdsed ehk need kaks on tegelikult üks ja sama. Erirelatiivsusteooria samastab omavahel ka energiat ja massi seoses  $E = mc^2$ . Sellest järeldub see, et kui keha mass on suuteline kõverdama aegruumi ( mida kirjeldab meile üldrelatiivsusteooria ), siis

peab seda suutma ka energia. Seda sellepärast, et mass ja energia on ekvivalentsed suurused. Ka energiaga peaks kaasnema aegruumi kõverdus nii nagu seda on suurte masside korral. Analoogiliselt oli see nii ka inertse massi ja raske massi korral.

Elektri- ja magnetväljal ( ja seega elektromagnetväljal ) on energia ( mass ja impulss ). See tähendab seda, et elektri- ja magnetvälja korral on energia kandjaks väli, mitte laengud. Laengud on lihtsalt välja tekitajateks. Seega suudavad need väljad kui energiaväljad kõverdada aegruumi nii nagu seda teevad kehade massid. Elektri- ja gravitatsioonijõu vahe on  $5,27 \cdot 10^{-44}$ . Oluline on märkida seda, et elektromagnetväli ise ei ole tingitud aegruumi kõverdusest, kuid on võimeline mõjutama aegruumi struktuuri.

Schwarzschildi raadius  $R$  on üldrelatiivsusteooriast avaldatav järgmiselt:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Kuna mass ja energia on omavahel ekvivalentsed suurused ehk  $E = mc^2$ , siis seega saame massi  $m$  avaldada ainult energia  $E$  kaudu:

$$m = \frac{E}{c^2}$$

ja seetõttu tuleb Schwarzschildi raadiuse  $R$  avaldis järgmiselt

$$R = \frac{2G \frac{E}{c^2}}{c^2} = \frac{2GE}{c^4} = \frac{2GE}{c^4}$$

Kuna elektrilaengu  $q$  elektriväli omab energiat  $E$  ehk  $W$ :

$$W = \int dW = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

ehk

$$E = W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q}{2} \varphi = \frac{q}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{q^2}{2C}$$

siis seega saame järgmise avaldise, mis näitab aegruumi lõkspinna tekkimist elektrilaengu  $q$  poolt:

$$R = \frac{2G \frac{q^2}{2C}}{c^4} = \frac{2Gq^2}{2Cc^4} = \frac{Gq^2}{Cc^4} = \frac{q^2 G}{Cc^4}$$

Viimase võrrandi lahti kirjutades saame järgmise avaldise:

$$R_q = \frac{q^2 G}{Cc^4} = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0\epsilon Rc^4}$$

milles elektrimahtuvus  $C$  on antud juhul kera elektrimahtuvus:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$$

Viimaks saame valemi, mis näitab kerakujulise aegruumi lõkspinna tekkimist elektrilaengu  $q$  poolt:

$$R^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 \epsilon c^4} \rightarrow R_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 \epsilon c^4}}$$

Massi poolt ja elektrilaengu poolt tekitatav aegruumi lõkspinna valemid on omavahel võrdsed:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 \epsilon c^4}}$$

Vastavalt Albert Einsteini erirelatiivsusteoorias avaldatud seosele  $E = mc^2$  on energia ja mass ekvivalentsed suurused. See tähendab nüüd seda, et kui mass kõverdab aegruumi, siis peab seda tegema ka energia. Kuna väljad ( näiteks elektriväljad, magnetväljad jne ) omavad energiat ( need on energiaväljad ) nagu me eelnevalt nägime, siis seega elektromagnetväli ( antud juhul elektriväli ) on võimeline aegruumi struktuuri mõjutama.

Oluline on siinkohal märkida seda, et seisuenergia  $E = mc^2$  valemis võib energia  $E$  märkida keha massi energiat, kuid samas ka välja energiat:

$$E = \frac{q^2}{2C} = mc^2$$

See tähendab seda, et seisuenergia valemit on võimalik rakendada nii ainele kui ka väljale. Keha seisuenergia avaldises ei võeta arvesse keha potentsiaalset energiat, mis on tingitud välise välja olemasolust. Sealhulgas ei arvestata ka keha potentsiaalse energia muutumist välises jõuväljas.

### 1.14.3 Gravitatsioonivälja ja elektrivälja suhe

Eespool tuletatud tsentraalsümmeetrilise aegruumi lõkspinna raadiuse  $r$  võrrandist

$$r = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 \epsilon c^4}}$$

on võimalik tuletada gravitatsioonivälja ja elektrivälja ( hiljem ka elektromagnetvälja ) jõu suuruste erinevuse analüüsi. See seisneb selles, et gravitatsioonivälja ja elektrivälja jõu suurust kirjeldavad fundamentaalsed konstandid erinevad suuruste poolest üksteisest sarnaselt nii nagu mass ja energia seisuenergia võrrandis. Näiteks viimases saadud võrrandis

$$r^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 \epsilon c^4}$$

viime gravitatsioonikonstandi  $G$  ja valguse kiiruse konstandi  $c$  ühele poole võrdusmärgi:

$$\frac{c^4}{G} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\frac{c^4}{G} = k \frac{q^2}{r^2}$$

milles  $k$  on Coulomb'i seadusest tuntud elektrivälja võrdetegur:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

mis sisaldab endas elektrilist konstanti. Saadud võrrandis on näha seda, et võrrandi üks pool võrdub elektrijõu  $F$  klassikalise definitsiooniga:

$$k \frac{q^2}{r^2} = F$$

mis antud juhul on konstant:

$$\frac{c^4}{G} = F_1 = \text{const}$$

Tähistame seda konstanti  $F_1$ -ga. See konstant näitab meile seda, et mitu korda on elektrijõud suurem gravitatsioonijõust. Sellepärast see konstant ongi. Sellest tulenevalt me näeme seda, et gravitatsioonikonstandi  $G$  suurus on defineeritud järgmiselt:

$$\frac{c^4}{F_1} = G$$

Gravitatsioonijõu ja elektrijõu suhte näiteks toome välja vesiniku aatomi osakeste vahelise interaktsiooni. Näiteks elektron ja prooton mõjutavad teineteist tõmbejõuga  $F$  vesiniku aatomis järgmiselt:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = -k \frac{e^2}{r^2} = -9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{(1,6 * 10^{-19}C)^2}{(5,3 * 10^{-11}m)^2} \approx -8,2 * 10^{-8}N$$

milles  $r$  on osakeste vahekaugus, mis on saadud Bohri aatomimudeli kohaselt. Coulomb'i seadusest tuntud elektriline võrdetegur on  $k$  ja  $e$  on osakeste elementaarlaeng. Viimases võrrandis näitab miinusmärk seda, et tegemist on osakeste vahelise tõmbejõuga. Tulemuseks saame selle, et elektroni ja prootoni vahel mõjub elektriline tõmbejõud  $8,2 * 10^{-8} N$ , kui samas on nende osakeste vahel mõjuv gravitatsioonijõud  $3,7 * 10^{-47} N$ . Sellest järeldub, et vesiniku aatomis on elektriline jõud gravitatsioonijõust suurem üle  $2 * 10^{39}$  korra.

Kui aga eespool saadud võrrandis vahetame ära ainult konstandid  $G$  ja  $k$ , siis saame järgmise konstandi:

$$\frac{c^4}{k} = G \frac{q^2}{r^2} = F_2 = \text{const}$$

Sellel konstandil füüsikaline sisu puudub, seega on tegemist lihtsalt kordajaga, mis annab meile elektrivälja võrdeteguri  $k$  suuruse definitsiooni:

$$\frac{c^4}{F_2} = k$$

Eelnevast analüüsist saame järgmised seosed:



$$c^4 = GF_1 = kF_2$$

ehk

$$GF_1 = kF_2$$

millest omakorda saame:

$$\frac{G}{k} = \frac{F_2}{F_1}$$

Viimane võrdus tähendab seda, et gravitatsioonikonstandi  $G$  ja elektrivälja võrdeteguri  $k$  suhe on võrdne konstantide  $F_2$  ja  $F_1$  suhtega. Konstantide  $F_2$  ja  $F_1$  füüsikalised definitsioonid oli välja toodud eelneva analüüsi käigus.

Eelnevalt tuletatud konstandi võrrandist

$$\frac{c^4}{G} = k \frac{q^2}{r^2} = F_1 = \text{const}$$

on võimalik omakorda tuletada energia ruudu võrrand, mis näitab kõige ilmekamalt gravitatsiooni- välja ja elektrivälja omavahelist suhet. Näiteks võrrandis

$$\frac{c^4}{G} = k \frac{q^2}{r^2}$$

võime kirjutada mõlemale poole võrdusmärgi valguse kiiruse ruudu järgmiselt:

$$\frac{c^2}{G} = \frac{k q^2}{c^2 r^2}$$

Teades seisuenergia  $E$  matemaatilist definitsiooni:

$$E = mc^2$$

millest valguse kiiruse ruut võrdub:

$$\frac{E}{m} = c^2$$

ja selle pöördväärtus on:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{m}{E}$$

siis seega tulemuseks saamegi võrrandi:

$$\frac{E^2}{Gm^2} = \frac{kq^2}{r^2} = F_q$$

ehk  $m = 1$  (kg) ja  $q = 1$  (C) korral:

$$\frac{E^2}{G} = \frac{k}{r^2} = F_q$$

millest on näha seda, et gravitatsioonivälja ja elektrivälja suhe seisneb seisuenergia ruudus  $E^2$ :

$$\frac{E^2}{k} = \frac{G}{r^2} = F_m$$

Näiteks viies mõned liikmed võrrandi teisele poole võrdusmärgi ja teised võrrandi liikmed vastupidi, saame kord elektrijõu  $F_q$  ja siis kord gravitatsioonijõu  $F_m$ . Viimane valem on oma olemuselt seisuenergia ruudus:

$$E^2 = \frac{kq^2}{r} \frac{Gm^2}{r}$$

mille kordajad on võrdsed seisuenergiatega. Gravitatsioonijõu ja elektrijõu omavahelise suhte analüüs viitab sellele, et oluline ei ole tegelikult interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arvvaartused, vaid erinevate interaktsioonide omavahelist suhet määravad asjaolud. See tähendab füüsikaliselt seda, et näiteks gravitatsioonikonstandi  $G$  ja elektrijõu võrdeteguri  $k$  arvvaartused võivad looduse poolt olla määratud tegelikult suvaliselt, KUID nende kahe erineva interaktsiooni omavahelise suhte määrab ära erirelatiivsusteooriast tuntud seisuenergia  $E$  avaldis. Näiteks elektrijõud on gravitatsioonijõust kordades suurem just seisuenergia avaldise tõttu ja see suhe jääb samasuguseks ka siis ( ning sellest tulenevalt ka Universumi eksisteerimine ), kui konstantide arvvaartused peaksid olema täiesti teistsugused. Selles seisnebki „juhuse-teooria“ põhiline füüsikaline sisu, mis tuleneb eelnevast ja ka kogu järgnevast matemaatilisest analüüsist: erinevate interaktsioonide tugevust või intensiivsust määravate konstantide arvvaartused võivad olla looduse poolt määratud tegelikult juhuslikult ( näiteks valguse kiirus  $c$  vaakumis ehk tavaruumi liikumiskiirus  $c$  hyperruumi suhtes ) või need võivad olla tegelikult mistahes väärtusega, KUID oluline on siinkohal lihtsalt see, et erinevate interaktsioonide omavaheliseid suhteid ( näiteks kui mitu korda on elektrijõud gravitatsioonijõust suurem ) määrab ära seisuenergia avaldis, mis omakorda tuleneb aja ja ruumi füüsikast ehk antud juhul ajas rändamise teooriast. Universumi materia ehk aine ja välja eksisteerimise põhivormideks ongi aeg ja ruum. Näiteks elektrivälja potentsiaalne energia avaldub järgmiselt:

$$\frac{kq^2}{r} = E_p = qE_T r$$

Arvestades viimast elektrivälja potentsiaalset energiat ja samas ka seisuenergia ruudu avaldist:

$$E^2 = m^2 c^4$$

saame järgmise energia ruudu võrrandi:

$$E^2 = m^2 c^4 = E_p \frac{Gm^2}{r}$$

ehk

$$\frac{E^2}{E_p} = \frac{Gm^2}{r}$$

Kuna elektrivälja potentsiaalne energia võrdub seisuenergia:

$$E = E_p$$

siis ka gravitatsioonipotentsiaal võrdub seisuenergia:

$$E = G \frac{m^2}{r} = mc^2$$

Viimases gravitatsioonipotentsiaali võrrandis võime arvestada järgmise teisendusega

$$m^2 \rightarrow Mm$$

milles massi ruudu tähenduse teisendame kahe erineva massi korrutiseks  $Mm$ :

$$E = G \frac{Mm}{r} = U$$

Viimane valem on täpselt gravitatsioonipotentsiaali  $U$  võrrand. Energia ruudu valemi järgi peab see antud juhul võrduma elektrivälja potentsiaalse energiaga:

$$\frac{kq^2}{r} = \frac{Gm^2}{r}$$

millest omakorda saame järgmise võrduse:

$$\frac{q^2}{m^2} = \frac{G}{k}$$

Viimast võrdust saame matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$\frac{q^2}{m^2} = \left(\frac{q}{m}\right)^2 = \frac{G}{k} = \text{const}_1$$

ehk kaotame konstandid  $G$  ja  $k$  üldse ära:

$$\frac{q}{m} = \sqrt{\text{const}_1} = \text{const}$$

Saadud konstant võib väljendada näiteks elementaarosakese elektroni  $e$  „erilaengut“:

$$\frac{q}{m} = \frac{e}{m_e} = \text{const} = 1,7587 * 10^{11} \frac{C}{kg}$$

milles elektroni laeng  $e$  on jagatud tema massiga  $m$ . See on samuti konstant, mis ajas ja ruumis ei muutu. Eespool tuletatud võrrandist:

$$c^4 = GF_1 = kF_2$$

näeme, et saadud võrdus on võrdne ka konstantide  $F_2$  ja  $F_1$  suhtega:

$$\frac{G}{k} = \frac{F_2}{F_1}$$

Viimases võrduses avaldus konstant  $F_1$  valemina:

$$\frac{c^4}{G} = k \frac{q^2}{r^2} = F_1$$

ja konstant  $F_2$ :

$$\frac{c^4}{k} = G \frac{q^2}{r^2} = F_2$$

Kuna gravitatsioonipotentsiaal võrdus seisue energiaga:

$$E = mc^2 = \frac{GMm}{r}$$

ja erirelatiivsusteooriast kehtib järgmine seos:

$$mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

siis saame võrrandi

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

mille teisendamisel saame omakorda tuntud Schwarzschildi raadiuse R võrrandi:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Viimane näitab gravitatsioonilise aegruumi lõkspinna tekkimist. Seisueenergia ruut  $E^2$  avaldus järgmiselt:

$$E^2 = (mc^2)^2 = m^2 c^4$$

mille järgi võrdus gravitatsioonipotentsiaal ja ka elektrivälja potentsiaalne energia seisueenergiaga:

$$E = mc^2 = k \frac{q^2}{r}$$

Elektrivälja potentsiaalne energia võib välja kirjutada ka kujul:

$$mc^2 = qE_T r$$

milles olevat avaldist

$$E_T r = \varphi$$

nimetatakse elektrivälja potentsiaaliks. Kui me saadud seisueenergia avaldist

$$mc^2 = q\varphi$$

jagame mõlemad pooled kahega:

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

ja arvestame eespool kasutatud seost:

$$mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

siis saamegi võrrandi:

$$E = \frac{q^2}{2C} = mc^2$$

mis näitab seda, et elektrivälja energiat võib avaldada ka seisueenergia valemiga.

Eelnevalt tuletasime energia ruudu ehk  $E^2$  võrrandi, mille füüsikaline olemus seisnes keha või välja seisueenergia  $E=mc^2$  ruudus. Eirelatiivsusteoorias on matemaatiliselt tuletatud samuti energia ruudu võrrand:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

ehk

$$E^2 = c^2 (p^2 + m^2 c^2)$$

kuid sellisel juhul on tegemist füüsikalise keha relativistliku koguenergia võrrandiga. Keha seisueenergia ja keha relativistlik koguenergia on eirelatiivsusteoorias omavahel seotud järgmiselt:

$$E = mc^2 = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Kui me võtame dimensionooniks  $c = 1$ , siis relativistlik koguenergia võrrand avaldub palju lihtsamal kujul:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

Keha relativistliku koguenergia võrrandis olev ruutjuure liige võrdub impulssi  $p$  definitsiooniga:

$$\sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc,$$

Eelnev analüüs näitab, et keha relativistliku koguenergia ruudu võrrand peab võrduma ka eespool tuletatud energia ruudu võrrandiga:

$$E^2 = \frac{kq^2}{r} \frac{Gm^2}{r}$$

Väga üllatav asjaolu on see, et eespool tuletatud seisenergia ruudu avaldis  $E^2$  tuleb välja ka seisenergia ja kvandenergia omavahelise suhte analüüsist. Näiteks kvantoptikas on näidatud seda, et kvandenergia on võrdne ka kvandi seisenergiaga:

$$E = mc^2 = hf$$

milles  $h$  on tuntud Plancki konstant. Plancki konstant  $h$  määrab ära „kvantdimensioni“ mõõtme ehk kvantmehaanikasse kuuluvate füüsikaliste nähtuste ajalised ja ruumilised mõõtmed. Kuid just Plancki konstandi  $h$  väärtust võib avaldada järgmiselt:

$$h \approx \frac{1}{c^4} = \frac{m^2}{E^2}$$

Viimane ligikaudne seos kehtib taandatud Plancki konstandi korral, sest on võimalik ligikaudselt arvutada järgmiselt:

$$h = \frac{h}{2\pi} \approx \frac{1}{c^4} = \frac{1}{8,0776 * 10^{33}} = 1,23799 * 10^{-34} Js$$

Kuna Plancki konstandi väärtus on:

$$h = 6,626 * 10^{-34} Js$$

ja kvantfüüsika arvutustes kasutatav taandatud Plancki konstandi väärtus on esitatav:

$$\frac{h}{2\pi} = 1,054 * 10^{-34} Js$$

siis seega tulemus on ligikaudsust arvestades ääretult suurepärase. Näiteks Millikani eksperimentaalsetes katsetes saadi hoopis järgmine taandamata Plancki konstandi väärtus:

$$h = 0,4 * 10^{-14} * 1,6 * 10^{-19} = 6,4 * 10^{-34} Js$$

mis erineb tegeliku Plancki konstandi väärtusest isegi rohkem. Millikani eksperimentaalne katse seisnes selles, et õnnestus tuvastada rangelt lineaarne sõltuvus pidurdava elektrivälja pinge  $U$  ja fotoefekti esilekutsuva valguse sageduse  $f$  vahel. Kuid eelnevalt välja toodud Plancki konstandi  $h$  ligikaudse väärtuse kehtivust on võimalik tõestada hiljem tuletatava impulssi  $p$  seose

$$\frac{1}{2GE} = p = mc$$

kaudu. Näiteks selleks teostatakse järgmine matemaatiline teisendusakt:

$$\frac{1}{2Gm} = Ec$$

ja korrutatakse viimase võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga:

$$\frac{c^2}{2Gm} = \frac{1}{R} = Ec^3$$

Viimasest võrrandist saame:

$$\frac{1}{c^3} = ER$$

ja kui me jagame saadud võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$ -ga:

$$\frac{1}{c^4} = E \frac{R}{c} = Et$$

milles me arvestasime kiiruse  $v$  definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$v = c = \frac{s}{t}$$

siis saame määramatuse relatsiooni energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$h = Et$$

mis kattubki Plancki konstandi  $h$  dimensiooniga: „energia korda aeg“.

Plancki konstandi ligikaudne seos valguse kiirusega näitab selget seost eespool tuletatud seisuenergia ruudu avaldisega. Näiteks teisendame kvandenergia võrrandit järgmiselt:

$$\frac{m}{f} = \frac{1}{c^4} \frac{1}{c^2}$$

ehk

$$\frac{mc^4}{f} = \frac{1}{c^2}$$

Korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ :

$$\frac{m^2 c^4}{f} = \frac{m}{c^2}$$

ja tulemuseks saamegi seisuenergia ruudu avaldise:

$$E^2 = m^2 c^4 = \frac{fm}{c^2}$$

ehk

$$E^2 = m^2 c^4 = (mc^2)^2$$

Viimasest saadud võrrandist on üsna lihtne tuletada de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  valem, mis on üks olulisemaid valemeid kvantfüüsikas. Näiteks saadud energia ruudu avaldises:

$$E^2 = \frac{fm}{c^2}$$

on kvandi sagedus  $f$  seotud valguse kiirusega  $c$  ja lainepikkusega  $\lambda$  järgmiselt:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Sellest tulenevalt saame energia ruudu võrrandi kujuks:

$$E^2 = \frac{fm}{c^2} = \frac{m}{c\lambda}$$

ehk

$$E^2 = \frac{m}{c\lambda} = m^2 c^4$$

Viimast võrrandit teisendades saame tulemuseks:

$$mc = p = \frac{1}{\lambda c^4} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{c^4}$$

milles  $mc$  on valguse kvandi impulss  $p$ . Kuna kehtib võrdus:

$$h \approx \frac{1}{c^4} = \frac{m^2}{E^2}$$

siis saimegi tuletada de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  võrrandi:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

ehk

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

#### 1.14.4 Gravitatsioonivälja „teisenemine“ elektriväljaks

Eespool analüüsitud gravitatsioonivälja ja elektrivälja suhe näitab ka nende kahe erineva välja

üksteise teisenemise võimalikkust. Järgnevalt näitamegi matemaatilise ja füüsikalise analüüsi teel seda, et kuidas gravitatsiooniväljast saame energiavälja, mida me üldiselt nimetame elektriväljaks. Esiteks alustame tuntud energia jäävuse seadusest:

$$\frac{mv^2}{2} = U = -\frac{GMm}{R}$$

milles võrrandi esimeses pooles on kineetilise energia avaldis ja võrrandi teises pooles on gravitatsioonipotentsiaali  $U$  võrrand:

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

Gravitatsioonipotentsiaali  $U$  võrrand on tuletatav ka otse Newtoni gravitatsioonijõu  $F$  valemist:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

võttes viimasest määratud integraali:

$$U = -\int_r^\infty \vec{F} d\vec{r} = -\int_r^\infty \frac{GMm}{\vec{r}^2} d\vec{r} = -\frac{GMm}{r}$$

Gravitatsioonipotentsiaal  $U$  tuleneb gravitatsioonijõust  $F$ , mis omakorda tuleneb aja ja ruumi kõverusest, mida suured massid põhjustavad. Edasiseks analüüsiks võtame gravitatsioonipotentsiaali  $U$  kujuks:

$$U = \frac{GM}{R}$$

Kuna mass  $m$  ja energia  $E$  on omavahel seotud võrrandiga:

$$E = mc^2$$

ehk

$$\frac{E}{c^2} = m$$

siis seega saame gravitatsioonipotentsiaali  $U$  võrrandi esitada kujul:

$$U = \frac{GE}{Rc^2}$$

Gravitatsiooniväli ei ole oma olemuselt energiaväli, vaid see on tingitud aegruumi kõverusest. Füüsikalised kehad omandavad gravitatsiooniväljas potentsiaalse energia ja seda see gravitatsioonipotentsiaal näitabki. Viimasest võrrandist saame energia  $E$  ja gravitatsioonipotentsiaali  $U$  suhte:

$$\frac{Rc^2}{G} = \frac{E}{U}$$

Energia ja potentsiaali suhte on võimalik tuletada ka elektrivälja energia  $E$  võrrandist:

$$E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}$$

millest saamegi:



$$\frac{E}{\varphi} = \frac{q}{2}$$

Viimase avaldise paneme võrduma järgmiselt:

$$\frac{E}{U} = \frac{E}{\varphi}$$

millest ongi näha seda, et energia ja potentsiaali suhte korral võib gravitatsioonipotentsiaali asemele võtta energiavälja ( antud juhul elektrivälja ) potentsiaali. See tähendab seda, et gravitatsioonivälja korral on gravitatsioonipotentsiaal tingitud aegruumi kõverusest, kuid energiavälja korral on väljapotsiaal tingitud välja energiast. Viimane võrdus peab siis rahuldama võrrandit:

$$\frac{c^2 R}{G} = \frac{q}{2}$$

Näiteks kui me arvestame tuntud massi  $m$  ja energia  $E$  ekvivalentsuse printsiipi:

$$E = mc^2$$

ehk

$$\frac{E}{m} = c^2$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$\frac{ER}{Gm} = \frac{E}{U} = \frac{q}{2}$$

mis annabki meile palju adekvaatsemalt  $U = \varphi$  võrduse:

$$\frac{E}{q} = \frac{\varphi}{2} = \frac{U}{2}$$

Selline analüüs näitab tegelikult seda, et massi  $m$  ja energia  $E$  ekvivalentsuse seadus ühendabki omavahel gravitatsioonivälja ja elektrivälja ( s.t. energiavälja ) ehk näitab gravitatsioonivälja teisenemise võimalikkust elektriväljaks. Kuid gravitatsioonipotentsiaal  $U$ :

$$U = \frac{GM}{R}$$

tuletatava massi  $M$  ja gravitatsioonipotentsiaali  $U$  suhte korral:

$$\frac{R}{G} = \frac{M}{U}$$

võrdus enam ei kehti:

$$\frac{M}{U} \neq \frac{E}{\varphi}$$

Võrdus kehtib ainult energiatega  $E$  korral:

$$\frac{E}{U} = \frac{E}{\varphi}$$

mis annabki tulemuseks potentsiaalide asenduse:

$$U = \varphi$$

Energia  $E$  ja potentsiaali  $U$  või  $\varphi$  võrdust

$$\frac{E}{U} = \frac{E}{\varphi}$$

on võimalik analüüsida järgmiselt. Näiteks eelnevalt tuletatud gravitatsioonipotentsiaali  $U$  võrrandis:

$$\frac{c^2 R}{G} U = E$$

on  $E$  elektrivälja energia:

$$E = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$$

Sellest tulenevalt saame järgmise avaldise:

$$\frac{c^2 R}{G} U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$$

Viimasest saadud võrrandist

$$\frac{c^2}{G} U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} q^2 \frac{1}{r} \frac{1}{R}$$

ongi väga selgelt näha seda, et elektrivälja potentsiaali ruumikoordinaat  $\frac{1}{r}$  ühtib geomeetriselt väga täpselt gravitatsioonivälja potentsiaali ruumikoordinaadiga  $\frac{1}{R}$ :

$$\frac{1}{r} \frac{1}{R} = \frac{1}{r^2}$$

Seetõttu saimegi välja võrrandi

$$\frac{c^2}{G} U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} q^2 \frac{1}{r^2}$$

milles gravitatsioonipotentsiaali ruumikoordinaati on võimalik asendada energiavälja potentsiaali ruumikoordinaadiga:

$$r^2 = \frac{q^2 G}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{U}$$

ehk

$$r = \sqrt{\frac{q^2 G}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{U}}$$

See tähendab seda, et energia ja potentsiaali suhte juhul:

$$\frac{E}{U} = \frac{E}{\varphi}$$

on gravitatsioonivälja korral gravitatsioonipotentsiaal  $U$  tingitud aegruumi kõverusest, kuid energiavälja korral on väljapotentsiaal  $\varphi$  tingitud välja energiast. Sellest tulenevalt ühtib elektrivälja potentsiaali muutumine ruumis  $\frac{1}{r}$  geomeetriselt väga täpselt gravitatsioonivälja potentsiaali

muutumisega ruumis  $\frac{1}{R}$  ja seega mistahes välja jõud kahaneb alati välja allika eemaldumise suunas:

$$\frac{1}{r} \frac{1}{R} = \frac{1}{r^2}$$

Gravitatsiooniväli ei ole energiaväli, kuid näiteks elektriväli on energiaväli:

$$\frac{Rc^2}{G} = \frac{E}{U} = \frac{E}{\phi} = \frac{q}{2}$$

See tähendab seda, et energiavälja tekitajaks on suurus, mida me nimetame „elektrilaenguks“  $q$ :

$$\frac{Rc^2}{G} = \frac{q}{2}$$

Gravitatsioonipotentsiaali suurust määrab ära kehade mass, kuid energiavälja potentsiaali suurust määrab ära kehade „elektrilaeng“. Selle näiteks vaatame järgmist analüüsi. Näiteks viimasest võrrandist saame järgmise seose:

$$\frac{2c^2}{G} = \frac{q}{R}$$

Seisuenergia võrrandist

$$E = mc^2$$

saame kiiruse  $c^2$  avaldise:

$$\frac{E}{m} = c^2$$

Seega saame võrrandi:

$$\frac{2E}{Gm} = \frac{q}{R}$$

ehk

$$\frac{RE}{Gm} = \frac{q}{2}$$

Viimast saadud võrrandit saame teisendada järgmiselt:

$$\frac{R}{Gm} E = \frac{1}{U} E = \frac{q}{2}$$

kuna gravitatsioonipotentsiaal  $U$  on antud juhul pöördvõrdeline:

$$\frac{R}{Gm} = \frac{1}{U}$$

Tulemuseks saame valemi:

$$E = \frac{qU}{2}$$

milles on näha seda, et potentsiaali  $U$  tekitajaks peab antud juhul olema energiavälja ( näiteks elektrivälja ) energia  $E$ . Seetõttu kirjutame gravitatsioonipotentsiaali  $U$  asemele energiavälja potentsiaali:

$$U = \phi$$

Gravitatsioonivälja korral on väljapotentsiaali  $U$  tekitajaks mass  $m$ :

$$\frac{2E}{q} = \frac{Gm}{R} = U$$

See tähendab seda, et vastavalt välja ( s.t. interaktsiooni ) liigile kasutame ka vastavat väljapotent-  
siaali mõistet:

$$U = \varphi$$

Näiteks energiavälja ehk elektrivälja korral kasutame väljapotentsiaali mõistet, mis on esitatud  
näiteks elektrivälja energia E võrrandis:

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

Viimasest võrrandist avaldasimegi energiavälja potentsiaali matemaatilise definitsiooni:

$$\frac{2E}{q} = \varphi = U$$

Senimaani tuletasime gravitatsioonipotentsiaalist U energiavälja ( elektrivälja ) potentsiaali  $\varphi$ . Kuid  
energiavälja potentsiaali on võimalik ka „kvantiseerida“, mida me järgnevalt näitamegi analüüsi  
teel. Kvantiseerida on võimalik ainult ainet ja energiat vastavalt Max Plancki kvandienergia  
valemile:

$$E = fh$$

mitte aga aegruumi kõverust. Seetõttu ei ole võimalik kvantiseerida gravitatsioonivälja ja seega  
„kvantgravitatsiooni“ ei saa eksisteerida. Energiavälja kvantiseerimine algab eelnevalt välja toodud  
energia jäävuse seadusega:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{R}$$

millest tuletatakse gravitatsioonivälja tsentris oleva aegruumi lõkspinna raadiuse R võrrand:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Kuna seisuenergiast E

$$E = mc^2$$

saame massi m avaldada järgmiselt:

$$\frac{E}{c^2} = m$$

siis raadiuse R võrrand tuleb kujul:

$$R = \frac{2GE}{c^4}$$

Viimases avaldises on tegemist välja energiaga E, milleks võib olla näiteks elektrivälja energia:

$$E = \frac{q^2}{2C}$$

Eelnevalt tõestasime seda, et Plancki konstant h võrdub:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = h$$

ja sellest tulenevalt saame R võrrandi kujuks:

$$R = 2GEh$$

Järgnevalt teeme nii, et raadius R näitab koordinaati ( s.t. „asukohta“ x ) energiaväljas:

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+0^2+0^2} = \sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2} = x$$

ehk energiavälja potentsiaali  $\varphi$  asukohta meie kolmemõõtmelises ruumis:

$$\frac{1}{2Gh} = \frac{E}{R} = E \frac{1}{R} = \frac{q\varphi}{2} \frac{1}{R} = k \frac{1}{2} \frac{q^2}{r} \frac{1}{R} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{1}{R} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Koordinaadi x võrrandi

$$x = 2GEh$$

saame teisendada järgmiselt:

$$\frac{x}{2GE} = \frac{1}{2GE} x = h$$

Kuna kvantmehaanikast on teada määramatuse seos energiakvandi asukoha x ja impulssi p vahel:

$$px = h$$

siis seega peab x võrrandis olev liige võrduma impulssiga p:

$$\frac{1}{2GE} = p$$

Tulemuseks saamegi tuntud määramatuse relatsiooni:

$$px = h$$

milles välja impulss p võrdub:

$$\frac{E}{c} = mc = p$$

Antud kontekstis tähendab see seda, et energiaväljal on energia (  $E = mc^2$  ) ja sellest tulenevalt ka mass m ning impulss p. Energiavälja potentsiaali  $\varphi$  asukoht x meie kolmemõõtmelises ruumis kattub energiakvandi määramatuse relatsiooniga asukoha ja impulssi vahel

$$x = \frac{h}{p}$$

ning seega on võimalik energiavälja „kvantiseerida“. Kuid eelnevalt välja toodud impulssi p seose

$$\frac{1}{2GE} = p = mc$$

kehtivust on võimalik ka empiiriliselt tõestada. Selleks teeme järgmise matemaatilise teisenduse:

$$\frac{1}{2Gm} = Ec$$

ja korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga:

$$\frac{c^2}{2Gm} = \frac{1}{R} = Ec^3$$

Viimasest võrrandist saame:

$$\frac{1}{c^3} = ER$$

ja kui me jagame saadud võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$ -ga:

$$\frac{1}{c^4} = E \frac{R}{c} = Et$$

milles me arvestasime kiiruse  $v$  definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$v = c = \frac{s}{t}$$

siis saamegi määramatuse relatsiooni energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$h = Et$$

Saadud tulemus kinnitab kogu eelneva analüüsi õigsust. Kuid impulssi  $p$  seosest:

$$\frac{1}{2GE} = p = mc$$

on võimalik tuletada ka määramatuse relatsioon impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel. Näiteks kui me arvestame seekord hoopis seisuenergia  $E$  definitsiooniga:

$$E = mc^2$$

siis saame impulssi  $p$  võrrandi kujuks:

$$\frac{1}{2Gm} = mc^3$$

Viimase võrrandi mõlemad pooled korrutame taas  $c^2$ -ga:

$$\frac{c^2}{2Gm} = \frac{1}{R} = mc^5$$

ja saame teisendada järgmiselt:

$$\frac{1}{c^4} \frac{1}{R} = mc = p$$

Tulemuseks saamegi määramatuse relatsiooni impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel:

$$\frac{h}{p} = R = x = \lambda$$

mis kinnitab taaskord eespool saadud impulssi  $p$  seose õigsust. Määramatuse relatsiooni koordinaa-

di x ja impulssi p vahel saame tuletada ka siis, kui impulssi p seose kirjutame välja kujul:

$$\frac{1}{2GE} = p = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c}$$

millest me saame energia ruudu võrrandi

$$\frac{c}{2G} = E^2$$

ehk

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c} = \text{const.}$$

Siinkohal on oluline märkida seda, et kui me viimases võrrandis jagame võrrandi mõlemad pooled kolmega, siis saame ligikaudselt elementaarlaengu e väärtuse:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} = 1,482 * 10^{-19} \approx e$$

Elementaarlaengu e täpne väärtus on:

$$e = 1,602 * 10^{-19} C$$

ja kõik elektrilaengud Universumis on täisarvkordsed elementaarlaengust e. Peab märkima, et energia E võrrandist saadud elementaarlaengu q = e väärtus on tegelikkusega võrreldes veidi erinev, kuid selline erinevus on siiski „lubatud“ piirides. Näiteks Bohri teooriast tulenev matemaatiline ja füüsikaline järeldus aatomist kiirguva elektromagnetlainete sageduse v kohta:

$$v = 3,27 * 10^{15} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) s^{-1}$$

langeb samuti mitte väga täpselt, vaid siiski ligikaudselt kokku eksperimentaalselt uuritud spektriseeriaid kirjeldava valemiga:

$$v = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

See näitab seda, et Bohri teooria kirjeldab vesinikuaatomi omadusi „lubatud“ täpsuse piirides. Kuid saadud energia ruudu seos:

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c}$$

avaldub ka tuntud Schwarzschildi raadiuse R võrrandis:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2G}{c} \frac{M}{c} = \frac{1}{E^2} \frac{M}{c}$$

Kui massi M avaldame seisueenergia seosest:

$$E = mc^2$$

ehk

$$\frac{E}{c^2} = m$$

siis sellest tulenevalt saamegi määramatuse relatsiooni koordinaadi x ja impulssi p vahel järgmiselt:

$$R = \frac{1}{E^2} \frac{M}{c} = \frac{1}{E^2} \frac{E}{c^3} = \frac{1}{Ec^3} = \frac{1}{mc^5} = \frac{1}{mc} \frac{1}{c^4} = \frac{h}{mc} = \frac{h}{p}$$

ehk

$$pR = px = h$$

Viimane võrrand kattub ka de Broglie lainevõrrandiga  $\lambda$ :

$$x = \frac{h}{p} = \lambda$$

ning sellest on võimalik tuletada ka energia ja aja määramatuse seos:

$$px = mc \cdot ct = mc^2 t = Et = h$$

Kui arvestada kogu eelnevat matemaatilist ja füüsikalist tuletuskäiku, siis antud kontekstis kirjeldab see viimane võrrand  $Et=h$  energiavälja ehk elektrivälja osakest, mille korral välja osakese energia  $E$  määrab ära tema eksisteerimise ajaperioodi  $t$ . Võime postuleerida, et energiavälja osake on footon, millel pole elektrilaengut ega isegi seisumassi.

### 1.14.5 Väljade kvantteooria

Järgnevalt peame tuletama sellise lainevõrrandi, mis kirjeldab välja osakese füüsikalist olemust ja eksisteerimist aegruumis ning tema seost väljapotentsiaaliga  $\varphi$ . Seda nimetatakse kvantväljateoorias välja kvantiseerimiseks, mille korral minnakse üle klassikaliselt väljalt kvantiseeritud väljale. Sellisel juhul loetakse väljade kvantteoorias väljapotentsiaal operaatoriks, mis mõjub mingisugusele väljafunktsioonile  $\phi$ . Näiteks vaakumile vastab teatud väljafunktsioon  $\phi_0$ . Vastavalt väljaoperaatorite vahel kvantiseeritakse väljapotentsiaalid. Väljaoperaatorid võivad olla üldistatud koordinaadid ja nendele vastavad üldistatud impulssid. Niimoodi postuleeritakse kommutatsioonieskirjad:

$$[u_A, u_B] = [\pi_A, \pi_B] = 0$$

$$[u_A(\vec{r}, t), \pi_B(\vec{r}', t)] = i\delta_{AB}\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Operaatorite kommutaator võrdub väljade kvantteoorias arvuga, mitte enam operaatoriga. Niinimetatud „teistkordne välja kvantiseerimine“ seisneb selles, et välja kvantiseerides muudetakse olekufunktsioonid, mis kirjeldavad pidevaid väljasid, omakorda operaatoriteks. Näiteks skalaarne olekufunktsioon kirjeldab osakesi spinniga 0.

Erinevalt kvantelektrodünaamikas tehtavatest võtetest on välja kvantiseerimine võimalik ka otse klassikalisest elektrodünaamikast. Näitame seda järgneva lühikese analüüsi kaudu. Näiteks ajas rändamise teooria kosmoloogia ja erirelatiivsusteooria osas tõestasime järgmise seose kehtivuse:



$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

See tähendab seda, et seisuenergia  $E$  on oma olemuselt kineetiline energia aja suhtes. Viimasest saame teha matemaatilised teisendused:

$$\frac{2E}{p} = \frac{2E}{mc} = \frac{2Et}{mx} = \frac{2h}{mx} = \frac{p}{m}$$

millest saame kvantmehaanikas tuntud määramatuse võrrandiga sarnase tulemuse:

$$h = \frac{px}{2}$$

Kui me võrdleme viimast avaldist võrrandiga, millest see tuletatud oli:

$$E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

siis „ilmselt“ peab kehtima ka järgmine seos:

$$h = \frac{px}{2} = px$$

mida kvantmehaanikas tuntakse aineosakeste määramatuse relatsioonina impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel. Viimase võrrandi tuletasime seosest:

$$\frac{2E}{p} = \frac{2E}{mc} = \frac{2Et}{mx} = \frac{p}{m}$$

millest saame omakorda tuletada ka Newtoni teise seaduse:

$$\frac{2E}{x} = \frac{p}{t} = F = ma$$

Klassikalises elektrodünaamikas avaldus elektrivälja energia  $E$  järgmisena:

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

millest saame elektrilaengu  $q$  definitsiooniks:

$$\frac{2E}{\varphi} = q$$

Kui me nüüd võrdleme viimast võrrandit eespool tuletatud jõu  $F$  võrrandiga:

$$\frac{2E}{x} = F$$

siis me näeme väga selgelt seda, et  $q \neq F$ , kuid sellest hoolimata kehtib võrdus:  $\varphi = x$ . Sellest tulenevalt võime aineosakeste määramatuse seoses

$$h = px$$

asendada koordinaadi  $x$  väljapotsiaaliga  $\varphi$ :

$$h = p\varphi$$

mille tulemusena kirjeldab see viimane saadud kvantvõrrand nüüd (energia)välja osakest, mitte enam aineosakest. Oluline on siinkohal märkida ka seda, et „ametlikus“ kvantelektrodünaamikas kirjeldab välja impulssi  $p$  energia-impulssvektori määramata integraal:

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d^3 x$$

milles avaldub Lagranžiaani matemaatika kaudu defineeritud energia-impulssensor:

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \sum_A \frac{\partial L}{\partial u_{A,\nu}} u_{A,\mu}$$

milles omakorda on liige:

$$u_{A,\mu} = \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu}$$

Kuid antud arendavas teoorias avaldub meil välja impulss  $p$  seisenergia kaudu järgmiselt:

$$p = \frac{E}{c} = mc$$

Välja energia  $E$  avaldub kvantelektrodünaamikas määramata integraalina:

$$E = \int H d^3 x = - \int T_{44} d^3 x$$

kuid antud teoorias aga seisenergia võrrandina:

$$E = mc^2$$

Kõik järgnev on eelneva arutluskäigu tõestus ja edasine matemaatiline ning füüsikaline analüüs.

Lainevõrrandit, mis kirjeldab välja osakese füüsikalist olemust ja eksisteerimist aegruumis ning tema seost väljapotsiaaliga, on antud teoorias võimalik tuletada impulssi  $p$  võrrandist:

$$\frac{1}{2GE} = p = \frac{E}{c}$$

Selleks teostame järgmised matemaatilised teisendused:

$$\frac{1}{2GE} = \frac{mc^2}{c}$$

ehk

$$\frac{c}{2Gm} = Ec^2$$

Korrutame saadud võrrandi mõlemad pooled valguse kiirusega  $c$ :

$$\frac{c^2}{2Gm} = \frac{1}{R} = \frac{1}{x} = Ec^3$$

ja jagame võrrandi

$$\frac{1}{c^3} = Ex$$

mõlemad pooled taas kiirusega  $c$ , tulemuseks saame:

$$\frac{1}{c^4} = h = \frac{E}{c}x = E \frac{x}{c}$$

Võrrandis esinev  $E$  on näiteks elektrivälja energia ja seega:

$$h = E \frac{x}{c} = \frac{q\varphi x}{2c} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 c}$$

ehk saime tuletada Plancki konstandi  $h$  nn „*dimensionaalvõrrandi*“:

$$h = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 c}$$

Järgnevalt uurime aga elektroni energiavälja ja seega elektrilaengu  $q$  asendame elementarlaengu  $e$ -ga ehk tegelikult lihtsalt konstandiga  $e$ :

$$h = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 c} = \frac{q\varphi x}{2c} = \varphi x \left[ \frac{e}{2c} \right]$$

ehk

$$h = \varphi x \left[ \frac{e}{2c} \right]$$

milles esineb konstantide jagatis:

$$\left[ \frac{e}{2c} \right] = \text{const}$$

Tegemist on elektroni energiavälja ehk elektrivälja kirjeldava kvantvõrrandiga, mis sarnaneb määramatuse relatsiooniga osakese impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel. Seetõttu peab antud võrrandis impulss  $p$  võrduma järgmiselt:

$$\varphi \left[ \frac{e}{2c} \right] = p = \frac{E}{c} = mc$$

Selle kehtivuses ei ole põhjust kahelda, sest see annab tulemuseks:

$$\frac{\varphi e}{2} = \frac{q\varphi}{2} = mc^2 = E$$

ehk elektroni elektrivälja energia avaldub seisuenergia võrrandina  $E = mc^2$ . Kui aga kvantvõrrandis

$$h = \varphi x \left[ \frac{e}{2c} \right]$$

panna konstant võrduma ühega:

$$\left[ \frac{e}{2c} \right] = 1$$

siis saame jälle taaskord seose:

$$\frac{e}{2} = \frac{q}{2} = \frac{E}{\varphi} = c$$

millest järeldub elektroni elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  seos impulssiga  $p = mc$ :

$$\frac{E}{c} = \varphi = p$$

Tulemus kattub täielikult osakeste määramatuse relatsiooniga impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel:

$$h = px$$

Kuid antud juhul kirjeldab elektroni energiavälja ehk elektrivälja järgmine võrrandite süsteem:

$$\begin{cases} h = \varphi x \left[ \frac{e}{2c} \right] \\ h = \varphi t \left[ \frac{e}{2} \right] \end{cases}$$

milles esimene võrrand on seotud väljapotentsiaali  $\varphi$  koordinaadiga  $x$  elektroni elektriväljas ja teine võrrand väljapotentsiaali  $\varphi$  eksisteerimise ajaperioodiga  $t$  elektroni elektriväljas. Nagu kvantvõrranditest näha, on mõlemad „kvanditud“ ja seetõttu võime rakendada kvantmehaanikast tuntud operaatoreid. Kuid selleks viime elektroni  $e$  elektrivälja kirjeldavas kvantvõrrandis:

$$h = \varphi x \left[ \frac{e}{2c} \right]$$

nurksulud ja  $x$ -i teisele poole võrdusmärgi, tulemuseks saame:

$$\left[ \frac{2c}{e} h \right] \frac{1}{x} = \varphi$$

ehk

$$\varphi = \frac{1}{x} \left[ \frac{2c}{e} h \right]$$

Kui me võrdleme saadud avaldist klassikalises elektrodünaamikast tuntud elektrivälja potentsiaali  $\varphi = U$  võrrandiga:

$$U = \frac{1}{r} [ke]$$

siis me näeme väga selgelt seda, et peab kehtima võrdus:

$$\left[ \frac{2c}{e} h \right] = [ke]$$

ehk

$$\frac{h2c}{q} = kq$$

Seda on võimalik väga lihtsasti tõestada nii, et kui me viime laengu  $q$  teisele poole võrdusmärgi:

$$Et2c = mc^2t2c = mcct2c = px2c = kq^2$$

ehk

$$pc^2 = E^2 = k \frac{q^2}{x} = k \frac{q^2}{r} = \varphi q$$

siis saame tulemuseks elektrivälja energia  $E$  klassikalise võrrandi:

$$E = \frac{\varphi q}{2}$$

mis tõestabki eespool esitatud võrduse kehtivust.

Elektroni  $e$  (energia)välja kirjeldavas kvantvõrrandis:

$$h = \varphi x \left[ \frac{e}{2c} \right]$$

avaldus välja impulss  $p$  järgmiselt:

$$\varphi \left[ \frac{e}{2c} \right] = \frac{\varphi q}{2c} = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc = p$$

Täpselt samasuguse tulemuse saame ka siis, kui kvantvõrrandis võrdub konstant:

$$\left[ \frac{e}{2c} \right] = 1$$

Näiteks saame seda teisendada järgnevalt:

$$\frac{e}{2} = \frac{q}{2} = \frac{E}{\varphi} = c$$

millest järeldubki

$$\frac{E}{c} = mc = p = \varphi$$

Kuid hoopis tähelepanuväärsem on siinkohal see, et meie tuletatud kvantvõrrandis:

$$h = \varphi x \left[ \frac{e}{2c} \right]$$

võib välja impulss  $p$  avalduda ka selliselt:

$$x \left[ \frac{e}{2c} \right] = \frac{xq}{2c} = \frac{x}{c} \frac{q}{2} = t \frac{E}{\varphi} = p$$

millest saame järgmise väga tähtsa seose:

$$Et = h = \varphi p$$

Saadud võrrand:

$$h = \varphi p$$

on kogu kvantelektrodünaamika ja tõenäoliselt ka kogu väljade kvantteooria aluseks ning see kattub täielikult kvantvõrrandiga:

$$h = \varphi x \left[ \frac{e}{2c} \right]$$

mis tõestab selle lihtsa võrrandi kehtivust. See tähendab ka seda, et kui me avaldame eelnevalt tuletatud elektroni (energia)välja kirjeldavas kvantvõrrandis:

$$h = \varphi p$$

järgmise kordaja liikme impulsi  $p$  operaatorina:

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

ja väljapotsiaali  $\varphi$  potentsiaalse energia operaatorina:

$$\varphi = \hat{\varphi}$$

siis saame tulemuseks impulsi  $p$  kommutaatori väljapotsiaaliga  $\varphi$ :

$$-i[\hat{p}_x, \hat{\varphi}(x)] = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x}$$

ehk 4-impulssi korral:

$$-i[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}(x)] = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}$$

Koordinaadi operaator võrdub alati iseendaga, kuid siinkohal peab märkima seda, et antud juhul näitab koordinaat  $x$  asukohta elektroni energiaväljas ja seetõttu on see seotud ka potentsiaalse energia operaatoriga:

$$U = \hat{U}$$

ehk

$$U = \varphi$$

See tuleneb sellest, et kvantmehaanikas on koordinaadi operaatoriks vastav koordinaat ise ja koordinaadist omakorda sõltub potentsiaalne energia  $U = \varphi$ :

$$U = U(x) = -\frac{be}{r(x)} = \varphi(x)$$

Tähelepanuväärne on siinkohal see, et eelnevalt tuletatud võrrand

$$h = p\varphi$$

kattub „osakeste“ määramatuse relatsiooniga impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel, kui välja-potentsiaali  $\varphi$  asemel oleks koordinaat  $x$ . Analüüsime seda pisut. Näiteks viimast on võimalik matemaatiliselt teisendada järgmiselt. Elektroni  $e$  energiavälja kirjeldavas võrrandis:

$$h = p\varphi$$

avaldub Plancki konstant  $h$  jagatisena:

$$\frac{1}{c^4} = p\varphi$$

Kui me nüüd saadud võrrandit jagame mõlemad pooled  $m^2$ -ga:

$$\frac{1}{m^2 c^4} = \frac{p\varphi}{m^2}$$

siis saame energia  $E$  ruudu seose:

$$\frac{1}{E^2} = \frac{p\varphi}{m^2} = \frac{c}{m}\varphi$$

mis peab olema võrdne eespool tuletatud võrrandiga:

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c}$$

ehk peab kehtima võrdus

$$\frac{2G}{c} = \frac{c}{m}\varphi$$

Tulemuseks me näeme energiavälja potentsiaali  $\varphi$  võrdust koordinaadiga  $x$ :

$$\frac{2Gm}{c^2} = R = x = \varphi$$

mis tuleb välja ka võrrandite süsteemist:

$$\begin{cases} h = p\varphi \\ h = px \end{cases}$$

ehk nende kahe erineva võrrandi võrdlemisest. Sellest kummalisest seosest hoolimata kirjeldab võrrand siiski edukalt elektroni energiavälja osakest. Näiteks on võimalik sellest tuletada relativistliku kvantmehaanika põhivõrrand, mida nimetatakse Klein-Gordoni võrrandiks. Selleks võtame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$h^2 = p^2\varphi^2$$

ja viime väljapotentsiaali  $\varphi$  ning Plancki konstandi  $h$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{p^2}{h^2}\varphi$$

Järgnevalt viime võrrandi võrduma nulliga:

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{p^2}{h^2}\varphi = 0$$

ja arvestame sellega, et impulss  $p$  on massi  $m$  ja kiiruse  $c$  korrutis ehk  $p = mc$ :

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{m^2c^2}{h^2}\varphi = 0$$

ning võtame omakorda väljapotentsiaali  $\varphi$  sulgude ette:

$$\left(\frac{1}{\varphi^2} - \frac{m^2c^2}{h^2}\right)\varphi = 0$$

Kui me nüüd võrdleme saadud võrrandit relativistlikus kvantmehaanikas tuletatud Klein-Gordoni võrrandiga:

$$\left(\square - \frac{m^2c^2}{h^2}\right)\psi = 0$$

ehk

$$(-m^2)\psi = 0$$

siis me näeme väga selgeid kattuvusi ja sellest tulenevalt võime võrrandi liikmeid teisendada järgmiselt:

$$\frac{1}{\varphi^2} = \square = 0$$

$$h = c = 1$$

$$\psi = \varphi(x)$$

Tulemuseks saamegi Klein-Gordoni võrrandiga täpselt samaväärse valemi:

$$(-m^2)\varphi(x) = 0$$

milles  $m$  on antud juhul elektroni (energia)välja osakese mass. Saadud võrrand ongi Klein-Gordoni lainevõrrand, mis on aluseks relativistlikule kvantmehaanikale. Oluline on siinkohal märkida seda, et see võrrand tuletatakse väljade kvantteoorias tegelikult välja Euler-Lagrange'i võrrandist:

$$\frac{\partial L}{\partial u_A} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}} \right) = 0$$

kus

$$u_{A,\mu} = \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu}$$

ja milles lagranžiaani  $L$  kujuks on:

$$L = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + m^2 \varphi^2 \right),$$

kuid samas ka osakeste relativistlikust koguenergia võrrandist:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

mis on omakorda tuletatud Albert Einsteinini erirelatiivsusteooriast. Analüüsime seda pisut. Näiteks jagame viimase võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$  ruuduga:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$$

ja viime impulssiga liikme teisele poole võrdusmärgi:

$$-p^2 + \frac{E^2}{c^2} = -p^2 + \frac{1}{c^2} E^2 = m^2 c^2$$

Saadud võrrandis võtame kasutusele kvantmehaanikast tuntud impulssi ruudu operaatori:

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta$$

ja koos sellega ka energia operaatori:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$



Tulemuseks saame juba eelnevalt tuttava lainevõrrandi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \frac{m^2 c^2}{h^2}$$

mis on positiivse märgiga. Kui me võtame viimasest funktsiooni  $\psi$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi$$

ja viime jälle impulssiga liikme teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - \frac{m^2 c^2}{h^2} \psi = 0$$

siis olemegi tuletanud osakeste relativistlikust koguenergia võrrandist Klein-Gordoni lainevõrrandi:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} - m^2 \right) \psi = 0$$

milles  $h = c = 1$ . Saadud Klein-Gordoni lainevõrrand võib kirjeldada peale välja osakest ka veel ühekomponendilist ehk skalaarset välja  $\varphi(x)$ . Skalaarne olekufunktsioon kirjeldab osakesi spinniga 0. Selle kirjeldav relativistlik võrrand ongi eelnevalt tuletatud Klein-Gordoni võrrand:

$$(\square - m_0^2)\varphi(x) = 0$$

Klassikalises elektrodünaamikas on lainevõrrandi kujuks:

$$\square \varphi = -4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

ja  $\rho = 0$  ( ehk elektromagnetlaine ) korral on see:

$$\square \varphi = \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = 0$$

Sellest tulenevalt võrdub ka Poissoni võrrand samuti nulliga:

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$$

ja see võrrand on harmooniline. Postuleerides, et elektrivälja osake on footon ( millel pole elektrilaengut ehk  $\rho = 0$  ), siis seda ja samas ka väljapotentsiaali kirjeldav Klein-Gordoni lainevõrrand tuleb seega kujul:

$$(-m_0^2)\varphi(x) = 0$$

milles  $m_0$  on välja osakese mass.

Tähelepanuväärne on siinkohal see, et eespool tuletatud elektrivälja osakest kirjeldavast de Broglie lainevõrrandist ei saa tuletada relativistliku kvantmehaanika põhivõrrandit ehk Klein-Gordoni lainevõrrandit, mis muidu kirjeldab osakesi spinniga 0. Näitame seda järgmise lühikese

analüüsi kaudu. Selleks viime lainepikkuse  $\lambda$  võrrandi kõik liikmed teisele poole võrdusmärgi, tulemuseks saame:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{p}{h}$$

ja võtame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{p^2}{h^2}$$

Viimane võrrand ei saa olla võrdne kvantmehaanikast tuntud mistahes osakest kirjeldava lainevõrrandiga ja seda märgi tõttu:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{p^2}{h^2} \neq -\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = -k^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} = \Delta$$

milles Laplace operaator on:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} = \Delta$$

ja  $k$  on lainearv. Viimane on seotud ainult kolmemõõtmelise ruumikoordinaadistikuga. Kuid kui me lisame sellesse ka ajamõõdet kirjeldava koordinaadi, siis saame järgmiselt:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \square$$

Viimast nimetatakse operaatorite matemaatikas d'Alambertiks ja see on seotud juba neljamõõtmelise aegruumi koordinaadistikuga. Sellest tulenevalt saadakse kvantmehaanikas osakest kirjeldava lainevõrrandi kujuks:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \square = -\frac{p^2}{h^2}$$

Võttes viimasest funktsiooni  $\psi$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = -\left(\frac{p}{h}\right)^2 \psi$$

ja viime impulssiga  $p$  liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi, saame:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} + \left(\frac{p}{h}\right)^2 \psi = 0$$

ehk

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} + \frac{p^2}{h^2}\right) \psi = 0$$

Impulss  $p$  on massi  $m$  ja kiiruse  $c$  korrutis ehk  $p = mc$ :

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{h^2}\right) \psi = 0$$

ja võttes  $\hbar = h = 1$  ühikute süsteemiks, saame järgmiselt:

$$(\square + m_0^2)\psi = 0$$

ehk

$$(+m_0^2)\varphi(x) = 0$$

milles  $m$  on osakese mass. Saadud võrrand ei võrdu Klein-Gordoni lainevõrrandiga märgi poolest:

$$(-m_0^2)\varphi(x) = 0$$

mis on aluseks relativistlikule kvantmehaanikale. Seetõttu saab Klein-Gordoni võrrandit tuletada siiski ainult relativistliku dünaamika põhivõrrandist. Kuid viimast Klein-Gordoni võrrandit rahuldavad tasalained:

$$\varphi(x) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k x_0)}$$

milles lainearv on:

$$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$$

ja  $\omega$  on lainesagedus:

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2$$

ehk

$$\omega_k = \pm k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Sellest järeldub see, et Klein-Gordoni võrrandil on positiivsetele ja negatiivsetele sagedustele vastavad lahendid:

$$\varphi^+(x) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - k_0 x_0)}$$

$$\varphi^-(x) = e^{i(\vec{k}\vec{r} + k_0 x_0)}$$

kuid superpositsioon on nende üldlahendiks:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (c(\vec{k})\varphi^+ + b(\vec{k})\varphi^-)$$

milles  $V$ -d nimetatakse „normeerimisruumalaks“. Kui me võtame kasutusele järgmise tähistuse:

$$b(-k) = c^*(k)$$

siis saame superpositsiooni võrrandi kujuks:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (c(\vec{k})e^{ikx} - c^*(\vec{k})e^{-ikx})$$

milles neljamõõtmelist skalaarkorrutist tähistab korrutis  $kx$ .  $c^*$  on  $c$  kaaskompleksarv, kui  $\varphi$  on reaalne. Edasiseks analüüsiks tuletame meelde kvantmehaanilist impulsi  $P$  operaatori kuju:

$$-i[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}(x)] = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}$$

Viimane võrrand näitab seda, et impulssi  $P$  ehk 4-impulssi

$$p_\mu = P_\mu = mv_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau} = m \frac{dx_\mu}{dt\sqrt{1-\beta^2}} = m \frac{dx_\mu}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

kommutaator energiavälja potentsiaaliga  $\varphi(x)$  peab andma tuletise välja potentsiaalist. Kui aga  $\varphi(x)$  avaldub 4-impulssi kommutaatoris väljapotentsiaaliga superpositsiooni võrrandina:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (c(\vec{k})e^{ikx} - c^*(\vec{k})e^{-ikx})$$

siis saame järgmised seosed:

$$-\vec{k}c_k = [\vec{P}, c_k]$$

$$-k_0c_k = [P_0, c_k]$$

$$\vec{k}c_k^* = [\vec{P}, c_k^*]$$

$$\vec{k}c_k^* = [P_0, c_k^*]$$

Nende seoste kehtivus peab olema kooskõlas nn. kommutatsioonieeskirjadega:

$$[c_k, c_k] = [c_k^*, c_k^*] = 0$$

$$[c_k, c_k^*] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}^*}$$

Samadele tulemustele saame ka otse elektromagnetvälja potentsiaalist. Näiteks neljamõõtmeline vektorpotentsiaal  $A_\mu(x)$  on klassikalises elektrodünaamikas elektromagnetvälja potentsiaal elektrivoolu  $\vec{j}$  korral:

$$\frac{d^2\vec{A}}{dx^2} + \frac{d^2\vec{A}}{dy^2} + \frac{d^2\vec{A}}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

ja elektromagnetlaine korral:

$$\frac{d^2\vec{A}}{dx^2} + \frac{d^2\vec{A}}{dy^2} + \frac{d^2\vec{A}}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$A_\mu(x)$  rahuldab tuntud Maxwelli võrrandeid:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{4\pi}{c} j_\alpha = 0$$

ehk

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

milles

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

on elektromagnetvälja teist järku neljamõõtmeline antisümmeetriline tensor:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

Sellel on kuus komponenti ja maatriks kujul on see avaldatav:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 - iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 - iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Tegemist on füüsikalise suurusega, mille diagonaalis peavad olema 0-d, sest tegemist on antisümmeetrilise tensoriga. Sellega võrdväärne on süsteem:

$$A_\mu(x) = 0$$

milles Lorentzi tingimus on:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

ehk

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

ehk 4-mõõtmeline divergents võrdub:

$$\text{div} A = 0$$

Kalibratsioonitingimus defineeritakse võrdusena:

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

millest saadakse:

$$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Maxwelli võrrandite võrdusi tuletatakse kvantelektrodünaamikas elektromagnetvälja lagranžiaanist L:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

ja nende võrduste üldlahend ongi:

$$A_\mu(\vec{k}, x) = c_\mu(\vec{k}) e^{ikx} + c_\mu^*(\vec{k}) e^{-ikx}$$

Ka siin tähistab korrutis  $kx$  neljamõõtmelist skalaarkorrutist:

$$kx = \vec{k}\vec{r} + \omega_k x_4$$

ja võimalikke polarisatsiooniolekuid nummerdab indeks  $\mu$ .  $A$ ,  $c$  ja  $c^*$  muutuvad kvantiseerimisel operaatoriteks. Üldlahend peab olema samuti kooskõlas postuleeritud kommutatsioonireeglitega:

$$[c, c] = [c^*, c^*] = 0$$

$$[c_\mu(\vec{k}), c_\nu^*(\vec{k})] = \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{k} - \vec{k})$$

Siin tõlgendatakse operaatoreid  $c$  ja  $c^*$  vastavalt kvantide ehk footonite tekke- ja kao-operaatoritena.

Energiavälja operaatorite  $A$  kommutaatorid on nüüd tavalised funktsioonid, mitte enam operaatorid. See tuleneb kommutatsioonireeglitest.

Elektron-positronvälja teoorias postuleeritakse, et väljapotsentiaali komponendid, mis vastavad osakestele, rahuldavad samasuguseid võrrandeid, mis osakeste lainefunktsioonid. Näiteks relativistliku elektroni korral on see selleks Diraci võrrand. Elektron-positronvälja operaatorite vahel kehtivad antikommutatsiooniseosed, mitte kommutatsiooniseosed. Sellest hoolimata nimetatakse antikommutatsiooniseoseid üldjuhul sageli ka kommutatsiooniseosteks.

Väljade kvantteooria võrranditest tuleb välja see, et elektron-positronvälja antikommutaatorid on tegelikult tavalised funktsioonid. Pärast matemaatilisi tehteid ja teisendusi saadakse operaatorid, mis kirjeldavad elektroni tekkimist ( vastava polarisatsiooni ja impulsiga ) ehk elektroni tekke-operaatorit, elektroni kao-operaatorit, positroni tekke-operaatorit ja positroni kao-operaatorit.

Sarnaselt Klein-Gordoni lainevõrrandiga tuletatakse väljade kvantteoorias ka Diraci võrrand erirelatiivsusteooriast tuntud relativistlikust koguenergia võrrandist:

$$-p^2 + \frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2$$

Analüüsime seda pisut lähemalt. Näiteks korrutame viimase relativistliku võrrandi mõlemad pooled  $i^2$ -ga ehk  $-1$ -ga:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2$$

Saadud kompleksse võrrandi viimane liige võrdub erirelatiivsusteooriast tuntud neli-impulssi ruuduga:

$$p_\mu p_\mu = -m^2 c^2$$

millest omakorda saame „tavalise“ neli-impulssi:

$$p_\mu = -mc$$

Erirelatiivsusteoorias defineeritakse neli-impulss ehk „neljamõõtmeline impulss“ järgmiselt:

$$p_\mu = p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} p = -mc$$

ja selle panime siis võrduma  $-mc$ . Kui kasutame viimases võrrandis kvantmehaanikast tuntud impulssi operaatorit:

$$\hat{p} = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

siis saame järgmiselt:

$$p_\mu = p_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{mc}{h}$$

Võtame viimasest funktsiooni  $\psi$  ja arvestame neli-impulssi neljamõõtmelisust:

$$y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi = -\frac{mc}{h} \psi$$

ning viime impulssiga liikme võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi + \frac{mc}{h} \psi = 0$$

Tulemuseks saimegi elektroni relativistliku võrrandi ehk Diraci „esimese“ võrrandi:

$$\left( y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

milles  $h = c = 1$ . Siinkohal tuleb märkida ka veel seda, et elektroni relativistlik võrrand ehk Diraci võrrand on samuti tuletatav väljade kvantteoorias elektron-positronvälja lagranžiaanist  $L$ :

$$L = -\frac{1}{2} \left( \bar{\psi} y_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} y_\nu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi,$$

milles  $\psi$  ja  $\bar{\psi}$  varieeritakse omavahel sõltumatult. Samas ei saa Diraci võrrandit tuletada kvantmehaanikast tuntud mistahes osakest kirjeldavast lainevõrrandist:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = \square = -\frac{p^2}{h^2} = -\frac{1}{\lambda^2}$$

ehk

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = -\frac{p^2}{h^2}$$

Näitame seda järgmise lühikese analüüsi kaudu. Näiteks kui me viimases osakese lainevõrrandis arvestame  $h = c = 1$  ühikute süsteemiga:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = -p^2$$

ja võtame lainevõrrandi mõlemast poolest ruutjuure, siis saame osakese impulsi  $p$  seosevõrrandi:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \sqrt{-p^2} = \sqrt{-1} p = ip$$

ehk

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = ip$$

Me võime arvestada sellega, et meil on tegemist erirelatiivsusteooriast tuntud relativistliku impulssiga:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 \vec{v}$$

kuid imaginaarühikut  $i$  ei saa võtta negatiivseks:

$$y \frac{\partial}{\partial x_\mu} = ip \neq -ip$$

ehk

$$y \frac{\partial}{\partial x_\mu} \neq -ip$$

ja imaginaarühikut  $i$  ei saa ka matemaatiliselt välja taandada. Diraci võrrandit saab tuletada ainult siis, kui impulss  $p$  avaldub negatiivsena:

$$y \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -p$$

ehk

$$y \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = -p\psi$$

Näiteks viime impulssi  $p$  viimases võrrandis teisele poole võrdusmärgi:

$$y \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + p\psi = 0$$

ja saame võtta sulud:

$$\left( y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + p \right) \psi = 0$$

Impulss  $p$  on massi  $m$  ja kiiruse  $c$  korrutis ehk  $p = mc$ :

$$\left( y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

kuid me kasutame  $\hbar = c = 1$  ühikute süsteemi ja kordaja  $y$  võrdub:

$$y_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}}$$

Kordajat  $y$  tõlgendatakse kvantväljateoorias ka „neljarealistele maatriksitena“, mis rahuldavad „antikommutatsioonireegleid“:

$$y_\mu y_\nu + y_\nu y_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

Tulemuseks saamegi kvantmehaanikas tuntud elektroni relativistliku võrrandi:

$$\left( y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi = 0$$

mida nimetatakse ka Diraci „esimeseks“ võrrandiks. Viimasest saadakse ka Diraci „teine“ võrrand:

$$\left( y_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \bar{\psi} = 0$$

milles defineeritakse  $\bar{\psi}$  kaasoperaatoriks ehk „kaasväljaks“:

$$\bar{\psi} = \psi^* y_4$$

Nende Diraci võrrandite üldlahendid esitatakse kvantväljateoorias järgmiselt:



$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 [a_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{ipx} + b_r^*(\vec{p}) v_r(-\vec{p}) e^{-ipx}]$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 [a_r^*(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p}) e^{-ipx} + b_r(\vec{p}) \bar{v}_r(-\vec{p}) e^{ipx}]$$

milles  $u, \bar{u}, v, \bar{v}$  on bispiinorid. Indeksi  $r$  kaks võimalikku väärtust näitavad kahte spiraalsuse olekut ehk spinni suunda impulsi suhtes. Kordajad  $a, a^*, b, b^*$  on operaatorid. Tähelepanuväärne on see, et elektron-positronvälja vahel kehtivad antikommutatsiooniseosed:

$$\{a_r(p), a_s^*(p')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\{b_r(p), b_s^*(p')\} = \delta_{rs} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\{a, b\} = \{a, b^*\} = \{a^*, b\} = \{a^*, b^*\} = 0$$

milles

$$\{A, B\} = AB - BA$$

ongi operaatorite  $A$  ja  $B$  antikommutaator. Eelnevalt esitatud antikommutatsiooniseoste tõttu ei ole  $\psi$  ja  $\bar{\psi}$  antikommutaatorid enam operaatorid, vaid need on „tavalised funktsioonid“. Diraci võrrandite üldlahendites on  $a_r^*(p)$  elektroni tekke-operaator,  $a_r(p)$  elektroni kao-operaator,  $b_r^*(p)$  positroni tekke-operaator ja  $b_r(p)$  positroni kao-operaator.

Pauli keeluprintsiip seisneb kvantfüüsikas selles, et väljas saab olla ainult üks ühesuguse impulsi ja polarisatsiooniga elektrone. See viib Fermi-Diraci statistikale. Pauli keeld tuleb välja ka välja kvantiseerimisest antikommutaatoritega. Välja ei saa kvantiseerida antikommutatsioonireegli rakendamisel poolearvulise spinniga osakestega, sest siis ilmneb vastuolu Pauli keeluga. Kui aga kvantiseerida kommutaatoritega täisarvulise spinniga osakeste korral, siis ei teki Pauli keeldu ja seetõttu ei minda sellega vastuollu. Sellised osakesed alluvad Bose-Einsteini statistikale.

Elektron-positronvälja ja elektromagnetvälja omavahelise interaktsiooni käigus läheb energia ühelt väljalt teisele vastavate kvantide tekke ja kaoga. Väljades toimuvad selle interaktsiooni toimet muutused. Interaktsioon toimub siis, kui eri väljades langevad kokku kvantide aegruumi punktid ehk kvantide (s.t. osakeste) kokkusaamisel. Interaktsiooni tugevuse määrab ära elektroni laeng  $e$  ja interaktsioonilagrangiaani  $L$  avaldub kvantelektrodünaamikas järgmiselt:

$$L = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu$$

milles vooluks nimetatakse:

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

Kvantsüsteemi energiat kirjeldab hamiltoniaan  $H$ . Schrödingeri võrrand on kvantmehaanika põhivõrrand. Selle järgi kirjeldab hamiltoniaan kvantsüsteemi ajalist arengut. Schrödingeri esituses antud olekufunktsioonide korral kirjeldab lainefunktsiooni Schrödingeri võrrand. Kuid Heisenbergi esituses on olekufunktsioonid ajas muutumatud, kuid ajalisk arengut kirjeldavad operaatorid. See on tegelikult sisuliselt sama mis Schrödingeri esitus. Kvantväljateoorias aga kasutatakse interaktsiooni-esitust, mille korral sõltub olekufunktsiooni ajaline areng ainult interaktsioonihamiltoniaanist:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H \Phi$$

mitte enam vabade väljade hamiltoniaanist. Hamiltoniaan ise koosneb vabade väljade hamiltoniaanist ja interaktsioonihamiltoniaanist. Väljavektor sisaldab elektron-positron- ja elektromagnetvälja. Väljavektori muutust kirjeldatakse mingisuguse operaatoriga  $S$ , mida kujutatakse ka maatriks-võrrandina. Seda nimetatakse hajumise maatriksiks ehk  $S$ -maatriksiks:

$$(\Phi(t)) = (S(t, 0))(\Phi(0))$$

Interaktsioonihamiltoniaani arvestades saame  $S$ -maatriksi kujuks:

$$i \frac{\partial S}{\partial t} \Phi(0) = H S \Phi(0)$$

ehk

$$i \frac{\partial S}{\partial t} = H S$$

Erinevaid kvantolekuid erinevates ajahetkedes seob  $S$ -maatriksi mingi element. Vastava kvantoleku ülemineku tõenäosust saab välja arvutada siis, kui on teada vastava maatrikselemendi väärtust.

Kronoloogilise korrutise korral:

$$S_k(t, t_0) = \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k T(H(t_1)H(t_2) \dots H(t_k))$$

järjestatakse kõik väljaoperaatorid aja kahanemise järjekorras:

$$t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_k$$

Kuid kvantelektrodünaamikas kasutatakse hoopis normaalkorraldust, mille korral paigutatakse kõik tekkeoperaatorid kao-operaatoritest vasakule. Nii võrdub vaakumi energia ja impulss nulliga.

Vaakumi polarisatsioon seisneb kvantväljateooria järgi selles, et elektroni laeng tekitab enda ümbritsevas ruumis ehk vaakumis virtuaalsete osakeste toimet intensiivseid protsesse. Elektroni negatiivse laengu ümbritsevas ruumis organiseeruvad positiivsed laengud üldiselt elektronile lähemale, kuid negatiivsed laengud aga kaugemale.

Kvantväljateooria järgi on kogu Universumi vaakum täis virtuaalseid osakesi ja seetõttu on vaakum tegelikult lõpmata kõrge energiatihedusega. Kuid renormeerimise tulemusena võime selle vaakumi energiatiheduse lugeda ikkagi praktiliselt nulliks, sest selline energianivoo, mis täidab ühtlaselt kogu meie Universumi ruumi, ei ole tegelikult niikuinii mingil moel avalduv ega mõõdetav. 0 väärtuse võime lugeda mistahes kohta energiaskaalal.

Elektromagnetlaine ( näiteks valguslaine ) ei ole tegelikult pidev, vaid see liigub ruumis „portsjonite“ ehk kvantide kaupa. Vastavalt kvantelektrodünaamika ehk kvantväljateooria seaduste järgi võib elektromagnetvälja vaadelda ka kui virtuaalsete footonite kogumina või nende voona. Elektriliselt laetud osakeste omavaheline vastastikmõju ehk interaktsioon seisneb tegelikult selles, et üks osake neelab ühe footonist, mille kiirgas esimene. See tähendab seda, et laetud osakesed vahetavad omavahel footoneid. Iga laetud osake tekitab enda ümber välja, mis tegelikult reaalselt seisneb footonite kiirgamises ja neelamises. Need footonid pole aga reaalsed, vaid neid mõistetakse virtuaalsetena. Neid virtuaalseid osakesi pole võimalik avastada nende eksisteerimise ajal. See teebki need virtuaalseteks. Tavaliselt on footoni ja mingi laetud osakese summaarne energia suurem kui paigaloleval laetud osakesel ( footonil endal laengut ei ole ). See aga rikub energia jäävuse seadust. Kuid kui laetud osakese poolt kiiratud footon neelatakse sama või mõne teise laetud osakese poolt enne ajavahemiku

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E}$$

möödumist, siis ei ole võimalik avastada energia jäävuse seaduse rikkumist.  $\Delta E$  näitab energia kõrvalekallet impulsiga määratud väärtusest

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Reaalne foton, mis võib kiirguda näiteks kahe laetud osakese põrkel, võib eksisteerida aga piiramatult kaua. Kahe ruumipunkti vahel, mille vahekaugus on  $l = c\Delta t$ , on virtuaalsel footonil võimalik anda vastastikmõju ja seda siis  $\Delta t$  jooksul. Elektromagnetjõudude mõjuraadius võib olla mistahes suur, sest footoni energia

$$E = hf = mc^2$$

saab olla ükskõik kui väike. Valguse osakesi ehk footoneid kirjeldabki kvandienergia võrrand  $E = hf = mc^2$ , kus  $f$  on laine sagedus ja  $h$  on Plancki konstant väärtusega  $6,62 \cdot 10^{-34}$  Js.

Välja vahendavad osakesed ei ole reaalsed, vaid on virtuaalsed, sest nad kannavad edasi energiat ja impulssi sõltumatult. Elektron võib kanda energiat, mis on väiksem tema seisumassist. Impulss, mida kantakse parajasti üle, ei pruugi olla suunatud tekkepunktist neeldumispunkti. Virtuaalne foton võib omada ka pikipolarisatsiooni komponenti. Sellepärast ongi need osakesed ebareaalsed ja seetõttu kutsutakse neid virtuaalseteks osakesteks. Nende olemasolu ei ole võimalik katseliselt tõestada.

Kvantmehaanikas ei ole kirjeldatud footoni kui osakese mõõtmeid, vaid selle asemel kirjeldab osakeste liikumist ajas ja ruumis lainefunktsioon. Kvantmehaanika üks põhivõrrandeid  $\lambda = h/p$  ehk  $\lambda = h/mv$  näitab ära samaaegselt footoni nii leiulaine pikkuse kui ka valguslaine ehk elektromagnetlaine pikkuse. See tähendab füüsikaliselt seda, et footoni leiulaine ongi tegelikult valguslaine ehk elektromagnetlaine. De Broglie' valem  $\lambda = h/mv = h/p$  seob osakeste laineomadusi ( $\lambda$ ) ja korpuskulaaromadusi ( $m$ ,  $v$ ,  $p$ ).

Footoni ja valguslaine omavaheline seos on analoogiline kvantmehaanikas tuntud lainefunktsiooni ja tema poolt kirjeldatava osakese seosega. Näiteks tõenäosuse, millega foton satub mingisse ruumipunkti, määrab ära valguslaine amplituudi ruut sarnaselt nii nagu valguse intensiivsust mõõdab valguslaine elektrivektori ruudu keskväärts. Täpselt samamoodi annab ka lainefunktsiooni mooduli ruut füüsikaliselt tõenäosuse ruumalaühiku kohta ehk tõenäosustiheduse mistahes osakese asumiseks vastavas ruumiosas. Statsionaarsete olekute korral on lainefunktsiooni kuju määratud nii, et osakese tõenäosustihedus ei sõltu enam ajast. Lainefunktsioon ja selle mooduli ruut on matemaatiliselt komplekssed suurused. See tähendab seda, et tõenäosus võib väljenduda ainult reaalarvuna. Kõik eelnev tähendab sisuliselt seda, et kvantmehaanika ei võimalda määrata osakese täpset asukohta ruumis ega tema liikumistrajektoori, vaid on võimalik ainult ennustada, millise tõenäosusega leiame osakese mingis ruumipunktis. Seega on kvantmehaanikal statistiline iseloom.

Näiteks elektroni asukoha määramatus on vesiniku aatomis peaaegu võrdne aatomi raadiusega. Seetõttu ei saa elektroni vaadata kui kindlat trajektoori mööda liikuva osakesena, vaid pigem vesiniku tuuma ümber oleva elektronpilvena.

Kvantmehaanika ei anna tegelikult infot footoni kui osakese suuruse kohta midagi, vaid ennustab seda, et millises ruumipunktis ja ajahetkes me osakest leida võime. See tähendab seda, et osakese suuruse ja aegruumi täpse asukoha asemel on tegelikult tõenäosusväli, mida kirjeldabki tuntud lainefunktsioon. Näiteks valguse ehk footoni leiulaine

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

on valguslaine ehk elektromagnetlaine. Osakeste leiutõenäosust määravaid laineid nimetatakse

lühidalt leiulaineteks. Laineid kirjeldavat funktsiooni ehk tõenäosuslainete konkreetset kuju ruumis ja ajalist muutumist kirjeldavat matemaatilist avaldist nimetatakse lainefunktsiooniks.

#### **1.14.5.1 Operaatorid kvantmehaanikas**

Osakese olekut kirjeldab kvantmehaanikas lainefunktsioon  $\Psi$ . Sellest lainefunktsioonist peab kätte saama kogu informatsiooni mingite matemaatiliste operatsioonidega. Nende matemaatiliste operatsioonide aluseks ongi operaatorid, mis teisendavad ühtesid funktsioone teisteks. Operaatorid kuuluvad kvantmehaanika põhimõistete hulka ja seetõttu ei saa ilma nendeta mõista kvantmehaanika formalismist ega ka füüsilisest sisust. Operaator on matemaatikas eeskiri, mille abil on võimalik saada mingist funktsioonist teise funktsiooni. Kvantmehaanikas on vaja ainult arvuga korrutamise operaatoreid ja diferentseerimisoperaatoreid. Operaatorid, mida kasutatakse kvantmehaanikas, on enamasti lineaarsed. Operaatorite korrutamine tähendab nende järjestikust rakendamist ja seetõttu on korrutises operaatorite järjekord üldiselt oluline. Tulemus ei sõltu operaatorite rakendamise järjekorrast siis, kui operaatorid omavahel kommuteeruvad. Operaatorite rakendamise järjekord on oluline omavahel mittekommuteeruvate operaatorite korral. Tuleb kindlasti märkida ka seda, et operaatorid mõjuvad alati funktsioonidele.

Kvantmehaanikas vastab igale füüsikalisele suurusele ( energia, impulss vms ) mingi kindel operaator. Füüsikaliste suuruste operaatorite saamiseks on enamasti vaja teada ainult koordinaadi ja impulsi operaatoreid. Koordinaadi operaatorid ( ristkoordinaatides ) on vastavad koordinaadid ise. Need on arvuga korrutamise operaatorid. Kuid impulssi operaatori korral on tegemist juba arvuga korrutamise operaatori ja diferentseerimisoperaatori korrutisega. Igale füüsikalisele suurusele vastab mingi kindel operaator ja operaatori omaväärtused annavad selle füüsikalise suuruse mõõdetavad väärtused. Füüsikaliste operaatorite omaväärtused peavad olema reaalarvulised, mitte imaginaarsed, sest kõik füüsiliselt mõõdetavad suurused on reaalarvulised. Kuid kvantmehaanikas leiduvad ka selliseid lineaarse operaatori omaväärtused, mis ei ole reaalsed. Hermiitilise operaatori korral on kaasoperaator võrdne selle operaatori endaga. Füüsikaliste suuruste operaatorid peavad kvantmehaanikas olema hermiitilised, mille korral on selle omaväärtused reaalsed.

Energiakvandi määramatuse seosed tulenevad tema lainelistest omadustest, mitte aga lihtsalt suvaliselt matemaatilistest võrranditest. Matemaatilise lähenemise korral lahendatakse kvantmehaanikas operaatori omaväärtusülesanne, mille korral tuleb leida omaväärtused ja seega omaolekud ( diskreetsel juhul ):

$$\hat{A}f = af,$$

kus  $\hat{A}$  on operaator ( operaator on alati katusena ) ehk füüsikaline suurus,  $f$  on omaolek ehk omafunktsioon ja tundmatu  $a$  on omaväärtus ehk füüsikalisele suurusele vastav kindel arvuline väärtus. Füüsikaliste suuruste arvud peavad olema reaalarvud. Omaväärtusülesanne ei anna meile normeeritud kuju. Operaator on arvude üldistus. Igale füüsikalisele suurusele vastab operaator, mis toimib olekufunktsioonina. Operaator on teisenemise eeskiri, mille järgi saame ühest funktsioonist teise funktsiooni. Funktsioon  $f = \psi_a = \varphi_n$  on lõpmata mõõtmeline vektor ehk lõpmata komponendine vektor, milles on olemas funktsioonid  $\varphi_n$  ( kus  $n = 1, 2, 3, \dots$  ). Operaatori omaväärtusülesanne on pidevuse kujul esitatav aga järgmiselt:

$$\hat{A}\psi(x, a) = a\psi(x, a),$$

milles  $a$  väärtus võib muutuda nullist kuni lõpmatuseni ehk pidevalt ja

$$\psi = \sum_a c_a \psi_a = \int c(a) \psi(x, a) da,$$

milles  $a$  on konkreetset väärtused,  $|c_a|^2$  on ühe konkreetse väärtuse tõenäosus,  $|c(a)|^2$  näitab tõenäosuse tihedust ja  $\psi_a$  on omafunktsioonid.

Illustreerimaks operaatori omaväärtusülesannet, püüame järgnevalt lahendada ühte kõige lihtsamat varianti. Näiteks impulsi  $p$  omaväärtusülesande korral on meil vaja teada de Broglie' lainepikkuse  $\lambda$  valemit, mis avaldus Plancki konstandi  $h$  ja impulsi  $p$  jagatisena:

$$x = \frac{h}{p} = \lambda$$

milles Plancki konstant  $h$  on jagatud  $2\pi$ -ga

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar$$

ja  $k$  näitab lainearvu

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

Lainefunktsiooni rahuldab siinuseline lainevõrrand ( antud juhul koordinaadi  $x$ -i järgi )

$$\sin(2\pi kx)$$

ja seda lainevõrrandit on võimalik esitada ka imaginaarsel kujul

$$e^{i2\pi kx} = e^{i\frac{2\pi}{k}px} = e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

kuna see rahuldab järgmist matemaatilist reeglit:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Järgnevalt peame arvestama ka järgmise matemaatilise eeskirjaga:

$$\frac{d}{d\alpha} e^{i\alpha} = ie^{i\alpha}$$

Impulsi operaatori leidmiseks tuleb ära lahendada impulsi omaväärtusülesanne:

$$\hat{p}_x \psi = p_x \psi$$

milles  $\hat{p}_x$  on füüsikaline suurus ehk operaator,  $\psi$  on omaolekud ehk omafunktsioonid ja  $p_x$  on omaväärtus ehk füüsikalisele suurusele vastav kindel arvuline väärtus. Viimasest võrrandist võrdub  $\psi$  järgmise avaldisega

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} p_x x}$$

ja seega saame impulsi omaväärtusülesande järgmise kuju

$$\hat{p}_x e^{\frac{i}{\hbar} p x} = p_x e^{\frac{i}{\hbar} p x}$$

Tehes ära viimases võrrandis mõned lihtsad matemaatilised teisendused, saame järgmise avaldise

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{i}{\hbar} p \psi$$

Kui me viime  $i$  ja  $\hbar$  jagatise teisele poole võrdusmärgi, siis saamegi impulsi  $p$  omaväärtusülesande:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = p \psi$$

millest saame ka impulsi  $p$  operaatori

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Koordinaadi operaator võrdub alati iseendaga:  $\hat{x} = x$ . Impulsi operaator:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

on hermiitiline ja seda tõestatakse kvantmehaanikas järgmiselt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \hat{p} \psi_n dx &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* \frac{d\psi_n}{dx} dx = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi_m^*}{dx} \psi_n dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -i\hbar \frac{d\psi_m}{dx} \right)^* \psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{p} \psi_m)^* \psi_n dx. \end{aligned}$$

Viimasest on näha, et kehtib võrdus:

$$\langle \hat{p} \psi_m | \psi_n \rangle = \langle \psi_m | \hat{p} \psi_n \rangle$$

ja see tõestabki impulsi  $p$  operaatori hermiitilisust. Impulsioperaatori omaväärtusülesanne:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = p \psi$$

aitab lahendada kvantväljateooriasse kuuluvaid ülesandeid. Näiteks viime imaginaarühiku  $i$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = ip \psi = \pm ip \psi = -ip \psi$$

ehk

$$\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = -ip \psi$$

ja võtame ühikute süsteemiks:  $\hbar = c = 1$

$$-ip \psi = \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

Kui me võtame impulssi  $p$  operaatori kujule:  $p \rightarrow \hat{P}_\mu$ , milles  $\mu = 1, 2, 3, 4$  ehk tegemist on nüüd „4-impulssiga“, siis sellest tulenevalt saame teisendada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Sellisel juhul võime impulsi  $p$  omaväärtusülesandelt minna üle  $P$  ehk 4-impulssi kommutaatorile näiteks energiavälja potentsiaaliga  $\varphi$ :

$$-ip\psi = -i[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}(x)]$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}$$

ehk impulssi  $p$  omaväärtusülesandest järeldub see, et  $P$  ehk 4-impulssi kommutaator energiavälja potentsiaaliga  $\varphi$  annab tulemuseks tuletise välja potentsiaalist  $\varphi$ :

$$-i[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}(x)] = \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu}$$

Energiakvandi impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  määramatuse relatsiooni

$$px = h$$

tuletataksegi kvantmehaanikas nende operaatorite „mittekommuteeruvuse“ kaudu järgmiselt:

$$[\hat{p}_k, x_j]\Psi = \hat{p}_k x_j \Psi - x_j \hat{p}_k \Psi = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} x_j \Psi - x_j \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi = \frac{h}{i} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j \Psi) - x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right)$$

millest saame:

$$[\hat{p}_k, x_j]\Psi = \frac{h}{i} \left( \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \Psi + x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right)$$

Kuna sulgudes olev liige võrdub nulliga:

$$x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = 0$$

siis saamegi määramatuse seose:

$$[\hat{p}_k, x_j]\Psi = \frac{h}{i} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \Psi = \frac{h}{i} \delta_{jk} \Psi$$

mis näitab seda, et energiakvandi impulsi ja koordinaadi operaatorid omavahel ei kommuteeru:

$$[\hat{p}_k, \hat{x}_j] = \frac{h}{i} \delta_{jk}$$

ja see näitabki matemaatiliselt määramatuse seost energiakvandi koordinaadi ja impulsi vahel:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h$$

Analoogilisel teel saadakse ka määramatuse seos energia ja aja vahel:

$$\Delta t \Delta E \geq h$$

### 1.14.5.2 Peenstruktuurikonstant ja energia jäävuse seadus

Eespool kirjeldatud „kvantelektrodünaamika“ ehk „KED-i“ lühike ülevaatlisk sisesejuhatus ja alused oli ajalooliselt esimene kvantväljateooria ehk väljade kvantteooria, millest tuletatakse kõrgemas füüsikas omakorda ka tugevat interaktsiooni ehk aatomituuma jõudu kirjeldavat kvantväljateooriat ( mida nimetatakse „kvantkromodünaamikaks“ ) ja nõrka interaktsiooni kirjeldavat kvantväljateooriat ( mida nimetatakse füüsikas koos kvantelektrodünaamikaga „Weinberg-Salami mudeliks“ ).

Impulssi  $p$  ja energia  $E$  vaheline seos:

$$\frac{1}{2GE} = p = \frac{E}{c} = mc$$

oli tuletatav kvantmehaanikast ja selle kehtivuses ei ole põhjust kahelda. Oluline on siinkohal märkida seda, et sellest on võimalik tuletada ka „peenstruktuurikonstandi“  $\alpha$ , mis on väljade kvantteoorias määrava tähtsusega ja mis näitab elektromagnetilise jõu suhet tugeva interaktsiooniga ehk tuumajõuga. Näiteks saame viimast valemit teisendada järgmiselt:

$$\frac{1}{2Gm} = \frac{E}{c} c^2$$

ehk

$$\frac{c}{2Gm} = Ec^2$$

kuna võib kehtida seos  $E = mc^2$ . Korrutame võrrandi mõlemad pooled valguse kiirusega  $c$ :

$$\frac{c^2}{2Gm} = \frac{1}{R} = Ec^3$$

ja jagame saadud võrrandi mõlemad pooled uuesti kiirusega  $c$ , tulemuseks saame:

$$\frac{1}{c^4} = h = \frac{E}{c} R$$

Viimast on võimalik teisendada järgmiselt:

$$h = E \frac{R}{c} = \frac{q\varphi R}{2} \frac{R}{c} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 c}$$

milles  $E$  on näiteks elektrivälja energia. Niimoodi saame Plancki konstandi  $h$  „dimensionaalvõrrandi“:

$$h = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 c}$$



Kui me viime Plancki konstandi  $h$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$1 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc}$$

ja niisamuti ka number ühe:

$$0 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc} - 1$$

siis saame järgmise võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} 1 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc} \\ 0 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc} - 1 \end{cases}$$

Saadud võrrandite süsteemist on võimalik tuletada üldisem võrrand:

$$0 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc} - 1 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc} - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc}$$

ehk

$$0 = + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc} - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc}$$

ehk

$$0 = +q - q$$

mis on oma olemuselt energia jäävuse seadus ja/või (elektri)laengu jäävuse seadus. Viimane tähendab seda, et elektrilaengud tekivad looduses alati paaris: + laengute ja – laengute paarina, mis kokku annabki alati nulli. Selles mõttes energiaväljad looduses tegelikult ei teki ega ka kao, mis ongi kooskõlas üldise energia jäävuse seadusega. Näiteks neutraalse laenguga neutron võib laguneda positiivse laenguga prootoniks ja negatiivse laenguga elektroniks, mis kokku annabki nulli:

$$+e + (-e) = 0$$

Kuid eelviimasest võrrandist saame omakorda võrduse:

$$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 hc}$$

ja kui me korrutame selle võrduse mõlemad pooled kahega

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 hc} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 hc}$$

siis saamegi kätte kvantelektrodünaamikast tuntud „peenstruktuurikonstandi“  $\alpha$ :

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 hc} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 hc} = \alpha \approx \frac{1}{137}$$

ja seda siiski juhul, kui elektrilaenguks  $q$  on elektroni laeng ehk elementaarlaeng  $e$ . Teatud ühikute süsteemi kasutusele võtmisega võib elementaarlaeng  $e$  võrduda ka järgmiselt:

$$e = \sqrt{\alpha} \ll 1$$

Peenstruktuurikonstant  $\alpha$  on näiteks vajalik vesiniku aatomi energianivoode peenstruktuuri välja arvutamiseks, mille valem esitatakse aatomifüüsikas järgmiselt:

$$E_{nj} = -\frac{Rh}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

Elementaarlaeng  $e$  näitab väikseimat eksisteerivat elektrilaengut Universumis ja absoluutselt kõik elektrilaengud on selle täisarvkordsed. Elementaarlaengu  $e$  väärtus ja ka selle „konstantsus“ tuleb välja impulssi  $p$  seosest:

$$\frac{1}{2GE} = p = mc = \frac{E}{c}$$

millest saame järgmise konstandi:

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c}$$

Kui me jagame saadud konstandi võrrandi mõlemad pooled kolmega, siis saamegi elementaarlaengu  $e$  ligikaudse väärtuse:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} \approx 1,602 * 10^{-19} C$$

Elementaarlaengu  $e$  ühikuks  $C$

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} \approx e$$

defineeritakse klassikalises elektrodünaamikas järgmise valemiga:

$$\frac{A}{U} = q = e$$

milles pinge  $U$  on  $1 V$ . Sellest tulenevalt peab kehtima võrdus:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} \approx \frac{A}{U} = e$$

ja seda on võimalik tõestada järgmise lühikese analüüsi kaudu. Näiteks viimane valem on tuletatud võrrandist ehk kui me kolmed välja taandame, siis saame:

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c}$$

ja see on tuletatud omakorda impulssi  $p$  võrrandist:

$$\frac{1}{2GE} = \frac{E}{c} = p$$

Selles impulssi  $p$  võrrandis ongi tähelepanuväärne see, et kehtib ka selline võrdus:

$$E = mc^2 = 2G$$

millest saamegi impulssi  $p$  seose:

$$mc = \frac{2G}{c} = p$$

Seetõttu võimegi energia  $E$  ruudu seose panna võrduma impulssiga  $p$ :

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c} = p$$

Kuid me saime impulssi  $p$  võrduse, mitte aga elektrilaengu  $q$  võrduse, mis sobiks elementaarlaengu e ühikuks. Elektrilaeng  $q$  ja impulss  $p$  on tegelikult samuti omavahel võrdeliselt seotud. Näiteks elektrivälja energia  $E$  klassikalisest avaldisest:

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

saame elektrilaengu  $q$  ja elektrivälja energia  $E$  seose võrrandi:

$$\frac{2E}{q} = \varphi$$

Kui aga elektrivälja energia  $E$  avaldub seisuenergia  $E$  võrrandina:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

siis saame ka impulssi  $p$  ja elektrivälja energia  $E$  seose võrrandi:

$$\frac{2E}{p} = \frac{p}{m} = \frac{mc}{m} = c$$

Kui me nüüd võrdleme viimast avaldist eelnevalt tuletatud võrrandiga:

$$\frac{2E}{q} = \varphi$$

siis me näeme väga selgelt seda, et  $\varphi \neq c$ , kuid sellest hoolimata võib kehtida võrdus  $q = p$ , mis antud olukorras langebki kokku elementaarlaengu e võrrandi situatsiooniga:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} = \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}q \approx e = \text{const}$$

Kolmega jagatis viitab elementaarlaengu e seosele ruumi kolmemõõtmelisusega. Näiteks esineb seda ka matemaatikas kera ruumala  $V$  valemis:

$$V = \frac{1}{3}4\pi R^3 = S \frac{R}{3}$$

Viimast analüüsimet järgnevalt. Elementaarlaengu e väärtuse ligikaudsest võrrandist:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} = \frac{p}{3} \approx e$$

saame elementaarlaengu  $e$  ligikaudse seose vektoriaalse impulssiga  $p$ :

$$\frac{p}{3} \approx e$$

Kui me viime kolme 3 ja impulssi  $p$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$1 \approx 3 \frac{e}{p}$$

siis me näemegi saadud võrrandi seost ruumi kolmemõõtmelisusega:

$$1 \approx \frac{e}{p_x} + \frac{e}{p_y} + \frac{e}{p_z}$$

Vektoriaalne impulss  $p$  avaldub seisuenergia  $E$  kaudu järgmiselt:

$$p = mc = \frac{E}{c}$$

ja sellest tulenevalt saame võrrandi kujuks:

$$1 \approx \frac{e}{E_x} + \frac{e}{E_y} + \frac{e}{E_z}$$

milles kasutasime ühikute süsteemi  $c = 1$ . Füüsikaliselt tähendab see viimane võrrand seda, et elektrilaengu  $e$  „kulonilise välja“ energia eksisteerib kolmemõõtmelises ruumis ehk kõikides kolmes ruumikoordinaatides korraga. Laengu elektriväli on „geomeetriliselt puhtalt tsentraalsümmeetriline“. Teades elektrivälja energia  $E$  definitsiooni:

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

millest omakorda saame:

$$\frac{2}{\varphi} = \frac{q}{E} = \frac{e}{E}$$

võime võrrandi sisu avaldada ka väljapotentsiaali  $\varphi$  kaudu:

$$\frac{1}{2} \approx \frac{1}{\varphi_x} + \frac{1}{\varphi_y} + \frac{1}{\varphi_z}$$

Kuna väljapotentsiaal  $\varphi$  avaldub samuti valemiga:

$$\varphi = k \frac{q}{r} = k \frac{e}{r}$$

milles  $k$  on elektrivälja võrdetegur, siis võime võrrandi kujuks saada ka:

$$\frac{k}{2} \approx \frac{r_x}{q} + \frac{r_y}{q} + \frac{r_z}{q}$$

milles  $q = e$ . Elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  näitab ka elektrivälja ehk energiavälja tsentraalsümmeet-

rilisust:

$$\varphi = k \frac{e}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

milles raadiuse  $r$  funktsioon näitab koordinaate kolmemõõtmelises ruumis:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Elektronvolt  $eV$  on elektri- ja magnetismi-füüsikas üldiseks töö  $A$  ja energia  $E$  ühikuks:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{p}{3} = \frac{A}{U} = q = e$$

ehk

$$\frac{1}{3E^2} = e$$

Järgnevalt analüüsime viimast avaldist, teisendades seda järgmiselt:

$$\frac{1}{e} = 3E^2 = 3p^2 c^2$$

ja kui võtta  $c = 1$  ühikute süsteemiks, siis saame:

$$\frac{1}{e} = 3p^2 = p^2 + p^2 + p^2$$

Viimasest nähtub põhjus, et miks oli vaja eelnevalt konstandi võrrandit kolmega jagada, et saada kätte elementaarlaengu  $e$  väärtus. See on seotud „ilmselt“ energiavälja impulssi  $p$  suunaga ruumis ja väli eksisteerib teatavasti kolmemõõtmelises ruumis ehk kõikides kolme ruumikoordinaatides korraga:

$$\frac{1}{e} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

ehk täpsemalt:

$$\frac{1}{e} \approx p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Siinkohal võiks näiteks tuua impulsi  $p$  ruudu operaatori kvantmehaanikast, mis on samuti seotud kolme ruumikoordinaadiga:

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\hbar^2 \Delta$$

Eelnevalt tuletatud elementaarlaengu  $e$  ligikaudne seos

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} = \text{const} \approx e$$

näitab veenvalt gravitatsioonivälja ja elektrivälja omavahelist seost ning näitab selle tulenevust energia jäävuse seadusest. Seda on võimalik näidata järgmise analüüsi teel. Näiteks korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled kolmega, saame:

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c}$$

Viime kõik liikmed võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{c}{2G} = E^2$$

Gravitatsioonivälja ja elektrivälja suhte analüüsist tuletasime eespool energia ruudu võrrandi:

$$E^2 = \frac{Gm^2}{r} \frac{kq^2}{r}$$

ja seetõttu võime selle kirja panna nüüd järgmiselt:

$$\frac{c}{2G} = \frac{Gm^2}{r} \frac{kq^2}{r}$$

Kuna viimase võrrandi viimane liige võrdub elektrivälja potentsiaalse energiaga E:

$$\frac{kq^2}{r} = E_p = E$$

siis saame energia ruudu võrrandi kujuks:

$$\frac{c}{2G} = \frac{Gm^2}{r} E_p$$

Viime elektrivälja potentsiaalse energia E võrrandi teisele poole võrdusmärgi, tulemuseks saame teha järgmised matemaatilised teisendused:

$$\frac{c}{2GE} = \frac{1}{2GE} c = pc = \frac{Gm^2}{r} = \frac{GMm}{r} = U$$

mis annab meile gravitatsioonipotentsiaali U võrrandi:

$$pc = mc^2 = U$$

Kui me arvestame erirelatiivsusteoorias tuletatud seosega:

$$mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

siis saimegi tuletada mehaanilise energia jäävuse seaduse:

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = U = \frac{GMm}{r}$$

mille võrrandi ühel poolel on kineetiline energia ja teisel poolel on potentsiaalne energia U. Energia jäävuse seadus on looduse fundamentaalne seadus, millele peavad alluma absoluutselt kõik loodusnähtused Universumis. Sellega on kooskõlas ka kõik eelnevalt tuletatud füüsika võrrandid, sealhulgas ka väga oluline energia ruudu võrrand:

$$\frac{c^4}{G} = \frac{kq^2}{r^2}$$

ehk

$$\frac{E^2}{Gm^2} = \frac{kq^2}{r^2}$$

See tähendab seda, et sellest on võimalik tuletada mehaanilise energia jäävuse seadus. Selleks teisendame matemaatiliselt viimast võrrandit järgmiselt:

$$\frac{r}{Gm} \frac{E^2}{m} = \frac{1}{U} \frac{E^2}{m} = \frac{kq^2}{r}$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$\frac{1}{U} \frac{1}{2} \frac{E^2}{m} = k \frac{q}{2} \frac{q}{r} = k \frac{E}{\varphi} \frac{q}{r}$$

ja näeme seda, et energia E taandub välja:

$$\frac{1}{U} \frac{1}{2} \frac{E}{m} = k \frac{q}{\varphi r} = \frac{1}{\varphi} \frac{kq}{r}$$

Viimane võrrand võrdub avaldisega:

$$\frac{1}{U} \frac{1}{2} \frac{E}{m} = \frac{\varphi}{\varphi} = 1$$

mille matemaatiliselt teisenemisel saamegi energia jäävuse seaduse definitsiooni:

$$\frac{E}{2} = \frac{mc^2}{2} = Um = \frac{GMm}{R}$$

Sarnaselt energia ruudu võrrandiga on energia jäävuse seadusega kooskõlas ka eelnevalt tuletatud  $x$  koordinaadi võrrand:

$$R = x = 2GEh$$

Näiteks kui me korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled massiga  $m$ :

$$mR = 2GmEh$$

siis saame teha järgmised matemaatilised teisendused:

$$\frac{mR}{2Gm} = \frac{m}{2} \frac{R}{Gm} = \frac{m}{2} \frac{1}{U} = Eh$$

Kui me viime massi  $m$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{2U} = \frac{E}{m} h = c^2 h$$

siis saamegi matemaatiliste teisendustega energia jäävuse seaduse:

$$U = \frac{1}{2c^2 h} = \frac{1}{2c^2 \frac{1}{c^4}} = \frac{c^4}{2c^2} = \frac{c^2}{2}$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = U = \frac{GM}{R}$$

### 1.14.5.3 Elektroni elementaarlaeng ja „erilaeng“

Gravitatsioonijõu ja elektrijõu omavahelist suhet näitas eespool tuletatud energia ruudu võrrand:

$$\frac{E^2}{Gm^2} = \frac{kq^2}{r^2}$$

ehk

$$E^2 = \frac{Gm^2}{r} \frac{kq^2}{r}$$

Viimasest võrrandist järeldus ilmselge võrdus:

$$\frac{Gm^2}{r} = \frac{kq^2}{r}$$

millest omakorda saame laengu  $q$  ja massi  $m$  omavahelise suhte konstandi:

$$\frac{q}{m} = \sqrt{\frac{G}{k}} = \text{const} = 8 * 10^{-11} \frac{C}{kg}$$

Kuid tähelepanuväärne on see, et saadud laengu  $q$  ja massi  $m$  suhe on tuletatav ka gravitatsioonijõu ja elektrijõu võrdusest:

$$F = G \frac{m^2}{r^2} = k \frac{q^2}{r^2}$$

millest saamegi valemi:

$$q^2 = m^2 \frac{G}{k}$$

ehk

$$q = m \sqrt{\frac{G}{k}}$$

ehk

$$\frac{q}{m} = \sqrt{\frac{G}{k}} = 8 * 10^{-11} \frac{C}{kg}$$

Viimane saadud võrrandi konstant näitab laengu  $q$  ja massi  $m$  omavahelist suhet. Näiteks kui kaks



keha massidega:

$$m_1 = m_2 = 5 \text{ g} = 5 * 10^{-3} \text{ kg}$$

mõjutavad üksteist gravitatsioonijõuga  $F$ , siis gravitatsioonijõu ja elektrijõu võrduse korral oleks kehade elektrilaengud võrdsed järgmiselt:

$$q_1 = q_2 = q = 4,3 * 10^{-13} \text{ C}$$

Analoogilise arvutuse järgi

$$q = \sqrt{m_1 m_2 \frac{G}{k}}$$

peaks Maal ( massiga  $m_1$  ) ja Kuul ( massiga  $m_2$  ) olema  $5,7 * 10^{13} \text{ C}$  suurune elektrilaeng, et elektrijõud suudaks hoida Kuud tiirlemas samal kaugusel Maast, millel teda tegelikult hoiab gravitatsioonijõud. Prooton ja elektron mõjutavad teineteist vesiniku aatomis elektrilise tõmbejõuga  $F$ :

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = -k \frac{e^2}{r^2} = -9 * 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(1,6 * 10^{-19} \text{ C})^2}{(5,3 * 10^{-11} \text{ m})^2} \approx -8,2 * 10^{-8} \text{ N}$$

milles osakeste vahekauguseks loetakse vesiniku aatomi raadiust, mis Bohri mudeli järgi on  $r$ :

$$r = 5,3 * 10^{-11} \text{ m}$$

Kuid prootoni ja elektroni vahel mõjuv gravitatsioonijõud  $F$  on vesiniku aatomis kõigest:

$$F = 3,7 * 10^{-47} \text{ N}$$

Sellest järeldub, et elektriline jõud on vesiniku aatomis gravitatsioonijõust suurem rohkem kui  $2 * 10^{39}$  korda. Kõik see on kooskõlas eespool tuletatud energia ruudu võrrandiga:

$$\frac{E^2}{Gm^2} = \frac{kq^2}{r^2}$$

Kuid prootoni ja elektroni vahelisest elektrilisest tõmbejõust  $F$ :

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = -k \frac{e^2}{r^2}$$

ehk

$$F = qE = eE$$

on võimalik tuletada näiteks elektroni „erilaeng“. Kuna elektron tiirleb ümber vesiniku aatomi tuuma ehk ümber prootoni, siis seega omab ta ka kiirendust  $a$ , mille me saame Newtoni teisest seadusest:

$$F = ma$$

Elektrijõu  $F$  valemi kuju tuleb seega:

$$ma = eE$$

millest saamegi elektroni laengu  $e$  ja tema massi  $m$  suhte ehk elektroni „erilaengu“:

$$a = \frac{e}{m} E$$

ehk

$$\frac{a}{E} = \frac{q}{m} = \frac{e}{m_{el}} = 1,758 * 10^{11} \frac{C}{kg} \neq \frac{q}{m} = \sqrt{\frac{G}{k}} = 8 * 10^{-11} \frac{C}{kg}$$

E on siin antud juhul elektrivälja tugevus. Viimasest seosest on selgelt näha, et elektroni erilaeng ei võrdu eelnevalt tuletatud laengu  $q$  ja massi  $m$  suhte konstandiga. Selle võrduse leidmiseks vaatame uuesti gravitatsioonijõu ja elektrijõu omavahelist suhet kirjeldavat energia ruudu võrrandit:

$$\frac{E^2}{Gm^2} = \frac{kq^2}{r^2}$$

Kuna viimasest järeldus ilmselge võrdus

$$E^2 = \frac{Gm^2}{r} \frac{kq^2}{r} = E_1 * E_2$$

ehk

$$\frac{Gm^2}{r} \frac{kq^2}{r} = E_1 E_2 = E^2$$

milles

$$E_1 = E_2$$

siis saame järgmise seose:

$$\frac{r}{Gm^2} E_2 = \frac{kq^2}{r} \frac{1}{E_1}$$

milles energiad võrduvad omakorda järgmiselt:

$$E_1 = \frac{Gm^2}{r}$$

ja

$$E_2 = \frac{kq^2}{r}$$

Sellest tulenevalt saame konstandi  $K$  võrrandi:

$$\frac{r}{Gm^2} E_2 = \frac{kq^2}{r} \frac{1}{E_1} = \frac{kq^2}{r} \frac{r}{Gm^2} = \frac{q^2}{m^2} \frac{k}{G} = K$$

ehk

$$\frac{q^2}{m^2} \frac{k}{G} = \frac{F_2}{F_1} = K$$

mis näitab seda, et mitu korda on elektriline jõud  $F_2$  vesiniku aatomis gravitatsioonijõust  $F_1$  suurem. Viimasest võrrandist saame:

$$q^2 = m^2 \frac{G}{k} K$$

Kuid siinkohal peab arvestama seda, et vesiniku aatomi korral peame arvestama prootoni ja elektroni massidega:

$$m^2 \rightarrow m_1 * m_2$$

ja seetõttu saame võrrandi kujuks:

$$q^2 = m_1 m_2 \frac{G}{k} K$$

ehk

$$q = \sqrt{m_1 m_2 \frac{G}{k} K}$$

Tehes ära viimases valemis matemaatilised arvutused vesiniku aatomi korral ehk prootoni ja elektroni paari korral:

$$q = \sqrt{(1,673 * 10^{-27} kg)(9,109 * 10^{-31} kg) \frac{6,672 * 10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2}}{9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}} (2 * 10^{39})}$$

saamegi tulemuseks prootoni ja elektroni laengu q:

$$q = 1,502 * 10^{-19} C \approx e = 1,602 * 10^{-19} C$$

mis „peaaegu“ ehk „ligikaudselt“ võrdub elementaarlaenguga e:

$$q \approx e$$

Selline tulemus kinnitab veenvalt seisukohta, et näiteks elektroni erilaeng ehk elementaarlaengu e ja elektroni massi m omavaheline suhe väljendab ka gravitatsioonijõu ning elektrijõu omavahelist suhet. Positiivse prootoni ja negatiivse elektroni paar tekib üheaegselt näiteks vaba neutroni lagunemisel. Neutronil endal ( nii nagu ka footonil ) ei ole elektrilaengut ja „magnetlaenguid“ looduses ei eksisteeri.

Kuna eespool võrdus elementaarlaengu e väärtus ka järgmiselt:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} \approx e$$

siis arvestades viimati saadud tulemust:

$$q = \sqrt{m_1 m_2 \frac{G}{k} K} \approx e$$

peab kehtima ka nende kahe erineva valemi ligikaudne võrdus:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} \approx \sqrt{m_1 m_2 \frac{G}{k} K} \approx e$$

Elementaarlaeng e oli seotud impulssiga p:

$$\frac{2G}{3c} = \frac{p}{3} \approx q = e$$

milles impulss p avaldus

$$\frac{2G}{c} = p = mc = \frac{E}{c}$$

Viimasest on näha, et peab kehtima võrdus:

$$2G = E$$

Sellest tulenevalt saadaksegi:

$$\frac{2G}{3c} = \frac{E}{3c} = \frac{1}{3} \frac{E}{c} = \frac{1}{3} p = \frac{p}{3}$$

Impulssi p seos elementaarlaenguga e eelnevalt näidatud valemis:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} = \frac{p}{3} \approx e$$

ehk

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c} = p$$

tõestatakse järgmise lihtsa analüüsi kaudu. Näiteks viimases valemis avaldame energia E:

$$2G = E$$

ehk

$$\frac{2G}{c} = \frac{E}{c} = p$$

Sellest tulenevalt saame:

$$\frac{1}{4G^2} = \frac{E}{c} = mc = p$$

ehk

$$\frac{1}{2GE} = \frac{2G}{c} = p$$

milles impulssi p seose kehtivus:

$$\frac{1}{2GE} = p$$

oli eespool olevas väljade kvantteooria osas korduvalt tõestatud. Kuid eelnevalt saadud energia ruudu seos:

$$\frac{1}{E^2} = \frac{2G}{c}$$

avaldub ka üldrelatiivsusteoorias tuntud Schwarzschildi raadiuse R võrrandis:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2G}{c} \frac{M}{c} = \frac{1}{E^2} \frac{M}{c}$$

Kui nüüd massi M avaldame seisuenergia seosest:

$$E = mc^2$$

ehk

$$\frac{E}{c^2} = m = M$$

siis sellest tulenevalt saame osakese määramatuse relatsiooni koordinaadi x ja impulssi p vahel järgmiselt:

$$R = \frac{1}{E^2} \frac{M}{c} = \frac{1}{E^2} \frac{E}{c^3} = \frac{1}{Ec^3} = \frac{1}{mc^5} = \frac{1}{mc} \frac{1}{c^4} = \frac{h}{mc} = \frac{h}{p}$$

ehk

$$pR = px = h$$

Viimane võrrand kattub ka de Broglie lainevõrrandiga  $\lambda$ :

$$x = \frac{h}{p} = \lambda$$

ning sellest oli võimalik tuletada ka osakese energia ja aja määramatuse seos:

$$px = mc * ct = mc^2 t = Et = h$$

Elementaarlaengu e ligikaudset väärtust näitasid korraga kaks erinevat valemit ja seetõttu peavad need omavahel ka ligikaudselt võrduma:

$$\frac{2G}{3c} \approx e \approx \sqrt{m_1 m_2 \frac{G}{k} K}$$

Selle kehtivuse tõestame järgmise üsna lihtsa ja lühikese analüüsi kaudu. Näiteks impulss p avaldus viimases võrrandis konstandina:

$$\frac{2G}{c} = p$$

ja kui me teostame masside asenduse:

$$m_1 m_2 \rightarrow m^2$$

siis saame järgmise võrduse:

$$\frac{p}{3} \approx \sqrt{m^2 \frac{G}{k} K}$$

ehk

$$\frac{p^2}{9} = m^2 \frac{G}{k} K$$

milles lihtsuse mõttes arvestame ligikaudse võrduse asemel nüüd aga täpsema võrrandiga. Viime jagatise 9 teisele poole võrdusmärgi, tulemuseks saame:

$$p^2 = m^2 9 \frac{G}{k} K = m^2 * const$$

Kui viimases võrrandis avaldub impulss p otseselt:

$$p = mc$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$m^2 c^2 = m^2 * const$$

milles me näeme väga selgelt seda, et konstant peab võrduma valguse kiiruse ruuduga:

$$c^2 = const$$

Kuna valguse kiiruse ruudu väärtus on:

$$c^2 = 9 * 10^{16} (m/s)^2$$

siis seega ei saa konstant võrduda sellega:

$$c^2 \neq \text{const} = 1,334 * 10^{20} (m/s)^2$$

Antud dilemma ehk vastuolu lahendus seisneb selles, et eelnevalt tuletatud võrrandis:

$$p^2 = m^2 * 9 \frac{G}{k} K$$

olev impulss  $p$  võrdus tegelikult konstandiga:

$$p = \frac{2G}{c}$$

milles energia  $E$  võrdus omakorda konstandiga:

$$2G = E = mc^2$$

Alles siis võime näha seda, et impulss  $p$  avaldub seisuenergia  $E$  kaudu järgmiselt:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc$$

#### 1.14.5.4 Magnetvälja tekkimine

Äärmiselt tähelepanuväärne asjaolu on see, et eespool tuletatud elementaarlaengu  $e$  ligikaudse väärtuse valemist:

$$\frac{1}{3E^2} = \frac{2G}{3c} = \frac{p}{3} \approx q = e$$

ehk

$$\frac{2G}{3c} \approx e$$

on reaalselt võimalik tuletada ka näiteks elektroni magnetmomenti kirjeldava valemi, mis kinnitab antud võrrandi kehtivust. Näiteks viimase võrrandi mõlemad pooled jagame massiga  $m$ :

$$\frac{1}{m} \frac{2G}{3c} = \frac{e}{m}$$

Järgnevalt viime kordaja 2 võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{m} \frac{G}{3c} = \frac{e}{m} \frac{1}{2}$$

ja niisamuti ka tekkinud impulssi  $mc = p$  viime võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{G}{3} = \frac{e}{m} \frac{1}{2} mc = \frac{e}{m} \frac{1}{2} p$$

Korrutame saadud võrrandi mõlemad pooled  $x$ -ga:

$$x \frac{G}{3} = \frac{e}{m} \frac{1}{2} p x$$

ja kui me arvestame viimases võrrandis kvantmehaanikast tuntud määramatuse seosega:

$$p x = h$$

siis olemegi matemaatiliselt tuletanud mikroosakese magnetmomenti kirjeldava võrrandi, mis näitab osakese oma enda magnetvälja tekkimist:

$$r \frac{G}{3} = \frac{e}{m} \frac{h}{2} = \mu_s$$

Viimasest on võimalik tuletada tegelikult „üldisem“ valem ehk aatomituuma ümber tiirleva elektroni magnetmomendi ja impulsimomendi vahelise seose, kui me avaldame Plancki konstandi  $h$  järgmiselt:

$$h = p x = m v x = m v r = L$$

milles  $L$  on impulsimoment. Tulemuseks saame valemi:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{m} \frac{1}{2} \vec{L}$$

milles  $L$ -il võib olla kaks võimalikku erinevat väärtust:

$$L = \begin{cases} h \\ h m \end{cases}$$

See tähendab seda, et kui  $L$  võrdub  $h$ -iga, siis saame tulemuseks elektroni magnetmomendi võrrandi  $\mu_s$ . Kui aga  $L$  võrdub  $h m$ -iga ehk kvantmehaanikas tuletatud impulsimomendiga, siis saame elektroni orbitaalse magnetmomendi võrrandi  $\mu_B$ . Elektroni orbitaalse magnetmomendi võrrandi saame ka siis kui me eelnevalt tuletatud elektroni magnetmomendi võrrandis:

$$\mu_s = \frac{e}{m} \frac{h}{2} = \frac{e h}{2 m}$$

lihtsalt korrutame mõlemad pooled massiga  $m$ , siis saamegi elektroni orbitaalse magnetmomendi:

$$\mu_s m = \frac{e h}{2 m} m = \mu_B$$

Korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled seekord magnetinduktsiooniga  $B$ , tulemuseks saame energia  $E$  võrrandi:

$$\mu_B B = \left( \frac{e h}{2 m} m \right) B = E$$

Viimane valem näitab meile seda, et magnetmomendiga  $\mu$  osake omab magnetväljas induktsiooniga  $B$  energiat  $E$ . Seda avaldatakse füüsikas sageli ka kujul:

$$U = -\vec{\mu} \vec{B}$$

millega kaudu on leitav ka magnetväljas mõjuv jõud  $F$ :

$$\vec{F} = -\text{grad } U = \text{grad}(\vec{\mu}\vec{B})$$

Mittehomogeense magnetvälja korral avaldub see jõud  $F$  järgmiselt:

$$\vec{F} = \mu_B \nabla B$$

Siinkohal võiks mainida ka veel seda, et kui me korrutame energia  $E$  võrrandit teguriga  $g$ , siis saame kvantmehaanikas tuletatud valemi range Zeemani efekti teoorias kirjeldavatele energia-nivoode lõhustumiseks:

$$E = \frac{ehB}{2M} m_j g$$

Viimane sarnaneb eespool toodud valemiga, mille erinevus seisneb ainult selles, et energia  $E$  sõltub kogumomendi projektsioonist  $m_j$  ja güromagnetilisest kordajast ehk Landè tegurist  $g$ , mis iseloomustab magnetmomendi ja kogumomendi vahelist seost ning sõltub orbitaalsest momendist ja ka spinnist. Elektroni magnetmoment on võrdne Bohri magnetroniga, mis on elektroni magnetmomendi loomulikuks ühikuks aatomis. Bohri magnetroni väärtus on kvantmehaanikas üldteada:

$$\frac{e}{m_{el}} \frac{h}{2} = \mu_s = \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$$

Elektroni magnetmomendi matemaatiline tuletamine näitab selgelt seda, et magnetväli on tegelikult oma olemuselt „tsentraalsümmeetrilise energiavälja kvantmehaaniline järeldus“. Klassikalises elektromagnetismi õpetuses defineeritakse magnetvälja kui ruumis liikuva elektrilaengu väljana ehk liikuva elektriväljana. Mikroosakese magnetmomenti ehk kvantosakese oma enda magnetvälja kirjeldavast valemist:

$$\mu_s = \mu_B = \frac{e}{m} \frac{h}{2}$$

on võimalik matemaatiliselt tuletada magnetvälja kirjeldavaid üldisemaid valemeid, mis kinnitabki väidet, et magnetväli on tegelikult oma olemuselt tsentraalsümmeetrilise energiavälja kvantmehaaniline järeldus. Näitame seda järgmise lihtsa ja lühikese analüüsi kaudu. Näiteks viimases osakese magnetmomendi valemis nähtub osakeste tuntud määramatuse relatsioon kujul:

$$\frac{h}{2} = px = mvx$$

Sellest tulenevalt taandame massid  $m$  võrrandist välja:

$$\mu_s = \frac{e}{m} mvx = \frac{m}{m} evx$$

ehk saame

$$\mu_s = evx = qvr$$

Saadud viimane seos, mis kirjeldab kvantosakese oma enda magnetvälja tekkimist:

$$\mu_s = qvr$$

kattub täielikult klassikalisest mehaanikast tuntud impulssmomendi  $L$  võrrandiga:



$$L = mvr$$

kui elektrilaengu  $q$  asemel oleks osakese mass  $m$ . Klassikalisest mehaanikast tuletatud „kesktõmbejõud“  $F$ :

$$F = ma = \frac{p}{t} = \frac{mv^2}{r}$$

annabki meile impulssmomendi  $L$  võrrandi:

$$pr = mvr = mv^2t = L$$

Plancki konstant  $h$  ühtib impulssmomendi  $L$  dimensiooniga:

$$px = Et = h$$

Kuna näiteks elektroni magnetmoment võrdub aatomis Bohri magnetroniga, siis sellest tulenevalt võib kirjutada ka järgmise võrduse:

$$qvr = \frac{mv^2}{B} = \frac{ma_k r}{B} = \frac{F}{B} r$$

ehk saame

$$qvB = \frac{mv^2}{r} = ma_k = F$$

See tuleneb sellest, et elektron tiirleb ümber aatomi tuuma ja seetõttu tekitab elektron oma liikumisega ehk tiirlemisega aatomis magnetvälja ehk aatomil on seega samuti magnetväli. Viimasest on võimalik saada võrdus:

$$mv = qBr$$

millest omakorda tuletatakse mikroosakeste „erilaengu“ arvutamise valem:

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{Br}$$

Kuid eelnevalt tuletatud jõu  $F$  valem:

$$F = qvB$$

kattub täielikult elektromagnetismi füüsikast tuntud Lorentzi jõu valemiga:

$$F = qvB \sin\alpha$$

milles magnetvälja jõudu näitav  $B$  on magnetinduksioon ja antud juhul on  $\sin\alpha = 1$  ehk

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Lorentzi jõu valem tuleneb tegelikult omakorda Ampère'i seadusest ehk Ampère'i seadusest tuletatakse Lorentzi jõudu kirjeldavat valemit. Näitame seda lühidalt järgmiselt. Näiteks absoluutselt igasugune elektrilaeng on elementaarlaengu  $e$  täisarvkordne:

$$eN = qN = Q$$

milles  $N$  on laengukandjate arv. See  $N$  tuleneb omakorda valemist:

$$n = \frac{N}{V}$$

ehk

$$N = n V = n l S = n v t S$$

milles  $n$  on laengukandjate kontsentratsioon,  $v$  on laengukandjate kiirus,  $l$  on näiteks juhtmelõigu pikkus ja  $S$  on sellest tulenevalt juhtmelõigu ristlõikepindala. Sellest tulenevalt saame elektrilaengu  $q$  esitada kujul:

$$Q = q n v t S$$

ja seega elektrivoolu saame:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{q n v t S}{t} = q n v S$$

Lorentzi jõud on magnetjõud, mis avaldub ainult ühe laengukandja kohta:

$$F = q v B \sin \alpha$$

Kuid laengukandjate kontsentratsioon  $n$  näitab laengukandjate arvu aine ruumalaühikus:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N}{S l}$$

milles  $N$  on laengukandjate arv ja  $V$  on vaadeldav ruumala:

$$N = n S l$$

Kui me korrutame Lorentzi jõu  $F$  laengukandjate arvuga  $N$ , siis saame näiteks sellise magnetjõu, mis mõjub liikuvatele laetud osakestele  $n$  silindrilises juhtmelõiguses pikkusega  $l$  ja otspinna pindalaga  $S$ :

$$F = B q n v S l \sin \alpha$$

ja kui esitame selles oleva voolutugevuse  $I$  eespool tuletatud võrrandina:

$$I = q n v S$$

siis saamegi magnetvälja jõudu  $F$  kirjeldava Ampère'i seaduse:

$$F = B I l \sin \alpha$$

Saadud viimane valem võrdub ka kahe paralleelse sirgjuhtme vahelise magnetvälja jõudu  $F$  kirjeldava valemiga järgmiselt:

$$F = K \frac{I_1 I_2 l}{d}$$

milles magnetinduktsioon  $B$  ehk  $B$ -vektor avaldub kujul:

$$B = \frac{F}{I l} = K \frac{I}{d}$$

ja konstandi  $K$  väärtus on SI-süsteemis:

$$K = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 * 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

ning magnetkonstant võrdub:

$$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

Järgnevalt näitame seda, et elektrivälja ja magnetvälja jõu suurust kirjeldavad konstandid erinevad suuruste poolest üksteisest sarnaselt nii nagu mass ja energia seisuenergia võrrandis. Näiteks elektrivälja kirjeldavast Coulomb'i seadusest saame võrdeteguri k:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

milles elektrivälja elektriline konstant avaldub:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$$

Võrdetegur k magnetvälja korral on järgmiselt:

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

milles magnetiline konstant on väärtusega:

$$\mu_0 = 2\pi k = 4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

Elektrilise ja magnetilise konstantide korrutis annab meile järgmise väga huvitava tulemuse:

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}}{4\pi * 9 * 10^9 \frac{N^2 m}{(As)^2}} = \frac{1}{9 * 10^{16} \left(\frac{m}{s}\right)^2} = \frac{1}{c^2}$$

See tähendab seda, et nende kahe konstantide korrutis on pöördvõrdeline valguse kiiruse ruuduga:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$$

ehk

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Viimasest on näha seda, et magnetilise konstandi suurus erineb elektrilise konstandi suurusest järgmise seose tõttu:

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

mis tähendab füüsikaliselt seda, et elektrivälja ja magnetvälja tugevust kirjeldavad konstandid erinevad üksteisest valguse kiiruse ruuduga, moodustades omakorda kokku seisuenergia definitsiooni (s.t. valemi). Näiteks kui me eelnevalt saadud valguse kiiruse ruudu võrrandis:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$$

korrutame mõlemad pooled massiga m, saamegi seisuenergia avaldise:

$$mc^2 = E = \frac{m}{\epsilon_0\mu_0}$$

Kuna elektriline konstant avaldub järgmiselt:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$$

siis saame seisuenergiaks:

$$mc^2 = \frac{m}{\mu_0} 4\pi k$$

ehk

$$E = \frac{4\pi}{\mu_0} mk$$

Teades magnetilise konstandi väärtust:

$$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

saamegi tuletada erirelatiivsusteooriast tuntud seisuenergia E võrrandi:

$$E = m \frac{k}{10^{-7}} = m \frac{9 * 10^9}{10^{-7}} = mc^2$$

ehk

$$E = mc^2$$

Eelneva füüsikalise analüüsi sisu seisneb selles, et elektrivälja ja magnetvälja jõu suurust kirjeldavad konstandid ( elektriline ja magnetiline konstant ) erinevad suuruste poolest üksteisest sarnaselt nii nagu mass ja energia seisuenergia võrrandis.

#### **1.14.5.5 Elektromagnetilise energia füüsikaline ja matemaatiline analüüs**

Järgnevalt uurime pikemalt ja sügavamalt elektromagnetilise energia seost seisuenergiaga. Näiteks vaakumis tekkivat magnetvälja kirjeldab magnetvälja tugevus H:

$$H = \frac{B_0}{\mu_0 \mu}$$

milles B on magnetinduktsioon ja  $\mu_0$  on magnetkonstant. Selle kaudu avaldub magnetinduktsioon B järgmiselt:

$$\mu_0 \mu H = B_0$$

Kuna elektrivälja energia E avaldus elektrivälja tugevuse  $E_T$  ja elektrikonstandi  $\varepsilon_0$  kaudu:

$$E = \frac{\varepsilon_0 E_T^2}{2} V$$

siis analoogiliselt peaks ka magnetvälja energia E avalduma magnetvälja tugevuse H ja magnetkonstandi  $\mu_0$  kaudu:

$$E = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V$$

Seda tõestame järgmise seose näitel

$$E = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V$$

milles  $I$  on pooli voolutugevus,  $L$  on pooli induktiivsus,  $H$  on magnetvälja tugevus,  $V$  on magnetvälja ruumala ja  $\mu_0$  on magnetiline konstant. Pooli induktiivsus  $L$  (näiteks solenoidi korral) avaldub aga omakorda:

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$$

milles  $\mu$  on solenoidi südamik magnetiline läbitavus,  $N$  keerdude arv,  $S$  solenoidi ristlõike pindala,  $l$  selle pikkus ja  $\mu_0$  on magnetiline konstant. Sellest tulenevalt avaldub pooli (solenoidi) magnetvälja induksioon  $B$  järgmiselt:

$$B = \frac{\mu_0 \mu NI}{l}$$

mis annab meile magnetvälja energiaks  $E$ :

$$E = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} \tau$$

kus pooli ruumala  $V$  on:

$$\tau = Sl = V$$

Magnetvälja energia ruumtihedus on seega:

$$\frac{E}{V} = \omega = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}$$

Kuna magnetvälja induksioon  $B$  avaldub ka seosena:

$$B = \mu_0 \mu H$$

siis saame magnetvälja energia ruumtiheduse valemiks:

$$\omega = \frac{BH}{2}$$

ehk

$$\omega = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

Järelikult magnetvälja energia ise avaldub järgmiselt:

$$E = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V$$

Magnetväli on ruumis liikuv elektriväli. Elektrivälja energia  $E$  avaldub järgmiste tuntud valemitega:

$$E = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E_T^2}{2} V$$

ja selle energiatihedus  $\omega$  on:

$$\frac{E}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_T^2}{2} = \omega$$

milles  $E_T$  on elektrivälja tugevus.

Elektrilaengu ja elektromagnetlaine elektrivälja energiatihedused on oma olemuselt üks ja sama. Näiteks erimärgiliselt laetud pindade vahelises ruumis eksisteerib ka magnetväli, mitte ainult liikuvate laengute (näiteks vooluga juhtmete) ümber. Magnetväli eksisteerib seega ka laengukandjate puudumise korral. Näiteks ühe laaduva pinna tugevnev elektriväli paneb laengud teisel pinnal liikuma. Seda nimetatakse nihkevooluks. Positiivse ja negatiivse pinna vahelise ruumi läbiva nihkevoolu korral kaasneb elektrivälja muutumisega magnetväli. Kuid vahelduvvoolu läbimine erinimeliselt laetud pindade vahelisest ruumist saab toimuda ainult muutuva elektrivälja vahendusel. Elektrivälja muutumise tagajärjel tekib magnetväli sõltumatult muutuva elektrivälja päritolust. See tähendab, et muutuva elektrivälja levik toimub magnetvälja vahendusel. Niimoodi esinebki positiivse ja negatiivse pinna vahel magnetväli, mille jõujooned parempoolsete pööristena ümbritsevad elektrivälja muutumise suunda.

Elektri- ja magnetvälja üksteise muutumine levib ruumis edasi lainena. Elektromagnetlaine energia  $E$  avaldub elektrivälja ja magnetvälja energiatega summana:

$$E = E_E + E_H = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_T^2}{2} V + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V$$

ja sellest tulenevalt saame elektromagnetlaine energiatiheduseks:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_T^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

milles kehtib võrdus

$$\omega_E = \omega_H$$

Ruumis liikuval elektromagnetlainel endal ei ole elektrilaengut, kuid elektrivälja tugevus avaldus elektrilaengu  $q$  korral järgmiselt:

$$E_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{r^2}$$

ja magnetvälja tugevus  $H$  oli avaldatav:

$$H = \frac{B}{\mu_0\mu}$$

milles magnetvälja induksioon  $B$  on näiteks solenoidi korral:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

kus  $I$  on defineeritud elektrivooluna:

$$I = \frac{q}{t}$$

Eelneva põhjal saame elektromagnetlaine energiatiheduse  $\omega$  kirjutada ka järgmisel kujul:

$$\omega = 2\omega_E = \varepsilon_0 \varepsilon E_T^2$$

Seda sellepärast, et elektromagnetlaine energiatihedus võrdus laine elektri- ja magnetvälja energiatiheduste summaga:

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E_T^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

milles

$$\omega_E = \omega_H$$

ehk

$$E_T \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H \sqrt{\mu_0 \mu}$$

Sellest tulenevalt saame vaakumis liikuva elektromagnetlainete energiatiheduse vörrandi:

$$\omega = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} E_T H$$

Elektromagnetlainete või välja muutuse levimise kiirus vaakumis avaldub elektri- ja magnetkonstantidega:

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = v = c$$

Sellest tulenevalt saame laine energiatiheduse seoseks:

$$\omega = \frac{EH}{v} = \frac{EH}{c}$$

milles väli liigub vaakumis valguse kiirusega:  $v = c$ . Viimase vörrandi mõlemad pooled jagame  $c^2$ -ga:

$$\frac{\omega}{c^2} = \frac{EH}{c^3}$$

Kuna  $\omega$  on välja energia(tihedus) ja  $c^2$  on valguse kiirus ruudus, siis  $E = mc^2$  järgi peaks välja mass avalduma järgmiselt:

$$\frac{EH}{c^3} = m$$

Seetöttu saamegi tuntud seose

$$\frac{\omega}{c^2} = m$$

mis väljendab massi ja energia ekvivalentsust:

$$\omega = E = mc^2$$

Eelnev tuletuskäik näitab väga selgelt seda, et erirelatiivsusteooriast tuntud seisuenergia avaldis on otseselt tuletatav ka elektromagnetvälja energiast ja seisuenergia näitab peale keha massi energiat ka veel välja energiat. Sellest järeldatakse ka elektromagnetvälja impulsi olemasolu:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{EH}{c^2}$$

ehk

$$p = mv = mc = \frac{EH}{c^2}$$

millega järgi välja mass  $m$  avaldubki seosena:

$$m = \frac{EH}{c^3}$$

Tähelepanuväärne on see, et kui me viimases võrrandis kirjutame elektrivälja tugevuse  $E$  ja magnetvälja tugevuse  $H$  korrutise lahti, siis saame tuletada klassikalisest mehaanikast tuntud kineetilise energia valemi  $E_k$ . Näiteks elektrivälja energia  $E$  võrrandist:

$$E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_T^2}{2}$$

saame kätte elektrivälja tugevuse avaldise:

$$E_T = \sqrt{\frac{2E}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}}$$

Täpselt sama on ka magnetvälja tugevuse  $H$  avaldise esitamisega:

$$H = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{\mu_0 \mu}}$$

Sellest tulenevalt saame elektrivälja tugevuse ja magnetvälja tugevuse korrutise  $EH$  avaldada kujul:

$$EH = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}} \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} = \sqrt{2E} \sqrt{2E} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = 2Ev = 2Ec$$

milles väli liigub vaakumis valguse kiirusega:  $v = c$ . Kuna saime seose

$$EH = 2Ec$$

siis saame energia avaldiseks  $2E$ :

$$\frac{EH}{c} = 2E$$

mis kattub eespool saadud elektromagnetvälja energiatiheduse  $2E = 2\omega$  avaldisega:

$$\omega = 2\omega_E = \varepsilon_0 \varepsilon E_T^2$$

Viimases võrrandis arvestatakse nii elektrivälja kui ka magnetvälja energiatihedust. Sellest tulenevalt saame välja massi  $m$  avaldada kujul:

$$m = \frac{EH}{c^3} = \frac{2Ec}{c^3} = \frac{2E}{c^2}$$

millegi nähtubki klassikalisest mehaanikast tuntud kineetilise energia valem:

$$E = \frac{mc^2}{2}$$

Kuna eelnevalt saime tuletada ka tuntud seisueenergia seose:

$$E = mc^2$$

siis seega peab kehtima järgmine võrdus:

$$E_k = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$



mis oli juba tuletatud ja analüüsitud eespool olevas erirelatiivsusteooria osas. See kinnitab seisukohta, et seisuenergia on oma olemuselt kineetiline energia liikuva aja suhtes. Viimasest võrrandist on võimalik tuletada ka järgmine lahend:

$$E = mc^2 = 2(mc^2) = m_1c^2 + m_2c^2$$

mis antud kontekstis tähendab ruumis kiirusega  $c$  liikuva elektromagnetvälja energiat  $E$  ehk elektrivälja  $m_1$  ja magnetvälja  $m_2$  energiatega summat  $E$ .

#### 1.14.5.6 Tugev interaktsioon ehk „tuumavälja“ kirjeldav valem

Eespool tuletatud elektromagnetilise ja tugeva interaktsiooni suhet kirjeldavast peenstruktuuri-konstandist  $\alpha$  on võimalik tuletada tugevat interaktsiooni ehk aatomi tuumajõudu kirjeldavat valemit. Selleks teeme alguses järgmise lihtsa teisenduse:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = k \frac{e^2}{\hbar c}$$

ehk saame peenstruktuurikonstandi  $\alpha$  valemi kujuks:

$$\alpha = k \frac{e^2}{\hbar c}$$

milles  $k$  on tuntud elektriline võrdetegur elektrostaatikat kirjeldavast Coulomb'i seadusest. Kuid järgnevalt analüüsiks jagame saadud viimase võrrandi mõlemad pooled raadiuse  $r$  ruuduga:

$$\frac{\alpha}{r^2} = k \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{r^2} = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\hbar c r}$$

Tulemuseks saame järgmise avaldise:

$$\frac{\alpha}{r^2} = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\hbar c r} = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\hbar c r} = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\hbar m c^2 t c}$$

Järgnevalt viime liikme  $c^2 t$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{\alpha}{r^2} c^2 t = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\hbar m c}$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled Plancki konstandiga  $\hbar$ :

$$h \frac{\alpha}{r^2} c^2 t = k \frac{e^2}{r} \frac{h}{r m c} = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\frac{r m c}{h}}$$

ehk

$$h \frac{\alpha}{r^2} c^2 t = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\frac{r m c}{h}}$$

Saadud võrrandi vasak pool võrdub omakorda järgmiselt:

$$\frac{c^2 t h}{r^2} = E$$

ehk

$$h \frac{\alpha}{r^2} c^2 t = \frac{c t}{r^2} c h \alpha = \frac{c h \alpha}{r}$$

ehk

$$\frac{c h \alpha}{r} = c \frac{h}{r} \alpha = c \frac{p x}{r} \alpha = c p \alpha = p c \alpha = E \alpha$$

ehk

$$\frac{c h \alpha}{r} = E \alpha$$

milles E täistab energiat ja  $\alpha$  on meile juba tuntud peenstruktuurikonstant. Tulemuseks saamegi energia võrrandi:

$$E \alpha = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\frac{r m c}{h}}$$

Kui me aga oletame, et seisumass  $m$  võrdub nulliga, siis saame tulemuseks lõpmata suure energia  $E$ :

$$E \alpha = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\frac{r 0 c}{h}} = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{0} = \infty$$

Kuna selline tulemus on füüsikaliselt ebareaalne, siis selle vältimiseks peame tegema mõningaid matemaatilisi teisendusi. Näiteks viimases võrrandis olev kordaja liige võrdub tegelikult ühega 1:

$$\frac{1}{\frac{r m c}{h}} = \frac{h}{r m c} = 1$$

See tuleneb puhtalt sellest, et viimane võrdus on tuletatav määramatuse relatsiooni valemist:

$$h = r m c = r p$$

ehk  $p x = h$ . Avaldame selle viimase võrrandi järgmiselt:

$$1 = \frac{p x}{h}$$

Kvantmehaanikas avaldatakse see ka funktsioonina:

$$\psi = A e^{i \frac{p x}{h}}$$

kuna matemaatikas kehtib reegel  $x = e^{ix}$ , milles  $e$  on „matemaatiline konstant“ tuntud Euleri piirväärtuse valemist:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

või

$$\frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Selle konstandi  $e$  väärtus on  $e = 2,71828$ . Lainefunktsioonid kvantmehaanikas

$$\psi(x) = Ae^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

ehk

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

mis antud juhul kirjeldab  $x$ -telje sihis liikuvat vaba osakest impulsiga  $p = \hbar k$  ja energiaga  $E = \frac{p^2}{2M}$ , on tegelikult diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{ip}{\hbar} dx$$

lahendiks. Kui me aga viimases võrrandis eraldame muutujad järgmiselt:

$$-i\hbar \frac{d\psi}{dx} = p\psi$$

siis me näeme seda, et tegemist on impulsioperaatori omaväärtusülesandega:  $\hat{p}\psi = p\psi$ , milles impulsi operaator on:

$$\hat{p} = \hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

Täpselt samasugune põhimõtteline analüüs kehtib ka eespool esitatud avaldise korral:

$$1 = \frac{\hbar}{rmc} = \frac{1}{\frac{rmc}{\hbar}} = \frac{1}{\frac{px}{\hbar}} = \left(\frac{px}{\hbar}\right)^{-1}$$

ehk seda on võimalik esitada samuti funktsioonina:

$$\psi = Ae^{-i\frac{px}{\hbar}}$$

milles  $A = 1$  on normeerimiskordaja. Peab märkima seda, et siin on arvestatud matemaatilist seost:

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

Sellest tulenevalt võime eespool tuletatud võrrandi:

$$E\alpha = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{\frac{rmc}{\hbar}}$$

kirjutada kujule:

$$E\alpha = k \frac{e^2}{r} e^{-i\frac{px}{h}}$$

Kuna peenstruktuurikonstandi  $\alpha$  väärtus on ligikaudu:

$$\alpha \approx \frac{1}{137}$$

ja kui väljaosakese seisumass  $m$  on null ehk seega kordaja liige  $e$  võrdub ühega:

$$e^{-i\frac{px}{h}} = e^{-i\frac{rmc}{h}} = e^0 = 1$$

siis saame võrrandi kujuks:

$$E\alpha = \frac{E}{137} = k \frac{e^2}{r} = E_{el}$$

ehk

$$E\alpha = E_{el}$$

Viimane ühtib elektrivälja potentsiaalse energia definitsiooniga ja sellest võrrandist on võimalik matemaatiliselt tuletada peenstruktuurikonstandi  $\alpha$  väärtus:

$$\alpha = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{E} = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{mc^2} = k \frac{e^2}{r} \frac{1}{pc} = k \frac{e^2}{hc} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 hc} \approx \frac{1}{137}$$

Elektrivälja osakese ehk virtuaalse footoni seisumass ongi null ja elektromagnetiline jõud on tugevast jõust 137 korda nõrgem. Kui me aga oletame seda, et kordaja liige ei võrdu tegelikult ühega ehk väljaosakese seisumass  $m$  ei olegi enam null:

$$e^{-i\frac{px}{h}} \neq 1$$

siis jääb meile võrrand:

$$E\alpha = E_{el} e^{-i\frac{px}{h}} = k \frac{e^2}{r} e^{-i\frac{px}{h}}$$

ehk

$$\frac{E\alpha}{k} = \frac{e^2}{r} e^{-i\frac{px}{h}}$$

milles elementaarne elektrilaeng  $e$  ja kordaja liige  $e$  ei ole üks ja sama:

$$e^2 \neq e^{-i\frac{px}{h}}$$

ja ei kehti enam ka võrdus:

$$E\alpha \neq E_{el}$$

Saadud võrrandi kordaja liikmes  $e^{-i\frac{px}{h}}$  võime imaginaarühiku  $i = \sqrt{-1}$  jätta üldse arvestamata:  $e^{-\frac{px}{h}}$ , kuna meil on tegemist reaalse ehk virtuaalse väljaosakesega, mitte „imaginaarse väljaosakesega“. Imaginaarühiku  $i$  välja jätmist võib põhjendada ka sellega, et näiteks vesiniku aatomi põhiolekut kirjeldava radiaalfunktsiooni võrrandist:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{\sqrt{r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}}$$

ehk

$$R = \frac{2}{\sqrt{r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}}$$

milles  $r_0$  on nn „Bohri raadius“  $r_0 = \frac{h^2}{Mbe^2}$  ja elektriline võrdetegur on  $b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$ , saame teisendades avaldise:

$$\frac{1}{2}\sqrt{r_0^3} = \frac{\sqrt{r_0^3}}{2} = \frac{1}{R} e^{-\frac{r}{r_0}}$$

millega viimane osa kattub peaaegu täielikult eespool tuletatud energia võrrandi matemaatilise konstandi e kordaja osaga:

$$\frac{E\alpha}{k} = \frac{e^2}{r} e^{-i\frac{px}{h}}$$

ehk

$$\frac{E\alpha}{ke^2} = \frac{1}{r} e^{-i\frac{px}{h}} = \frac{1}{r} e^{-i\frac{r}{r_0}} = \frac{1}{R} e^{-i\frac{r}{r_0}}$$

Erinevus seisneb ainult selles, et  $r_0 = \frac{h}{p} = \lambda$  ja radiaalfunktsiooni valemis puudub imaginaarühik  $i$  ning seetõttu jätame ka meie selle  $i$  siin välja. Kuid meie eespool tuletatud „energia“ võrrand ( seekord ilma imaginaarühikuta  $i$  )

$$E\alpha = k \frac{e^2}{r} e^{-\frac{px}{h}}$$

ehk

$$\frac{E\alpha}{k} = \frac{e^2}{r} e^{-\frac{px}{h}}$$

ehk

$$\frac{E\alpha}{ke} = \frac{e}{r} e^{-\frac{px}{h}} = U(r)$$

ühitib aatomituuma potentsiaali kirjeldava võrrandiga  $U(r)$  ja seetõttu pole võrrandis tegemist enam elementaarse elektrilaenguga  $e$ , vaid „tuumalaenguga“  $g$ :  $e^2 \rightarrow g^2$ . See tähendab ka seda, et kui interaktsiooni vahendava väljaosakese liik muutub, siis muutub ka välja tekitava laengu liik. Potentsiaal võetakse füüsikas enamasti negatiivseks ja seega saame tuumavälja potentsiaali võrrandi:

$$U(r) = -\frac{g}{r} e^{-\frac{px}{h}}$$

või

$$U(r) = -\frac{g^2}{r} e^{-\frac{px}{h}}$$

Kuna me saime tuumapotentsiaali kirjeldava võrrandi, siis seisumassiga väljaosake on ilmselt „gluon“, mis vahendabki tugevat interaktsiooni. Tugev jõud avaldub ainult tõmbumises. Siinkohal peab märkima seda, et väljaosakese seisumass määrabki ära interaktsiooni mõju raadiuse ja ka tugevuse. Näiteks elektrivälja jõud on lõpmatu mõjuraadiusega:

$$\frac{1}{r^2} = r^{-2}$$

ja niisamuti ka vastav potentsiaal:

$$\frac{1}{r} = r^{-1}$$

kuna interaktsiooni vahendava virtuaalse osakese ehk footoni seisumass on null. Kui aga väljaosakese mass ei ole null, siis potentsiaali käik on:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

milles  $r_0$  ongi interaktsiooni mõju raadius ja  $m$  on väljaosakese mass. Tuumapotentsiaali ehk Yukawa potentsiaali  $U$  kirjeldavat võrrandit esitatakse erinevates allikates sageli ka kujul:

$$U_t \sim \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{a}}$$

ehk

$$U_t(r) \sim -g \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

milles  $\lambda$

$$a = \frac{h}{mc} = \frac{h}{p} = \lambda$$

on kvantfüüsikast tuntud de Broglie` lainepikkus. Yukawa potentsiaali esitatakse vahel ka kujul:

$$V_{Yukawa}(r) = -g^2 \frac{e^{-kmr}}{r}$$

milles  $k$

$$k = \frac{c}{h}$$

sisaldab valguse kiiruse  $c$  ja Plancki konstandi  $h$  jagatist. See  $k$  ise on samuti konstant. Viimastest võrranditest on näha seda, et „tuumaväli“ on täpselt sama tsentraalsümmeetriline nagu osakese laengu elektriväli. Kogu eelnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs näitab seda, et „tuumaväli“ on matemaatiliselt tuletatav elektriväljast ehk tugev interaktsioon on tsentraalsümmeetrilise energia välja kvantmehaaniline järeldus. Väär oleks tõlgendada nii, et elektriväli oleks kuidagi tulenev „elektrotugevast interaktsioonist“ ehk elektromagnetilist ja tugevat jõudu vahendavast ühtsest väljast.

Tuumavälja potentsiaali  $U$  võrrandis:

$$U(r) = -\frac{g^2}{r} e^{-\frac{r}{a}}$$

on konstant  $g$  „tuumalaeng“, mis „tekitab“ tugeva jõu välja, ja  $m$  on tugevat interaktsiooni vahendava osakese mass ( antud juhul gluuoni mass ). Teades tugeva interaktsiooni mõju raadiust  $a$  ja Bohri raadiust, on võimalik viimasest võrrandist välja arvutada tuumalaengu  $g$  ligikaudse väärtuse ja samas ka gluuoni massi. Tuumalaeng  $g$  on tegelikult „seosekonstant“, mis on saadav ka Weinberg-Salami mudelist:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

See võrrand näitab nõrga interaktsiooni seost seoskonstandi  $G$  eksperimentaalse väärtusega, milles  $v$  on „vaakumkeskmise“ energia  $v = 246 \text{ GeV}$ ,  $M_W = \frac{37,3}{\sin\theta_W} \text{ GeV}$  ja  $M_Z = \frac{74,6}{\sin\theta_W}$ . Viimasest võrrandist saamegi konstandi  $g$  väärtuse:

$$\sqrt{\frac{8M_W^2}{2v^2}} = \sqrt{\frac{8GM_W^2}{\sqrt{2}}} = g$$

Weinberg-Salami mudeli ehk „elektronõrk ühendmudeli“ järgi on elementaarlaeng  $e$  ja tuumalaeng  $g$  omavahel seotud järgmiselt:

$$e = g \sin\theta_W$$

ehk

$$\frac{e}{g} = \sin\theta_W$$

milles „nurga“ väärtus on:

$$\sin\theta_W = \frac{37,3}{M_W}$$

ja mass  $M_W$  avaldub:

$$M_W = \frac{1}{2}vg$$

Nurka  $\theta_W \approx 13,5^\circ$  nimetatakse kvantväljade füüsikas Weinbergi nurgaks. Kuna mass  $M_W$  avaldus „Weinberg-Salami mudelis“ seosena:

$$M_W = \frac{vg}{2}$$

siis saame eespool tuletatud  $g$  konstandi väärtuse valemi:

$$\sqrt{\frac{8M_W^2}{2v^2}} = \sqrt{\frac{8GM_W^2}{\sqrt{2}}} = g$$

ümber kirjutada kujule:

$$\sqrt{g^2} = \sqrt{\frac{2v^2g^2G}{\sqrt{2}}} = g$$

ehk

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2}$$

Tuumavälja potentsiaali  $U$  kirjeldavas võrrandi kordaja liikmes:

$$e^{-i\frac{px}{h}} = e^{-i\frac{r}{a}}$$

näitab kvantmehaanikast tuntud avaldis

$$a = \lambda = \frac{h}{p}$$

tuuma vastastikmõju raadiust  $a \approx 1,4 * 10^{-15} m$  või  $a \approx 2 * 10^{-15} m$ . Tuumapotentsiaal ehk Yukawa potentsiaal  $U$  on seotud tuumajõuga  $F$  järgmiselt:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Tuumajõudude energia on umbes  $1,4 * 10^5 eV$  ja tugevat interaktsiooni tekitavad tuumajõu osakesed on gluonid  $\mu^\pm$  massiga  $207 m_e$  ja  $\pi$ -mesonid  $\pi^{\pm 0}$  massiga  $273 m_e$ .

Elektromagnetilise ja tugeva interaktsiooni omavaheline suhe seisneb samuti erirelatiivsusteoo-

riast tuntud seisenergia avaldises. Näitame seda järgmise lihtsa analüüsi kaudu. Näiteks kui tuumavälja kirjeldavas potentsiaali võrrandis:

$$\frac{E\alpha}{k} = U(r) = -\frac{g^2}{r} e^{-i\frac{px}{h}}$$

võrdub kordaja liige ühega:

$$e^{-i\frac{px}{h}} = 1$$

siis saame puhtalt elektrivälja energia  $E$  valemi, mida võib väljendada ka tuntud seisenergia avaldisena:

$$E = k \frac{e^2}{r} = mc^2$$

Kuid seisenergia avaldist on võimalik tuletada ka kordaja liikmest:

$$e^{-i\frac{px}{h}} = 1$$

mis tegelikult näitabki seda, et kui palju kordi erineb tuumajõud elektrijõust. Seda näidata on väga lihtne. Näiteks viimane avaldis on tuletatud järgmisest:

$$\frac{1}{\frac{px}{h}} = \frac{h}{mcx} = 1$$

millest saame omakorda de Broglie` lainepikkuse valemi:

$$h = mcx$$

kui  $x = \lambda$ . Sellest on väga lihtne tuletada seisenergia seos:

$$h = mc * x = mc * ct = mc^2 t$$

ehk saamegi kvandienergia ja seisenergia võrduse:

$$\frac{h}{t} = hf = mc^2 = E$$

Selline analüüs näitab väga selgelt, et elektromagnetilise ja tugeva interaktsiooni jõu vahe tuleneb just seisenergia avaldisest:

$$E = mc^2$$

milles  $m$  on väljaosakese seisumass.

#### **1.14.5.7 Higgsi boson ja selle skalaarväli**



Tähelepanuväärne asjaolu kogu eelneva analüüsi juures on see, et elektromagnetilise, tugeva ja nõrga interaktsiooni vahe seisneb põhimõtteliselt ainult välja osakese massis  $m$ :

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

Välja osakese mass määrab ära ka vastava interaktsiooni mõju raadiuse  $r_0$ , kuid samas erinevatele elementaarosakestele annab omakorda massi „Higsi boson“, mis on kogu Universumi vaakumit täitva „Higsi välja“ osake. Higsi bosonit kirjeldava valemi „tuletamiseks“ alustame eespool tuletatud aatomi tuumavälja potentsiaali  $U$  kirjeldava võrrandiga:

$$\frac{E\alpha}{k} = -\frac{g}{r} e^{-\frac{px}{h}} = U(r)$$

milles  $g$  on tuumalaeng. Kui väljaosakese mass  $m$  võrdub nulliga nagu footoni korral

$$e^{-\frac{px}{h}} = e^0 = 1$$

siis saaksime elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  kirjeldava võrrandi:

$$\frac{E\alpha}{k} = -\frac{g}{r} = U(r)$$

ehk

$$E\alpha = -k \frac{e}{r} = U = \varphi$$

Kuna väljaosakese mass  $m$  võrdus nulliga ( mis on elektrivälja vaheosakese mass ), siis seetõttu „asendasime“ tuumalaengu  $g$  elementaarlaenguga  $e$  ja saime elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  kirjeldava võrrandi:

$$\varphi = k \frac{e}{r}$$

mis enam ei kirjelda aatomi tuumavälja potentsiaali  $U$ . Kuid järgneva analüüsi huvides teeme nii, et asendust me sisse tegelikult ei too ehk me ei asenda tuumalaengut  $g$  elementaarlaenguga  $e$ :

$$\frac{E\alpha}{k} = -\frac{g}{r} e^{-\frac{px}{h}} = -\frac{g}{r} = U(r)$$

ehk

$$U = \frac{g}{r}$$

ehkki väljaosakese mass võrdus meil nulliga. Sellest tulenevalt korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled jagatisega  $\frac{g}{2}$ , mis annab tulemuseks tuumavälja energia  $E$  võrrandi:

$$\frac{gU}{2} = \frac{g^2}{2r} = E$$

See sarnaneb elektrivälja energia  $E$  võrrandiga:

$$\frac{e\varphi}{2} = k \frac{e^2}{2r} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = E$$

milles  $gU$  asemel on lihtsalt  $e\varphi$ . Tõstame tuumavälja energia  $E$  võrrandi

$$E = \frac{gU}{2}$$

mõlemad pooled ruutu:

$$E^2 = \frac{g^2 U^2}{4}$$

ja viime väljapotsiaali  $U$  ruudu võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{E^2}{U^2} = \frac{g^2}{4}$$

Jagame võrrandi mõlemad pooled 2-ga:

$$\frac{E^2}{2U^2} = \frac{g^2}{8}$$

ja viime ka välja energia  $E$  ruudu võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{2U^2} = \frac{g^2}{8E^2}$$

Välja energia  $E$  võib avaldada ka seisuenergia  $E$  võrrandina:

$$E = mc^2$$

ehk antud juhul selle ruuduna:

$$E^2 = m^2 c^4$$

Tulemuseks saame:

$$\frac{1}{2U^2} = \frac{g^2}{8m^2 c^4}$$

Järgnevalt arvestame nüüd sellega, et väljapotsiaal  $U$  ei näita enam tuumavälja potentsiaali, vaid hoopis „vaakumi potentsiaali“  $v$ :  $U = v$  ja sellest tulenevalt saame võrrandi kujuks:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8m^2 c^4}$$

Viimasest selgub, et saadud võrrandis esineb nõrga interaktsiooni vaheosakese ehk vahebosoni mass:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

mis vastupidiselt footoni massile ei võrdu nulliga ja milles energia ja mass  $E = m$  avalduvad gigaelektronvoltides  $\text{eV}$ . Selline analüüs ja tulemus näitab, et tuumavälja potentsiaali  $U$  kirjeldavast võrrandist on võimalik „tuletada“ nõrga interaktsiooni vahebosoni massid. See aga pole sugugi üllatav, sest nõrk jõud vastutab radioaktiivsuse eest, mis on ju vahetult seotud aatomi tuumajõududega. Kuna elementaarlaengu  $e$  ja „tuumalaengu“  $g$  vahel esineb väljade kvantteoorias seos:

ehk

$$e = g \sin\theta_W$$

$$\frac{e}{\sin\theta_W} = g$$

siis saame vahebosoni võrrandis oleva jagatise avaldada järgmiselt:

$$\frac{g^2}{8} = \frac{e^2}{8 \sin^2\theta_W}$$

Järgnevalt analüüsiks tuletame meelde eespool tuletatud peenstruktuurikonstandi  $\alpha$  avaldise. Selles peenstruktuurikonstandi  $\alpha$  võrrandis:

$$\alpha = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\hbar c}$$

viime Plancki konstandi  $\hbar$  ja konstandi  $\alpha$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\hbar = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\alpha c}$$

ja jagame mõlemad pooled impulssiga  $p$ :

$$\frac{\hbar}{p} = \lambda = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\alpha pc}$$

Kuna impulssi  $p$  ja kiiruse  $c$  korrutis võrdub energiaga  $E$ :  $pc = E$ , siis saame lainepikkuse  $\lambda$  valemi kirjutada kujule:

$$\lambda = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\alpha E}$$

Kui nüüd võrrelda viimast võrrandit eespool tuletatud valemiga:

$$\frac{g^2}{8} = \frac{e^2}{8 \sin^2\theta_W}$$

siis võib kehtida võrdus:

$$\frac{e^2}{8 \sin^2\theta_W} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\alpha E}$$

kuid seda tingimusel, et:

$$\sin^2\theta_W = \pi\epsilon_0\alpha E$$

Sellest tulenevalt saame lainepikkuse  $\lambda$  võrrandi kujuks:

$$\frac{g^2}{8} = \lambda$$

Seetõttu võime eespool „tuletatud“ nõrga interaktsiooni vahebosoni võrrandi:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

kirjutada ka kujule:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{\lambda}{m^2}$$

Teisendame viimast võrrandit järgmiselt:

$$m^2 = 2\lambda v^2$$

ehk saame sellise valemi

$$m = \sqrt{2\lambda v^2}$$

mis „ühtib“ väljade kvantteooriast tuletatava Higgsi bosoni kirjeldava valemiga:

$$m_h = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Viimases on  $\mu$  välja osakese mass ja  $\lambda$  ei olegi tegelikult lainepikkus ehk

$$\lambda \neq \frac{h}{p}$$

vaid see on *teatud* omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( *neljane tipp* ) ja see ei ole mõõdetav. Higgsi boson

$$m = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

on kogu Universumi vaakumit täitva Higgsi välja osake. Viimasest võrrandist saame omakorda vaakumi potentsiaali v võrduse:

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

milles  $\mu$  on välja osakese „mass“. Tähistame vaakumi potentsiaali sarnaselt elektrivälja potentsiaaliga:  $v = \varphi$  ja teisendame viimast võrrandit järgmiselt:

$$\varphi^2 \lambda = -\mu^2$$

Tulemuseks saame võrrandi:

$$\mu^2 + \varphi^2 \lambda = 0$$

mis näitab seda, et Higgsi välja moodustab tegelikult kaks vaakumit ehk välja. Need kaks omavahel võrdselt vaakumit kompenseerivad üksteist nii, et kokku saame ühe null-potentsiaaliga välja. Näiteks kui korrutame võrrandi mõlemad pooled vaakumi potentsiaaliga  $\varphi$ :

$$\varphi(\mu^2 + \varphi^2 \lambda) = 0$$

siis saame tulemuseks:

$$\mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = 0$$

Kui me aga nüüd saadud võrduse diferentseerime vaakumi potentsiaali kaudu:

$$(\mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3) d\varphi = dV = 0$$

ehk

$$(\mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3) = \frac{dV}{d\varphi} = 0$$

siis me saame potentsiaalse energia avaldise:

$$dV = \frac{\mu^2 \varphi^2}{2} + \frac{\lambda \varphi^4}{4}$$

ehk

$$dV = \frac{\mu^2 \varphi_1^2}{2} + \frac{\lambda \varphi_2^4}{4}$$

mida võib avaldada ka energia jäävuse seaduse kaudu:

$$L = T - V = \frac{(\partial_\mu \varphi_0)^2}{2} - dV = 0$$

Viimane võrrand on skalaarset välja ( antud juhul Higgsi välja ) kirjeldav energia jäävuse seaduse „lagranžiaan“, milles kineetiline energia võrdub samuti nulliga:

$$\frac{(\partial_\mu \varphi_0)^2}{2} = 0$$

Sellise tulemuseni jõudsime ainult siis, kui kehtib võrdus:

$$\sin^2 \theta_W = \pi \varepsilon_0 \alpha E$$

Selle kehtivust on tegelikult võimalik ka tõestada. Näiteks kui korrutame võrrandi mõlemad pooled neljaga:

$$4 \sin^2 \theta_W = 4 \pi \varepsilon_0 \alpha E$$

siis me näeme seda, et saadud võrduses esineb Coulombi seadusest tuntud elektriline võrdetegur k:

$$\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} = k$$

ja eespool tuletatud Yukawa potentsiaal U:

$$\frac{E \alpha}{k} = -\frac{g^2}{r} e^{-\frac{px}{h}} = U(r)$$

Seetõttu saame:

$$4 \sin^2 \theta_W = 4 \pi \varepsilon_0 \alpha E = \frac{E \alpha}{k} = U(r)$$

Kuna elementaarlaeng e ja tuumalaeng g olid omavahel seotud võrrandis:

$$e = g \sin \theta_W$$

siis saame võrduse kujuks ka:

$$4 \frac{e^2}{g^2} = U$$

ehk

$$4e^2 = 4q^2 = Ug^2$$

ehk

$$q^2 = \frac{Ug^2}{4}$$

Korrutame saadud võrrandi mõlemad pooled „väljapotentsiaaliga“  $\varphi$ :

$$q^2 \varphi = \varphi \frac{U g^2}{4}$$

ja me võime arvestada sellega, et meil on ka  $U$  korral tegemist just väljapotentsiaaliga:

$$U = \varphi$$

Seetõttu saame:

$$q^2 \varphi = \frac{\varphi^2 g^2}{4}$$

Jagame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$\frac{q^2 \varphi}{2} = \frac{\varphi^2 g^2}{8}$$

ja teisendame järgnevalt:

$$\frac{1}{2\varphi^2} = \frac{g^2}{8q^2\varphi}$$

Võime arvestada sellega, et meil on tegemist „vaakumi potentsiaaliga“:  $\varphi = v$ . See annab meile võrrandi:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8q^2v}$$

millest omakorda järeldub, et peab kehtima võrdus:

$$q^2 v = M_W^2$$

kuna saadud võrrand „sarnaneb“ eespool tuletatud seosega:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

Võrduse kehtivus  $q^2 v = M_W^2$  tuleb tegelikult otseselt välja ka võrrandist:

$$q^2 \varphi = \frac{\varphi^2 g^2}{4}$$

ehk  $\varphi = v$  korral

$$q^2 v = e^2 v = e m_A = \frac{v^2 g^2}{4} = M_W^2$$

Viimase võrduse kehtivust on võimalik tõestada järgnevalt. Näiteks kui kasutame eespool tuletatud välja energia  $E$  võrrandit:

$$E = q\varphi$$

milles me korrutame mõlemad pooled elektrilaenguga  $q$ :

$$qE = q^2 \varphi$$

siis sellest tulenevalt saame valemi kujuks:

$$q^2\varphi = qE = \frac{\varphi^2 g^2}{4}$$

Väljapotsiaali  $\varphi$  asemel arvestame hoopis „vaakumi potentsiaaliga“  $v$ :

$$\varphi = \pm v$$

See annab meile nõrga interaktsiooni vahebosonit kirjeldava valemi:

$$Eq = \frac{v^2 g^2}{4} = M_W^2$$

ehk

$$Eq = M_W^2$$

Algebralises matemaatikas on sellise ruutvõrrandi  $a^2 = bc$  korral kordaja liikmed  $b$  ja  $c$  omavahel võrdsed:  $b = c$ . Täpselt samasugune olukord on ka antud juhul ja seega:  $E = q$ . Kui me arvestame eespool tuletatud energia ja massi omavahelist võrdust:

$$E = m$$

siis saamegi nõrga jõu vahebosonit kirjeldava võrduse:

$$m^2 = M_W^2$$

mis kinnitabki kogu eespool oleva analüüsi õigsust.

#### **1.14.5.8 Vaakumi virtuaalne kvantenergia**

Elektrivälja energia  $E$  korral

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

on aegruumis eksisteeriva reaalse energiavälja tekitajaks elektrilaeng  $q$ . Kuid viimasest on võimalik tuletada ka „virtuaalne energiaväli“, mis eksisteerib kogu Universumi vaakumis ja mis vahendab nõrka interaktsiooni. Sellist kogu Universumi vaakumit täitvat „virtuaalset kvantenergiat“ hakkamegi järgnevalt pikemalt tuletama ja analüüsima. Näiteks viime arvu 2-he võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$2E = q\varphi$$

ja kui me arvestame sellega, et välja energia  $E$  avaldub eespool tuletatud seisueenergia seosena:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

saame tulemuseks võrrandi:

$$mc^2 = q\varphi$$

ehk

$$E = q\varphi$$

Viimane tähendab nüüd seda, et välja energia  $E$  võrdub tema tekitaja  $q$  ja väljapotentiaali  $\varphi$  korrutisega. Edasiseks analüüsiks teisendame kasutatud seisueenergia  $E$  seost:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2}$$

järgmiselt:

$$\sqrt{\frac{E^2}{m}} = c$$

Viimases on näha seda, et kui kehtib võrdus:  $E = m$ , siis saame tulemuseks:  $\sqrt{2} = c$ . Selline tulemus on aga füüsikaliselt ja matemaatiliselt täielikult absurdne. Seetõttu korrutame võrduses

$$m = E$$

mõlemad pooled näiteks elektrilaenguga  $q$ :

$$qm = qE$$

mille korral on mõlemad laengud võrdsed:

$$q = q$$

Järgneva analüüsi huvides viime ühe elektrilaengu  $q$  võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$m = \frac{qE}{q} = q \frac{E}{q}$$

Kuna eespool tuletasime elektrivälja energia  $E$  võrrandi selliselt:

$$E = q\varphi$$

milles väljapotentiaal  $\varphi$  on defineeritav:

$$\frac{E}{q} = \varphi$$

siis seetõttu saame nüüd võrrandi kujuks:

$$m = q\varphi$$

Viimane saadud võrrand esineb ka ametlikus väljade kvantteoorias olevas „skalaarse gradiendi energia“  $E$  avaldises:

$$E = \frac{1}{2} |\partial(\Phi e^{iqAx})|^2 = \frac{1}{2} q^2 \Phi^2 A^2 = \frac{1}{2} m^2 A^2$$

milles

$$\phi(x) = \Phi e^{i\theta(x)}$$

Võime oletada, et elektrilaeng  $q$  võrdub elementaarlaenguga  $e$ :

$$m = e\varphi$$



Täpselt samale tulemusele jõuame tegelikult ka siis, kui võrrandis

$$qm = qE$$

võrdub üks laeng ühe kuloniga ja teine elementaarlaenguga  $e$ . See annab meile järgmise väga tähtsa tulemuse:

$$m = eE$$

Sellisel juhul ei kehti enam eelnevalt tuletatud absurdsed võrdused:  $m \neq E$ ,  $\sqrt{2} \neq c$  ega  $q \neq e$ . Saadud massi võrrandis

$$m = eE$$

avaldame energia  $E$  väljapotsentsiaalina  $\varphi$ , kuna energiavälja potentsiaali on samuti võimalik avaldada sarnaselt välja energiaga ka seisenergia võrrandina ja seisenergia ning kvandienergia vahel kehtib omakorda seos:

$$E = hf = mc^2 = \frac{mc^2}{2} = \varphi$$

See tähendab antud juhul seda, et me „kvantiseerime“ vaakumit ehk vaakumis „peidus“ olevat energiavälja, mille tulemusena näitab mass  $m$  väljaosakese massi, mitte enam välja massi. Tulemuseks saame võrrandi:

$$m = e\varphi$$

mis ühtib eespool tuletatud võrrandiga:

$$E = e\varphi$$

Sellisel juhul kehtib võrdus:  $E = m$ , mis ei ole enam füüsikaliselt ega matemaatiliselt absurdne. Potentsiaalse energia miinimum on defineeritav kui vaakum ja seetõttu mõistame järgnevalt väljapotsentsiaali  $\varphi$  all hoopis vaakumi potentsiaali:

$$\varphi = \phi = \pm v$$

Saame võrrandi:

$$m_A = ev$$

milles  $m_A$  on nüüd „vektorvälja“ mass.

Vektorvälja mass  $m_A$  tuletati välja energia  $E$  võrrandist:

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

mille järgi on välja energia tekitajaks elektrilaeng  $q$ . Lühidalt käis see nii, et näiteks kui esitada välja energia  $E$  seisenergia avaldisena:

$$E = mc^2 = \frac{mc^2}{2},$$

elektrilaeng  $q$  panna võrduma elementaarlaenguga  $q = e$ , elektrivälja potentsiaali  $\varphi$  asemel oleks vaakumi potentsiaal  $\varphi = v$  ning energia  $E$  avaldame ainult massi  $m$  kaudu  $E = m$ , siis saamegi väga täpselt vektorvälja massi avaldise:

$$m_A = ev$$

Tähelepanuväärne on see, et täpselt samasugusest võrrandist:

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

saame „tuletada“ ka Higgsi välja osakese massi võrrandi. Näiteks viimases võrrandis teeme järgmised asendused:  $q = g$ ,  $\varphi = v$  ja  $E = m$ . Seejärel tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$m^2 = \frac{v^2 g^2}{4}$$

ja jagame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$\frac{m^2}{2} = \frac{v^2 g^2}{8}$$

Eespool tõestasime võrduse:

$$\frac{g^2}{8} = \lambda$$

mis annab meile võrrandi kujuks:

$$\frac{m^2}{2} = v^2 \lambda$$

ehk

$$m^2 = 2\lambda v^2$$

Tulemuseks saamegi Higgsi välja osakest ehk bosonit kirjeldava võrrandi:

$$m_h = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

milles  $\mu^2 < 0$  ja  $\lambda > 0$ . Märkimisväärne asjaolu on see, et nii vektorvälja massi kui ka Higgsi välja osakese massi võrrandid on mõlemad tuletatavad korraga ühest ja samast võrrandist:

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

Sellest aga järeldub, et peab kehtima võrdus:

$$ev = \sqrt{2\lambda v^2}$$

Seda on võimalik lühidalt tõestada järgmiselt. Näiteks eelnevalt tuletatud vektorvälja mass

$$m = ev$$

avaldub Weinberg-Salami mudeli kohaselt ka nõnda:

$$m = vg \sin\theta_W$$

Tõstame selle võrrandi mõlemad pooled ruutu ja teisendame matemaatiliselt järgmiselt:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{m^2} \sin^2\theta_W$$

Kui nüüd järgnevalt oletada seda, et peaks kehtima võrdus:

$$\sin \theta_W = \frac{1}{2}$$

ehk

$$\sin^2 \theta_W = \frac{1}{4}$$

siis sellest tulenevalt saame võrrandi kujuks:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{4m^2}$$

Jagame võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

ja saame juba eespool matemaatiliselt tõestatud võrduse:

$$\frac{M_W^2}{2v^2} = \frac{g^2}{8} = \lambda = \frac{h}{p}$$

Teisendades viimast võrrandit järgmiselt:

$$M_W^2 = 2\lambda v^2$$

saamegi Higgsi bosonit kirjeldava valemi:

$$m = \sqrt{2\lambda v^2}$$

Kuid järgnevalt näitame, et viimane võrdus looduses tegelikult ei kehti. Näiteks eespool tuletatud energiavälja kirjeldavast võrrandist

$$E = \frac{q\varphi}{2}$$

saame vaakumi potentsiaali v definitsiooni:

$$\frac{E}{q} 2 = \varphi = \pm \varphi = \pm v$$

mille teisendamisel saame võrrandi:

$$\frac{E}{q} 2 - \varphi = 0$$

mis näitab meile seda, et kaks võrdset välja ehk vaakumit kompenseerivad üksteist nii, et tulemuseks saame ühe null-potentsiaaliga välja. See tähendab seda, et Higgsi väli on tegelikult „kahekomponendiline“ väli:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Selle järgi esineb kahe võrdse välja vahel „sümmeetria“ ehk kehtib võrdus:

$$ev = \sqrt{2\lambda v^2}$$

Kui aga kaks vaakumit ehk välja üksteist enam ei kompenseeri ehk toimub „sümmeetria spontaanne rikkumine“:

$$\frac{E}{q} 2 - \varphi \neq 0$$

siis ei kehti enam ka võrdus:

$$ev \neq \sqrt{2\lambda v^2}$$

Looduses realiseerubki tegelikult just see viimane variant, kuna  $\lambda$  ei ole tegelikult lainepikkus:

$$\frac{g^2}{8} \neq \lambda = \frac{h}{p}$$

vaid see on teatud omainteraktsiooni kirjeldav konstant ( „neljane tipp“ ), mis tegelikult ei ühti viimase võrdusega. Selles tegelikult seisnebki vaakumi sümmeetria spontaanne rikkumine.

Eelnevast analüüsist järeldub, et kahekomponendilise Higgsi välja „teine komponent“ võrdub vektorvälja massiga:

$$m_A = ev$$

milles  $e$  on elementaarlaeng ja  $v$  on vaakumi potentsiaal. Elementaariosakeste füüsikast ja ka ametlikust väljade kvantteooriast tuleb välja, et ka selle „moodustavad“ kaks välja ehk vaakumit:

$$m_A - ev = 0$$

mis ei ole samuti omavahel sümmeetrilised ehk toimub jälle „vaakumi sümmeetria spontaanne rikkumine“:

$$m_A - ev \neq 0$$

ehk

$$m_A - M_A \neq 0$$

Üks neist massidest võrdub footoni ehk elektromagnetilise interaktsiooni vahebosoni massiga:

$$M_A = 0$$

ja teisest massi võrrandist, mis ei võrdu nulliga:

$$m_A = ev \neq 0$$

saame „tuletada“ nõrga interaktsiooni vahebosoni massid. See näitabki, et elektromagnetiline ja nõrk interaktsioon on tegelikult ühe interaktsiooni kaks erinevat külge.

Kogu järgneva analüüsiga tõestame ja ka katsed näitavad veenvalt, et „vektorvälja“ mass

$$m_A = ev$$

võrdub väga täpselt järgmise arvvaartusega ( gigaelektronvoltides ):

$$74,6 = ev$$

Selline arvvaartus on aga täpselt leitav nõrga interaktsiooni vaheosakese massi  $M_Z$  avaldisest:

$$M_Z = \frac{74,6}{\sin\theta_W} \text{ GeV}$$

ehk

$$\sin\theta_W M_Z = 74,6$$

Väljade kvantteoorias on elementaarlaeng  $e$  ja tuumalaeng  $g$  omavahel tihedalt seotud:

$$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

millest omakorda saame „Weinbergi nurga“:

$$\frac{e}{g} = \sin\theta_W$$

Sellest tulenevalt võime saadud võrrandi:

$$\sin\theta_W M_Z = 74,6 = ev$$

kirjutada kujule

$$\frac{e}{g} M_Z = ev$$

ehk

$$M_Z = vg$$

Viimane on nõrga interaktsiooni vaheosakese ehk vahebosoni mass, millel pole elektrilaengut ja mille täpne väärtus on saadud ainult katselisel teel:

$$M_Z = 93 \text{ GeV}$$

Sellise vahebosoni suur mass  $m$ , mis on  $\approx 100 \text{ GeV}$ , on „teoreetiliselt“ järeldatav ka sellest, et nõrga jõu mõju raadius  $r_0$  on ruumis teadaolevalt väga väike:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

milles  $r_0 = 3 \cdot 10^{-17} \text{ m}$  ( mõningatel andmetel ka  $r_0 = 10^{-18} \text{ m}$  ). Kuna nõrga interaktsiooni vaheosakesed  $M_Z$  ja  $M_W$  on väljade kvantteoorias omavahel seotud järgmiselt:

$$M_Z = \frac{74,6}{\sin\theta_W} = 2 \frac{37,3}{\sin\theta_W} = 2M_W$$

siis seega saame „tuletada“ ka vaheosakese  $M_W$  avaldise:

$$M_Z = 2M_W = vg$$

ehk

$$M_W = \frac{1}{2} vg$$

Saadud mass on samuti nõrga interaktsiooni vaheosakese ehk vahebosoni mass. Sellisel vaheosakesel on aga olemas juba elektrilaeng, kuna vaheosakesel  $M_Z$  ei olnud elektrilaengut ja

$$M_W = \frac{M_Z}{2}$$

millest võikski järeldada seda, et kahekordne massi erinevus viitab samas ka positiivse ja negatiivse elektrilaengu olemasolule, mis kokku annabki neutraalse laengu nagu seda on vaheosakesel  $M_Z$ .  $W^\pm$  on „laetud elektroni ühiklaenguga“, mis võrdub:

$$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$$

Vaheosakese  $W^\pm$  massi täpne väärtus on saadud samuti ainult katselisel teel:

$$M_W = 81 \text{ GeV}$$

Sellise vahebosoni suur mass  $m$ , mis on  $\approx 100 \text{ GeV}$ , on teoreetiliselt järeldatav samuti sellest, et nõrga jõu mõju raadius  $r_0$  on ruumis teadaolevalt väga väike:

$$U \propto \frac{1}{r} e^{-r_0 m}$$

milles  $r_0 = 3 \cdot 10^{-17} \text{ m}$  ( või  $r_0 = 10^{-18} \text{ m}$  ). Siinkohal peab märkima ka seda, et vaheosake  $M_Z$  avaldatakse Weinberg-Salami mudelis ka võrrandina:

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}$$

Kuna elementaarlaengu  $e$  ja „tuumalaengu“  $g$  vahelisest seosest saame:

$$\frac{e}{\cos \theta_W} = g'$$

siis seega saame nõrga interaktsiooni vaheosakese  $M_W$  „tuletada“ ka järgmiselt:

$$M_W = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + 0} = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2} = \frac{1}{2} v g$$

ehk saame

$$M_W = \frac{1}{2} v g$$

Nõrga interaktsiooni vaheosakese massi  $M_W$  võrrandis tõstame mõlemad pooled ruutu:

$$M_W^2 = \frac{1}{4} v^2 g^2$$

ja teisendame järgnevalt:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{4 M_W^2} g^2 = \frac{g^2}{4 M_W^2}$$

millest omakorda saame vaakumkeskmise  $v$  seose seoskonstandi  $G$  eksperimentaalse väärtusega:

$$\frac{1}{2 v^2} = \frac{g^2}{8 M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

Kuna väljade kvantteoorias on elementaarlaeng  $e$  ja tuumalaeng  $g$  omavahel seotud järgmiselt:

$$e = g \sin \theta_W$$

milles  $\theta_W \approx 13,5^\circ$  nimetatakse Weinbergi nurgaks ja nõrga interaktsiooni vaheosakese mass  $M_W$  avaldub:

$$M_W = \frac{37,3}{\sin \theta_W} \text{ GeV}$$

siis sellest tulenevalt saame matemaatiliselt teisendada:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{e^2}{8M_W^2 \sin^2 \theta_W} = \frac{\sin^2 \theta_W * e^2}{8 * 37,3^2 * \sin^2 \theta_W} = \frac{e^2}{8 * 37,3^2}$$

ehk

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{e^2}{8 * 37,3^2}$$

Selline tulemus annab meile võrrandi:

$$\frac{1}{2} * 8 * 37,3^2 = e^2 v^2$$

ehk

$$74,6 = ev$$

mis kattub täielikult eespool tuletatud „vektorvälja“ massi võrrandiga:

$$m_A = ev$$

See näitab kogu eelneva analüüsi paikapidavust.

Huvitav on märkida kogu eelneva analüüsi juures seda, et eespool tuletatud võrrandis:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

esineb tegelikult ka valguse kiirus  $c$ :

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2 c^4}$$

See tähendab ka seda, et viimases võrrandis esineb seisuenergia  $E = mc^2$  ruudu avaldis:  $E^2 = m^2 c^4$ . Kuna Plancki konstant  $h$  avaldus järgmiselt:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = h$$

siis saame võrrandi kujuks ka:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} h$$

Teisendame seda võrrandit järgmiselt:

$$M_W^2 = m^2 = \frac{v^2 g^2}{4} h$$

millest omakorda saame:

$$\frac{m}{h} = \frac{1}{m} \frac{v^2 g^2}{4}$$

Kui me nüüd korrutame viimase võrrandi mõlemad pooled valguse kiirusega  $c$ :

$$\frac{mc}{h} = \frac{p}{h} = \frac{1}{\lambda} = \frac{c}{m} \frac{v^2 g^2}{4}$$

siis me saame sellise huvitava tulemuse:

$$\frac{p}{h} = \frac{1}{\lambda} = \frac{c}{m} m^2 = mc = p$$

ehk

$$\frac{p}{h} = \frac{1}{\lambda} = p$$

milles nähtub väga selgelt, et Plancki konstant on „dimensiooniga“ üks:  $h = 1$ . Selle kinnituseks teisendame eelnevalt saadud võrrandit

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{c}{m} \frac{v^2 g^2}{4}$$

teistmoodi järgmiselt:

$$\frac{4}{v^2 g^2} m = \lambda c$$

Kuna kvantmehaanikast tuntud de Broglie lainepikkus defineeritakse valemiga:

$$\lambda = \frac{h}{mc}$$

mildest omakorda saame

$$\lambda c = \frac{h}{m}$$

siis sellest tulenevalt saame võrrandi kujuks:

$$\frac{4}{v^2 g^2} m = \frac{h}{m}$$

ehk

$$\frac{4}{v^2 g^2} m^2 = h$$

Eespool defineeriti nõrga interaktsiooni vahebosoni mass järgmiselt:

$$\frac{4}{v^2 g^2} = \frac{1}{m^2}$$

ja see annabki lõplikuks tulemuseks juba eespool saadud võrduse:

$$\frac{m^2}{m^2} = 1 = h$$

See tähendab seda, et eespool tuletatud võrrandis:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} h$$

on Plancki konstant  $h$  „dimensiooniga“ üks:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

kuid mass on gigaelektronvoltides ( eV ).

Eespool tuletatud seose võrrandist:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$



on võimalik omakorda „tuletada“ ka Fermi konstandi  $G$  väärtus. Selleks viime arvu 2-he võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{4M_W^2}$$

ja arvu 4-ja määratleme omakorda järgmiselt:

$$\frac{2}{v^2} = \frac{g^2}{2M_W^2}$$

Võtame võrrandi mõlemast poolest ruutjuure ehk kaotame võrrandis ära ruudud:

$$\frac{\sqrt{2}}{v} = \frac{g}{\sqrt{2}M_W}$$

ja jagame saadud võrrandi mõlemad pooled kahega:

$$\frac{\sqrt{2}}{2v} = \frac{g}{2\sqrt{2}M_W}$$

Edasiseks analüüsiks teisendame eespool tuletatud võrrandit:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

uuesti, mille korral korrutame võrrandi mõlemad pooled  $\sqrt{2}$ -ga ja siis viime  $v$  teisele poole võrdusmärgi:

$$\sqrt{2} \frac{1}{2v} = \frac{\sqrt{2}}{2v} = \frac{g^2 v}{8M_W^2} \sqrt{2}$$

Saadud tulemus võrdub ka järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{2}}{2v} = \frac{g}{2\sqrt{2}M_W} = \frac{g^2 v}{8M_W^2} \sqrt{2}$$

Viimasest ongi näha seda, et kui võrduses:

$$\frac{\sqrt{2}}{2v} = \frac{g^2 v}{8M_W^2} \sqrt{2}$$

viime  $v$  tagasi teisele poole võrdusmärgi, siis saamegi tuntud Fermi konstandi  $G$  väärtuse:

$$\frac{\sqrt{2}}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} \sqrt{2} = G$$

Fermi konstandi  $G$  võrdust avaldatakse mõningatel andmetel ka järgmiselt:

$$G = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{m_W^2 c^4}$$

milles esineb seisenergia  $E$  ruudu võrrand:

$$E^2 = m^2 c^4$$

Eespool oleva analüüsi põhjal võrdus energia ka lihtsalt massiga:

$$E = m$$

mille ühikud on gigaelektronvoltides. Fermi konstandi  $G$  väärtuse saime tuletada juhul, kui kasutatud võrdust

$$\frac{g}{2\sqrt{2}M_W} = \frac{g^2 v}{8M_W^2} \sqrt{2}$$

on võimalik ka tõestada. Näitame seda nii, et teisendame seda viimast avaldist nõnda:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \frac{g v}{4M_W}$$

millest omakorda saame:

$$\frac{1}{v} = \frac{g}{2M_W}$$

Võtame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{4M_W^2}$$

ja jagame mõlemad pooled omakorda kahega:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

Viimane näitabki väljade kvantteoorias nõrga interaktsiooni seost seoskonstandi  $G$  eksperimentaalse väärtusega:

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

milles

$$M_W = \frac{1}{2} v g$$

ja milles  $v$  ei ole kiirus, vaid see on „vaakumkeskmise potentsiaalne energia“ ja seetõttu tähistame me seda siin tähega  $E$  ehk  $v = E$  :

$$\frac{1}{2E^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

Järgnevalt analüüsime viimast seost nii, et kui Fermi konstandi  $G$  asemel oleks hoopis gravitatsioonikonstant  $G$ . Sellest tulenevalt saaksime eespool tuletatud impulssi  $p$  ja energia  $E$  vahelise seose:

$$\frac{1}{2GE} = p = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

Kui me võtame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$p^2 = \frac{E^2}{2}$$

ja teisendame järgnevalt:

$$2p^2 = p^2 + p^2 = E^2$$

siis me näeme seda, et saadud võrrand:

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

kattub täielikult erirelatiivsusteooriast tuntud osakeste relativistliku koguenergia võrrandiga:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

ehk

$$E = mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

ja seda juhul, kui võtta ühikute süsteemiks  $c = 1$ . Kui selles  $p = 0$ , siis saame  $E = m$ . Siinkohal on huvitav märkida seda, et energia  $E$  on võrdne ka impulssi  $p$  ja massi  $m$  summaga:

$$E = p + m$$

See võrrand on tuletatav seosest:

$$\frac{mc^2}{2} = mc^2$$

Näiteks kui me viime kahe võrrandi teisele poole võrdusmärgi, saame:

$$mc^2 = 2(mc^2) = pc + mc^2 = E$$

ehk

$$E = pc + mc^2$$

Viimane ongi võrdne seosega:

$$E = p + m$$

ja seda juhul, kui võtta ühikute süsteemiks  $c = 1$ . Kui selles  $p = 0$ , siis saame  $E = m$ . Seisuenergia  $E$  võrrandi

$$E = \frac{mc^2}{2} = mc^2$$

lahend võib olla ka selline:

$$E = mc^2 = 2(mc^2) = m_1 c^2 + m_2 c^2 = E_1 + E_2$$

kuid sellist lahenduskäiku üldiselt ei kasutata.

#### **1.14.5.9 Ligikaudne arvutamine**

Peab kindlasti ära märkima ka seda, et kogu käesolev väljade kvantteooria on esitatud tegelikult ligikaudselt, mitte päris täpselt. See tähendab eelkõige seda, et paljud tehtud ja ka tehtavad arvutused on ligikaudsed, mitte aga täpselt ühtivad eksperimentaalselt saadud andmetega. Selle tulenevust selgitame järgmise matemaatilise analüüsi kaudu, milles nähtub ligikaudsuse tekkimine füüsika erinevate võrrandite kasutamise tõttu ühe ja sama nähtuse või seaduspärasuse kirjeldamisel.

Vaatame selle näiteks järgmist arvutuslikku analüüsi. Näiteks kui elektriliselt laetud sfäärilise pinna poolt tekitatud välja energia  $E$

$$E = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

on  $6,2 * 10^{43}$  J ja kera raadius on üks meeter ( ning  $\epsilon_0$  on ligikaudu  $8,85 * 10^{-12}$  C<sup>2</sup>/Nm<sup>2</sup> ja  $\epsilon$  on ligikaudu üks ), siis saame kera laengu  $Q$  suuruseks  $1,1 * 10^{17}$  C. Vaakumis on  $\epsilon$  väärtus üks, kuid õhus on see 1,00057 ( seda ainult 20<sup>0</sup>C juures ). Kui antud elektriväljal on energia  $6,2 * 10^{43}$  J, siis vastavalt massi ja energia seosele  $E = mc^2$  on sellise koguse energia mass  $6,9 * 10^{26}$  kg, mis võib olla mõne taevakeha massiks. Sellest tulenevalt on sellise taevakeha massi Schwarzschildi raadius

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

üks meeter ja seetõttu peab selline ühe meetrine Schwarzschildi raadius tekkima ka antud elektriliselt laetud kera korral. Eelnevalt tuletatud elektrilaengu horisondi raadiuse

$$r_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

järgi saamegi laengu  $Q$  suuruseks  $1,1 * 10^{17}$  C, kui raadius on üks meeter ja  $\epsilon$  on ligikaudu üks. Kui aga Schwarzschildi raadius  $R$

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

on kolm meetrit, siis seega massi

$$M = \frac{Rc^2}{2G}$$

saame leida järgmiselt:

$$M = 2,023 * 10^{27} \text{ kg.}$$

Kuna kehtib energia ja massi ekvivalentsuse printsiip ehk  $E = mc^2$  , siis seega saame energiaks järgmise suuruse:

$$E = 1,8207 * 10^{44} \text{ J.}$$

Selline energia hulk võib olla mõne kosmilise elektrivälja energia  $E$

$$E = \frac{q^2}{2c} = mc^2 ,$$

millest saame laengu  $q$  suuruseks:

$$q = \sqrt{E(8\pi\epsilon_0 \epsilon R)} = \sqrt{mc^2(8\pi\epsilon_0 \epsilon R)} = 3,46649 * 10^{17} \text{ C.}$$

Sama laengu  $q$  suuruse leiame ka Nordströmi raadiuse valemi järgi arvutades, kui raadius  $R$  on samuti kolm meetrit:

$$q = \sqrt{\frac{R^2 4\pi\epsilon_0 c^4}{G}} = 3,48551 * 10^{17} \text{ C}.$$

Elektrivälja energia  $E$  on seotud elektrivälja tugevusega:

$$E = \frac{\epsilon\epsilon_0 E_T^2}{2}.$$

milles  $V = 1 \text{ m}^3$ . Antud elektrivälja energia koguse korral saame väljatugevuse  $E_T$  leida järgmiselt:

$$E_T = \sqrt{\frac{2E}{\epsilon\epsilon_0}} = 6,4144 * 10^{27} \text{ V/m}.$$

## 2 Ajas rändamise tehniline teostus

Selleks, et inimene saaks rännata ajas ( ehk “liikuda” teise ajahetke ), on tal esimese asjana vaja nõ. praegusest ajahetkest “väljuda” ( “ajast väljuda” ). Füüsikaliselt tähendab see seda, et inimene peab sattuma sellisesse aegruumi piirkonda, kus aeg on aeglenenud lõpmatuseni ehk aeg on lakanud eksisteerimast. Kõlab ju loogiliselt, et “ajast väljumise” korral aega enam ei eksisteerigi. See avaldub näiteks siis, kui ületatakse valguse kiirus vaakumis, sest mida lähemale keha kiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aeg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Kuid selline aegruumi piirkond on näiteks ka mustade aukude tsentrites. Taolises aegruumi piirkonnas olles ei allu inimene enam Universumi kosmoloogilisele paisumisele, sest Universumi paisumine avaldub kahe ruumpunkti vahelise kauguse suurenemisega ( see tähendab seda, et galaktikad eemalduvad üksteisest seda kiiremini, mida enam kaugemal nad üksteisest on ). Võimalikuks osutub ajas liikumine, mis on oma olemuselt ruumis liikumine, sest aeg ja ruum ei saa eksisteerida teineteisest lahus.

Maailmataju ajas rändamise teooria kirjeldab inimese füüsikalist ajas liikumist. Näiteks inimene on võimeline liikuma ajas minevikku või tulevikku. Kõik füüsikalised kehad liiguvad ajas – tuleviku suunas. Ja seega on ajas rändamise teooria kogu Universumi ( füüsika ) eksisteerimise aluseks. Ajas rändamise teooria edasiarendused näitavad Universumi füüsikalist olemust. See seisneb selles, et Universumit ei ole tegelikult olemas, mis tuleb välja sellest, et Universum ise on ajatu. Ajas rändamise tehniline lahend õpetab looma reaalselt ajas rändamist. Selle põhiliseks teesiks on see, et peale massi kõverdab aegruumi ka energia. See tuleb välja A. Einsteini erirelatiivsusteooria energia ja massi ekvivalentsuse printsiibist.

Maailmataju ajas rändamise teooria osas on kirjeldatud inimese teoreetiline võimalus ajas rändamiseks, mida me ka eelnevalt lühidalt esitasime, et edaspidi mõista inimese tehnilist ajas rändamist. Teadusmaailmas on juba pikka aega üldtunnustatud seisukoht, et ajas on võimalik rännata aegruumi tunnelite ehk ussiurgete abil. Niisamuti on ussiurked abiks ka kosmoserändude

teostamisel, sest liikudes läbi aegruumi tunneli muutuvad ülisuured kaugused kosmoses meile palju lähemale. Aegruumi tunnel ehk rahvapärase nimetusega ussiurges on kahte aegruumi punkti ühendav aja ja ruumi kõverus, mis võimaldab liikuda ühest ajahetkest teise või liikuda hetkega ehk kõigest 0 sekundiga ühest ruumpunktist teise.

Ussuurgete reaalse olemasolu üle on teoreetilises füüsikas palju vaieldud, mis on põhjustatud eelkõige aja ja ruumi füüsikateooriate erinevate tõlgendusvõimaluste olemasolu tõttu. Näiteks must auk võib olla samas ka aegruumi tunneli sisse- ja väljakäik. Gravitatsioon on teatavasti aegruumi kõverus ja mustade aukude tsentris oleva Schwarzschildi pinnal on aegruum kõverdunud lõpmatuseni. Musta augu Schwarzschildi pind ehk aegruumi lõkspind on seega piltlikult öeldes aegruumi piir, kus realselt lõpeb aja ja ruumi eksisteerimine. Nüüdseks on välja töötatud uus füüsikateooria, mis tõestab, et see pind, millel on aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni, võib füüsikaliselt tõlgendada ka aegruumi tunneli sisse- ja väljakäiguna. Selle järgi võibki öelda seda, et mustade aukude eksisteerimise tõttu eksisteerivad Universumis ka aegruumi tunnelid.

Küsimus on nüüd selles, et kuidas inimkond oleks võimeline looma kunstlikult neid imelisi aegruumi tunnelid, mis võimaldavad inimesel liikuda ajas ja teleporteeruda ruumis? Nüüdseks on sellele küsimusele olemas ka vastus. Esiteks musti auke luua ja kasutada ei ole kahjuks realselt võimalik, kuna need on ilmselgelt meie planeedile ja musta augu lähedal olevale kehale ohtlikud. Teatavasti ei pääse musta augu tsentrist välja mitte miski, isegi mitte valgus. Musta augu tekitajaks on hiigel suur mass. Albert Einsteini erirelatiivsusteoorias oleva massi ja energia ekvivalentsuseprintsipi järgi saab musta auku ehk kui aegruumi tunnelit luua ka energiaga. Kuid häda on selles, et aegruumi tunnelit, mida saaks inimene läbida, saab luua ainult ülisuure energiaga ja sellist energiat pole mitte kusagilt võtta. Selles seisnebki aegruumi tunnelite loomise kogu raskus. Võrdluseks võib siinkohal välja tuua selle, et inimest läbiva aegruumi tunneli suuruse „objekti“ loomiseks läheb vaja palju palju rohkem energiat kui kogu planeedi Maa massile vastav energiahulk.

Energia probleem oli väga pikka aega kõige suurem takistus aegruumi tunnelite loomiseks. Kuid nüüd on uued avastused teoreetilises füüsikas leidnud hoopis uue viisi selle probleemi praktiliseks lahendamiseks. Tuleb välja, et aegruumi tunnelite reaalseks loomiseks on samuti olemas kaks erinevat viisi analoogselt nii nagu tuumaenergeetikas on võimalik tuumaenergiat toota kahel põhimõtteliselt erineval viisil. Näiteks inimkonna tuumaenergeetika põhineb raskete aatomituumade lõhustumise käigul vabaneval energial või kergete aatomituumade liitmisel eralduval energial. Midagi analoogset on ka aegruumi tunnelite loomisega. Näiteks aegruumi tunnelit on võimalik kunstlikult luua ülisuurte energiatega kasutamise ( nagu oli seda juba eespool mainitud ) ja samas ka üliväikeste energiatega kasutamise. Kuna planeetide massile vastavaid energiahulki pole praktiliselt võimalik toota ega kasutada, siis jääbki järgi võimalus üliväikeste energiatega kasutamine, mis on juba kindlasti inimkonna praeguste tehnilise võimekuse piirides.

Peale massi kõverdab aega ja ruumi ka veel energia ja näiteks elektriväli omab energiat. Seega füüsikalise keha mass ja elektrilaeng mõjutavad aegruumi geometriat. Kuid mida on siis üliväikeste energiatega all õieti mõeldud? Selle mõte seisneb selles, et inimese suuruse Schwarzschildi pinna loomiseks, mis on omakorda aluseks aegruumi tunneli loomiseks, ei peagi kasutama ülisuurt massi  $M$  või energiat  $E$ :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

See polegi tegelikult päris võimalik. Inimese suuruse Schwarzschildi pinna loomiseks piisab ka energiavälja muutumise kiirusest  $c$ :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

mida on juba võimalik kunstlikult tekitada, kusjuures aegruumi lõkspinna kujust sõltumata. Kogu järgnevas osas ongi kirjeldatud inimese tehniline võimalus reaalseks ajas rändamiseks.

## 2.1 Aegruumi tunnelid ehk ajas ja ruumis teleportreerumise füüsikalised alused

Teleportatsiooni mõistmiseks on vaja mõista kahte komponenti korraga: väljaspool aegruumi olevat dimensiooni ja aegruumi kõverust. Keha teleportatsiooni all mõeldakse hetkelist ( s.t. silmapilkset ) asukoha muutumist ruumis või ajas. Keha hetkeline ehk silmapilkne „liikumine“ ruumis ( või ajas ) tuleneb sellest, et aja ja ruumi dimensiooni enam ei eksisteeri ehk teleportreeruv keha eksisteerib ajast ja ruumist väljas. Kuid seda, et millises suunas toimub keha teleportatsioon ( s.t. kas ajas minevikku, tulevikku või mööda ruumikoordinaate ), määrab ära keha ümber olev lõpmata kõver aegruum ehk aegruumi tunneli pikkus ja suund. Näiteks kui keha eksisteerib hyperruumis, siis tavaruum ehk aegruum on keha ümber ( üldrelatiivsusteooria keeles öelduna ) kõver. Ja sellest kõverusest ( s.t. aegruumi kõveruse mahust ) sõltub see, et kui kaugele aja rännak sooritatakse. Kuid aegruumi kõveruse muutusest sõltub aga see, et millises suunas toimub aja rännak.

### 2.1.1 Väljaspool aegruumi

Kui keha M liigub ruumipunktist A ruumipunkti B, siis klassikalise mehaanika järgi kulub sellele alati teatud aeg. Igasuguse keha liikumine toimub ruumis ja ajas nõ. „üleminekuga“ ( s.t. liikumine on pidev, mitte silmapilkne ). Oletame, et keha M liigub sirgjooneliselt kiirusega  $v$  ( kiirendus  $a$  võrdub sellisel juhul nulliga ). Mida suurem on keha M-i liikumiskiirus, seda kiiremini ta jõuab punktist A punkti B. Kui osutub, et ruumipunktide A ja B vahel on mingisugune füüsiline tõke, siis keha M ei saa otseteed liikuda punktist A punkti B. Kuid seda juhul, kui see tõke asub otse keha liikumistrajektooriga. Ruumipunkti B jõudmiseks peab keha tõkkest mööda liikuma. Kui aga aja ja ruumi dimensioonid ehk mõõtmed puuduvad, siis keha M liikumine ei võta enam aega. See tähendab seda, et keha liikumine toimub ruumis ja ajas nõ. „üleminekuta“ ( s.t. liikumine ei ole enam pidev, vaid on silmapilkne ). Keha „liikumisel“ ei ole enam trajektoori ega kiiruse ( ja ka kiirenduse ) arväärtusi, sest liikumine ei võta enam aega. Isegi tõkked ei ole sellisel liikumisel enam mingiks takistuseks. Näiteks keha M läheb tõketest „läbi“ ( nagu kvantosake barjäärist ), sest liikumise trajektoori puudub. Ja seetõttu on kehade teleportatsioonis ainult kaks kirjeldavat suurust: kui kaugele keha ruumis ( ja ka ajas ) teleportreerub ja millises suunas see toimub.

Hyperruumis oleva aja ja ruumi eksisteerimise lakkamine tähendab tegelikult seda, et keha „liikumine“ hyperruumis ei võta enam aega ega ruumi. Kuid erinevatel joonistel kujutatakse hyperruumi ikkagi tavalise aegruumi koordinaatsüsteemina. Hyperruumi võibki piltlikult ette kujutada aegruumi koordinaatsüsteemina, kuid mis eksisteerib „väljaspool“ meie tavalist aegruumi.

Miski, mis on „väljaspool“, on midagi sootuks teistmoodi. Näiteks „väljaspool“ aegruumi ei ole enam olemas aega ega ruumi. Selles seisnebki füüsikaline põhjus, et miks hyperruumis ei ole enam aega ega ruumi ja miks hyperruumis „liikudes“ kehad teleportreeruvad. Kui liikuda „ajast ja ruumist välja“, siis seda aega ja ruumi enam ei eksisteeri. **Ajas ongi võimalik rännata ainult siis, kui sellest „välja“ minna nagu tegelane „väljub“ filmist ja hakkab kerima filmilinti soovitud suunas.** Stringiteoorias eeldatakse, et aegruumi mõõtmeid on rohkem kui neli. See on stringiteooria üheks põhialuseks. Kuid ajas rändamise teooria korral on see hoopis vastupidi. Aegruumi mõõtmeid ei tule juurde, vaid need hoopis vähenevad ( ehk lakkavad eksisteerimast ). Ja seetõttu on tegemist stringiteooria „vastandteooriaga“.

Kui inimene „liigub“ ühest ajahetkest teise ( ehk rändab ajas ), siis inimest enam ei eksisteeri sellisel ajahetkel, mil ta teise ajahetke sooritama hakkas. See tähendab, et sellisel ajahetkel inimene väljus aegruumist, mis väljendub inimese kadumisena ehk „õhku haihtumisena“. Sellepärast, et ta liikus teise ajahetke. Kuna inimene kui füüsikaline keha omab massi ehk energiat, siis seega on inimese kadumine vastuolus energia jäävuse seadusega, mis ütleb seda, et energia ei kao ega teki juurde, vaid see muundub ühest liigist teise. Selle fundamentaalse seaduse rikkumise vältimiseks „viibivad“ kehad hyperruumis ehk väljaspool aegruumi lõpmata väikest aega. See tähendab ka seda, et inimese liikumine ühest ajahetkest teise toimub lõpmata väikese ajaperioodi jooksul. Nii ei ole energia jäävuse seaduse rikkumist võimalik tuvastada.

**Hyperruumis aega ja ruumi enam ei eksisteeri. Albert Einsteini üldrelatiivsusteooria keeles öelduna on hyperruumis aeg ja ruum kõverdunud lõpmatuseni. Erirelatiivsusteooria keeles öelduna aegleneb aja kulgemine hyperruumis lõpmatuseni ja pikkus ehk kahe ruumipunkti vaheline kaugus lüheneb lõpmata väikeseks.** Matemaatiliselt kirjeldaksid aja ja ruumi eksisteerimise lakkamist aga järgmised võrrandid:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c}\right)^2}} = \infty$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c}\right)^2} = 0$$

Sellepärast, et keha liigub valguse kiirusel vaakumis

$$v = c.$$

Need võrrandid on tuntud erirelatiivsusteooriast vastavalt aja dilatatsiooni ja kehade pikkuste kontraktsioonina. Antud juhul keha liigub valguse kiirusega vaakumis ja seega aeg aegleneb lõpmatuseni ja keha pikkuselgi ei ole enam mõtet. See tähendab seda, et aega ja ruumi enam ei eksisteeri, kuid keha omaaeg ja omapikkus jäävad samadeks. Nendega tutvume juba edaspidi relatiivsusteooria osas.

Aja ja ruumi mõõtmete kadumine muudab oluliselt kehade liikumisomadusi Universumis. Näiteks ruumimõõtmete eksisteerimise lakkamise korral ei ole keha liikumine ruumis enam pidev. See tähendab seda, et keha ei läbi „liikumisel“ kõiki ruumipunkte oma liikumistrajektooriga. Selles mõttes ei võta keha liikumine enam ruumi – liikumistrajektoori ju puudub. Kuid sellegipoolest muudab keha oma asukohta ruumis. Selles mõttes jääb ruum ikkagi eksisteerima. Aja ja ruumi mõõtmete kadumine ei muuda ainult kehade liikumisomadusi, vaid ka selle mõõdetavaid suursusi. Näiteks kuidas teada seda, et kui kaugele keha ruumis ( või ka ajas ) „liigub“ ja millises suunas. Neid füüsikalisi omadusi määravaid parameetreid, mis on kasutusel klassikalises mehaanikas, siin enam kasutada ei saa, sest kehade liikumise mehaanika on erinev tavapärasest kehade liikumisest Universumis.

Kehade liikumist, mis ei võta aega ja ei kulge ruumis pidevalt ( s.t. toimub silmapilkselt ) ning



läheb tõketest „läbi“, nimetatakse teleportatsiooniks. 1931. aastal ilmunud raamatus „Lo“ esitas Ameerika kirjanik Charles Fort esimest korda terminit „teleportatsioon“, mille all mõistis ta füüsikalise keha transporti ühest ruumpunktist teise või ühest ajahetkest teise 0 sekundiga. Teleportatsioon on keha liikumise uus liik, vorm. Teleportreeruva keha liikumise mehaanika erineb klassikalisest mehaanikast, kuid sarnaneb pigem sellise keha liikumisega, millel on kvantmehaanilised omadused.

Teleportatsioon on keha hetkeline ( s.t. 0 sekundiga ) asukoha muutumine ruumis või ajas. Seetõttu on teleportatsiooni võimalik tõlgendada ka kui keha liikumise lõpmata suure kiirusena. Erirelatiivsusteooriast on teada seda, et mida lähemale keha liikumiskiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aeg aegleneb ja keha pikkus lüheneb. Matemaatiliselt on need väljendatavad järgmiselt:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ja \quad l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Kuid aja ja ruumi teisenemised on suhtelised. Näiteks mida lähemale rongi liikumise kiirus jõuab valguse kiirusele vaakumis, seda enam aegleneb aeg rongis ja rongi pikkus lüheneb vaatleja jaoks, kes vaatleb rongi liikumist kõrvalt. Kuid rongi sees olevale vaatlejale liigub aeg tavapärase kiirusega ja rongi pikkus on sama, mis paigalseisteski ning rongist väljas tundub aeg aga hoopis kiirenevat ja kehade pikkused pikenevad. Aja kiirenemise ja kehade pikkuste pikeneamise efektid on seega matemaatiliselt väljendatavad järgmiselt:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' = t \quad ja \quad \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l$$

Näiteks mida enam aeg teiseneb, seda väiksema omaajaga mingisugust vahemaad ruumis läbitakse. Järelikult kehade liikumiskiirused on lõpmata suured ( ehk kehad teleportreeruvad ) teiste kehade suhtes kui need satuvad sellisesse aegruumi piirkonda, mille korral

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty \quad ja \quad l' = l \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0.$$

Seda, et millises suunas ( minevikku, tulevikku või olevikus ) toimub kehade teleportatsioon ja kui kaugele ajas või ruumis teleportreerutakse, sõltub juba keha ümbritseva aegruumi kõverusest ja selle sama aegruumi kõveruse interaktsioonist Universumi paisumisega. Kuid sellest on lähemat käsitlust juba hiljem.

Mida enam aeg teiseneb välisvaatleja suhtes, seda väiksema „omaajaga“ mingisugust vahemaad ruumis läbitakse ehk seda suuremaks muutub keha „omakiirus“. Seda näitab aegruumi intervalli meetriline võrrand, mis kirjeldab kahe punkti vahelist kaugust ds neljamõõtmelises aegruumis. Järgnevalt näitamegi seda matemaatilise analüüsi teel. Selleks teeme alustuseks aja dilatatsiooni valemis järgmised matemaatilised teisendused:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Tõstame viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2$$

milles  $dt$  on

$$dt = \Delta t = t_2 - t_1$$

ja seega saame viimase võrrandi kirjutada kujul

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (t_2 - t_1)^2$$

Kahe ruumipunkti vahelist kaugust kolmemõõtmelises ruumis kirjeldab valem

$$l^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

milles kolme ruumikoordinaadi liikmed on vastavalt

$$\begin{aligned} dx &= x_2 - x_1 \\ dy &= y_2 - y_1 \\ dz &= z_2 - z_1 \end{aligned}$$

Klassikalises mehaanikas defineeritakse keha liikumiskiirust  $v$  teepikkuse  $l$  ja aja  $t$  jagatisena:

$$v = \frac{l}{t}$$

Tõstame kiiruse  $v$  võrrandi mõlemad pooled ruutu ja arvestame sealjuures ka eelmisi seoseid:

$$v^2 = \frac{l^2}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}$$

Viime selle kiiruse ruudu eelnevalt tuletatud võrrandisse:

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (t_2 - t_1)^2$$

ja korrutame võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$  ruuduga, tulemuseks saamegi aegruumi intervalli, mis kirjeldab kahe punkti vahelist kaugust neljamõõtmelises aegruumis:

$$c^2 \tau^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Võtame tähistuseks  $s$ -i:

$$c\tau = s$$

ja saame aegruumi intervalli meetriliseks võrrandiks järgmise kuju

$$s^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Füüsikaline keha, mis liigub vaakumis valguse kiirusega  $c$ , on „omaaeg“ võrdne nulliga

$$\tau = 0$$

ja seetõttu tuleb aegruumi intervall sellisel juhul samuti null:

$$0 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Keha liikumiskiirus  $v$  näitab, et kui suure teepikkuse  $l$  läbib keha ajaühikus  $t$ :

$$v = \frac{l}{t}$$

ja kahe ruumipunkti vahelist kaugust kolmemõõtmelises ruumis näitab võrrand

$$l^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ehk

$$l = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Kuna valguse kiirusega liikuval kehal on omaaeg null, siis see tähendab füüsiliselt seda, et mistahes suure vahemaa ruumis läbib keha omaajas lõpmata suure kiirusega:

$$v = \frac{l}{\tau} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (t_2 - t_1)} = \frac{l}{0} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{0} = \infty$$

ja kui keha liikumiskiirus  $v$  ( s.t. „omakiirus“ ) on lõpmatult suur:

$$v = \infty$$

siis võib seda füüsiliselt tõlgendada teleportatsioonina. Teleportatsioon on keha hetkeline ( s.t. 0 sekundiga ) asukoha muutumine ruumis või ajas. Seetõttu on teleportatsiooni võimalik tõlgendada ka kui keha liikumise lõpmata suure kiirusega.

Kõik eelnev oli inertse massi korral, sest ruumis liikuv keha on kui inertne mass. Järelikult peab kõik see kehtima ka raske massi korral, sest keha on ka kui raske mass. See tähendab sisuliselt seda, et teleportatsioon ilmneb siis kui keha liikumiskiirus on võrdne valguse kiirusega vaakumis või „ületab“ seda kiirust, mis on loomulikult teadagi võimatu. Kuid keha teleportatsioon ilmneb ka siis, kui keha satub näiteks musta augu Schwarzschildi „pinna sisse“ ehk hyperruumi, sest „seal“ ei eksisteeri enam aega ega ruumi.

Aja lõpmata aeglenemist võib mõista kui aja peatumist ehk aja eksisteerimise lakkamist. Selline asjaolu ilmneb ainult mustade aukude ja ka teiste taevakehade tsentrites ning valguse kiirusega liikumisel ( või selle „ületamisel“ ). Järelikult aja kadumise korral kehad teleporteeruvad ajas või ruumis. See on füüsiliselt võimalik ainult hyperruumis, sest „seal“ ei eksisteeri aega ( ega ka ruumi ).

Kehade teleportatsiooni on teadaolevalt kahte liiki:

1. Objekti „liikumine“ ühest ruumipunktist teise ühel ja samal ajahetkel. Seda nimetatakse ruumiteleportatsiooniks.

2. Objekti silmapilkne „liikumine“ ühest ajahetkest teise. Seda nimetatakse ajateleportatsiooniks. Ajas rändamine on seega tegelikult üks teleportatsiooni nähtusi, liike.
3. Kuid ajas ja ruumis teleportreeruda ühe korraga ei ole ilmselt võimalik.

Ajarännud ise aega ei võta. Füüsika on siiani õpetanud, et valguse kiirus vaakumis on kõige suurem võimalik kiirus looduses ja ühtlasi on see ka piirkiiruseks. Seda kiirust ei ole võimalik ületada. Kuna teleportatsioon ei võta aega ( s.t. mingisugust kiirust ei olegi ), siis seega füüsikaseadusi otseselt ei rikuta.

Kehad teleportreeruvad ainult „sirge sihis“ ehk „sirgjooneliselt“. Teleportatsioonis on „liikumine“ kahe punkti A ja B vahel alati „sirge trajektoor“, mitte nii nagu klassikalises mehaanikas, kus keha liikumise trajektoor võib olla peale sirge ka kõver.

Teleportatsioon avaldub ainult hyperruumis. See ei avaldu tavaruumis, kus me igapäevaselt elame.

Teleportreerumised ruumis on tegelikult samuti ajarännud. Need on ajarännud olevikus, mitte ajas liikumised minevikku või tulevikku.

Seega on universumis olemas kahte liiki kehade liikumisi. Esiteks need kehade liikumised, mida kirjeldab meile klassikaline mehaanika, ja teiseks on olemas teleportreerumised ajas ja ruumis. Sellise keha „liikumise“ ilmingud avalduvad ka kvantmehaanikas, mida me hiljem käsitleme pikemalt ja põhjalikumalt. Kuid mõlemad mehaanika liigid eksisteerivad ühes ja samas Universumis.

### 2.1.2 Aegruumi kõverus

Teadagi on fakt, et absoluutselt kõik kehad alluvad Universumi paisumisele. Kuid Universumi paisumine avaldub alles galaktikate ja nende parvede ning superparvede tasandil. See tähendab seda, et galaktikad ja nende parved ning superparved eemalduvad üksteisest. Mida kaugemal on üksteisest galaktikate parved, seda kiiremini nad üksteisest eemalduvad – ehk kehtib tuntud Hubble'i seadus.

Universumi paisumise avaldumise korral ei ole kehade mõõtmed tegelikult olulised, vaid on olulised ainult kehade vahelised kaugused. Kuna Universumi paisumine avaldub alles väga väga suures ruumimõõtkavas, siis saamegi seda mõista kui kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemist. Näiteks, kui me saame rääkida galaktikate parvede omavahelistest eemaldumistest, siis saame kindlasti rääkida ka näiteks planeetide omavahelistest eemaldumistest, mis asuvad erinevates galaktika parvedes. Mistahes füüsikalist keha võib vaadelda väga suure ruumimõõtkava suhtes punktina.

Teadagi on ka fakt, et Universumi aegruumis leidub ka selliseid piirkondi, kus aega ja ruumi enam ei eksisteeri. See tähendab seda, et aeg on „seal“ lõpmata aeglenenud ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus on „seal“ võrdne nulliga. Sellised aegruumi piirkonnad eksisteerivad näiteks mustade aukude ja ka galaktikate tsentrites. Neid tuntakse ka kui Schwarzschildi pindadena.

Kui aga näiteks inimene satub sellisesse erilisse aegruumi piirkonda, siis ei saa see inimene enam olla füüsikalises vastastikusises seoses Universumi paisumisega. Sellepärast, et kahe ruumipunkti vaheline kaugus võrdub sellises piirkonnas ju nulliga. Kuid Universumi paisumine avaldub ju kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemisel. Seda kirjeldavad ka vastavad

kosmoloogilised võrrandid. Võib öelda ka nii, et „*inimene ei ole enam ruumis, mis paisub*“. Sellisel juhul ei allu enam inimene Universumi ( meetrilisele ) paisumisele. Selle mõistmiseks vaatame järgmist analoogiat. Kui paat panna jõe peale, kus esineb silmanähtav vee voolamine ( vee tihedus on  $x$  ), siis see paat hakkab vee vooluga kaasa liikuma. Kui aga see paat satub jõe peal sellisesse piirkonda, kus vett ei ole ( vee tihedus on 0 ), siis paat enam vee vooluga kaasa liikuma ei hakka. Täpselt sama on ka Universumi paisumisega. Kui inimene on aegruumis (  $dt = x$  ja  $ds = y$  ), siis ta läheb Universumi paisumisega kaasa. Kui aga inimene satub sellisesse aegruumi piirkonda, kus aega ja ruumi enam ei olegi (  $dt = 0$  ja  $ds = 0$  ), siis ta ei ole enam Universumi paisumisega füüsilises vastastikmõjus. See tähendab seda, et inimene ei lähe enam Universumi paisumisega enam kaasa.

Universumi ( ehk selle „makro-aegruumi“ ) paisumise mudeliks tuuakse sageli välja just õhupalli paisumist. Oletame seda, et õhupallile tehakse auk, kuid sellegipoolest õhupall paisub edasi. Kui nüüd mingi keha paisuva õhupalli pinnalt kukub sinna auku, siis ei ole see keha enam „kontaktis“ paisuva õhupalliga ( s.t. keha ei lähe enam paisuva õhupalli liikumisega kaasa ). Samamoodi on ka aegruumi augu ja Universumi paisumise korral. Näiteks kui miski satub aegruumi auku, pole see enam „vastastikuses seoses“ Universumi paisumisega ( s.t. keha ei lähe enam paisuva Universumiga kaasa ).

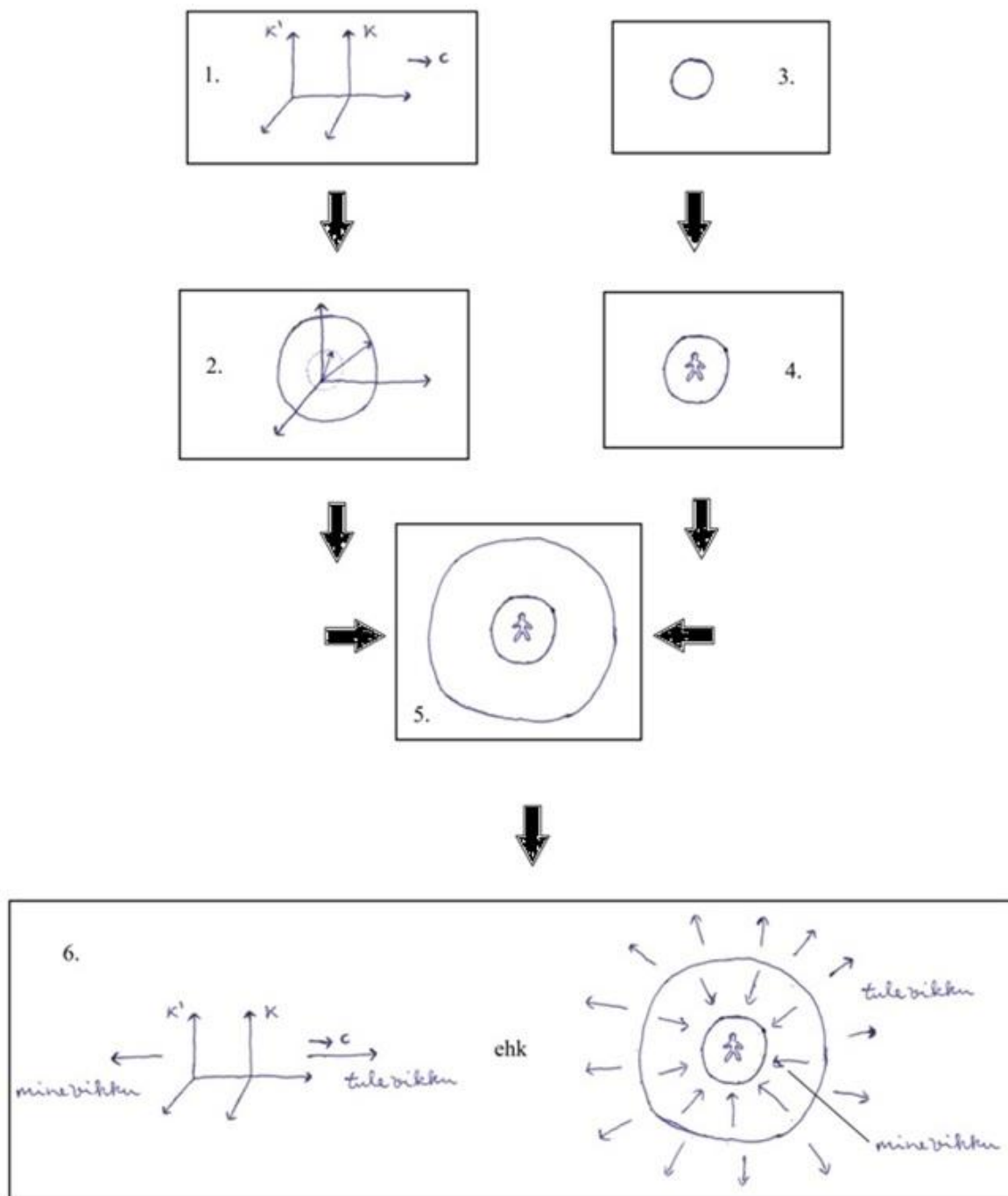
Selline aegruumi piirkond, mille korral kahe ruumipunkti vaheline kaugus  $ds$  võrdub nulliga ja aeg on jäänud seisma, esineb gravitatsioonivälja tsentris. Kuid sellisesse aegruumi piirkonda on võimalik sattuda ka siis, kui ületatakse valguse kiirus vaakumis ( mida tegelikult niikuinii ei ole võimalik sooritada ). Ka sellisel juhul on aeg peatunud ja keha pikkus võrdub nulliga ( seda loomulikult mingi taustsüsteemi suhtes ). Kuid ka sellisel juhul ei ole keha enam füüsilises vastastikuses seoses Universumi paisumisega. Järelikult hakkavad siin kehtima juba uued füüsilised seaduspärasused.

Universumi meetrilist paisumist kirjeldab Robertson-Walkeri meetrika sfääriliste koordinaatide korral:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right],$$

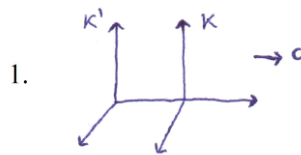
kus ajakoordinaat  $t$  on Universumi eluiga,  $K$  on konstant, mis on seotud kõvera ruumiga ja  $a(t)$  on aja funktsioon, mis sõltub Universumi paisumisest või võimalikust kokkutõmbumisest. Kahe ruumipunkti vahelist kaugust ( ehk ka Universumi „suurust“ ) näitab  $s$ , mille väärtus ajas  $t$  muutub. Seda see Robertson-Walkeri meetrika näitabki. Meetrika sõltub ka  $K$  konstandi väärtusest ehk ruumi kõverusest – seda, et kas tegemist on tasase, negatiivse või positiivse kõveruse ruumiga.

Sellest seosest ongi näha seda, et kui keha ei allu enam Universumi paisumisele ( see tähendab seda, et keha asub piirkonnas, kus  $ds$  võrdub nulliga ), siis ei ole ta ka seotud Universumi ajaga  $t$ . Seda on meetrikast otseselt näha. Järelikult keha suhestub Universumi ajaga teisiti, kui seda Universumi paisumise allumise korral. Teada on seda, et Universumi ruumala on erinevatel ajahetkedel erineva suurusega. Kuidas siis keha suhestub Universumi ajaga, seda me nüüd järgnevalt vaatamegi.

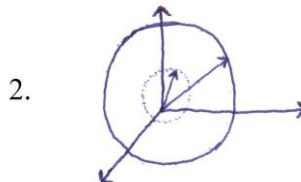


Joonis 21 Inimese ajas liikumise suund sõltub ümberoleva ruumi kõverusest ja selle paisumisest.

1. Ajas rändamise teooria üheks põhialuseks on väide, et erinevatel ajahetkedel on omad ruumipunktid. Selline seaduspärasus tuleneb näiteks aja ja ruumi lahutamatususe printsiibist, mida väidab näiteks erirelatiivsusteooria. See tähendab seda, et aeg ja ruum ei saa olla üksteisest lahus. Need kaks moodustavad ühe terviku – aegruumi ja sellest jäeldubki tõsiasi, et rännates ajas, peame ka liikuma ruumis.



2. Eespool välja öeldud seaduspärasus avaldub looduses Universumi paisumisena. Universumi ruumala suureneb ajas. Seega Universumi ruumala sõltub ajast. Universumi paisumine avaldub kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemisena, kuid seda alles galaktikate parvede ja superparvede tasandil.



3. Selleks, et inimene saaks rännata ajas ( ehk “liikuda” teise ajahetke ), on tal esimese asjana vaja nõ. praegusest ajahetkest “väljuda” ( s.t. “ajast väljuda” ). Füüsikaliselt tähendab see seda, et inimene peab sattuma sellisesse aegruumi piirkonda, kus aeg on aeglenenud lõpmatuseni ehk aeg on lakanud eksisteerimast. Kõlab ju loogiliselt, et “ajast väljumise” korral aega enam ei eksisteeri. Universumis leidub selliseid aegruumi piirkondi, kus aega ja ruumi enam ei olegi. Sellistes „aegruumi aukudes“ on aeg lõpmatuseni aeglenenud ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus võrdub nulliga. Sellised aegruumi piirkonnad eksisteerivad näiteks mustade aukude või ka galaktikate tsentrites. Kõige tuntumad sellised aegruumi piirkonnad ongi tegelikult just mustad augud. Üldrelatiivsusteooria keeles öeldes on nendes aegruumi aukudes aegruum kõverdunud lõpmatuseni. Ka elektromagnetväljad suudavad mõjutada aegruumi meetrikat.



3.

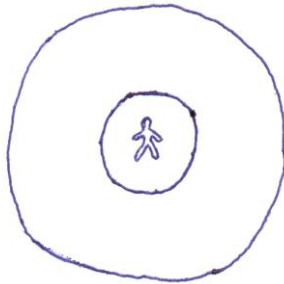
Albert Einstein lõi oma üldrelatiivsusteooria inertse massi ja raske massi samasusele. See tähendab seda, et raske mass ja inertne mass on võrdsed ehk need kaks on tegelikult üks ja sama. Kuid erirelatiivsusteooriast on teada seda, et ka energia ja mass on tegelikult üks ja sama, mida tuntakse seoses  $E = mc^2$ . Sellest järeldeb see, et kui mass on suuteline kõverdama aegruumi ( mida kirjeldab meile üldrelatiivsusteooria ), siis peab seda suutma ka energia. Seda sellepärast, et mass ja energia on ekvivalentsed suurused. Ka energiaga peaks kaasnema aegruumi kõverdus – nii nagu seda on suurte masside puhul. Analoogiliselt on see nii ka inertse massi ja raske massi korral. Näiteks elektromagnetväljal on energia ( samuti ka mass ja impulss ). See tähendab seda, et väli omab energiat. Elektromagnetväli on nagu energiaväli, mis ise ei ole tingitud aegruumi kõverdumisest ( nagu seda oli gravitatsioonivälja puhul ), kuid see väli suudab mõjutada aegruumi meetrikat.

4. Kui inimene satub sellisesse aegruumi auku, siis seda inimest ümbritseb väga suure kõverusega aegruum. Kõveraid aegruume kirjeldatakse üldrelatiivsusteooria matemaatiliste võrranditega.



4.

5. Inimene asub sellises aegruumi piirkonnas, kus kahe ruumipunkti vaheline kaugus võrdub nulliga. Selle tõttu ei ole inimene enam Universumi paisumisega füüsilises vastastikuses seoses, sest Universumi paisumine avaldub kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemises ja seda alles galaktikate parvede tasandil. Inimene asub nagu „väljaspool paisuvat ruumi“. Ta ei allu enam üldisele Universumi paisumisele. Sellepärast ümbritsebki inimest ( aegruumi augus olles ) peale suure aegruumi kõveruse ka veel paisuv aegruum.

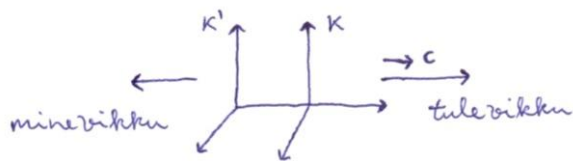


6. Inimest ümbritsev kõver aegruum ja ka veel paisuv ( Universumi ) aegruum hakkavadki üksteist füüsiliselt vastastikku mõjutama. Just nende kahe vastastikusest seosest saamegi teada seda, et millises suunas toimub ajas liikumine. Näiteks kõveras aegruumis kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemine ühtib Universumi paisumisega ( sest Universumi paisumine avaldub kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemises ) ja seega ajas liikumise suund on suunatud tuleviku poole, sest tulevikus on Universumi ruumala ( ehk kahe ruumipunkti vaheline kaugus ) kindlasti suurem kui seda on praegusel ajahetkel. Mineviku puhul toimub analoogiliselt aga vastupidi. Näiteks kõveras aegruumis kahe ruumipunkti vahelise kauguse vähenemine ühtib Universumi ruumala kahanemisega, mitte paisumisega ( sest Universumi paisumine avaldub ju kahe ruumipunkti vahelise kauguse suurenemisel ) ja seega ajas liikumise suund on suunatud mineviku poole, sest minevikus on Universumi ruumala ( ehk kahe ruumipunkti vaheline kaugus ) kindlasti väiksem kui seda on praegusel ajahetkel.

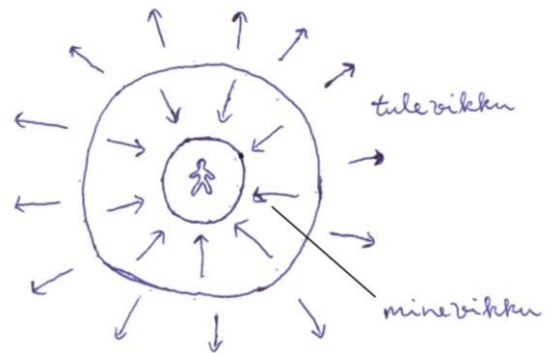
Ajas liigutakse minevikku või tulevikku vastavalt sellele, milline on aegruumi augu impulss hyperruumi suhtes – kas Universumi paisumise suunas või vastassuunas. Järelikult kui aegruumi augu impulsi suund ei ühti mõlema korral, siis liigutakse ajas olevikus ehk teleportreerutakse ruumis. Seda võib mõista ka nii, et näiteks valguse kiirusel vaakumis keha teleportreerub ruumis, kuid valguse kiiruse „ületamisel“ vaakumis rändab ( s.t. teleportreerub ) keha ajas ( näiteks minevikku või tulevikku ).



6.



ehk



Aja ja ruumi teisenemised eri- ja üldrelatiivsusteoorias on ainult suhtelised ehk relatiivsed. See tähendab seda, et need sõltuvad taustsüsteemi või vaatleja valikust. Näiteks ühele vaatlejale tundub mingis taustsüsteemis aeg kulgevat aeglaselt, kuid samas mõnele teisele vaatlejale tundub aeg kulgevat tavalise kiirusega. Aja kulgemine sõltub sellest, et millises taustsüsteemis vaatleja parajasti asub. Kuid reaalne ajas rändamine ( teleportreerumised ajas ) ei ole suhteline ( ei sõltu taustsüsteemi või vaatleja valikust ), vaid on üldine ehk universaalne – korraga kogu Universumit hõlmav nähtus. See tähendab seda, et keha teleportreerub ajas kõige eksisteeriva suhtes ( väljaarvatud iseenda suhtes ). Kui inimene rändab ajas, siis ta ise nooremaks või vanemaks ei muutu, kuid kogu tema ümbritsev maailm muutub vastavalt selliseks, millisena see maailm oli sellisel ajahetkel, kuhu ta ajas parajasti rändab.

### 2.1.3 Aegruumi tunnel ehk ussiauk ehk „Einsteini-Roseni sild“

Kui inimene rändab ajahetkest  $t_1$  ajahetke  $t_2$ , siis ajahetkes  $t_1$  pole inimest enam olemas. Sel ajahetkel ei eksisteeri inimene enam ajas ega ruumis. See on füüsikaliselt võimalik ainult siis, kui inimene satub sellisesse aegruumi piirkonda, „kus“ aeg on aeglenenud lõpmatuseni ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus on vähenenud samuti lõpmatuseni ehk aegruum on kõverdunud lõpmatuseni ehk aegruumi enam ei eksisteeri. Seda esineb näiteks mustade aukude tsentrites ehk aegruumi aukudes. See on ainuke seaduspärasus kogu relatiivsusteooria õpetuses, mis otseselt viitab ajas rändamise füüsikalisele võimalikkusele. See tähendab seda, et esimene tingimus ajas rändamiseks peab inimene ajast väljuma ehk sattuma sellisesse aegruumi piirkonda, „kus“ see on kõverdunud lõpmatuseni. Sellised aegruumi augud ( ehk tunnelid ) võimaldavad „liikuda“ hyperruumis, „kus“ ei eksisteeri enam aega ega ruumi. Relatiivsusteooria järgi eksisteerivad aegruumi augud mistahes taevakeha tsentrites ja aja ning ruumi teisenemised ilmnevad ka siis, kui keha liikumiskiirus läheneb valguse kiirusele vaakumis.

Aegruumi augus ehk sfäärilise kujuga aegruumi lõkspinna sissepoole jäävas piirkonnas ei eksisteeri enam aega ega ruumi. Kuid sellegipoolest omab aegruumi auk teatud ruumilist ulatust ruumis ja eksisteerib meie ajas teatud ajaperioodi. Näiteks aegruumi augu suurust meie ruumis näitab Schwarzschildi või Nordströmi raadius, sõltuvalt sellest, et mis on aegruumi augu tekitajaks ( kas keha mass või elektrilaeng ehk energia ). Väljaspool aegruumi auku eksisteerib aeg ja ruum, kuid mida lähemale aegruumi augu pinnale, seda enam on aeg ja ruum kõverdunud.

### 2.1.3.1 Aegruumi tunneli füüsikaline olemus

Ussiauk painutab aegruumi nii, et on võimalik kasutada otseteed läbi teise dimensiooni. Seetõttu näidatakse ussiauku mudelites sageli pigem kahemõõtmelisena, mis näeb välja nagu ring. Kuid kolmemõõtmeline ring näeb välja kui kera ja seepärast näeb ussiauk tegelikkuses välja just kerana. See tähendab seda, et ussiauk on tegelikult kerajas auk ehk aegruumi auk. Järgnevalt vaatamegi seda, et aegruumi auku on võimalik tõlgendada aegruumi tunnelina ( ehk ussiauguna ). See tähendab seda, et aegruumi auk ja aegruumi tunnel on tegelikult üks ja sama. Selleks koostame aegruumi augu ja aegruumi tunneli võrdluse kohta järgmise tabeli:

#### Aegruumi auk:

Tegemist on aegruumi auguga. Mida enam augu tsentrile lähemale, seda enam aeg aegleneb ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus väheneb. Augu tsentris aega ja ruumi enam ei eksisteeri. Ae-gruumi augu suurst kirjeldab Schwarzschildi raadius.

Aegruumi august saab minna sisse ja välja.

Aegruumi auk on piirkond ruumis, kus aega ja ruumi enam ei eksisteeri.

Füüsikalised kehad teleportreeruvad ajas ja ruumis, kui nad satuvad aegruumi auku ehk „väljaspoole aegruumi“.

Mida suurem on aegruumi auk, seda rohkem aegruumi on augu ümber kõverdunud.\*\*

Kui aegruumi auk suureneb, siis toimub aja rännak minevikku. Kui aga augu

#### Aegruumi tunnel:

Aegruumi auk on nagu aegruumi tunnel. Mida kaugemale ( sügavamale ) tunnelisse minna seda enam aeg aegleneb ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus väheneb. Ae-gruumi tunneli sees aega ja ruumi enam ei eksisteeri.

Aegruumi tunnelil on kaks otsa - sissekäik ja väljakäik.

Aegruumi tunnel on alati sirge, mitte kõverdub ega vändub\*.

Aegruumi tunneli läbib keha hetkega ehk 0 sekundiga. Inimese teleportreerumine ajas ja ruumis ning aegruumi tunneli ( ehk ussiaugu ) läbimine on tegelikult üks ja sama nähtus.

Mida pikem on aegruumi tunnel, seda kaugemale ajas ( või ruumis ) liigutakse.

Aegruumi tunneli üks ots viib ajas minevikku ja teine ots aga

suurus väheneb, siis toimub aja rännak tulevikku. Auk ise ruumis ei liigu.

ajas tulevikku\*\*\*.

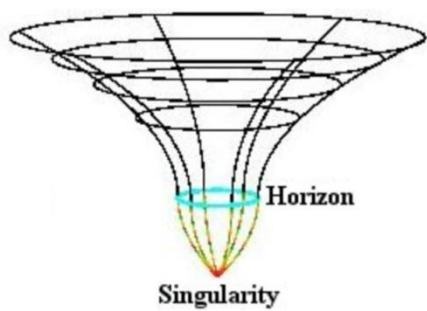
Augu suurus ajas ei muutu. Kuid auk ise liigub ruumis. Sellisel juhul auku sattumisel liigub keha ajas olevikus ehk teleportreerub ruumis.

Aegruumi tunneli üks ots viib ruumipunkti A, teine ots viib aga ruumipunkti B.

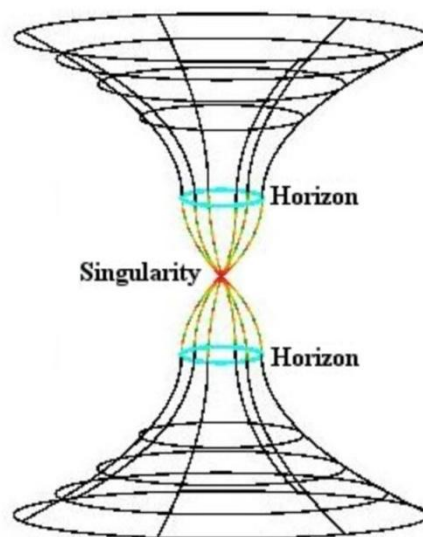
\*Inimese surmalähedastes kogemustes on nähtud ka väänduvaid ( kõverduvaid ) aegruumi tunneleid, kui neid aegruumi tunneliteks üldse nimetada saab. Ka aegruumi auku on võimalik „illusionaalselt“ vaadelda väänduva aegruumi tunnelina, kui aegruumi auk liigub ruumis mittesirgjooneliselt. Selle analoogseks nähtuseks võib vaadelda näiteks tornaadode tekkimist, kui pilve keeris taevast maapinnani läheneb tekib tuntud tornaado tunnel.

\*\*Aegruumi augu ümber on aegruum kõverdunud lõpmatuseni. See tähendab seda, et mida enam augu tsentri poole minna, seda enam aegruum on kõverdunud ehk aeg aegleneb ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus väheneb. Kuid see kõverdunud aegruum ümber augu on siiski lõpliku „ulatusega“. Selle mõistmiseks peab välja tooma analoogia keha pikkuse kontraktsiooni nähtuse erirelatiivsusteooriast. Mida kiiremini keha liigub ehk mida lähemale valguse kiirusele vaakumis, seda enam keha pikkus lüheneb. Keha pikkus võib lüheneda lõpmatuseni, kuid keha algne pikkus ( enne lühenemist ) oli fikseeritud. Just sama seaduspärasus kehtib ka aegruumide kõverdumiste korral. Selles mõttes võib küll aegruum lõpmatuseni kõverduda, kuid aegruumi „kanga“ enda „algne ulatus“ on siiski jääv ja lõplik. Näiteks kummi võib venitada samuti lõpmatuseni, kuid kummi mass jääb ju lõppkokkuvõttes ikkagi samasuguseks võrreldes enne kummi venitama hakkamist.

\*\*\*Ajas tagasi liikuda saab ainult aegruumi tunnelit kasutades ( s.t. ajas minevikku saab minna ainult teleportreerumisega ), kuid ajas tulevikku rändamiseks on peale aegruumi tunneli veel üks tuntud võimalus. Aja kulgemine erinevates taustsüsteemides on erinev ehk see on suhteline, mis sõltub vaatleja asukohast ruumis ehk sõltub taustsüsteemi valikust. Näiteks kui mingi vaatleja siirduks oma tähelaevaga kosmosesse kiirusega, mis läheneb valguse kiirusele vaakumis ja tuleks 22 aastat hiljem maa peale tagasi, siis maa peal on möödunud selle aja jooksul peaaegu 1000 aastat. Seega vaatleja rändas ajas tulevikku. Seda võib käsitleda ajas ( tulevikku ) rändamise erijuhuna. Kuid sama suhteline ehk relatiivne nagu aja kulgemine erinevates taustsüsteemides on ka inimese reaalne ajas teleportreerumine. Näiteks inimene võib hetkega teleportreeruda ajas 30 aastat tulevikku või selle asemel ta lihtsalt ootab 30 aastat ( mis on ka tegelikult ajas rändamine ), et jõuda hetke, mil teleportreerumisega oleks jõudnud ainult ühe hetkega.

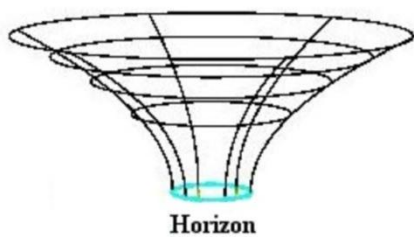


Aegruumi auk

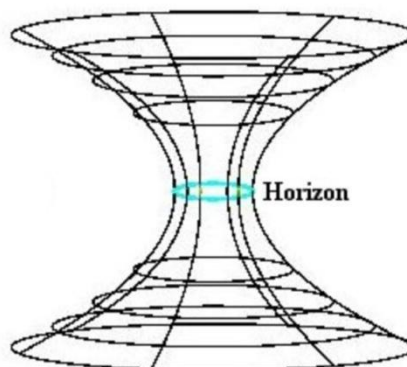


Aegruumi tunnel

Joonis 39 Aegruumi auk ja aegruumi tunnel on tegelikult üks ja sama.

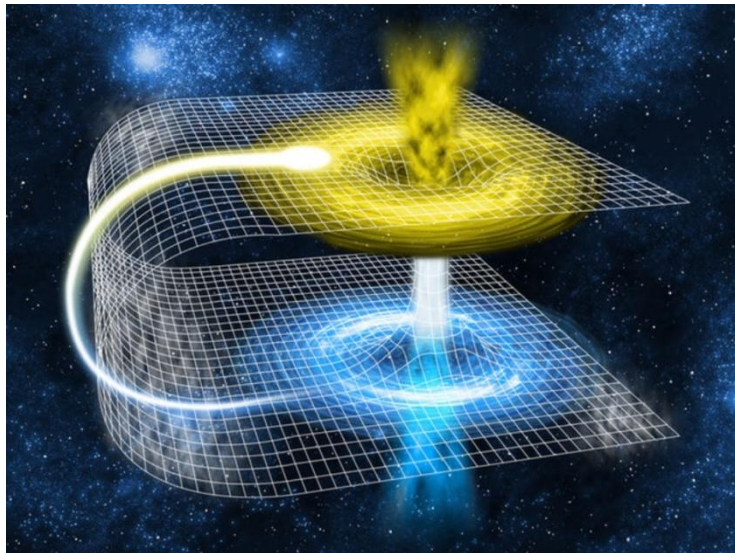


Aegruumi auk



Aegruumi tunnel

Joonis 40 Aegruumi augu singulaarsust pole tegelikult olemas ja seega peab arvestama ainult aegruumi augu suurusega ehk sündmuste horisoni raadiusega.



*Joonis 41 Aegruumi tunnel ühendab Universumis omavahel kaks punkti ruumis või ajas.*

Fotod on kasutatud ja dubleeritud järgmistel interneti lehekülgedelt:

<http://casa.colorado.edu/~ajsh/schww.html>

<http://www.space.com/20881-wormholes.html>

Gravitatsiooniväli on aegruumi kõverdus, mida põhjustavad väga rasked massid. See aegruumi kõverdus väljendub selles, et mida enam gravitatsioonivälja tsentri poole minna, seda enam aeg aegleneb ja kahe ruumipunkti vaheline kaugus väheneb. Selline aja ja ruumi teisenemine jätkub kuni teatud kauguseni tsentrist. Ja seda kaugust kirjeldab meile Schwarzschildi raadius  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

See raadius näitab kaugust gravitatsioonivälja tsentrist, et kust alates on aeg  $t$  ja ruum  $l$  teisenenud lõpmatuseni ehk kust alates avaldub aegruumi lõpmatu kõverdumine ehk aegruumi eksisteerimise absoluutne lakkamine:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}}$$

ja

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

ja seetõttu ei saa midagi eksisteerida näiteks musta augu ehk aegruumi augu Schwarzschildi raadiuse  $R$  sissepoole jäävas „piirkonnas“, mida vahel nimetatakse ka Schwarzschildi pinnaks. See tähendab ka seda, et mingisugust singullaarsust musta augu tsentris ei saa olemas olla. Singullaarsus on lihtsalt üks punkt, kust alates mõõdetakse Schwarzschildi raadius  $R$ , mis määrab ära musta augu ehk aegruumi augu „suuruse“ ehk sellise kujuteldava sfääri suuruse ruumis, kust alates aegruumi lõpmatu kõverus muutub tsentrist kaugenedes järjest tasasemaks. Seepärast ei saa musta augu mass eksisteerida Schwarzschildi pinna sees, vaid on sellest väljapool nii nagu tähtede ja planeetide korral. Schwarzschildi pind on täiesti kerakujuline ja see ei pöörle. See võib ainult tiirelda mõne teise taevakeha ümber.

Matemaatiliselt kirjeldab aegeuumi auku näiteks Schwarzschildi meetrika ja seega võib kirjeldada see sama meetrika ka aegeuumi tunnelit:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

1916. aastal leidis sellise lahendi Schwarzschild. Kui aga võtta  $r$ -i asemele

$$r + \frac{R}{2}$$

ja tehes mõningaid teisendusi, saame aga järgmise kuju:

$$ds^2 = \frac{r - \frac{R}{2}}{r + \frac{R}{2}} dt^2 - \frac{r + \frac{R}{2}}{r - \frac{R}{2}} dr^2 - \left(r + \frac{R}{2}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Saadud avaldis on Foki gravitatsioonivälja põhivorm. Väli peab aga olema siis tsentraalsümmeetriline, mis ajas ei muutu. Selline on vorm harmoonilistes koordinaatides. (Silde 1974, 165-169) Viimane avaldis näitab meile sisuliselt seda, et mida lähemale aegeuumi augu tsentrile, seda aeglasemalt liigub aeg ja keha pikkus lüheneb välisvaatleja suhtes.  $R$  on Schwarzschildi raadius

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

mis näitabki aegeuumi augu suurust. Aegeuumi auku ja aegeuumi tunnelit kirjeldavad meetrikad on omavahel sarnased. See viitab sellele, et aegeuumi tunnelit kirjeldavat meetrikat tuletatakse välja aegeuumi auku kirjeldavatest meetrikatest.

Kõige tuntum aegeuumi tunnelit kirjeldav matemaatiline võrrand on meetrika, mida nimetatakse Einstein-Roseni sillaks:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Täpsemalt öeldes kirjeldab Schwarzschildi meetrika seda, et kuidas muutuvad aeg ja ruum, kui läheneda taevakeha (näiteks musta augu) tsentrile. Kuid ussiaugu meetrika kirjeldab aga seda, et aegeuumi auk ehk aegeuumi tunnel „ühendab“ omavahel kaks erinevat aegeuumi punkti nii, et nende vaheline teepikkus on kahanenud lõpmata väikeseks.

Aegeuumi tunneli ehk ussiaugu meetrilist valemit tuletatakse gravitatsioonivälja meetrilisest võrrandist:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

ehk

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Gravitatsiooniväli on oma olemuselt aja ja ruumi kõverus. Seetõttu kehtib gravitatsiooniline pikkuse ehk ruumi kontraktsioon:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r}}$$

Viimane võrrand näitab keha pikkuse või kahe ruumipunkti vahelise kauguse lühenemist ehk kontraktsiooni gravitatsioonivälja ehk aegruumi kõveruse tsentri poole minnes. Kui me viimase võrrandi mõlemad pooled tõstame ruutu:

$$l^2 = l_0^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right)$$

ja viime sulgudes oleva avaldise võrrandi teisele poole võrdusmärgi:

$$\frac{l^2}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} = l_0^2$$

siis saame suuruse:

$$\frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)} = dl^2$$

mida ussiaugu ehk aegruumi tunneli füüsikas tõlgendatakse „*radiaalse omakaugusena*“, mis näitab ussiaugu *kurgu* tekkimise võimalikust. Viimast võrrandit võib matemaatiliselt esitada ka järgmiselt:

$$\frac{dl}{dr} = y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}} = \pm \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

milles  $b = R$  on antud juhul Schwarzschildi raadius, mis näitab aegruumi augu suurust. Viimane võrrand on oma olemuselt gravitatsioonilise pikkuse ehk ruumi kontraktsiooni võrrand, kuid milles on arvestatud peale võrrandi reaalsosa ka veel imaginaarosa. Eelnevalt oleme tähistanud järgmised suurused sfääriliste koordinaatidega:

$$l^2 = dr^2$$

ja

$$l_0^2 = dl^2$$

Gravitatsioonilise pikkuse kontraktsiooni matemaatilist definitsiooni arvestades võime üldise meetrilise võrrandi kirjutada kujule:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 + dl^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Viimase üldise meetrilise võrrandi ajaline osa ehk gravitatsiooniline aja dilatatsioon avaldub järgmiselt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2$$

ehk

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = \frac{1}{y^2} = -\left(1 - \frac{R}{r}\right) = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

Kõikides võrrandites esinev suurus  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

on antud juhul gravitatsiooniraadius ehk Schwarzschildi raadius, mis näitab aegruumi augu suurust. Seetõttu saame järgmise seose:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2$$

milles olev avaldis:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

on Newtoni mehaanikast tuntud gravitatsioonivälja potentsiaal. Sellest omakorda järeldub see, et gravitatsioonilisest aja dilatatsioonist ja gravitatsioonilisest ruumi kontraktsioonist ehk aja ja ruumi kõverusest sõltub gravitatsioonipotentsiaali suurus. Aegruumi tunneli ehk ussiaugu meetrikas kasutatakse Euleri piirväärtuse valemit:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

ja seda sellepärast, et gravitatsioonilise aja dilatatsiooni võrrandis tuleb arvestada peale reaalsosa ka veel tekkivat imaginaarosa ehk kasutada komplekseid arve  $z$ :

$$z = a + bi$$

Gravitatsioonipotentsiaali võrrandit on võimalik esitada kompleksarvuna, milles võrrandi reaalsosa võrdub nulliga:

$$z = bi$$

ehk

$$\Phi = z = -\frac{GM}{r} = +\frac{GM}{r} i^2$$

Imaginaarühik avaldub järgmiselt:

$$i^2 = -1$$

Sellest tulenevalt ei saa kehtida võrdus:

$$\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \neq \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{c^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z = e^{2\Phi}$$

milles kompleksarv võrdub

$$z = 2\Phi$$

ja muutuja  $n$  on hoopis konstant:

$$n = c^2 = \text{const}$$

Kui me eelnevat sulgudes olevate avaldiste omavahelist mittevõrdust ei arvestaks, siis saame meetrilise võrrandi:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + dl^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

mis kirjeldab staatilist ussiauku ja millest saab minna läbi. Sellise võrrandi muutumispiirkonnad on aga järgmised, aeg

$$-\infty < t < +\infty$$

radiaalkoordinaat

$$-\infty < l < +\infty$$

ja nurgamuutujad

$$0 \leq \theta \leq \pi$$



$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Kujufunktsioon  $b(r)$  ja punanihke funktsioon  $\Phi(r)$  määravad ära lahendi, mis on sfääriliselt sümmeetriline. See lahend ühendab omavahel kaks tasast aegruumi piirkonda. Ussiaugu kurgust näitab  $l$  radiaalset omakaugust.  $l$  on esimeses ühendatud aegruumi piirkonnas positiivne ja teises ühendatud aegruumi piirkonnas negatiivne. Kuid eelnevalt me tõdesime, et ei saa kehtida Euleri võrdus:

$$\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \neq e^{2\Phi}$$

siis seega saame üldise meetrilise võrrandi tegelikuks kujuks järgmiselt:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + dl^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

milles radiaalne omakaugus kattub gravitatsioonilise ruumi kontraktsiooni valemiga:

$$dl^2 = \pm \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)}$$

Ussiaugu füüsikas tähistatakse Schwarzschildi raadiust  $R$  väikese  $b$  tähega:  $R = b$ . See sisaldab endas gravitatsioonipotentsiaali definitsiooni, mida on võimalik esitada kompleksarvuna:

$$\Phi = + \frac{GM}{r} i^2$$

milles imaginaarühik avaldub:  $i^2 = -1$ . Viimane üldine meetriline võrrand kirjeldab aegruumi tunnelit, mis seisneb gravitatsiooniväljas ehk tsentraalsümmeetrilises aegruumi kõveruse meetrikas, milles arvestatakse peale reaalsosa ka veel selle imaginaarosa. Kuid füüsikas arvestatakse üldiselt ainult reaalsosa. Aegruumi tunneli pikkuse füüsikaline tõlgendus ei seisne gravitatsiooniväljas kui aja ja ruumi kõveruses, vaid see seisneb ainult aegruumi augu eksisteerimises ajas. Schwarzschildi raadius näitab Schwarzschildi pinna ehk aegruumi augu suurust aegruumis. (Järv 1996, 5-6).

Aegruumi auku on võimalik tõlgendada „sissepääsuna“ hyperruumi ja ka „väljapääsuna“ hyperruumist. Selle paremaks mõistmiseks toome välja järgmise analoogse näite. Oletame, et meie tavaruum on sõitva rongi taustsüsteem, milles inimene vabalt liikuda saab. Maapind on aga kui hyperruum. Sõitva rongi avatud uks ongi nagu aegruumi auk, mille läbimise korral satub inimene mõne hetkega maapinnale liikuma, kui samal ajal rong liigub edasi. Rongi ukse läbimisel satub inimene otseselt maapinna peale, milles saab liikuda mistahes suunas, sõltumata rongi kaasaliikuvast taustsüsteemist. Täpselt sama on ka tavaruumi ja hyperruumiga. Aegruumi auk on nagu sissepääs hyperruumi, milles saab liikuda ajas edasi või tagasi, sõltumata kaasaliikuvast tavaruumist. Aegruumi auk on ka kui aegruumi tunnel, mille suue on kui sissepääs hyperruumi. Liikudes aegruumi tunnelis liigutakse tegelikult hyperruumis.

Aegruumi auku on võimalik füüsiliselt tõlgendada kui „sissepääsuna“ hyperruumi ja samas ka „väljapääsuna“ hyperruumist ehk aegruumi tunnelina. See tähendab seda, et liikudes aegruumi tunnelis toimub liikumine tegelikult hyperruumis. Hyperruumis liikumine ei võta kehal enam aega ehk kehad teleportreeruvad, sest vastavalt energia jäävuse seadusele saab keha „viibida“ hyperruumis lõpmata väikese ajaperioodi jooksul. Seetõttu ei võta aegruumi tunneli läbimine enam aega. See tähendab seda, et kui kehad teleportreeruvad ajas või ruumis, siis need tegelikult juba ongi läbinud aegruumi tunneli, mis seda võimaldasid.

Aegruumi auk ja aegruumi tunnel on tegelikult füüsiliselt üks ja sama „objekt“. Aegruumi

auku ( näiteks musta auku ) kirjeldava Schwarzschildi meetrika kohaselt on see täiesti kerakujuline ja seega on ka aegruumi tunnel ( välise vaateleja suhtes ) kerakujuline.

Ületada valguse kiirust vaakumis pole reaalselt võimalik, sest lõpmatut energiat pole kuskilt võtta. Sama on tegelikult ka aegruumi auguga ( ehk aegruumi tunneliga ). Aegruumi auku pole otse võimalik reaalselt liikuda, sest sarnaselt valguse kiirusega vaakumis aegleneb aeg ja keha pikkus lüheneb aegruumi augule lähenemisel. Seetõttu lähenedes augule reisib keha ajas tulevikku ja augu servale jõudmiseks peab keha rändama ajas lõpmata kaugesse tulevikku. Kuid ajas ja ruumis ei eksisteeri mitte miski lõpmata kaua – isegi ka aegruumi auk ise. Näiteks aegruumi augud ( nagu mustad augud ) aja jooksul kvantaurustuvad.

Aegruumi tunnel ( ehk ussiauk ) võimaldab mõlemat: teleportreeruda ajas ja ruumis. Ei saa olla ainult ühte võimalust.

Ajas rändamise korral ei saa inimene ussiauku ( ehk aegruumi tunnelit ) läbides seda visuaalselt näha, sest teleportreerutakse ajas ( või siis ruumis ). See tähendab seda, et kui keha teleportreerub ajas või ruumis, siis ta juba ongi tegelikult läbinud aegruumi tunneli ehk ussiaugu. Teistsugune olukord avaldub aga inimese kehast väljunud olekus. Sellisel juhul nähakse seda, et kuidas sisenetakse mingisugusesse tunnelisse – ümbertringi on pilkane pimedus, kuid keskelt ( ehk tunneli lõpust ) paistab ere valgus. Seega aegruumi tunnelisse sisenemist ja väljumist näeme otseselt ainult inimese surmalähedaste kogemuste ajal.

### **2.1.3.2 Aegruumi tunneli pikkus**

Aegruumi auk on samaaegselt aegruumi tunneli nii sissekäik kui ka väljakäik. Aegruumi augu suurus näitab ussiurke ( s.t. aegruumi tunneli ) sissekäigu ja väljakäigu suurust. Näiteks mida suurem on aegruumi auk, seda suurem keha saab läbida aegruumi tunnelit. Aegruumi augu suurus näitab aegruumi tunneli suurust, kuid mitte selle pikkust. Aegruumi tunneli sissekäik ja väljakäik on alati ühesuursed, mis on määratud aegruumi augu enda suurusega aegruumis.

Mida suurem on aegruumi auk, seda rohkem kõverdub ruum ( s.t. seda rohkem ruumi peab kõverduma ). Aegruumi kõverus on seotud ainult augu suurusega ehk aegruumi tunneli sisse- ja väljakäigu avause suurusega. Sellel ei ole midagi pistmist aegruumi tunneli pikkusega.

Aegruumi augu suurus aegruumis ei näita aegruumi tunneli pikkust. Mida kaugemale ajas rännata, seda pikem peab olema aegruumi tunnel. Ajas on võimalik rännata ainult hyperruumis ehk väljaspool aegruumi. Ja see tähendab seda, et mida suurema teepikkuse liigume hyperruumis, seda kaugemale me ajas liigume. Sellest järeldub, et aegruumi tunneli pikkus sõltub aegruumis oleva aegruumi augu eksisteerimise ajaperioodist. See on sellepärast nii, et mida pikema perioodi eksisteerib aegruumi auk ajas ( ehk mida pikem on aegruumi augu tekkimise ja kadumise ajavahemik ), seda pikem tee on läbitud hyperruumis.

Mida kaugemale ajas rännata, seda pikem peab olema aegruumi tunnel. Mida pikem on aegruumi tunnel, seda suurem teepikkus läbitakse hyperruumis. Ajas on võimalik liikuda ainult hyperruumis ehk väljaspool aegruumi.

Tavaruum K liigub hyperruumi K´ suhtes valguse kiirusega  $c$  ehk 300 000 km/s. See tähendab seda, et kui meie aegruumis ( s.t. tavaruumis K ) on möödunud üks sekund, siis hyperruumis oleks läbitud selle aja jooksul ligikaudu 300 000 kilomeetrine vahemaa. See tähendab ka seda, et kui me rändaksime ajas minevikku või tulevikku ühe sekundi, siis me peaksime liikuma hyperruumis ligikaudu 300 000 kilomeetrise vahemaa. See kehtib juhul, kui Universumi paisumiskiirus on võrdne valguse kiirusega vaakumis. Kuid Universumi tegelik paisumiskiirus on praegusel ajal  $74 \text{ km/s} * (\text{Mpc})$ . Selline kiirus on SI süsteemis ( s.t. ühikutes ) aga järgmine:

$$\frac{x}{y} = \frac{74\,000 \left(\frac{m}{s}\right)}{3,086 * 10^{22}(m)} = 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ ühe meetri kohta,}$$

milles galaktikate eemaldumiskiirus on  $x = 74 \text{ km/s} = 74\,000 \text{ m/s}$ , vahemaa ruumis on  $y = 1 \text{ Mpc} = 3,086 * 10^{16} \text{ m} * \text{miljon} = 3,086 * 10^{22} \text{ m}$  ja valguse kiiruse arvvaartus vaakumi korral on  $c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 * 10^8 \text{ m/s}$ . Kuna Universumi paisumiskiirus on palju kordi väiksem valguse kiirusest ehk aeg Universumis kulgeb tegelikult palju palju kiiremini kui see meile paistab

$$t' = yt,$$

siis seega peame leidma  $y$  ( s.t. gamma ) väärtuse:

$$y = \frac{t'}{t}$$

mis näitab meile seda, et mitu korda on Universumi paisumise kiirus aeglasem tegelikust paisumiskiirusest ehk mitu korda on aja kulg Universumis aeglenenud või kiirenenud (  $y$  on kordaja, millel ei ole ühikut ):

$$y = \frac{t'}{t} = \frac{3 * 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)}{2,3979 * 10^{-18} \left(\frac{m}{s}\right)} = 1,25109 * 10^{26} \approx 1,25 * 10^{26}$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et kui meie „igapäevaselt tajutavas aegruumis“ ehk tavaruumis  $K$  on möödunud näiteks üks sekund:

$$t' = 1 \text{ sek}$$

siis tegelikult ( s.t. Universumist väljaspool olevale hüpoteetilisele vaatlejale ehk hyperruumi  $K'$  suhtes vaadatuna ) on möödunud „kõigest“

$$t = \frac{t'}{y} = 8 * 10^{-27} \text{ sek}$$

Viimases võrduses on  $t'$  nö. näiline aeg ( s.t. Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale kulgev aeg ) ja  $t$  on tegelik aeg ( s.t. Universumist väljaspool olevale hüpoteetilisele vaatlejale kulgev aeg ). Sellest järeldub, et kui aeg on Universumis tegelikult möödunud üks sekund, siis näiliselt on möödunud:

$$t' = ty = y \approx 1,25 * 10^{26} \text{ sek} \approx 3,963 * 10^{18} \text{ a} \approx 4 \text{ miljardit miljardit aastat}$$

milles  $t = 1 \text{ sek}$ . Eelnevalt on arvestatud, et ühes aastas on 31 536 000 sekundit, kui ei ole tegemist liigaastaga. Nendest lihtsatest seostest on võimalik otseselt välja arvutada seda, et kui kaugele on võimalik ajas teleporteeruda. Selle välja arvutamine sõltub puhtalt sellest, et kui pikk on aegruumi lõkspinna ( ehk aegruumi tunneli ) eksisteerimise aeg Universumis. Näiteks kui aegruumi lõkspind eksisteerib meie ajas

$$\frac{t'}{y} = t = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$$

siis saame ajas minevikku või tulevikku teleporteeruda  $t' = 3\,153\,600\,000$  sekundit ehk 100 aastat ( liigaastaid pole sealjuures arvestatud ). Kuna kinnise aegruumi lõkspinna „sees“ eksisteerib

keha juba hyperruumis ehk Universumi aegruumist väljaspool, siis antud juhul näitab ajaperiood  $t$

$$t = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$$

ka kinnise aegruumi lõkspinna eksisteerimise aega  $t'$  Universumi aegruumis. Sellest tulenevalt on võimalik välja arvutada seda, et kui kaugele sooritatakse ajarännak ehk välja arvutada  $t'$  väärtuse. Kõik arvutused tehakse SI süsteemis. Täpselt samasugune põhimõte on ka teleportreerumisega ruumis, mille korral ei rännata ajas minevikku ega tulevikku, vaid ainult ajas „olevikus“, mille tulemusena teleportreerutakse ainult ruumis:

$$l' = \frac{l}{\gamma}$$

Sekundite asemele tulevad lihtsalt meetrid. Näiteks kui aegruumi lõkspind eksisteerib meie ajas

$$\frac{t'}{\gamma} = t = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$$

siis saame ajas olevikus ehk ruumis teleportreeruda  $l' = 3\,153\,600\,000$  meetrit ehk veidi üle 3-me miljoni kilomeetri.

Väljaspool aegruumi auku on kosmoloogiline aeg teisenenud ( ehk eksisteerib tume energia, mida peab arvutustes arvestama ), kuid aegruumi augu sees ei ole enam aeg teisenenud ja sellest tulenevalt ei pea arvestama aja kosmoloogilist relatiivsust ehk tume energiat. See tähendab seda, et kui inimene tahab rännata ajas 100 aastat minevikku või tulevikku, siis peab aegruumi auk eksisteerima meie aegruumis

$$t' = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$$

Aegruumi augu eksisteerimise aeg meie aegruumis näitab ajas rändava keha eksisteerimise aega hyperruumis. Aegruumi augu eksisteerimise aeg on selle augu tekkimise ja kadumise ajavahemik.

Tegelikult läbib füüsikaline keha aegruumi tunneli ainult ühe hetkega ehk keha eksisteerib hyperruumis null sekundit. Aegruumi tunneli pikkuse ehk liikumise teepikkuse hyperruumis määrab ära aegruumi augu eksisteerimise aeg aegruumis ehk aegruumi augu tekkimise ja kadumise ajavahemik aegruumis. See tähendab seda, et aegruumi augu eksisteerimise aeg aegruumis näitaks ka ajas rändava keha eksisteerimise aega hyperruumis, mille põhjal oleks võimalik välja arvutada läbitud või läbitava teepikkuse hyperruumis. Mida pikem on keha liikumise teekond hyperruumis, seda kaugemale ajas rännatakse.

Kui kaugele aja rännak sooritatakse sõltub ainult sellest, et kui pikk on aegruumi tunnel ehk kui suur vahemaa läbitakse hyperruumis. Kuid tegelikult võib väita, et see sõltub kosmoloogilisest aegruumi kõverusest. Selline aegruumi kõverus on rangelt kosmoloogiline, mitte enam gravitatsiooniline ( mida põhjustavad massid ). Selline aegruumi kõverus tuleb otseselt sellest, et Universumi paisumiskiirus on võrreldes nähtavaga palju suurem ja seetõttu on aja üldine kulgemine Universumis teisenenud ehk kõver. Seda me nimetame tume energiaks, sest selletõttu suureneb Universumi paisumiskiirus ajas ehk see läheneb valguse kiirusele vaakumis. Kuid kõiges selles ei ole tegelikult midagi üllatavat, sest ajas rändamine on oma olemuselt kosmoloogiline nähtus ja seega peab see olema tihedalt seotud Universumi kosmoloogilise paisumise seaduspärasustega.

Meie aegruumis on kosmoloogiline aeg teisenenud ( ehk eksisteerib tume energia, mida peab arvutustes arvestama ), kuid väljaspool aegruumi ei ole enam aeg teisenenud ( tegelikult pole enam üldse aega ) ja sellest tulenevalt ei pea arvestama aja kosmoloogilist relatiivsust ehk tume energiat.

Kordaja  $\gamma$  muutub ajas väiksemaks, mille tulemusena Universumi paisumise kiirus ajas suureneb ehk läheneb valguse kiirusele  $c \cdot 10^{26}$  võib tunduda inimese jaoks väga suure numbrina, kuid kosmoloogilises kontekstis on see tegelikult üsna keskpärane suurus. Näiteks Universum sai alguse aegruumi algsingulaarsusest, mille korral oli kogu meie Universumi ruumala lõpmatult väike ja aja

vahe ( s.t. Universumis eksisteeriva näiva ja tegeliku aja kulgemise vahe ) lõpmatult suur. Seetõttu on lõpmatusega võrreldes  $10^{26}$  üsna väike number.

## 2.2 Aegruumi tunnelite loomine

### 2.2.1 Reissner-Nordströmi meetrika

Elektrilaengu mõju aegruumile kirjeldab matemaatiliselt Nordströmi meetrika. Selle meetrika matemaatiline tuletus üldrelatiivsusteooria tensorarvutustest on aga ainult matemaatiline järeldus laengu mõjust aegruumile. Füüsikaline järeldus tuleneb aga erirelatiivsusteooriast tuntud massi ja energia ekvivalentsuse seadusest. See tähendab seda, et üks on matemaatikast tulenev, kuid teine ainult füüsikast. Lõppjäreldusena võib leida, et nii matemaatiline kui ka füüsikaline tuletamine laengu mõjust aegruumile kattuvad üksteisega täielikult.

Näiteks tuntud Schwarzschildi meetrikas:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_M}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

esineb Schwarzschildi raadius R:

$$R_M = \frac{2GM}{c^2}$$

mis on põhjustatud keha massist M. Kuid viimasest avaldisest on võimalik matemaatiliselt tuletada ka „Nordströmi“ raadiuse võrrand:

$$R_M = \frac{2GM}{c^2} = R_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

mis omakorda annaks meile järgmise meetrilise võrrandi:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_q}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_q}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Selline meetriline võrrand kirjeldab aegruumi kõverust, mis on põhjustatud ainult elektrilaengust q.

Kuid antud tulemusel on võimalik jõuda ka teistmoodi. Näiteks Schwarzschildi meetrilisest võrrandist saadakse üldrelatiivsusteoorias spetsiifiliste tensorarvutuste tulemusena järgmine võrrand:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r} + \frac{\beta^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r} + \frac{\beta^2}{r^2}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

milles  $R$  on Schwarzschildi raadius ja elektrilaeng  $q$  on seotud  $\beta$ -ga järgmiselt

$$\beta^2 = \frac{\kappa q^2}{8\pi c^2}$$

kus omakorda konstandi  $\kappa$  väärtus on

$$\kappa = \frac{2}{c^2} 4\pi G = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,86 \cdot 10^{-26}$$

Ühikuks on siin SI. Ja lõpuks saame välja kirjutada nüüd selle esimese võrrandi nõnda:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r} + \frac{\kappa q^2}{8\pi c^2 r^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r} + \frac{\kappa q^2}{8\pi c^2 r^2}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

milles on võetud elektrikonstandi ühikuks

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$$

Analüüsime seda pisut. Sulgude avaldises olevas võrrandi liikmes:

$$+ \frac{\beta^2}{r^2}$$

on  $\beta$  ruut võrdne valemiga:

$$\beta^2 = \frac{\chi q^2}{8\pi c^2}$$

Kuna konstandist kordaja  $\chi$  avaldub järgmiselt:

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^2}$$

siis saamegi  $\beta$  ruudu tegeliku valemi:

$$\beta^2 = \frac{q^2}{8\pi c^2} \frac{8\pi G}{c^2} = \frac{q^2 G}{c^4}$$

ehk

$$\beta^2 = \frac{q^2 G}{c^4}$$

Viimasest võrrandist me näeme seda, et  $\beta$  peab võrduma:

$$\beta = \sqrt{\frac{q^2 G}{c^4}}$$

milles elektrikonstant võrdub ühega:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$$

Kui aga elektrikonstandi dimensiooniks ehk ühikuks ei ole üks, siis  $\beta$  võrdub järgmise võrrandiga:

$$\beta = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}} = r$$

Sellist välja ( joonelemendi ruutu ) nimetatakse Nordströmi väljaks. Siin on näha seda, et peale massi kõverdab aega ja ruumi ka veel keha elektrilaeng. See näitab ühtlasi ka seda, et must auk võib tekkida ka näiteks elektriliselt laetud ainest. Ka elektriliselt laetud aine võib tekitada aegruumi kõverdumist. See võrrand näitab ka kahe üksteise sees oleva horisondi teket, mis tähendab seda, et kui füüsikalisel kehal on mass ja ka elektrilaeng, siis on tal olemas kaks raadiust:

$$r_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

kus  $R_s$  on niinimetatud keha Schwarzschildi raadius ja  $r_q$  on põhimõtteliselt sama, mis  $R_s$ , kuid see on põhjustatud elektrilaengu olemasolust.  $G$  on gravitatsioonikonstant ja  $c$  on valguse kiirus vaakumis.  $M$  on mass,  $q$  on keha laeng ja  $\epsilon_0$  on ( aine, vaakumi ) dielektriline läbitavus.  $r_q$  valemil on võimalik kasutada ka laetud musta augu sisemise horisondi raadiuse välja arvutamiseks.

Elektrilaengu mõju aegruumi struktuurile koos massiga on võimalik anda veel lihtsam lahend ( võrrand ), mida nimetatakse Reissner-Nordströmi meetrikaks:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Sellist lahendit kasutatakse siis kui kasutada ühikuid, kus gravitatsioonikonstant  $G$  ja valguse kiirus vaakumis  $c$  on mõlemad arvulise väärtusega 1 ( ehk  $c = G = 1$  ). Nordströmi väljast järelduvad nõ. elektromagnetiline aja dilatatsioon  $t$  ja pikkuse kontraktsioon  $l$  matemaatiliselt järgmiselt:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{R}{r} + \frac{\beta^2}{r^2}}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r} + \frac{\beta^2}{r^2}}$$

ehk lahti kirjutatuna

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{R}{r} + \frac{\kappa q^2}{8\pi c^2 r^2}}}$$

ja

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{R}{r} + \frac{\kappa q^2}{8\pi c^2 r^2}}$$

Need võrrandid näitavad väga selgelt aegruumi kõverdust ( ehk aja aeglenemist ja pikkuse lühenemist ), mis on põhjustatud peale keha massi ka veel keha elektrilaengust. Kui võtta

dimensiooniks  $c = G = 1$ , siis saame need samad võrrandid panna kirja nõnda:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$$

Aegruumi kõverust kirjeldavas Reissner-Nordströmi meetrikas

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r} + \frac{\beta^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r} + \frac{\beta^2}{r^2}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

peab pluss märk muutuma miinuseks, sest Schwarzschildi raadius ja Nordströmi raadius on ühte ja sama energiat (s.t.  $E = mc^2$ ) kasutades alati võrdsed. See tähendab seda, et kui Schwarzschildi raadius näitab aegruumi augu suurust meie aegruumis, siis seega peab seda näitama ka Nordströmi raadius. See saab väljenduda ainult siis, kui pluss märgi asemel on valemis miinus märk:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r} - \frac{\beta}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r} - \frac{\beta}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

või panna valemis selle asemel hoopis sulud:

$$ds^2 = \left(1 - \left(\frac{R}{r} + \frac{\beta}{r}\right)\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \left(\frac{R}{r} + \frac{\beta}{r}\right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Eelneva mõttekäigu tõestamiseks esitame järgneva ühe väikese füüsikalise analüüsi. Näiteks Schwarzschildi pinnal on aeg (ja ruum) teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni järgmise valemi järgi:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}$$

Kuna Schwarzschildi raadiuse  $R_S$  valemist

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

on matemaatiliselt otseselt tuletatud aegruumi lõkspinna raadiuse  $R$  valem:

$$R = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi \epsilon_0 c^4}}$$

mis on põhjustatud elektrilaengust  $q$ , siis seega peab ka sellel „pinnal“ olema aegruum teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni:



$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4} \frac{1}{r}}}}$$

See tähendab seda, et kui eelnevalt esitatud valemis

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r} + \frac{R_q^2}{r^2}}}$$

on järgmine liige praktiliselt null ehk keha massi mõju aegruumi meetrikale on nulli lähedane:

$$\frac{R_S}{r} \rightarrow 0$$

siis me näemegi seda, et Reissner-Nordströmi meetrilises võrrandis olev ruutjuure avaldis ei ole vastavuses tegelikkusega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{R_q^2}{r^2}}} \neq \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R_q}{r}}}$$

Selle ratsionaalseks seletuseks saab olla ainult see, et Reissner-Nordström on oma meetrilise võrrandi loomises arvestanud ilmselt järgmist:

$$\left(-\frac{R_q}{r}\right)^2 = +\frac{R_q^2}{r^2}$$

See tähendab, et eespool esitatud meetrilises võrrandis olevas ruutjuure avaldises on arvestatud raadiuse ruuduga:

$$R_q^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$$

mitte aga lihtsalt raadiusega:

$$R_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

mis oleks tegelikult õigem. Seetõttu peaks tegelik ruutjuure avaldis välja nägema järgmisena:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r} - \frac{R_q}{r}}}$$

Viimases valemis me näeme, et kui mõlemad raadiuste jagatised võrduvad ühega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - 1 - 1}} = \frac{t}{\sqrt{-1}} = \frac{t}{i}$$

siis saame kompleksarvu  $i$ , sest  $i = \sqrt{-1}$ . Kompleksarv on seotud kompleksvõrrandiga  $z$ :

$$z = a + bi$$

milles  $a$  on võrrandi reaalsosa ja  $+bi$  on imaginaarosaga,  $a$  ja  $b$  on reaalarvud. Kuid antud juhul on meil tegemist ainult imaginaarosaga:

$$z - a = +bi$$

ehk  $z = i$ , milles  $a = 0$  ja  $b = +1$ . Seetõttu saame eelnevalt tuletatud valemis:

$$t' = \frac{t}{i}$$

imaginaararvu asemele kirjutada nulli ja tulemuseks on lõpmatu aja teisenemine:

$$t' = \frac{t}{0} = \infty$$

mis langeb täpselt kokku aegruumi lõkspinna füüsikalise olemusega, sest selle „pinnal“ on aegruum kõverdunud ehk teisenenud lõpmatuseni. Sellist võtet on lubatud teha, sest füüsikas arvestatakse ainult võrrandi reaalsosa, mitte imaginaarosaga. Antud juhul oli meie võrrandis reaalsosa null. Kui aga oletada, et ühega võrdub ainult järgmine liige:  $\frac{R_s}{r} = 1$ , siis saame järgmist:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_q^2}{r^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1 + \frac{R_q^2}{r^2}}}$$

Viimane saadud seos on aga taas vastuolus tegelikkusega:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_q^2}{r^2}}} = \frac{t}{\frac{R_q}{r}} = \frac{t}{+1} = \frac{rt}{R_q} = t$$

Seda sellepärast, et aegruumi lõkspinnal on aeg ja ruum kõverdunud ehk teisenenud lõpmatuseni ja sealjuures ei ole vahet, et kas aegruumi lõkspinna tekitajaks on keha mass või keha elektrilaeng.

Nordströmi meetrikast ilmneb, et peale massi kõverdab aegruumi ka elektrilaeng. Inimese mass kõverdab ümbritsevat aegruumi, kuid see kõverus on nii väike, et seda on praktiliselt võimatu mõõta. See tähendab seda, et kui massi mõju aegruumile on võrreldes laengu mõjuga üliväike (lähenedes jõudsalt nullile), siis võib selle valemis üldse märkimata jätta:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\beta}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\beta}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Tegemist on puhtalt elektromagnetilisest interaktsioonist tingitud aegruumi teisenemise meetrikaga, milles massi mõju on praktiliselt nulli lähedane. Sellest tulenevalt saame elektromagnetilise aja dilatatsiooni  $t$  ja elektromagnetilise pikkuse kontraktsiooni  $l$  matemaatiliselt järgmiselt:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{r}}}$$

ja

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{\beta}{r}}$$

Tähelepanuväärne on märkida seda, et kui tegemist on ainult gravitatsiooniväljaga ehk ainult keha massi mõjuga aegruumi meetrikale, siis kirjeldab seda Schwarzschildi meetrika:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Kui aga aegruumi meetrikat mõjutab mass ja elektrilaeng samaaegselt, siis kirjeldab seda Reissner-Nordströmi meetrika:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r} - \frac{R_q}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r} - \frac{R_q}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Kui aga aegruumi meetrikat mõjutab ainult keha elektrilaeng, siis kirjeldab seda järgmine meetrika:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_q}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_q}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

## 2.2.2 Aegruumi kõverus ja gravitatsioonijõud

Gravitatsiooniline aja dilatatsioon on seotud gravitatsioonijõuga, mis näitab kõige otsesemalt aegruumi kõveruse ja raskusjõu vahel olevat seost. Järgnev matemaatiline tuletus ja analüüs on klassikaline näide sellest, et kuidas on võimalik tuletada aegruumi kõverusest Newtoni gravitatsiooniseadus ilma tensormatemaatikast ja Riemanni geomeetriat otseselt kasutamata. Selleks teeme gravitatsioonilises aja dilatatsiooni valemis mõned järgmised matemaatilised teisendused:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}$$

ehk

$$\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} = \frac{t}{t'}$$

Viimase võrrandi mõlemad pooled tõstame ruutu:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{t^2}{t'^2}$$

Kuna Newtoni II seaduse järgi

$$a = \frac{F}{m}$$

on raskuskiirendus a võrdne raskusjõuga

$$a = g = \frac{GM}{r^2}$$

siis seega peab raskuskiirendus a olema võrdeline ka ajasuhtega, mis tuli eelnevalt välja gravitatsioonilisest aja dilatatsioonist:

$$a = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right).$$

Esiteks diferentseerime sulus oleva avaldise r-i järgi:

$$\frac{\partial \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

milles olevat liiget

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2}$$

tuntakse Schwarzschildi raadiusena. Pärast sellist diferentseerimist me näeme, et raskuskiirendus a on seotud Schwarzschildi raadiusega järgmiselt:

$$a = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

Diferentsiaalmatemaatikast on teada, et

$$\frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{ds} \approx 1$$

ja kiirendus a on tegelikult teise astme tuletis aja järgi

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{dt^2}{ds^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} = a$$

ehk

$$v = \frac{dr}{ds} \quad \text{ja} \quad a = \frac{d^2 r}{ds^2}$$

Seetõttu võime raskuskiirenduse a avaldada diferentsiaalavaldisega:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

Aegruumi intervalli ds-i asemele võime kirjutada omaaja ja valguse kiiruse c korrutise

$$ds = cd\tau$$

sest aegruumi intervalli meetrilises võrrandis on need omavahel seotud järgmiselt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Seda võime märkida ka raskuskiirenduse ehk antud juhul Newtoni II seaduse avaldises gravitatsiooni korral:

$$\frac{d^2 r}{c^2 d\tau^2} = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

ehk

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{2GM}{r^2}$$

ehk

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{GM}{r^2}$$

Kuna kiirendus  $a$  avaldub diferentsiaalseosena:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = a$$

siis seega saame järgmise seose, milles kiirenduse jagatis kahega võrdub raskusjõuga:

$$\frac{a}{2} = \frac{GM}{r^2}$$

Vastavalt üldrelatiivsusteooria üldisele ekvivalentsuse printsiibile võib raskusjõudu asendada inertsjõuga ehk me võime kiirendust käsitleda kesktõmbekiirendusena:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

ja sellest tulenevalt saame järgmise seose:

$$\frac{v^2}{2r} = \frac{GM}{r^2}$$

ehk

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

Kui me viimases avaldises korrutame mõlemad pooled massiga  $M$

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

siis me näeme seost, mida nimetatakse klassikalises mehaanikas energia jäävuse seaduseks, mille ühel pool on kineetiline energia ja teisel pool on gravitatsiooniline potentsiaalne energia ehk lihtsalt gravitatsioonipotentsiaal:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

Eespool olevast gravitatsioonilisest aja dilatatsiooni võrrandist tuletatud energia jäävuse seadusest on võimalik matemaatiliselt tuletada Newtoni II seadus gravitatsioonijõu korral:

$$a = g = \frac{GM}{r^2}$$

Esiteks gravitatsioonipotentsiaal  $\phi$  on tegelikult tuletatav Newtoni gravitatsioonijõust  $F$ , kui me Newtoni gravitatsiooniseadust integreerime raadiuse  $r$ -i järgi järgmiselt:

$$\frac{GMm}{r} = \int_r^{+\infty} \frac{GMm}{r^2} d\vec{r} = U$$

milles  $F$  ongi Newtoni ülemaailmne gravitatsiooniseadus:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Teiseks on kineetiline energia  $E$  võrdeline tehtud tööga:

$$Fs = ma = mg = m \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds} = mv \frac{dv}{ds}$$

ehk

$$Fs = mv \frac{dv}{ds}$$

Viimasest seosest ongi näha seda, et töö  $A$  avaldise diferentseerimisel saame kineetilise energia valemi järgmiselt:

$$dA = Fsds = mv dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Integreerides viimast avaldist:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} s d\vec{s}$$

saamegi kineetilise energia matemaatilise avaldise:

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{mv^2}{2}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2}{2}$$

Niimoodi võrrandi kahte poolt eraldi diferentseerides ja integreerides ( nagu diferentsiaal- ja integraalarvutuses asi käib ) jõuamegi lõpuks kaudselt või otseselt Newtoni II seaduse vormini:

$$a = \frac{F}{m}$$

ehk gravitatsiooni korral

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{GM}{r^2}$$

Mõnikord omistatakse Newtoni II seadusele ka selline kuju, mille korral on mass lihtsalt korrutatud kiirendusega:

$$F = ma$$

ja see on täiesti identne Newtoni gravitatsioonijõuga  $F$ :

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Kuna aegruumi meetrikat mõjutab nii keha mass  $M$  kui ka elektrilaeng  $q$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_M}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) =$$

$$= \left(1 - \frac{R_q}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_q}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

milles

$$R_M = \frac{2GM}{c^2} = R_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

siis seega peaks gravitatsioonijõud  $F$  ilmema ka siis, kui aegruumi kõverdab ainult elektrilaeng  $q$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_q}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_q}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Mõlemal juhul esineb „aegruumi augu pinnal“ ehk „Schwarzschildi pinnal“:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{t}{0} = \infty$$

suurim võimalik potentsiaal  $U$  Universumis:

$$U = \frac{GM}{r} = \frac{c^2}{2}$$

ja läbi selle ka „Plancki jõud“  $F$ :

$$\frac{2Mc^2}{r} = 2\frac{E}{r} = 2F = \frac{c^4}{G}$$

ehk

$$F_p = \frac{c^4}{G}$$

### 2.2.3 Elektrivälja energia uurimine

Elektrivälja energia  $E$  avaldub klassikalises elektromagnetismi füüsikas järgmise valemiga:

$$E = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$$

milles  $q$  on elektrilaeng,  $C$  on elektrimahtuvus ja  $U$  on elektriline pinge. Viimase võrrandi põhjal me

näeme seda, et elektrilaeng  $q$  avaldub elektrimahtuvuse  $C$  ja elektrilise pinge  $U$  korrutisena:

$$q = CU$$

Kuna elektrimahtuvus  $C$  avaldub tsentraalsümmeetrilise elektrivälja korral järgmiselt:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$$

siis saame elektrivälja energiaks avaldise:

$$E = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon R}$$

ehk

$$E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q^2}{R}$$

Saadud viimases avaldises me näeme seda, et elektrivälja energia  $E$  on pöördvõrdeline kaugusega  $R$  välja allikast:

$$E \sim \frac{1}{R}$$

See tähendab füüsikaliselt seda, et elektrivälja energia suurus/tihedus väheneb elektrivälja allika kaugenemisel. Elektrivälja energiatihedus  $\rho$  avaldub definitsioonina:

$$\rho = \frac{E}{V}$$

ehk elektrivälja energia  $E$  on tiheduse  $\rho$  ja ruumala  $V$  korrutis:

$$E = \rho V$$

Välja energiatihedus  $\rho$  avaldatakse tavaliselt väljatugevuse  $E_T$  kaudu:

$$\rho = \frac{\epsilon_0 E_T^2}{2}$$

ja kui me viimase võrrandi korrutame ruumalaga  $V$ :

$$E = \frac{\epsilon_0 E_T^2}{2} V$$

siis me näeme seda, et väljaenergia  $E$  on võrdeline väljatugevuse  $E_T$  ruuduga. Viimane valem näitab tegelikult seda, et välja kogu energia  $E$  on integraal üle kogu ruumala (s.t. kolmekordne integraal ruumalast  $V$ ):

$$E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |E_T|^2 dV$$

ehk

$$\vec{E} = \iiint \rho \frac{\vec{r}}{r^3} dV$$

Vahel avaldatakse elektrivälja tugevus  $E_T$

$$\vec{E}_T = -\frac{e\vec{r}}{r^3}$$

gradiendina väljapotentsiaalset  $\varphi$ :



$$\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

ehk

$$\vec{E}_T = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

Tuletame meelde, et välja diferentsiaaloperaator gradient  $\varphi$  on tsentraalsümmeetrilise välja raadiusest  $r$  järgmine:

$$\text{grad}r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Elementaarlaeng  $e$  avaldub eelnevate seoste põhjal laengutiheduse  $\rho$  ja ruumala  $V$  korrutisena:

$$de = \rho dV$$

ehk taas kolmekordse integraalina üle kogu ruumala  $V$ :

$$e = \iiint \rho(\vec{r}) dV$$

Vahel võetakse elektrikonstandi ühikuks  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$ .

## 2.2.4 Aegruumi lõkspind ja elektrienergia

Elektrilaengu korral peab arvestama seda, et kui keha massi mõju aegruumi meetrikale on pöördvõrdeline raadiusega ehk kaugusega massist, siis keha elektrilaengu korral on see aga pöördvõrdeline kauguse ruuduga laengust:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}}}$$

Viimane võrrand näitab aja teisenemist, mida põhjustab elektrilaeng, mitte keha mass. Selle järgi on aeg teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - 1}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ehk kordaja  $y$  on lõpmatult suure väärtusega

$$\frac{t'}{t} = y = \infty$$

aegruumi lõkspinnal

$$R^2 = r^2$$

mille tekitajaks on elektrilaeng, mitte keha mass. Selline seaduspärasus tuleneb sellest, et Schwarzschildi raadiuse  $R$  valemist

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

mis näitab aegruumi lõkspinna suurust ( mille „pinnal“ on aegruum kõverdunud lõpmatuseni ), on otseselt tuletatud valem:

$$R^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$$

mis näitab seda, et antud aegruumi lõkspinna tekitajaks on elektrilaeng, mitte keha mass. Seetõttu on aegruumi lõkspinna füüsikaline olemus mõlemal juhul täpselt samasugused:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

milles ei ole erilist vahet, et kas aegruumi lõkspinna  $R$  tekitajaks on keha mass  $M$  või elektrilaeng  $q$ . See tähendab seda, et mõlemal juhul tekib aegruumi lõkspind, mille „pinnal“ on aegruum kõverdunud lõpmatuseni. See tuleneb otseselt sellest, et mass  $m$  ja energia  $E$  on omavahel ekvivalentsed suurused seoses:

$$E = mc^2$$

Musta augu Schwarzschildi pinnal ehk aegruumi lõkspinnal, mille suurus on määratud raadiusega  $R$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

on aeg ja ruum Albert Einsteini üldrelatiivsusteooria järgi kõverdunud ehk teisenenud lõpmatuseni. Seda võib tõlgendada ka aegruumi tunneli ehk ussiurke sisse- ja väljakäiguna. Kuna mass  $m$  ja energia  $E$  on omavahel ekvivalentsed suurused seisuenergia  $E$  võrrandis:

$$E = mc^2$$

ehk

$$\frac{E}{c^2} = m = M$$

siis saame Schwarzschildi raadiuse  $R$  valemi avaldada ka puhtalt energia  $E$  kaudu:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2G}{c^2} M = \frac{2G}{c^2} \frac{E}{c^2} = \frac{2GE}{c^4} = \frac{2G}{c^4} E$$

Kui selleks energiaks osutub elektrivälja energia  $E$ :

$$E = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

siis saame tuntud Reissner-Nordströmi raadiuse  $r$  valemi:

$$R = \frac{2G}{c^4} E = \frac{2G}{c^4} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4} \frac{1}{r}$$

ehk

$$r^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$$

mis kirjeldab aegruumi lõkspinna tekkimist elektrilaengu  $q$  poolt. Seetõttu peab kehtima ka võrdus:

$$r = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}} = \frac{2GM}{c^2} = R$$

mis tähendab seda, et Schwarzschildi raadius  $R$  sõltub ainult keha massist  $M$ , kuid Reissner-Nordströmi raadius  $r$  sõltub elektrivälja energiast  $E$ .

Kuna elektrilaeng suudab mõjutada aegruumi meetrikat, siis on võimalik elektromagnetilist vastastikmõju kasutades luua aegruumi tunnel, mis võimaldaks rännata ajas. Samasugust põhimõtet on viljelenud ka maailmakuulus teadlane Michio Kaku, kes on New Yorgi linnaülikooli füüsikaproffessor. „Tema idee hõlmab kaht kambrit, kusjuures kumbki sisaldab kaht omavahel paralleelselt metallplaati. Põhimõte on selles, et genereeritakse piisavalt võimas elektromagnetiline jõud, mis tekitab plaatide vahel tugeva elektrivälja. See on umbes nende superväljade tase, mida genereeris Tesla üle sajandi tagasi, kui ta püüdis tekitada kunstlikku välku, et elumajadele voolu anda. Aga on kindlasti huvitav meenutada, et Tesla kinnitusel koges ta mingit ajarännaku vormi esimeste katsete ajal sellise gigantse elektromagnetilise väljaga. Kaku ajamasina metallplaadid peavad võimaldama nii võimsat energiavälja, kui plaadid seda taluvad. Erinevate antigravitatsiooni katsete tarvis arendatud ülijuht võib saada võtmeks võimaldamaks küllalt tugevat energiavälja, mis avab ukse ajarännakule. Kui need tingimused on paigas, peab masin kõverdama aegruumi seadme läheduses sellisel moel, et tekib ussiauk, mis ühendab kaks külgnevat kambrit. Tulemus peaks olema sild läbi aegruumi, mida loodetavasti stabiliseerib eksootiline aine, mis saadakse Casimiri efektiga.“ ( Jenny Randles, lk. 125 – 126 )

Oletame, et mingisuguse keha elektrilaeng tekitab ühe meetrise raadiusega musta augule sarnase horisondi. Arvutame järgmiste võrranditega välja selle, et kui suur peab olema siis selle keha elektrilaeng:

$$r_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

ehk

$$q (C) = \sqrt{\frac{r^2 4\pi\epsilon_0 c^4}{G}}$$

Tehes viimase valemi järgi arvutused, saame keha laengu  $q$  suuruseks  $1,16 * 10^{17}$  kulonit ehk  $C$ , kui raadius  $r$  on 1 meeter ja dielektriline läbitavus  $\epsilon_0$  on ligikaudu 1. Sellise suurusega energiat ehk antud juhul elektrilaengut  $q$

$$q = \sqrt{E(8\pi\epsilon_0 \epsilon R)} = 1,16 * 10^{17} C$$

ei ole võimalik mitte kuskilt saada ega kunstlikult ka tekitada. Seetõttu ei ole „sellisel viisil“ reaalselt võimalik luua aegruumi tunneleid, mille kaudu saaks liikuda ajas.

Aegruumi kõverdumiseks on vaja reaalselt väga suurt elektrilaengut, kuid keha elektrilaeng ei saa olla mistahes suur, sest siis hakkavad laengute vahel ilmnema tõukejõud, mis takistaksid aegruumi kõverdumist. Niisamuti ka keha elektrimahtuvus ei võimalda omada mistahes suurt laengut. Näiteks kondensaatoril ehk kahe erinimeliselt laetud pinna vahelises ruumis on elektrivälja energia väga väike ( samuti ka väljapotentsiaalid on väga väikesed ), kuid samas esinevad väga suured elektrilaengud ja väljatugevused. Näiteks kui kondensaatori mahtuvus on 0,6 mF ja selle laeng on 0,12 C, siis seega kondensaatoril on energia „kõigest“ 12 J.

Eespool arvatud elektrilaengut (  $10^{17}$  kuloni ) kandva keha suurus ( raadius R ) peab olema planeet Maast palju kordi suurem. Väiksema ( näiteks inimese ) suurusega keha pinnal sellist laengut püsida ei saaks, sest siis hakkaksid mõjuma juba laengute vahelised tõukejõud. See näitabki seda, et aegruumi kõverdumiseks on vaja reaalselt väga suurt elektrilaengut, kuid keha elektrilaeng ei saa olla mistahes suur, sest siis hakkavad laengute vahel ilmnema tõukejõud. Niisamuti ka keha elektrimahtuvus ei võimalda omada mistahes suurt laengut. Siinkohal toome välja järgmised näited:

1. Kera raadius peab olema 54,7 meetrit, et selle peal saaks püsida 1 kuloni suurune elektrilaeng. 1 C suuruse laengu väljatugevus vaakumis 1 m kaugusel on  $9 \cdot 10^9$  V/m.
2. Planeedi Maa suuruse irdkera mahtuvus on 700  $\mu$ F. Kuid irdkera raadiusega  $9 \cdot 10^9$  m ehk Maast umbes 1500 korda suurema raadiusega irdkera omab mahtuvust 1 F.
3. Samas 1 F suuruse mahtuvuse moodustavad ka kaks ühesuurust ruutplaati, mille üksteise vahekaugus on 1 mm ja plaadi serva pikkus on „kõigest“ 10 km.
4. Elusa raku membraanis on puhkeseisundi ajal väljatugevus  $2 \cdot 10^7$  V/m, kui samas on see vesiniku aatomisse kuuluva elektroni asukohas  $5 \cdot 10^{11}$  V/m. Elusorganismide biovoolude tugevused jäävad enamasti alla  $10^{-6}$  A.
5. Närvikiu seina paksus on 3 nm. Selles oleva elektrivälja tugevus on puhkeoleku korral  $2,3 \cdot 10^7$  V/m. Närvikiu siseosa puhkepotentsiaal on -70 mV.
6. Kaks laengut suurusega 1 C mõjutavad teineteist jõuga 1 N, kui nende vahekaugus on ligikaudu 95 km. 1 N on võrdne raskusjõuga, mis mõjub 100 g massiga kehale. Kui aga nende vahekaugus on 1 m, siis see jõud on  $9 \cdot 10^9$  N. Selline jõud võrdub sellise keha raskusjõuga, mille mass on peaaegu miljon tonni.

Aegruumi augu tekitamiseks on vaja reaalselt väga suurt elektrienergiat ehk elektrilaengut, kuid keha elektrilaeng ei saa olla mistahes suur, sest siis hakkavad laengute vahel ilmnema tõukejõud, mis takistaksid aegruumi augu tekkimist. Niisamuti ka keha elektrimahtuvus C ei võimalda omada mistahes suurt laengut. Näiteks kondensaatoril ehk kahe erinimeliselt laetud pinna vahelises ruumis on elektrivälja energia väga väike ( samuti ka väljapotentsiaalid on väga väikesed ), kuid samas esinevad väga suured elektrilaengud ja väljatugevused. Näiteks kui kondensaatori mahtuvus on 0,6 mF ja selle laeng on 0,12 C, siis seega kondensaatoril on energia „kõigest“ 12 J. Elektrivälja tugevused võivad olla väga suured väga väikestes ruumi mõõtkavades – palju palju suuremad, kui makroskoopilised väljad võivad kunagi üldse olla. Näiteks vesiniku aatomisse kuuluva elektroni asukohas on väljatugevus  $5 \cdot 10^{11}$  N/C, elusa raku membraanis ( puhkeseisundis )  $2 \cdot 10^7$  N/C, sädeme tekkimisel kuivas õhus on  $3 \cdot 10^6$  N/C, õhus vahetult enne välgulööki aga kuni  $5 \cdot 10^5$  N/C ja põleva elektrilambi hõõgniidis on väljatugevus 400 – 700 N/C.

Elektrimahtuvus C suureneb piiramatult, kui näiteks plaatkondensaatori erimärgiliselt laetud plaadid praktiliselt kokku viia nõnda, et väheneks plaatide vahemaa piiramatult. Teoreetiliselt on

see võimalik. Kuid elektrilaengute polarisatsiooni korral on teadaolevalt kõige väiksem vahemaa positiivse ja negatiivse laengu vahel vesiniku aatomituuma ( s.t. prootoni ) ja elektroni vahel, mille suurusjärguks on umbes  $10^{-10}$  m. Kuid näiteks kahe prootoni ehk kahe positiivse laengu vaheline kaugus heeliumi tuumas on veelgi väiksem ( suurusjärguks jääb umbes  $10^{-15} \dots 10^{-16}$  m ). Negatiivseks laenguks võib ollaioon või elektron, kuid positiivseks laenguks on alatiioon ( prootonid välja arvatud ). Prootonid pole tegelikult üksikosakesed ( nagu seda on elektronid ), vaid need koosnevad omakorda kvarkidest.

Aegruumi augu tekitamiseks on vaja reaalselt väga suurt elektrienergiat ehk elektrilaengut, kuid keha elektrilaeng ei saa olla mistahes suur, sest siis hakkavad laengute vahel ilmne ma tõukejõud, mis takistaksid aegruumi augu tekkimist. Niisamuti ka keha elektrimahtuvus C ei võimalda omada mistahes suurt laengut. Igasugune laeng q moodustub elementaarlaengutest ehk see tähendab ta on elementaarlaengu e täisarvkordne:

$$q = \pm Ne$$

$$q = Ne$$

ja seega laengu kontsentratsiooni N saame

$$N = \frac{q}{e}$$

Kui laengu q suurus on  $1,17 \cdot 10^{17}$  (C) ja e on elementaarlaeng  $1,60 \cdot 10^{-19}$  (C), siis saame laengu kontsentratsiooni N suurusks  $7,34 \cdot 10^{35}$ . See arv näitab meile seda, et kui palju elementaarlaenguid ehk e-sid ( näiteks elektrone ) on vaja vastava laengu q tekitamiseks. See arv võib näidata ka osakeste arvu. Kuna see arv on tõesti väga suur, siis võrdluseks toogem välja mõningaid näiteid laengute kontsentratsioonidest:

1. Taskulambi hõõgniidis ( kui pindala S võrdub  $3 \cdot 10^{-10}$  m<sup>2</sup> ja voolutugevus I on 0,3 A ) on laengukandjate kontsentratsioon  $1,3 \cdot 10^{29}$  m<sup>-3</sup>.
2. Ühes kuupsentimeetris vases on  $8,5 \cdot 10^{22}$  juhtivuselektroni, kui vase tihedus on 8960 kg/m<sup>3</sup>, molaarmass on 63,5 g/mol, vaskjuhtme ristlõikepindala S on 1 mm<sup>2</sup> ja läbib vool 1 A. Iga vase aatomi kohta tuleb üks juhtivuselektron.
3. Kuid vabade elektronide kontsentratsioon metallis võib olla ka  $10^{29}$  m<sup>-3</sup>.

Kui igast aatomist eraldub üks elektron, siis on elektronide kontsentratsioon ( elektronide arv n ruumalaühikus ) võrdne aatomite arvuga ruumalaühikus. Arvutame n väärtuse. Aatomite arv ruumalaühikus on

$$\frac{\delta}{\eta} N_A$$

kus  $\delta$  on näiteks metalli tihedus ja  $\eta$  on kilogrammaatomi mass. Avogadro arv on  $N_A$ . Metallide korral on  $\delta/\eta$  väärtus vahemikus 20 kmool/m<sup>3</sup> ( kaalium ) kuni 200 kmool/m<sup>3</sup> ( berüllium ). See annab vabade elektronide kontsentratsiooni suurusjärguks

$$n = 10^{28} \dots 10^{29} \text{ m}^{-3} \text{ ( } 10^{22} \dots 10^{23} \text{ cm}^{-3} \text{ )}.$$

Laengu ruumtiheduse  $\rho$ , pindtiheduse  $\sigma$  ja joontiheduse  $\lambda$  saab välja arvutada järgmiselt:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

## 2.2.5 Aegruumi lõkspinna geomeetriline kuju

Albert Einsteini üldrelatiivsusteooria järgi on gravitatsioonitsentris eksisteeriv Schwarzschildi pind ( ehk „aegruumi auk“ ) peaaegu alati täiesti kera kujuline. Elektriväljas on olulised just ekvipotentsiaalpinna tekitaaks aegruumi auku. See tähendab seda, et aegruumi auk tekib mööda välja ekvipotentsiaalpinna ( aegruumi augu kuju sõltub välja ekvipotentsiaalpinna kujust ) ja seetõttu ei pea aegruumi auk olema täiesti kerakujuline nagu gravitatsiooni korral, vaid sellest väga erinev. Näiteks inimese kujuga. Kui kera pind ( s.t. kerakujuline füüsikaline keha või objekt ) on elektriliselt laetud, siis tekib elektrilaengu poolt tekitatud sündmuste horisont järgmise valemi järgi:

$$R = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Kera korral on tegemist tsentraalsümmeetrilise elektriväljaga.  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  on Coulomb'i seadusest tuntud võrdetegur, milles  $\epsilon_0$  on elektrikonstant. Vastavalt elektrimahtuvuse definitsioonile  $C = \frac{q}{U}$  võime elektrilaengu välja kirjutada nõnda:  $q = CU$ . Seega kera mahtuvuse korral saame sündmuste horisondi raadiuseks:

$$R = \sqrt{\frac{(4\pi\epsilon R_1 U)^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

või

$$R = \sqrt{\frac{\left(\frac{4\pi\epsilon U}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}\right)^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Laetud kera mahtuvus on  $C = 4\pi\epsilon R_1$ , milles  $\epsilon$  on dielektriline läbitavus ja  $R_1$  on kera raadius. Kui aga kera pind on elektriliselt polariseerunud, siis kera elektrimahtuvus ongi

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

milles  $\epsilon$  on dielektriline läbitavus ja  $R_1$  on sisemise sfääri raadius ning  $R_2$  on välimise sfääri raadius. Viimane Nordströmi raadiuse võrrand kehtib ainult kerakujulise keha jaoks. Raadius  $R$  näitab sündmuste horisondi lõkspinna suurus:

$$4\pi R^2 = \frac{(CU)^2 G}{\epsilon_0 c^4}$$

ehk

$$4\pi r^2 = \frac{q^2 G}{\epsilon_0 c^4}$$

milles  $4\pi R^2$  on lõkspinna suurus, mis antud juhul on kera pindala kujuga  $S$ . Kuid kera pindala  $S$  asemele võime valemis panna mistahes kujuga pindala valemi ja seega saame välja kirjutada palju

üldisema võrrandi:

$$S = \frac{(CU)^2 G}{\varepsilon_0 c^4}$$

ehk

$$S = \frac{q^2 G}{\varepsilon_0 c^4}.$$

Viimane valem kehtib mistahes pindala kujuga keha korral ehk tegemist on üldise valemiga, mille korral võib aegruumi lõkspind olla mistahes kujuga ja suurusega. Siinjuures peab arvestama seda, et keha elektrimahtuvus  $C$  peab vastama lõkspinna  $S$  kujule. Näiteks kerakujulise keha korral tekib sfäärilise kujuga lõkspind. Sellisel juhul peame kasutama kera mahtuvuse valemeid, et leida kera laengu suurus.

Aegruumi lõkspinna geomeetrilise kuju sõltuvust elektrivälja ekvipotentsiaalpinna kujust on võimalik tõestada järgmise matemaatilise analüüsi teel. Selleks tõstame aegruumi lõkspinna valemis

$$r = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\varepsilon_0 c^4}}$$

võrrandi mõlemad pooled ruutu

$$r^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\varepsilon_0 c^4}$$

Viime füüsika põhikonstandid  $c$  ja  $G$  ning elektrilaengu  $q$  võrrandi ühele poole

$$\frac{c^4}{Gq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} = E_T$$

ja näeme, et oleme tuletanud otse aegruumi lõkspinna valemist elektrivälja tugevuse võrrandi:

$$E_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Eelnevalt on näha seda, et

$$\frac{c^4}{Gq} = E_T$$

Tuletatud seoses

$$E_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

on tegemist tsentraalsümmeetrilise pinnaga:

$$S = 4\pi r^2$$

Seetõttu saamegi võrrandi

$$S = \frac{q}{E_T \varepsilon_0}$$

ehk

$$E_T = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

milles on näha, et pindala  $S$  ei pea olema kerakujuline, vaid võib olla mistahes kujuga. Kui me saime matemaatiliselt tuletada otse aegruumi lõkspinna valemist

$$r = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

elektrivälja tugevuse valemi

$$E_T = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

siis see tõestab, et tekkiva aegruumi lõkspinna geomeetiline kuju sõltub tõepoolest laetud pinna kujust, sest ka elektrivälja tugevus laetud keha läheduses sõltub laetud pinna kujust. Eelnevalt tuletatud seoses:

$$\frac{c^4}{G} = E_T q$$

defineeritakse elektrivälja tugevuse ja elektrilaengu korrutist elektrijõuna F:

$$F = E_T q$$

Seetõttu saame viimase võrrandi kujuks:

$$\frac{c^4}{G} = F$$

milles me näeme, et elektrijõud F ühtib väljatugevuse projektsiooniga laetud pinnast:

$$\frac{c^4}{G} = \frac{q^2}{\epsilon_0 S} = F$$

Aegruumi lõkspinna kuju sõltub elektrilaengu poolt tekitatud välja ekvipotentsiaalpinna kujust. Ekvipotentsiaalpinna tiheduse muutumine määrab ära selle, et kas elektrivälja tugevus nõrgeneb või suureneb. Väljatugevus on seotud omakorda elektrijõuga. Elektrivälja tugevus E kahe paralleelse, ühesuuruselt ja erimärgiliselt laetud tasase pinna vahel ehk laengute polarisatsiooni korral on avaldatav järgmiselt:  $E = \frac{U}{d}$ , ( $U = Ed$ ). Kui pindade lineaarmõõtmed on pindadevahelisest kaugusest palju palju suuremad, siis saame kasutada järgmist väljatugevuse valemit:  $E = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S}$ . Valemites on U laetud pindade vaheline pinge, d on pindade vaheline kaugus, q mõlema pinna laengu suurus, S on mõlema pinna pindala ja  $\epsilon$  on pindade vahel eksisteeriva aine dielektriline läbitavus. Valemi  $E = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S}$  nimetajas puudub suurus  $4\pi$ , sest välja jõujooned ei ristu enam sfääri pinnaga nagu on seda punktlaengu korral, vaid tasandiga. Suurus  $4\pi$  esineb sfääri ( ehk kera ) pindala valemis. Elektrivälja tugevus punktlaengu Q korral on see aga järgmine:  $E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon 4\pi r^2}$  ehk  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ . Punktlaengu q elektrivälja tugevus E on pöördvõrdeline kera pindalaga  $4\pi r^2$ , kus r on elektrilaengu kaugus kera pinnast. See tähendab ka seda, et elektrivälja tugevuse E korrutis kera pindalaga on arvuliselt võrdne selles kera eksisteeriva laengu suurusega. Seda on võimalik üldistada mistahes kujuga pinna jaoks. Sarnaselt väljatugevusega avaldub elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  punktlaengu Q korral järgmiselt:  $\varphi = k \frac{Q}{r}$ . Kuid elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  homogeenise elektrivälja korral ( näiteks kahe erimärgiliselt laetud tasandi vahel ) on  $\varphi = Ed$  ehk  $\varphi = Er$ .

Jõu ja proovikeha laengu suhe on mingis kindlas väljapunktis alati muutumatu:

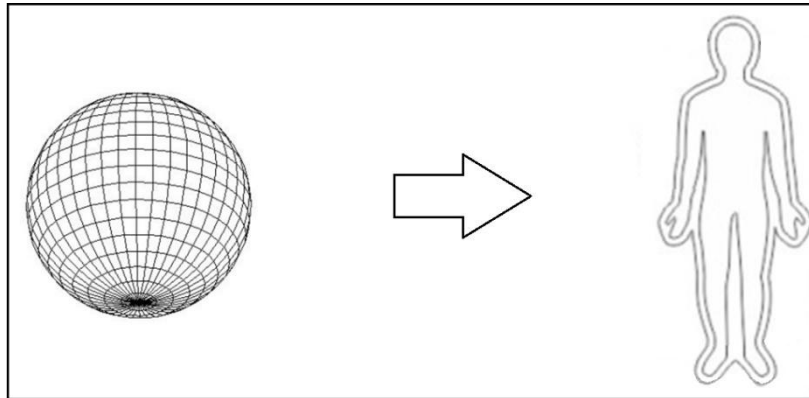
$$\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} = \dots = const.$$

milles

$$q_1 < q_2 \text{ ja } F_1 < F_2$$



Positiivselt laetud keha elektrivälja jõujooned ei lähe lõpmatusse ja negatiivse laenguga keha välja jõujooned ei tule lõpmatusest. See on sellepärast nii, et positiivse laengu jaoks on kuskil olemas negatiivne laeng ja vastupidi. See tähendab, et positiivselt laetud kehalt väljuvad jõujooned kulgevad kindlasti mingisugusele negatiivsele laengule, mis võib ruumis asuda lihtsalt väga kaugel või väga lähedal.



*Joonis 42 Gravitatsiooni korral on aegruumi auk kerakujuline. Kuid elektriväljas sõltub selle kuju ekvipotentsiaalpinna kujust ja seega võib see olla isegi inimese kujuga.*

Elektrilaengut võib omada ja saada mistahes kujuga keha. Täpselt sama on ka laengute polarisatsiooniga. See tähendab, et mistahes kujuga keha pinda võib katta kaks kihti laenguid, mis on vastasmärgilised ja mis asetsevad üksteise peal nii nagu inimese särki katab selle peal olev pluus. Näiteks inimese närvisüsteemis olevate närvikiudude ja neuronite pinnad on elektrilaengute poolt polariseeritud.

Kui keha pind on elektrilaengute poolt polariseerunud, siis ei ole vahet, et kas pealmise kihi moodustavad negatiivsed laengud ja alumise kihi positiivsed laengud või vastupidi. Ainus erinevus seisneb selles, et ühel juhul on elektrivälja jõujooned suunatud keha enda poole, kuid teisel juhul kehast eemale. Näiteks gravitatsioonivälja jõujooned on suunatud keha enda poole ehk keha tsentri suunas.

## 2.2.6 Aegruumi lõkspinna ja lainefunktsiooni omavaheline seos

Eespool esitatud väljade kvantteoorias tuletasime ja ka tõestasime seda, et võrrandis:

$$R = \frac{2GE}{c^4} = 2GE \frac{1}{c^4}$$

olev liige  $\frac{1}{c^4}$  võrdub ligikaudselt ka Plancki konstandiga  $h$ :

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} \approx h$$

Seetõttu saame kirjutada järgmise avaldise:

$$R = 2GE \frac{1}{c^4} = 2GEh$$

ehk

$$\frac{1}{2GE} R = h$$

Viimane sarnaneb kvantmehaanikast tuntud de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  valemiga:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

ehk

$$p\lambda = h$$

milles  $\lambda = R$ . Sellest tulenevalt peab impulss  $p$  võrduma järgmiselt:

$$\frac{1}{2GE} = p$$

millega kehtivus on tõestatud eespool esitatud väljade kvantteoorias. See annabki meile võrrandi:

$$\frac{1}{2GE} R = pR = h$$

mis kattub täielikult de Broglie lainepikkuse  $\lambda$  võrrandiga:

$$R = \frac{h}{p} = \lambda$$

Viimane näitab antud juhul meile seda, et aegruumi lõkspinna võib tekitada ka „tõenäosusväli“, sest lainepikkus  $\lambda$  näitab kvantmehaanikas osakese „tõenäosuslaine“ pikkust ehk tõenäosusvälja suurust meie tajutavas ruumis. Kogu eelnev matemaatiline ja füüsikaline analüüs näitab meile seda, et aegruumi lõkspinna suudab tekitada keha mass  $M$ , välja energia  $E$  ja ka tõenäosusväli  $\lambda$ :

$$R = \frac{h}{p} = \lambda = r = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}} = \frac{2GM}{c^2} = R$$

Viimasest on näha omakorda seda, et mida suurem on keha mass  $M$  või välja energia  $E$ , seda suurem on ka aegruumi lõkspinna pindala  $S$  määrav raadius  $R$ :

$$R = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}} = \frac{2GM}{c^2}$$

See tuleneb otseselt energia  $E$  ja massi  $m$  ekvivalentsuse seadusest:

$$E = mc^2$$

mis oli matemaatiliselt tuletatud erirelatiivsusteooria osas. Kuid tõenäosusvälja  $\lambda$  korral on see aga hoopis vastupidi, sest mida suurem on tõenäosusvälja energia  $E$ , seda väiksem on aegruumi lõkspinna pindala  $S$  suurust määrav lainepikkus  $\lambda$ :

$$R = \frac{h}{p} = \lambda$$

Sellest tõsiasiast järeldub see, et tõenäosusvälja korral ei sõltu aegruumi lõkspinna tekkimine enam energia  $E$  suurusest, vaid mingist muust parameetrist. Kuna lainepikkus  $\lambda$  näitab kvantmehaanikas osakese tõenäosusvälja ehk tõenäosuslainet pikkust/suurust, mis ühtib näiteks footoni korral ka elektromagnetlainet pikkusega ruumis

$$R = \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mc}$$

siis võib sellest järeldada seda, et tõenäosusvälja korral sõltub aegruumi lõkspinna tekkimine tõenäosusvälja liikumiskiirusest  $c$ . Valgus on see, mis liigub vaakumis kiirusega  $c$ . Näiteks aeg  $t'$  on teisenenud lõpmatuseni valguse kiirusega  $c$  liikuva elektromagnetlainet suhtes ja niisamuti on aeg teisenenud lõpmatuseni ka musta augu Schwarzschildi pinnal. Üldrelatiivsusteoorias on see esitatav matemaatiliselt järgmiselt:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \infty$$

milles  $v = c$  ja

$$\frac{2GM}{c^2} = r$$

Viimasest võrdusest on näha seda, et aja lõpmatu teisenemine (ja seega ka aegruumi lõpmatu teisenemine) võib olla põhjustatud nii liikumiskiirusest  $c$  kui ka ülisuurest massist  $M$ . Vastavalt sellele võib footoni tõenäosusvälja korral teha järgmised põhjapanevad järeldused.

Näiteks elektromagnetlainet on elektrivälja ja magnetvälja üksteise muutumise levimine ruumis, mille kirjeldav lainevõrrand on järgmine:

$$\square\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Elektrivälja muutus tekitab magnetvälja ja magnetvälja muutus tekitab omakorda elektrivälja. Selline elektri- ja magnetvälja üksteiseks muutumine toimub valguse kiirusega  $c$ :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

ja

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ning elektromagnetlainet liikumiskiirus vaakumis on samuti valguse kiirus  $c$ . Elektromagnetlainet võib vaadelda ka kvantosakese footoni liikumisena vaakumis, mille seisumass  $m$  on null ja energia  $E$  on avaldatav tuntud Max Plancki kvantenergia  $E$  valemiga:

$$E = hf$$

Kvantmehaanika järgi käsitletakse footonit tõenäosuslainena

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

ehk tõenäosusväljana, sest ühe osakese asukohtade ja nende ajahetkede tõenäosused moodustavad kõik kokku teatud kindla ruumala  $V$  meie tajutavas kolmemõõtmelises ruumis. Selle levimiskiirus on vaakumis samuti valguse kiirus  $c$  ja selle lainepikkus  $\lambda$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

ühtib elektromagnetlaine (laine)pikkusega. Footon ise on mõõdetelt kui punkt, kuid footoni tõenäosusväli

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

omab kindlat kolme ruumi mõõdet, millel on seega olemas ka „kujuteldav pind“ ja mis on ka pidev. Kuna tõenäosuslaine ( seeläbi ka tõenäosusvälja „pind“ ) liigub vaakumis valguse kiirusega  $c$ , siis järelikult selle „pinnal“ on aeg ( ja ruum ) teisenenud lõpmatuse

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

sarnaselt nii nagu on aeg ( ja ruum ) teisenenud lõpmatuse musta augu Schwarzschildi pinnal, mille suurust määrab ära Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrand:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \infty$$

## 2.2.7 Elektriliselt laetud kera väli

Järgnevalt toome „idealiseeritud näite ehk füüsikalise mudeli“ elektriliselt laetud kerast ehk sfäärist, mille sisse võib inimene ära mahtuda ja mida laetakse kera seest. Kera ei pöörle, tiirle ega liigu ruumis. Selline illustratiivne mudel näitab väga selgelt seda, et kuidas tekib aegruumi lõkspind elektromagnetilisest vastastikmõjust, mille tulemusena on võimalik luua kunstlikke aegruumi tulleid ehk ussiurkesid.

Elektriliselt laetud kera mudeli korral on meil tegemist sfäärilise pinnaga  $S$ , mis on laetud ühtlase pindtihedusega  $\sigma$ . Selline sfäär raadiusega  $R$  loob ümbritsevasse ruumi tsentraalsümmeetrilise energiavälja, mis tähendab seda, et igas ruumpunktis läbib elektrivälja  $E$  vektori siht sfääri

tsentrit. Väljatugevus sõltub kera tsentri kaugusest  $r$  ja sfäärilise pinna kõigi punktide jaoks on  $E$  vektor:  $E_n = E(r)$ . Kui aga  $r$  väärtus on suurem  $R$  väärtusest, siis sellisel juhul jääb laeng  $q$  sfäärilise pinna sisemusse. Kera laeng  $q$  tekitab kogu energiavälja. Sfäärilise pinna raadiusest  $R$  väiksemad sfäärilised pinnad  $r$  ei sisalda elektrilaenguid ja seega laetud sfäärilise pinna sees puudub väli. Väljaspool sfäärilist pinda on aga väli olemas ja see on sarnaselt nii nagu sfääri tsesentrisse paigutatud sama suure punktlaengu välja korral. Elektriliselt laetud kera korral väheneb alati elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  kera pinnast eemaldumisel, mille tulemusena väheneb ka laetud kera elektrijõud. Näiteks elektrilaengu  $q$  nihutamiseks teelõigul  $dr$  laetud kera väljas on välja jõudude töö avaldatav järgmiselt:

$$dA = qE_r dr.$$

Samas on välja jõudude töö avaldatav ka kui laengu  $q$  potentsiaalse energia kahanemisena ehk:

$$-d(q\varphi) = -q \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr.$$

Seega on kaks viimast avaldist omavahel võrdsed:

$$qE_r dr = -q \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr$$

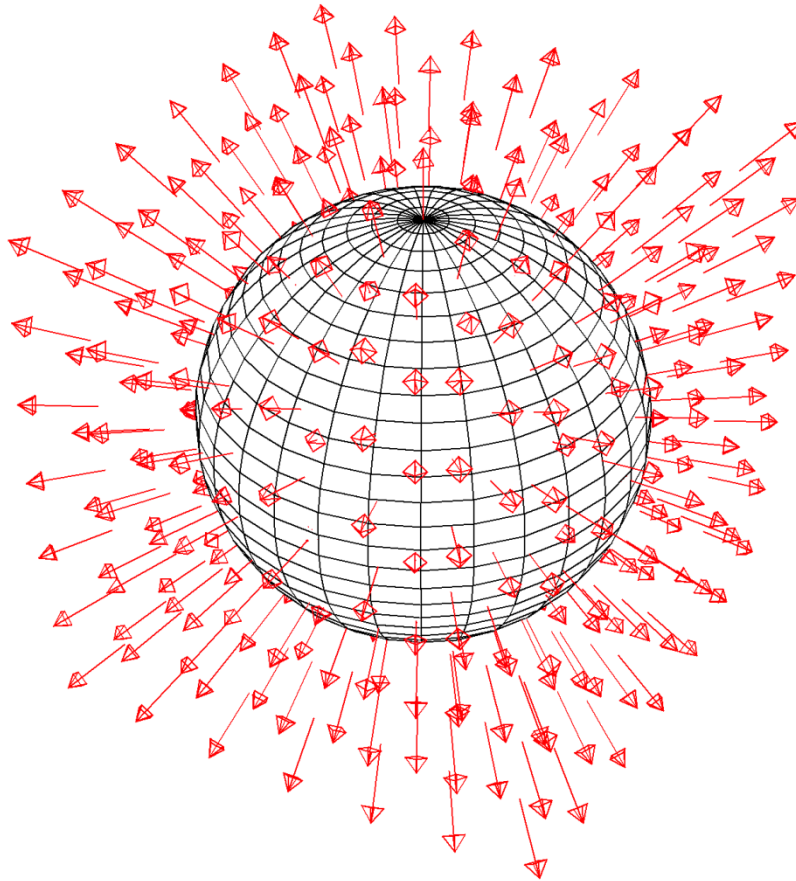
ehk saame ka seose

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

milles  $r$  märgib suvaliselt valitud suunda sfäärilises ruumis, mis ühtib kera raadiuse suunaga. Kui me korrutame viimase avaldise mõlemad pooled laenguga  $q$ , siis saame järgmise seose:

$$f_r = -\frac{\partial W_p}{\partial r},$$

milles  $f_r$  on elektrijõud teelõigu  $r$  suunas,  $\partial W_p$  on potentsiaalne energia ja  $\partial r$  ehk  $r$  märgib suvaliselt valitud suunda sfäärilises ehk tsentraalsümmeetrilises ruumis. Niimoodi kirjeldatakse elektrivälja vektori  $E$  või skalaari  $\varphi$  abil ehk nende kahe vahel on olemas seos, mis on sarnane potentsiaalse energia ja jõu omavahelise seosega. Viimane avaldis näitab üldiselt seda, et elektrijõud ja ka välja potentsiaalne energia kahanevad mõlemad välja allikast.



*Joonis Vektorväli elektriliselt laetud kera ümber. Kera sees ei ole välja.*

Foto allikas: <http://inspirehep.net/record/946729/files/CoulombsLaw.png>

Võrrandites olev liige  $-\frac{\partial}{\partial r}$  on avaldatav ka negatiivse grad-na ehk

$$-\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

mida tähistatakse nablana  $\nabla$ . See on sellepärast nii, et liige  $-\frac{\partial}{\partial r}$  on vektor, mille komponendid on

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \text{ ja } \frac{\partial}{\partial z}$$

ja seetõttu võib avaldist

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

avaldata skalaari  $\varphi$  gradiendina järgmiselt:

$$E = -\text{grad} \varphi$$

ehk

$$E = -\left(i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

ehk

$$E = -\nabla \varphi,$$

milles  $\nabla$  on nabra. See tähendab seda, et elektrivälja tugevus  $E$  on võrdne vastandmärgilise potentsiaaligradiendiga. Nabla- ehk Hamiltoni operaator  $\nabla$  on vektoriline diferentsiaaloperaator. See on vektor, mille komponendid on

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \text{ ja } \frac{\partial}{\partial z}$$

ja seega saadaksegi nablaks:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Üksinda sellel vektoril tähendust ei ole, vaid see omandab füüsikalise mõtte ainult siis kui korrutada see nabla skalaar- või vektorfunktsiooniga. Näiteks funktsiooni gradiendi saame siis kui korrutada vektor  $\nabla$  skalaariga  $\varphi$ , tulemuseks on vektor:

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

milles elektrivälja potentsiaal  $\varphi$  avaldub järgmise funktsioonina:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Välja potentsiaali kirjeldatakse diferentsiaalvõrrandiga, milleks ongi gradient ehk grad. Gradienti tähistatakse sümboliga, mida nimetataksegi nablaks:

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi$$

Kuid vektori  $A$  divergentsi saame siis kui korrutada vektor  $\nabla$  skalaarselt vektoriga  $A$ , tulemuseks on skalaar:

$$\nabla A = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Vektori rotA ühe komponendi (x) saame siis kui korrutada  $\nabla$  vektoriga  $A$  vektoriliselt, tulemuseks on vektor, mille üheks komponendiks on näiteks järgmine avaldis:

$$(\nabla A)_x = \nabla_y A_z - \nabla_z A_y = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

$\nabla$  on diferentsiaaloperaator. Vektorfunktsioon on mingisuguse funktsiooni  $\varphi$  gradient. Näiteks:

$$\text{divgrad} \varphi = \nabla(\nabla \varphi) = (\nabla \nabla \varphi) = (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi,$$

milles  $\Delta$  on Laplace'i operaator. Vastavalt sellele kirjeldataksegi kogu elektrivälja Poissoni võrrandi kaudu:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho \quad \text{ehk} \quad \text{divgrad} \varphi = -4\pi\rho,$$

milles  $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho$  ja  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ . Elektrivälja (s.t. elektrostaatilisest väljast) tsirkulatsioon on null mistahes kontuuri korral:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0.$$

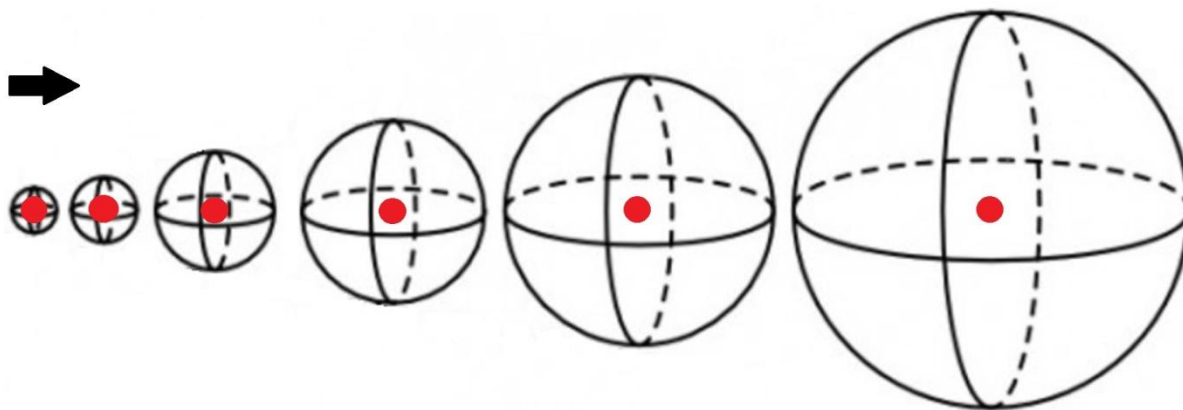
Viimane valem kehtib ainult elektrostaatiliselt välja jaoks ja on ka kooskõlas järgmise matemaatilise avaldisega:

$$\text{rotgrad}\varphi = (\nabla, \nabla\varphi) = (\nabla\nabla)\varphi = 0.$$

Viimane avaldis tähendab seda, et vektori vektorkorrutis iseendaga on null.

Kui aga kogu kera elektrilaeng peaks korraga muutuma ( suuremaks või väiksemaks ), siis muutub ka laetud kera ümbritsev tsentraalsümmeetriline elektriväli ( vastavalt siis tugevamaks või nõrgemaks ). Kuid tugevama või nõrgema välja tekkimine kera ümbritsevas ruumis nõuab teatavat aega. See tähendab seda, et kera välja muutumise ruumilise ülekande kiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$ . Väli ja ka välja muutus levib ruumis kiirusega  $c$  ehk kulub teatud aeg, et välja allika ( antud juhul kera elektrilaengu ) muutumisel muutuks ka väli teatud kaugusel kera laengust. Näiteks elektrivälja impulsi levikiirus ühtib valguse kiirusega  $c$  ehk välja muutused kanduvad üle kogu ümbritsevasse ruumi valguse kiirusega  $c$ .

Muutuva elektrivälja levik toimub magnetvälja vahendusel. Näiteks elektrivälja muutumine ühes punktis põhjustab kõigepealt muutuva magnetvälja ja selle magnetvälja muutus kutsub ( elektromagnetilise induksiooni teel ) esile elektrivälja muutumise naaberpunktis. See tähendab seda, et igasugune elektri- või magnetvälja muutus levib ruumis lainena. See tekkiv laine ongi elektromagnetiline ehk seega elektromagnetväli. Sellest järeldub omakorda see, et kera laengu muutumisega tekib „lühiajaliselt“ kerat ümbritsev „kerakujuline“ elektromagnetiline ehk elektromagnetväli, mis eemaldub laetud kerast ehk nagu „paisuks“ kerast eemale ja mida võib tõlgendada eespool oleva analüüsi põhjal ka footoni tõenäosuslainena ehk tõenäosusväljana, mille „pinnal“ on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni.



*Joonis Laetud kera ( joonisel punane ) elektrivälja muutumine tsentraalsümmeetrilises keravälises ruumis toimub valguse kiirusega  $c$ . Visuaalselt sarnaneb see tsentraalsümmeetrilise energiavälja muutuse „paisumisena“ ajas.*

See tõenäosuslaine liigub kerast eemale ehk kerakujulise tõenäosusvälja pind nagu „paisuks“ laetud kerast eemale valguse kiirusega  $c$ . Seetõttu on selle „pinnal“ aeg ( ja ruum ) teisenenud lõpmatuseni

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

täpselt nii nagu on aeg ( ja ruum ) teisenenud lõpmatuseni musta augu gravitatsioonivälja tsentris



oleval Schwarzschildi pinnal, mille suurust määrab ära Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrand:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \infty$$

Sellest kõigest jäeldubki see, et kerat ümbritseva elektromagnetvälja lühiajalise eksisteerimise korral ümbritseb laetud kera ka veel lühiajaliselt aegruumi lõkspind, mida võib eespool oleva analüüsi põhjal tõlgendada ka aegruumi auguna, mis on omakorda aegruumi tunneli ehk ussiurke sisse- ja väljakäiguks.

## 2.2.8 Elektromagnetvälja muutumise kiirus

Oletame, et meil on rõngas, mis pöörleb valguse kiirusega  $c$ . Pikkuse kontraktsiooni tõttu:

$$dl = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dl_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} r_0 d\varphi$$

on vaatleja poolt mõõdetav „äärejoone“ pikkus  $l$  võrdne nulliga, võrreldes paigaloleva rõnga äärejoone pikkusega  $l_0$ . Rõnga nurkkiirus on  $\omega$ , rõnga äärepunktide joonkiirus on

$$v = r\omega$$

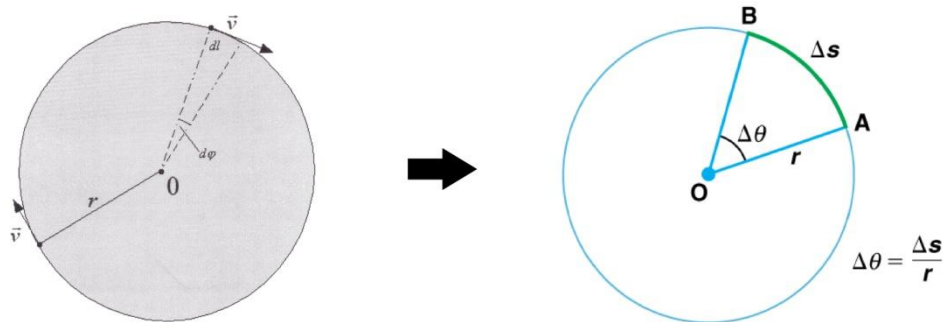
ja  $l$  on rõnga äärejoone pikkus. Kuna liikumissuunaga risti olevas sihis ei esine pikkuste lühenemise efekti, siis seega rõnga raadius ei muutu võrreldes paigalolevaga:

$$r = r_0$$

Paigaloleva rõnga korral kirjeldab  $dl_0$  lõigukese pikkust ja  $c$  on valguse kiirus vaakumis. Kui me integreerime  $dl$  avaldist üle kogu ringjoone, siis annab see meile ringjoone pikkuse  $l$  valemiks:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} r_0 d\varphi = 2\pi r_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

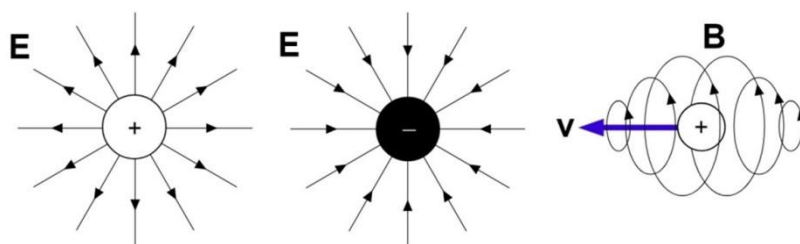
mis tegelikult ongi pikkuste kontraktsiooni valem erirelatiivsusteooriast. Rõnga pöörlemise joonis:



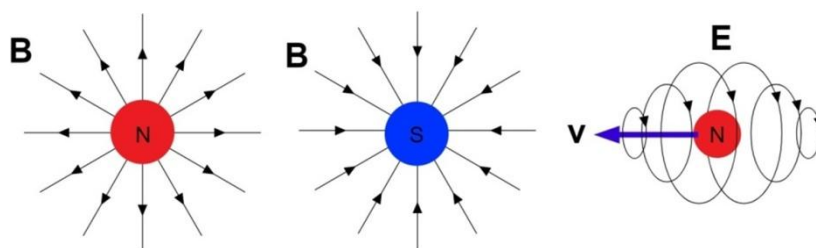
Kuna rõngas ei saa reaalselt pöörelda valguse kiirusega  $c$ , siis seega kasutame selle asemel „väljade muutumise kiiruse põhimõtet“. Seletame seda kohe järgnevalt pikemalt.

Välja tekkimine ümbritsevas ruumis nõuab teatavat aega. See tähendab seda, et välja allika (näiteks elektrilaengu) muutumisel muutub ka väli teatud kaugusel laengust ja see võtab aega. Välja muutused kanduvad üle kogu ümbritsevasse ruumi valguse kiirusega  $c$ , mis tähendab seda, et välja muutumise ruumilise ülekande kiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$ . Väli ja ka välja muutus levib ruumis valguse kiirusega  $c$ . Sellest järeldub, et elektrivälja impulsi levikiirus ühtib valguse kiirusega  $c$ .

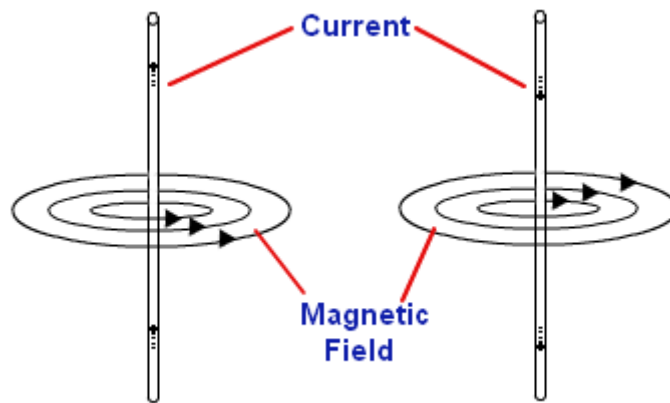
Liikuva elektrilaengu ümber tekib magnetväli  $B$ , joonis:



Liikuva magnetpooluse ümber tekib elektriväli  $E$ , joonis:



Ka magnetvälja tekkimine elektrilaengut ümbritsevas ruumis võtab aega. Näiteks elektrilaengu liikumise hakkamise korral tekib magnetväli teatud kaugusele laengust ja see võtab aega. Igasuguse energiavälja muutused ja ka tekkimised/lakkamised kanduvad üle kogu ümbritsevasse ruumi valguse kiirusega  $c$ , mis tähendab ka seda, et magnetvälja tekkimise ruumilise ülekande kiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$  ehk magnetväli tekib ruumis valguse kiirusega  $c$ . Sellest järeldub, et ka magnetvälja impulsi levikiirus ühtib samuti valguse kiirusega  $c$ .

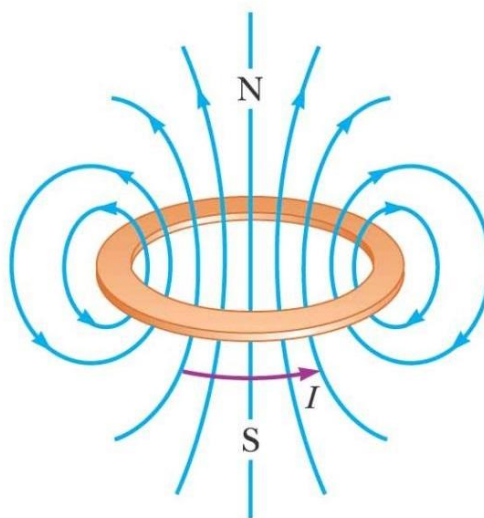


*Joonis Magnetvälja jõujooned vooluga sirgjuhtme ümber.*

Foto allikas: <https://www.memorangapp.com/flashcards/61522/Electrostatics+and+Magnetism+II/>

Paigalseisev vaatleja registreerib paigalseisva laengu elektrivälja, kuid liikuv laeng tekitab paigalseisva vaatleja jaoks ka magnetvälja. Elektrivooluga juhett ümbritseb magnetväli, kuna laengukandjate liikumise tulemusena tekib magnetväli. Elektrivälja muutumine tekitab magnetvälja. Magnetväli on pöörisväli, kuna magnetvälja jõujooned on kinnised ehk alguse ja lõputa.

Ringvoolu kõik osad tekitavad ringi keskpunktis magnetvälja, mis on suunatud piki ringvoolu telge. Resultantväli on ringvoolu teljel kõige tugevam ringvoolu keskpunktis. Ringvoolu magnetvälja jõujooned on kinnised kõverad.

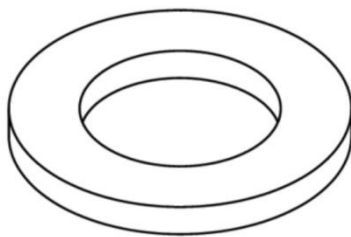


*Joonis Magnetvälja jõujooned vooluga ringjuhtme ümber.*

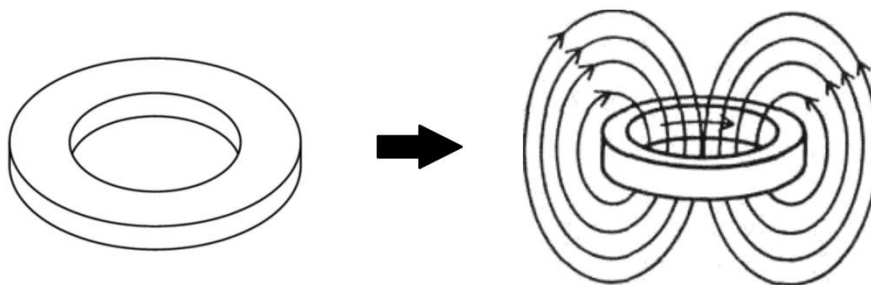
Foto allikas: <http://www.ipodphysics.com/magnets-loop-or-coil.php>

Järgnevalt esitame aegruumi tunneli loomise põhimõttelise skeemi ehk põhimõttelise mudeli, mida me võime nimetada „aegruumi tunneli loomise füüsikaliseks süsteemiks“:

1. Oletame, et meil on „metallist rõngas“, mis on elektriliselt laetud ( positiivselt või negatiivselt ). Rõngas ei liigu ega pöörle ruumis ning sellel puudub ka elektrivool. Sellisel juhul ümbritseb metallrõngast ainult elektriväli. Joonis:



2. Kui aga metallrõngas hakkab pöörlema ümber oma kujuteldava telje, siis laengukandjate liikumise tulemusena ehk elektrivoolu tekkimise korral tekib ümber metallrõnga ka magnetväli. Elektrivälja muutumine tekitab magnetvälja. Joonis:



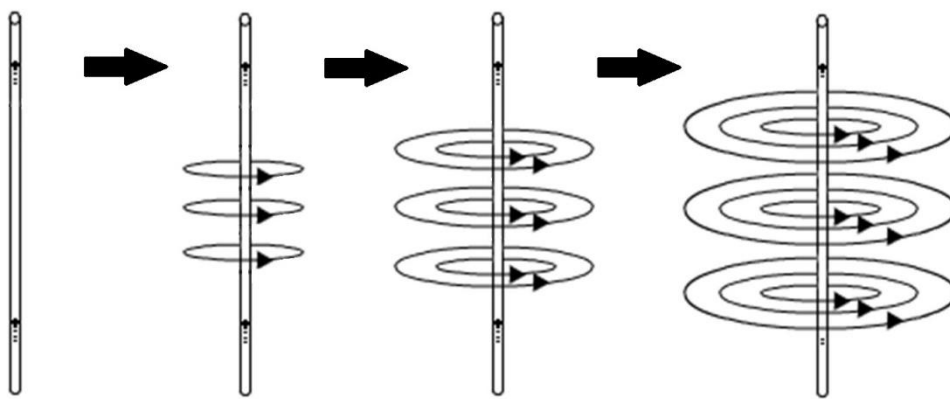
Magnetväli on muutuv ( s.t. ruumis liikuv ) elektriväli. Muutuva elektrivälja levik toimub magnetvälja vahendusel. Näiteks elektrivälja muutumine ühes ruumpunktis põhjustab kõigepealt muutuva magnetvälja ja selle magnetvälja muutus kutsub ( elektromagnetilise induksiooni teel ) esile elektrivälja muutumise naaberpunktis. See tähendab seda, et igasugune elektri- või magnetvälja muutus levib ruumis lainena. See tekkiv laine ongi elektromagnetlaine ehk seega elektromagnetväli.

Sellise arusaama järgi tekib metallrõnga elektrivälja muutumisega „lühiajaliselt“ rõngast ümbritsev „rõngakujuline“ elektromagnetlaine ehk elektromagnetväli, mis eemaldub laetud rõngast ehk nagu „paisuks“ rõngast eemale ja mida võib tõlgendada eespool oleva analüüsi põhjal ka footoni tõenäosuslainena ehk tõenäosusväljana, mille „pinnal“ on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni.

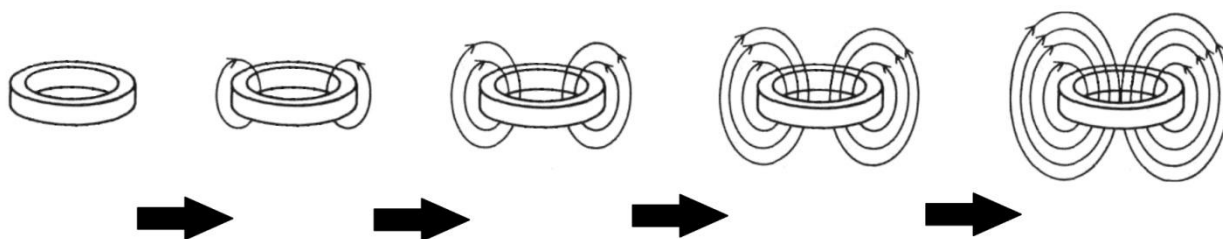
3. Kuna metallrõnga pöörlemisel ümber oma kujuteldava telje liiguvad kõik rõnga punktid ühekorraga, siis sellisel juhul tekib magnetväli ümber metallrõnga kõikjal ühekorraga. See on väga väga oluline tingimus.

Magnetväli peab tekkima ümber metallrõnga kõikjal korraga, mitte nii, et magnetväli tekib ühes rõnga otsas enne ja teises rõnga otsas veidi hiljem. Seetõttu peabki rõngas pöörlema. See on väga väga oluline tingimus.

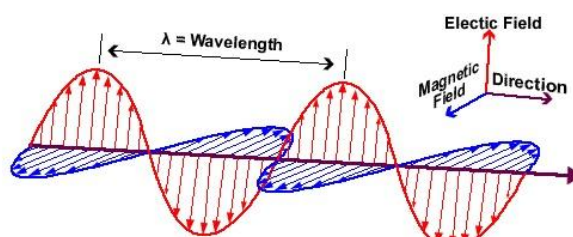
4. Magnetväli tekib ruumis valguse kiirusega  $c$  ehk elektriväli muutub magnetväljaks valguse kiirusega  $c$ . Joonis:



Magnetvälja tekkimine metallrõngast ümbritsevas ruumis võtab aega. Elektrilaengu liikumise hakkamise korral tekib magnetväli teatud kaugusele laengust ja see võtab aega. Elektrivälja ja magnetvälja muutused ja ka tekkimised/lakkamised kanduvad üle kogu ümbritsevasse ruumi valguse kiirusega  $c$ , mis tähendab seda, et näiteks magnetvälja tekkimise ruumilise ülekande kiirus on võrdne valguse kiirusega  $c$  ehk magnetväli tekib ruumis valguse kiirusega  $c$ . Joonis:

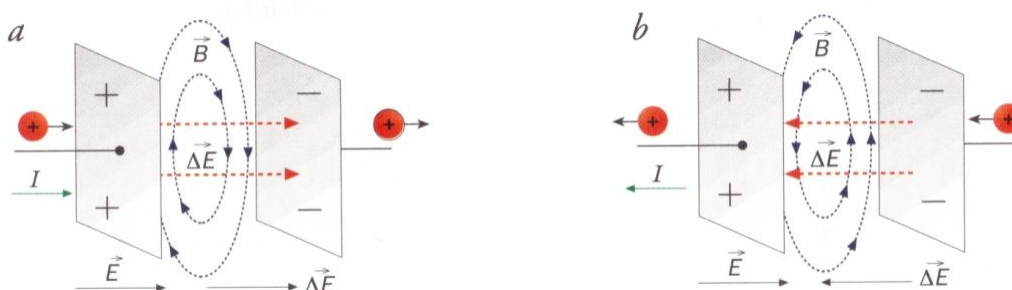


Näiteks elektromagnetlaine on elektrivälja ja magnetvälja üksteise muutmise levimine ruumis. Elektrivälja muutus tekitab magnetvälja ja magnetvälja muutus tekitab omakorda elektrivälja. Selline elektri- ja magnetvälja üksteiseks muutumine toimub valguse kiirusega  $c$  ning elektromagnetlaine liikumiskiirus vaakumis on samuti valguse kiirus  $c$ . Elektromagnetlainet võib vaadelda ka kvantosakese footoni liikumisena vaakumis, mille seisumass  $m$  on null ja energia  $E$  on avaldatav tuntud Max Plancki kvandenergia  $E$  valemiga. Joonis:



Kondensaatori plaatide vahel toimub vahelduvvoolu läbimine muutuva elektrivälja vahendusel ka tühja ruumi korral. Näiteks nihkevooluks nimetatakse sellist nähtust, mille korral hakkavad laengukandjad laaduva plaadi tugevneva elektrivälja tõttu teisel plaadil liikuma. Laengute liikumisega kaasneb magnetväli, kuid seda esineb ka laengukandjate puudumisel kondensaatoriplaatide vahel olevas tühjas ruumis. Magnetvälja muutumisel

tekib pööriselektrivälgi sõltumatult muutuse päritolust. Näiteks voolutugevuse muutumise korral poolis või püsimagneti nihutamise korral. Elektrivälja muutumisel tekib magnetväli samuti sõltumatult muutuva elektrivälja päritolust. See tähendab ka seda, et muutuva elektrivälja levik toimub magnetvälja vahendusel. Kondensaatori plaatide vahel esineb vahelduvvoolu läbimineku korral magnetväli, mille jõujooned ümbritsevad elektrivälja muutumise suunda. Magnetvälja jõujooned on kinnised jooned ehk pöörised ja elektrivälja muutus levib ruumis täpselt valguse kiirusega  $c$ . Joonis:



Allikas: „Füüsika XI klassile 2. osa Elektromagnetism“, Kalev Tarkpea ja „koolibri“, 2000.

5. Kuna magnetväli tekib ruumis valguse kiirusega  $c$ , siis see energiaväli nagu „liiguks“ metallrõngast eemale valguse kiirusega  $c$ . Energiavälja „liikumise“ all on mõeldud seda, et metallrõngast ümbritsev ruum täitub aja jooksul energiaväljaga (s.t. magnetväljaga), mis saab „alguse“ just metallrõnga pindast. Seetõttu on selle „pinnal“ aeg (ja ka ruum) teisenenud lõpmatuseni:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

Valguse kiirus  $c$  on suurim võimalik kiirus kogu Universumis:

$$c = \frac{l}{t}$$

ja seda mistahes taustsüsteemist vaadatuna:

$$c = \frac{d}{t'} = \frac{\sqrt{l^2 + v^2 t'^2}}{t'} = c$$

Kui me matemaatiliselt teisendame viimast avaldist järgmiselt:

$$(ct)^2 + (vt')^2 = c^2 t'^2$$

ehk

$$(ct)^2 = (c^2 - v^2) t'^2$$

siis me näemegi seda, et liikudes valguse kiirusega  $c$ :

$$t^2 = \frac{c^2 - v^2}{c^2} t'^2 = \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right] t'^2$$

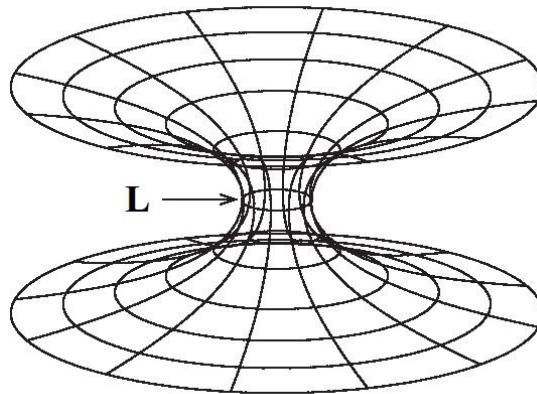
„teiseneks“ ehk „aegleneks“ aeg  $t'$  lõpmatuseni:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

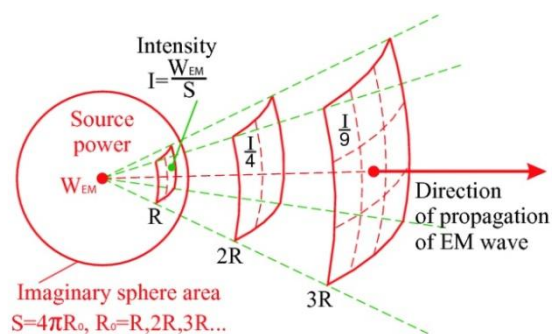
Aeg ( ja ruum ) on teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni ka musta augu gravitatsiooni-  
välja tsentris oleval Schwarzschildi pinnal, mille suurst määrab ära Schwarzschildi  
raadiuse R võrrand:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

Musta augu Schwarzschildi raadius R määrab ära Schwarzschildi pinna S suuruse, mille  
ümbermõõt on L. Sellest järeldub see, et magnetvälja tekkimise korral metallrõnga ümber  
ümbriseb rõngast ka veel lühiajaliselt „aegruumi lõkspind“, mida võib eespool oleva  
analüüsi põhjal tõlgendada ka aegruumi auguna, mis on omakorda aegruumi tunneli ehk  
ussiurke sisse- ja väljakäiguks. Joonis:

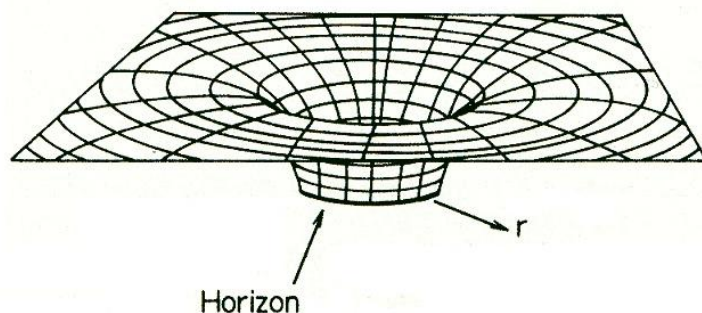


Mistahes energiavälja muutumise korral ilmneb lühiajaliselt ka „aegruumi  
lõkspind“, millel on aeg ja ruum erirelatiivsusteooria järgi teisenenud ehk  
kõverdunud lõpmatuseni. Selline väide vajab lähemat selgitust. Näiteks kui  
tühjas ruumis tekib magnetväli valguse kiirusega c, siis tühja ruumi ja  
energiavälja vahelist ajutist „piiri“ on võimalik mõtteliselt tõlgendada  
kahemõõtmelise „pinnana“, millel on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni, kuna  
see „liigub“ ( „levib“ ) ruumis valguse kiirusega c. Joonis ( laetud kera näitel ):

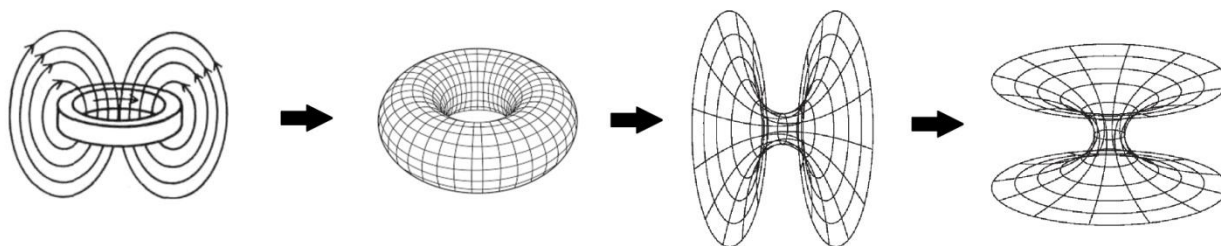




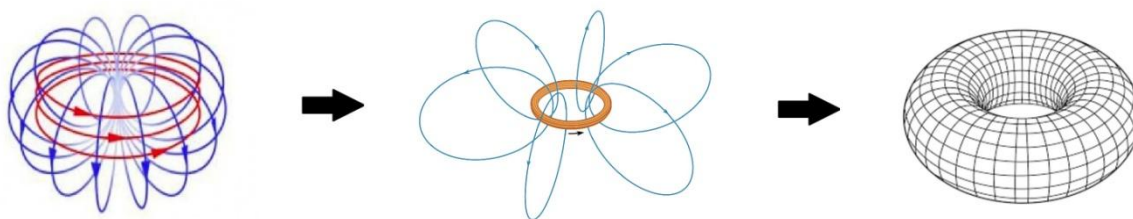
Musta augu tsentris oleval Schwarzschildi pinnal ehk musta augu „horisondil“ on aeg ja ruum samuti teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni. Musta augu Schwarzschildi raadius  $r$  määrab ära Schwarzschildi pinna  $S$  suuruse. Joonis:



6. Magnetvälja tekkimise korral metallrõnga ümber ümbritseb rõngast ka veel lühiajaliselt „aegruumi lõkspind“, mida võib eespool oleva analüüsi põhjal tõlgendada ka aegruumi auguna, mis on omakorda aegruumi tunneli ehk ussurke sisse- ja väljakäiguks. Aegruumi lõkspind ( aegruumi tunnel ) on seega antud juhul metallrõnga kujuline, mis meenutab sõõrikut. Joonis:

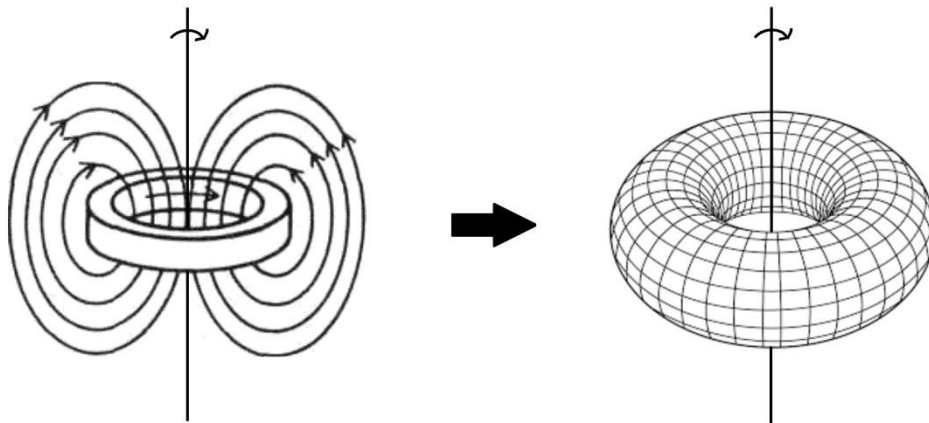


Metallrõngast ümbritsev magnetväli on geomeetriselt samuti sarnane aegruumi lõkspinna kujuga, mis meenutab sõõrikut. See tähendab seda, et magnetvälja kinnised jõujooned moodustavad ümber metallrõnga sõõriku kujulise energiavälja, mis tingib ka aegruumi lõkspinna geomeetriselise kuju. Joonis:



7. Magnetväli on muutuv ( s.t. ruumis liikuv ) elektriväli. Magnetväli tekib ruumis laengukandjate liikumise tulemusena. Kuna antud juhul kaasneb magnetvälja tekkimisega ehk ruumis liikuva elektrivälja tekkimisega ka aegruumi lõkspinna tekkimine, siis seega peaks ka tekkiv aegruumi lõkspind ( s.t. aegruumi tunnel ) ruumis liikuma ehk antud juhul „pöörlema“ metallrõngaga samas suunas. Kuid sõõriku kujulise aegruumi lõkspinna ( aegruumi tunneli ) „pöördenurk“ on äärmiselt väike ( peaaegu et olematu, kuid Plancki pikkusest siiski suurem ), kuna aegruumi tunneli eksisteerimise ajaperiood on lihtsalt väga väike. Joonis:





8. Teine võimalus oleks ka see, et metallrõngast lastakse läbi elektrivool ja alles siis ( elektrivoolu ajal ) hakkab rõngas ruumis pöörlema ehk liikuma. Selle tulemusena tekiks ümber rõnga muutuv magnetväli. Sellisel juhul tekib alguses elektrivoolust tingitud magnetväli ja pärast seda rõnga pöörlemisest tingitud muutuv magnetväli. Magnetvälja muutus tekitab (pööris)elektrivälja ja muutumise kiirus on võrdne valguse kiirusega vaakumis.

Näiteks kui püsिमagnet vaateleja suhtes liiguks, siis muutub magnetväli vaateleja asukohas ning vaateleja registreerib elektrivälja olemasolu. Magnetvälja muutumine tekitab elektrivälja.

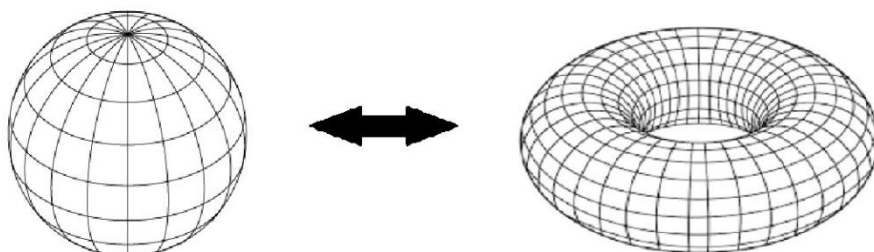
Siinkohal tasub märkida seda, et inimese suuruse Schwarzschildi pinna loomiseks ei peagi omama ülisuurt massi  $M$  või energiat  $E$ :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

mis polegi tegelikult päris võimalik. Inimese suuruse Schwarzschildi pinna loomiseks piisab ka energiavälja muutumise kiirusest  $c$ :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \infty$$

mida on juba võimalik kunstlikult tekitada, kusjuures aegruumi lõkspinna kujust sõltumata. Joonis:



Aegruumi kõverdumiseks on vaja reaalselt väga suurt elektrilaengut, kuid keha elektrilaeng ei saa olla mistahes suur, sest siis hakkavad laengute vahel ilmnema tõukejõud, mis takistaksid aegruumi kõverdumist. Niisamuti ka keha elektrimahtuvus ei võimalda omada mistahes suurt laengut. Näiteks kondensaatoril ehk kahe erinimeliselt laetud pinna vahelises ruumis on elektrivälja energia väga väike ( samuti ka väljapotentiaalid on väga väikesed ), kuid samas esinevad väga suured elektrilaengud ja väljatugevused. Näiteks kui kondensaatori mahtuvus on 0,6 mF ja selle laeng on 0,12 C, siis seega kondensaatoril on energia „kõigest“ 12 J.

Oletame, et mingisuguse keha elektrilaeng tekitab ühe meetrise raadiusega musta augule sarnase horisondi. Arvutame järgmiste võrranditega välja selle, et kui suur peab olema siis selle keha elektrilaeng:

$$r_q = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

ehk

$$q (C) = \sqrt{\frac{r^2 4\pi\epsilon_0 c^4}{G}}$$

Tehes viimase valemi järgi arvutused, saame keha laengu q suuruseks  $1,16 * 10^{17}$  kulonit ehk C, kui raadius r on 1 meeter ja dielektriline läbitavus  $\epsilon$  on ligikaudu 1. Sellise suurusega energiat ehk antud juhul elektrilaengut q

$$q = \sqrt{E(8\pi\epsilon_0 \epsilon R)} = 1,16 * 10^{17} C$$

milles

$$E = 6,0500 * 10^{43} \approx 10^{44} J$$

ei ole võimalik mitte kuskilt saada ega kunstlikult ka tekitada. Seetõttu ei ole „sellisel viisil“ reaalselt võimalik luua aegruumi tunneleid, mille kaudu saaks liikuda ajas.

Selliselt arvutatud elektrilaengut (  $10^{17}$  kulonit ) kandva keha suurus ( raadius R ) peab olema planeet Maast palju kordi suurem. Väiksema ( näiteks inimese ) suurusega keha pinnal sellist laengut püsida ei saaks, sest siis hakkaksid mõjuma juba laengute vahelised tõukejõud.

Näiteks 2019. aasta kogu maailma energia tootmine/kasutus oli 158 800 TWh ehk 158 800 000 000 000 kWh. Kuna kilovatt-tund on füüsikas vattsekundi kordühik:

$$1 kWh = 1000 vatti * 60 sekundit * 60 minutit = 3,6 * 10^6 vattsekundit ehk džauli$$

siis seega saame sellise energia suuruse esitada džaulides:

$$E = 5,7168 * 10^{20} J$$

Joonis:



Kuid 1800 – 2019 aastate vahemiku kogu maailma energia tootmine/kasutus oli ligikaudu 7 800 000 TWh ehk 7 800 000 000 000 000 kWh, mis teeb džaulides:

$$E = 2,808 * 10^{22} J$$

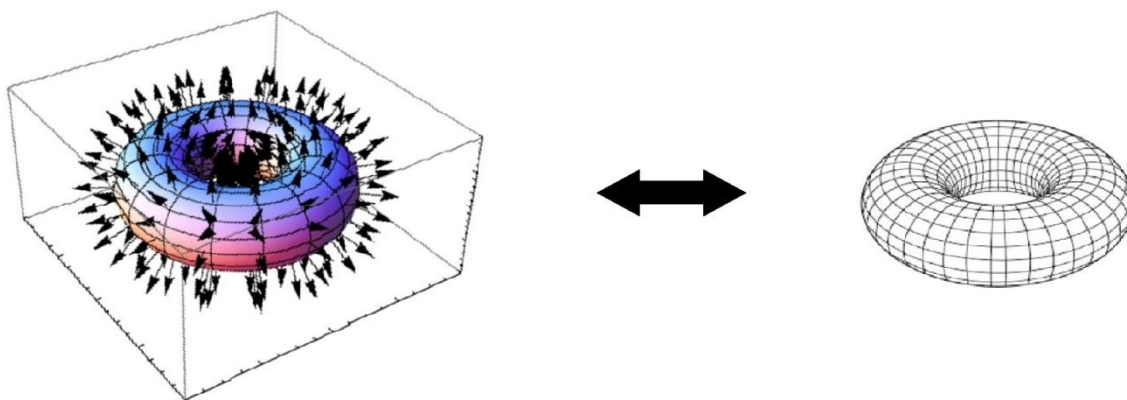
Joonis:



Sellistest energia kogustest jääb ühe korraliku ussiurke loomiseks väheks, kuna inimese suuruse aegruumi tunneli loomiseks läheb vaja umbes  $10^{44} J$  suurusjärku energiat, mida pole mitte kuskilt võimalik võtta ega toota.

Allikas: <https://www.youtube.com/watch?v=5Dh6GHcn508>

Eespool me tõdesime, et kui metallrõnga pöörlemisel ümber oma kujuteldava telje liiguvad kõik rõnga punktid ühekorraga, siis sellisel juhul tekib magnetväli ümber metallrõnga kõikjal ühekorraga. Magnetväli peab tekkima ümber metallrõnga kõikjal korraga, mitte nii, et magnetväli tekib ühes rõnga otsas enne ja teises rõnga otsas veidi hiljem. Seetõttu peabki rõngas pöörlema. Selline väga väga spetsiifiline tingimus ongi põhjendatud sellega, et füüsikalist keha peab ümbritsema või katma just „kinnine“ aegruumi lõkspind, kuna siis ei ole keha enam „kontaktis“ ehk vastastikmõjus ümbritseva aegruumiga ja absoluutselt kõige muuga, mis eksisteerib ajas ja ruumis. Seetõttu võib öelda, et keha eksisteerib hyperruumis ehk väljaspool aegruumi, „kus“ ei eksisteeri enam aega ega ruumi. Joonis:



Aegruumi lõkspind on aja ja ruumi „piir“, kus meie igapäevaselt kogetav aegruum lõpeb ( ehk lakkab eksisteerimast ). Aegruumi lõkspind võib olla lahtine või kinnine. Aegruumi lõkspind on näiteks aegruumi augu pind.

Aegruumi lõkspind saab olla ainult lahtine või kinnine. Näiteks kera pind on kinnine pind, sest selle sees olev keha on täiesti kaetud kera kujulise pinna poolt. Kuid lahtine pind võib olla näiteks ring, ruut või riskülik, sest need on kahemõõtmelised pinnad kolmemõõtmelises ruumis, mis ei võimalda katta mingi teise keha kogu pindala.

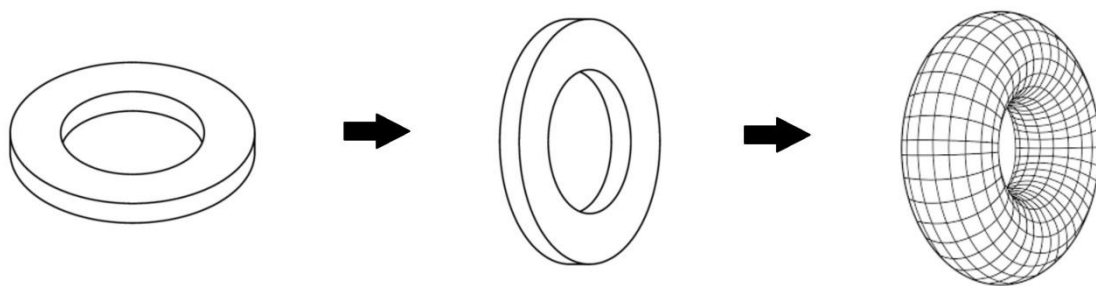
Aegruumi lõkspind saab olla geomeetriliselt kas kinnine või lahtine. Kinnine pind on näiteks kera pind, mille korral on kera sees olev keha üleni kaetud kera pindalaga. Kinnise aegruumi lõkspinna korral rändab inimene ajas, sest see katab inimese kogu keha pindala. Kuid seevastu lahtine pind ei kata mingi teise keha kogu pindala. Lahtine pind võib olla näiteks ring, ruut või riskülik. Lahtise pinna korral ei rända keha ajas, sest see ei kata keha kogu pindala ja sellest tulenevalt ei satu keha hyperruumi ehk säilib „kontakt“ ümbritseva aegruumiga. Lahtine pind võib katta mingi keha pindala osaliselt. See tähendab, et kinnise pinna korral on katmine täielik ( ehk 100 % ), kuid lahtise pinna korral on katmine ainult osaline ( mitte enam 100 % ).

Kui inimest katab kinnine lõkspind, siis põhimõtteliselt eksisteerib inimene aegruumi augus, mille kaudu satub inimene hyperruumi. Hyperruumis liigub inimene ajas.

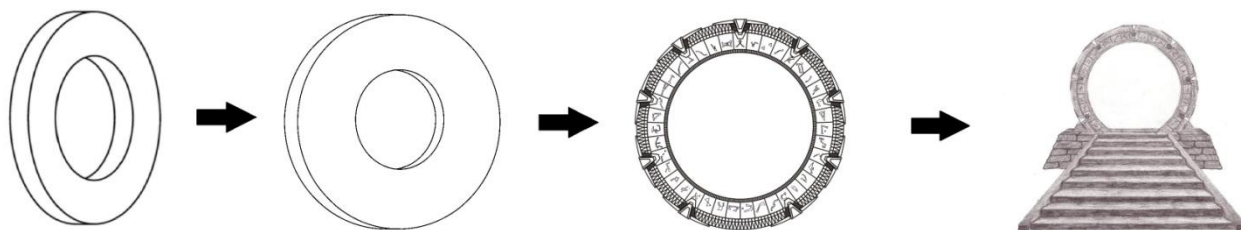
## 2.2.9 Masinaehitus ehk „ajaratta tehnoloogia/elektrotehnika“

### 2.2.9.1 Sissejuhatus

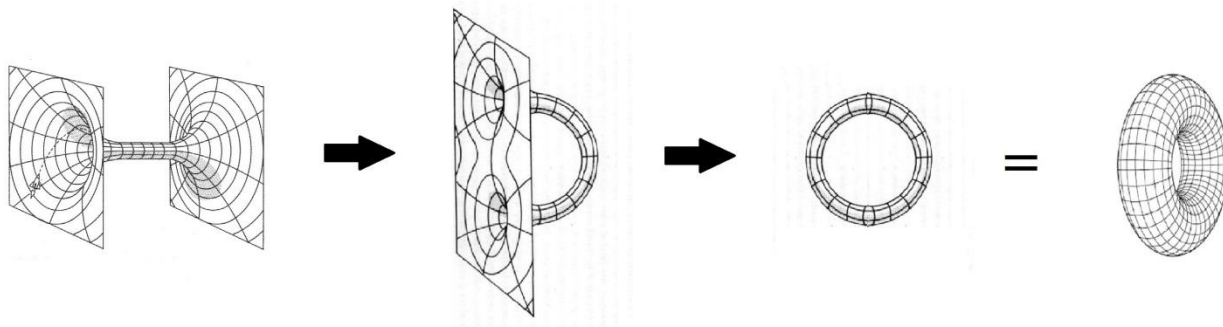
Eespool välja toodud metallrõngas võib olla „ajamasina“ metallkonstruktsiooniks, mis võiks olla maapinna suhtes püstises asendis. Sellisel juhul on metallrõnga pindalal palju väiksem kontakt maaga. Metallrõnga ja maa kontakti asukohas satuks rõnga (magnet)väli natuke ka maa sisse. Joonis:



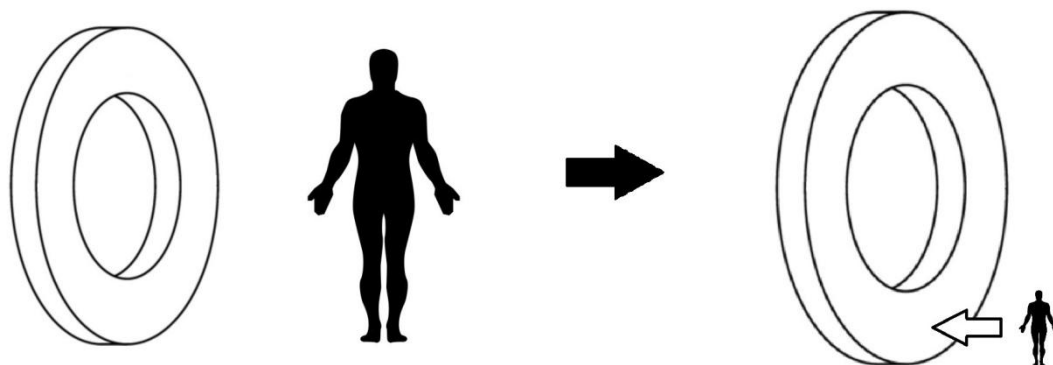
Kõige ideaalsem oleks selline olukord, kui rõngasmasin asuks hoopis kosmoses, kuna siis oleks masin täielikult kontaktivaba ümbritsevast „füüsilisest“ keskkonnast. See aga oleks majanduslikult jällegi kulukam. Rõngasmasina „metallkonstruktsioon“ sarnaneb visuaalselt ulmefilmidest tuntud „tähevärvatega“. Joonis:

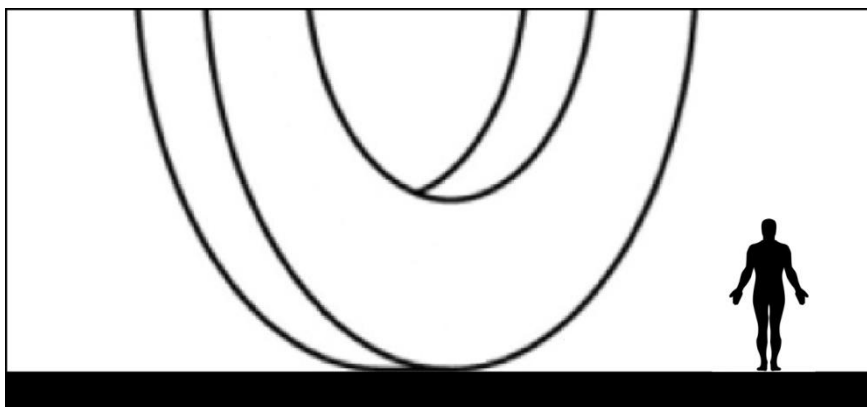


Ajas rändamist võimaldav aegruumi tunnel tekib just ümber metallrõnga. Joonis:

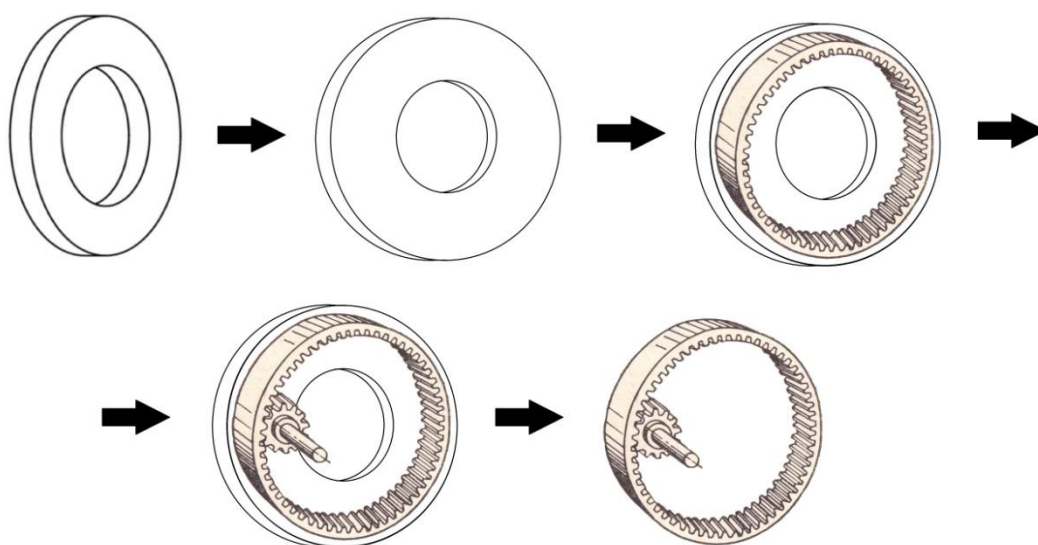


Seega peab niinimetatud „rõngasmasin“ olema nii suur, et inimene mahuks rõnga sisse ära. Joonis:



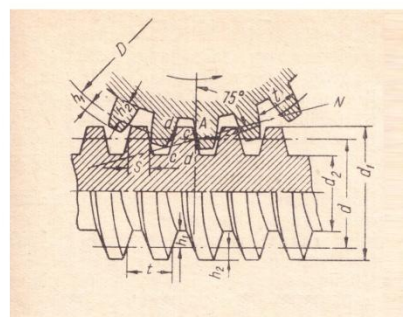
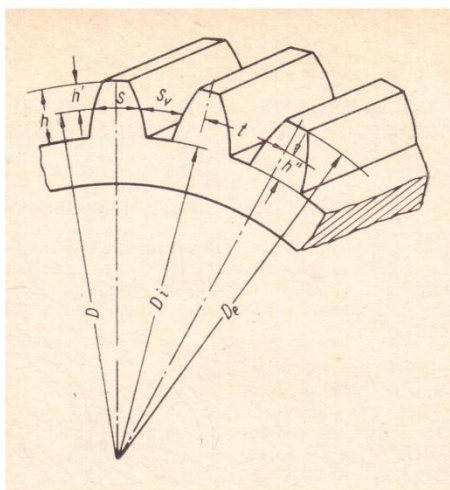
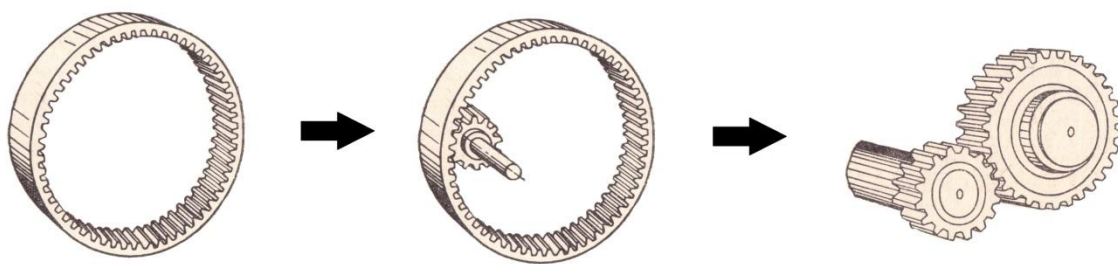


Üks võimalus, mis paneks rõnga pöörlema, on „hammasratastest koosnev ülekande mehhanism“.  
Joonis:

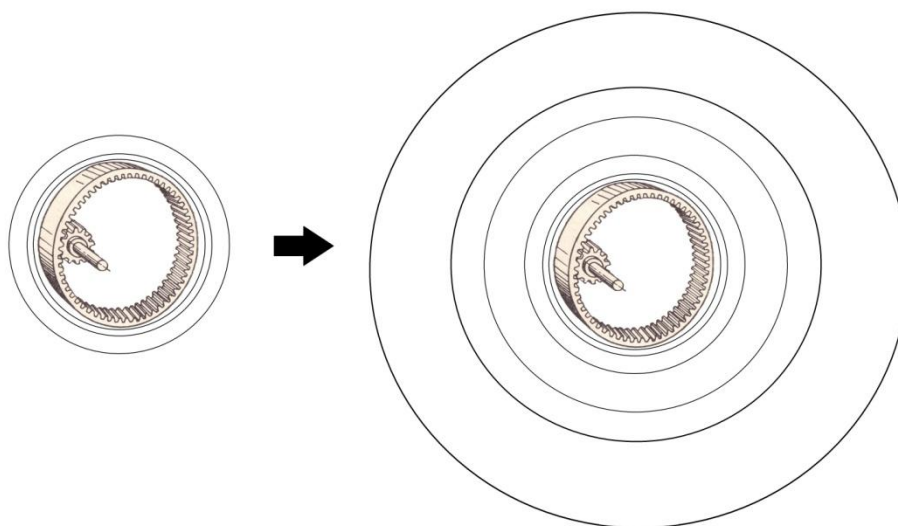


„Hammas-mehhanismid“ võimaldavad liikumise ülekannet. Mõned näited on järgmisel joonisel:

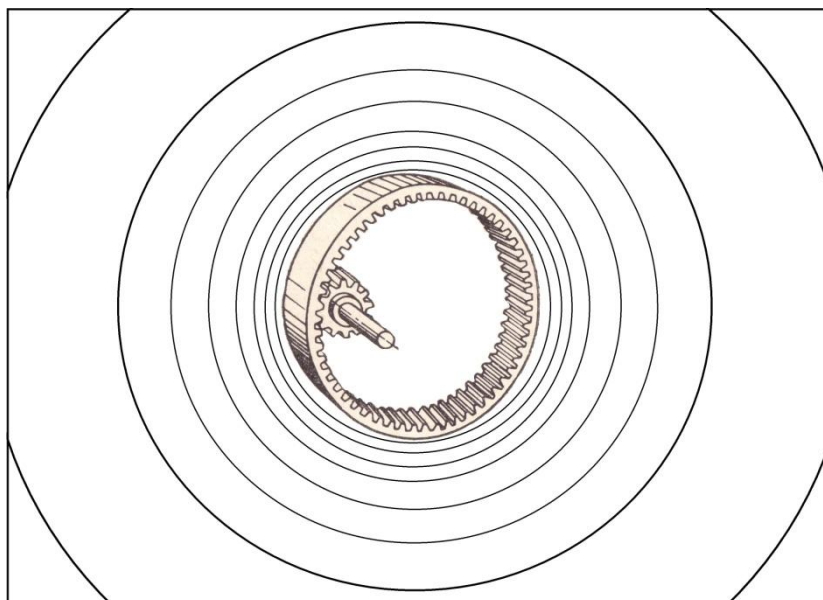




Pöörleva mehaanika korral tekib või muutub energiaväli vahetult ümber masina kõikjal korraga valguse kiirusega  $c$ . Joonisel näidatud „illustreerivalt“ ringjoontena:

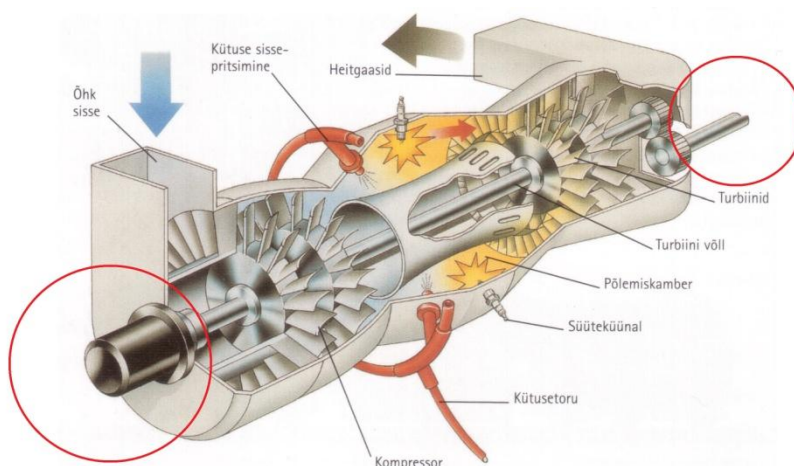
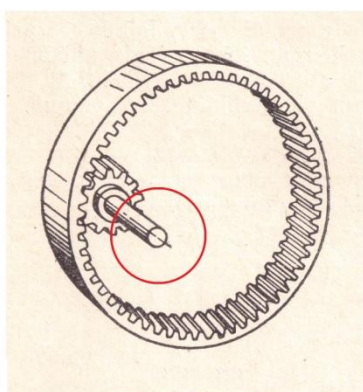


Elektriliselt laetud pöörleva mehaanilise süsteemi korral tekib magnetväli, kuid antud joonistel me kujutame seda lihtsalt ringjoontena:



### 2.2.9.2 Gaasiturbiin

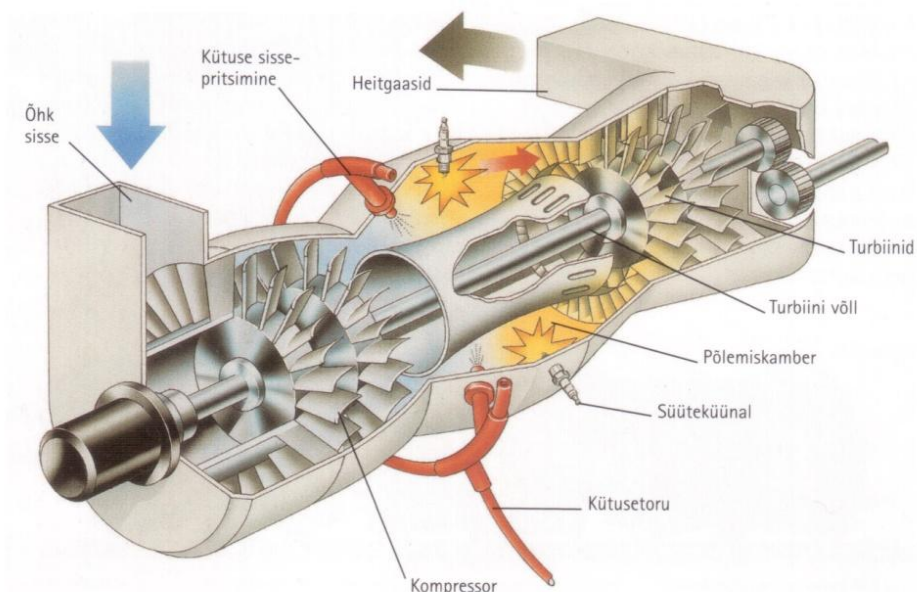
Hammasratastest koosneva ülekande mehhanismi paneks omakorda liikuma „gaasiturbiin“.  
Joonis:



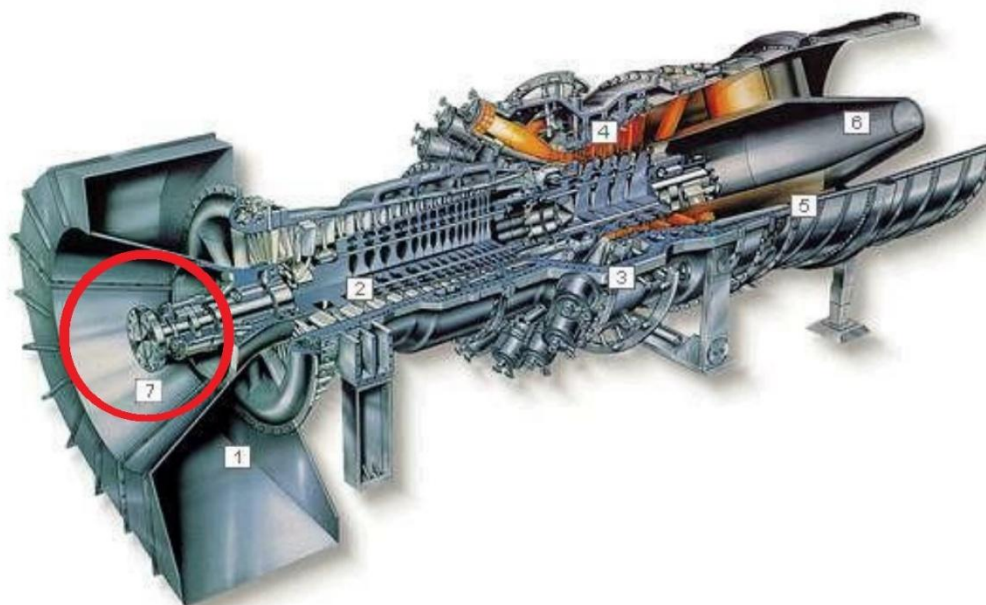
Gaasiturbiinide tööpõhimõte sarnaneb reaktiivmootorite tööpõhimõttega. Gaasiturbiinides tekkivaid kuumi gaase kasutatakse turbiini pöörlemapanemiseks. Gaasiturbiinis suruvad kompressorid õhu põlemiskambrisse. Näiteks gaasiturbiini mootoris siseneb õhk eestpoolt, see surutakse turbiinide abil kokku ja seejärel siseneb õhk põlemiskambrisse. Põlemiskambris segatakse omavahel õhk ja kütus. See süüdatakse sädemega, mille põlemise korral tekivad kuumad paisuvad gaasid. Kuumade gaaside lahkumise korral põlemiskambrist läbivad need teisi turbiine. Need turbiinid panevad liikuma mootori eesotsas oleva kompressori. Põlemiskambrist väljuvate kuumade paisuvate gaaside energia paneb turbiini pöörlema. See tähendab seda, et paisuvad kuumad gaasid panevad liikuma ventilaatori tiivikuid, mida nimetatakse turbiiniks. Näiteks turbiinivõlli pöörlemine võib tekitada elektrigeneraatori ringiajamist. Gaasiturbiinid muudavad paisuvate gaaside energia mehhaaniliseks.



Näiteks teatud liiki gaasiturbiin ajab ringi Chinook helikopterite rootorilabasad, mis hoiavad helikopterit õhus. Turbiini pöörlemine võib käivitada generaatori ja võib panna tööle kompressori. Joonis:



Kuid tänapäevase statsionaarse gaasiturbiini ehituse skeem-joonis on:



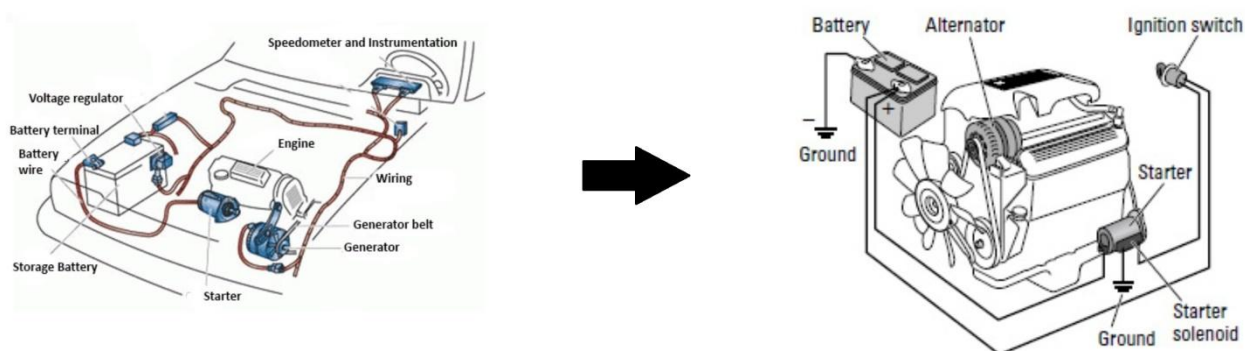
Viimasel joonisel tähendavad „nummerdatud osad“ järgmist:

1. Õhukogur
2. Telgkompressor
3. Põlemiskamber
4. Tulised gaasi joad
5. Väljaheitetrakt
6. Difusoor

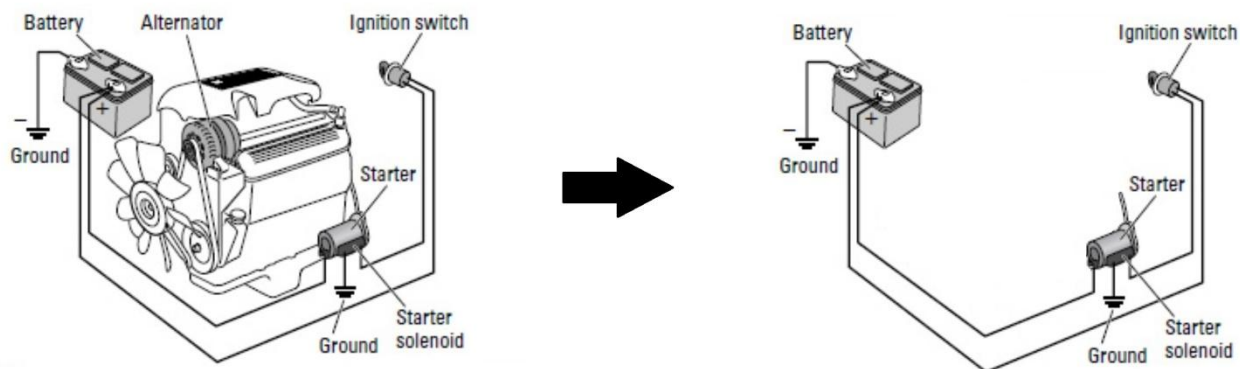
## 7. Ajami telg

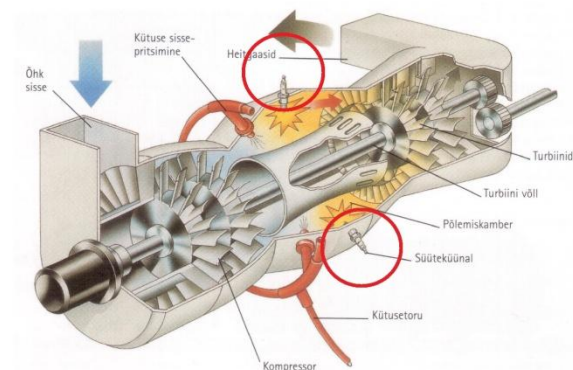
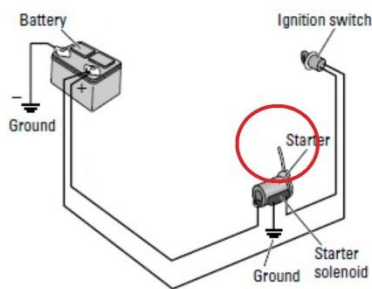
Õhukogur on varustatud filtrisüsteemiga, mida joonisel ei ole näidatud. Õhukoguri kaudu tuleb atmosfääriõhk paljuastmelise telgkompressori sisendile. Atmosfääriõhk surutakse kompressori poolt kokku, mille tagajärjel tekib väga suur rõhk. Seejärel suunatakse see turbiini põlemiskambrisse. Pihustite kaudu pritsitakse samal ajal põlemiskambrisse ka gaasikütust. Turbiini põlemiskambris segunevad omavahel kütus ja õhk, mille tagajärjel segu süttib. Kütuse ja õhu segu põlemise korral eraldub suures koguses energiat. Antud juhul muundub energia mehaaniliseks tööks, mille korral panevad tulise gaasi joad turbiinilabad pöörlema. Kuid osa saadud energiast läheb ka turbiini kompressoris oleva õhu kokkusurumiseks. Ülejäänud osa tööst lähebki ajami telje pöörlemiseks, mis omakorda paneb pöörlema kogu masina. Põlemistooted, mille temperatuurid võivad küündida 500 – 550 kraadini, väljuvad läbi turbiini „väljaheitetrakti“ ja „difusoori“. Pärast seda võib nendest saada soojusenergiat turbiini „soojusutilisaatoris“.

Gaasiturbiini paneb tööle elektrisüsteem, mis sarnaneb bensiinimootoril põhineva auto elektrisüsteemiga. Joonis:



Gaasiturbiini käivitamise elektrisüsteem on kinnine vooluring, mis saab alguse iseseisvast vooluallikast. Elektrivool läheb positiivsest klemmist vastava seadme lülitini, sealt edasi seadmeni ning siis „rõngasmasina“ kere maandusterminali kaudu aku negatiivse klemmini. Gaasiturbiini käivitamine toimub läbi „starteri“ ehk eraldiseisvast väikesest elektrimootorist. Starter saab voolu otse akust. See tähendab seda, et gaasiturbiini käivitamiseks edastatakse kõrgepinge impulsid akust süüteküünaldeni. Süüteküünla säde süütab põlemiskambris oleva õhu ja kütuse segu ehk gaasi. Pärast mootori käivitumist hakkab see läbi generaatori tootma elektrit ja akut uuesti laadima. Sellisel juhul saab elektrisüsteem oma energia generaatorilt. Joonis:

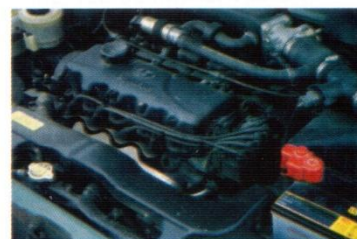
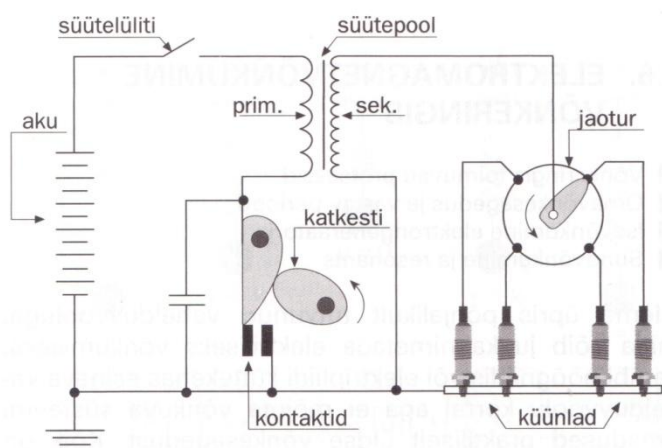




Näiteks auto elektrisüsteemi üks põhilisi osasid on „süütesüsteem“, mis võib esineda suures osas ka antud pöörleval rõngasmasinal.

Bensiinimootoriga auto süütesüsteemi üks koostisosasid on „impulsstrafo“, mis võimaldab väikese pingega alalisvooluallika abil tekitada kõrgepinget. Autoaku tekitab süütepooli trafo primaarmähises 12-voldise pingega elektrivoolu. Samas vooluringis esineb ka „katkesti“, mis on mehaaniliselt juhitud auto mootori poolt. Katkesti võimaldab primaarahelat perioodiliselt avada ja sulgeda.

Auto süütesüsteemi joonis:

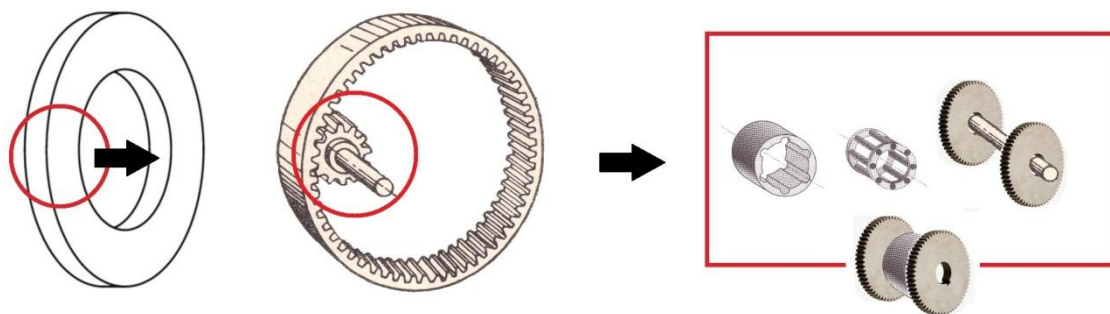


Pooli primaarmähis muutub endainduktsiooni tõttu vooluallikaks, kui katkesti peatab voolu. Selle tõttu tekib selle otstel elektriline pinge. Kuna sekundaarmähises on keerdude arv palju suurem primaarmähise keerdude arvust, siis seega muudab see pinge veelgi suuremaks. Selle tagajärjel tekib kõrgepinge, mille väärtus võib olla umbes 10 – 20 kV. Selline kõrgepinge tekitab sädeme auto süüteküünla kontaktide vahel, mis põhjustab omakorda silindris küttesegu põlemise. Katkestiga asub samas korpuses ka jaotur, mis juhib kõrgepingeimpulsi parajasti töötavale silindri küünlale. Peale katkesti ja jaoturi on olemas ka veel kondensaator, mis on ühendatud primaarahelasse nii, et see oleks rööbiti katkesti kontaktidega. Kondensaator muudab primaarahela vahelduvvooluringiks ka siis, kui kontaktid on avatud. See väldib sädeme tekkimise võimalust kontaktidel.

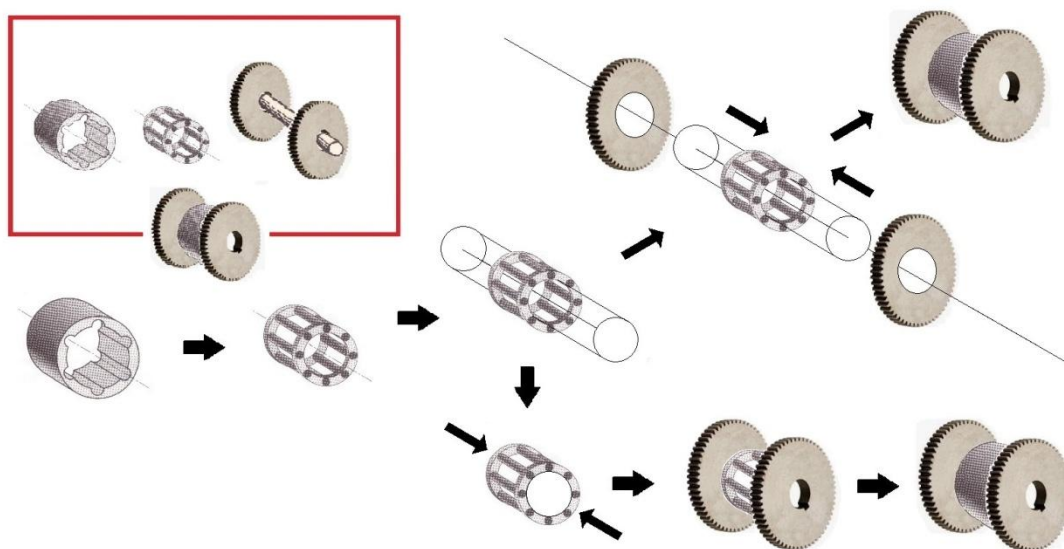
### 2.2.9.3 Asünkroonmootor

Gaasiturbiini asemel võib olla ka „asünkroonmootor“, mis paneks kogu rõngasmasina pöörlema.

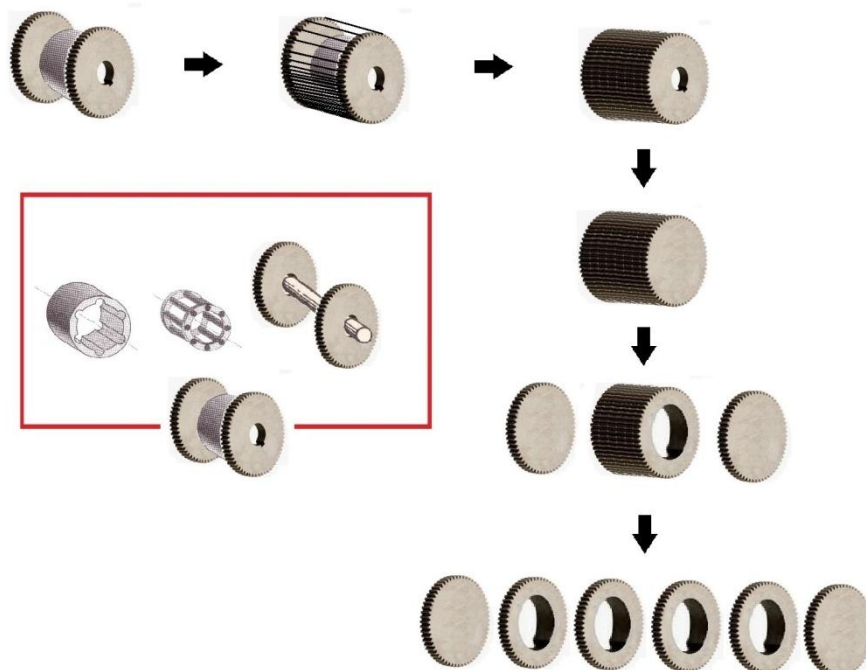
Joonis:



Sellisel juhul paneks masina hammasrataste süsteemi pöörlema asünkroonmootori rootor. Joonis:

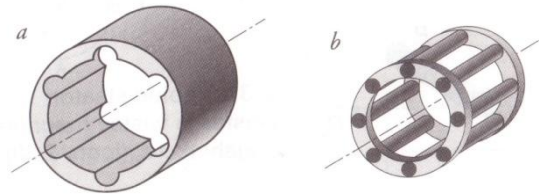


Asünkroonmootori staator, rootor ja hammasrattad võivad olla üksteisega seotud järgmiselt, joonis:

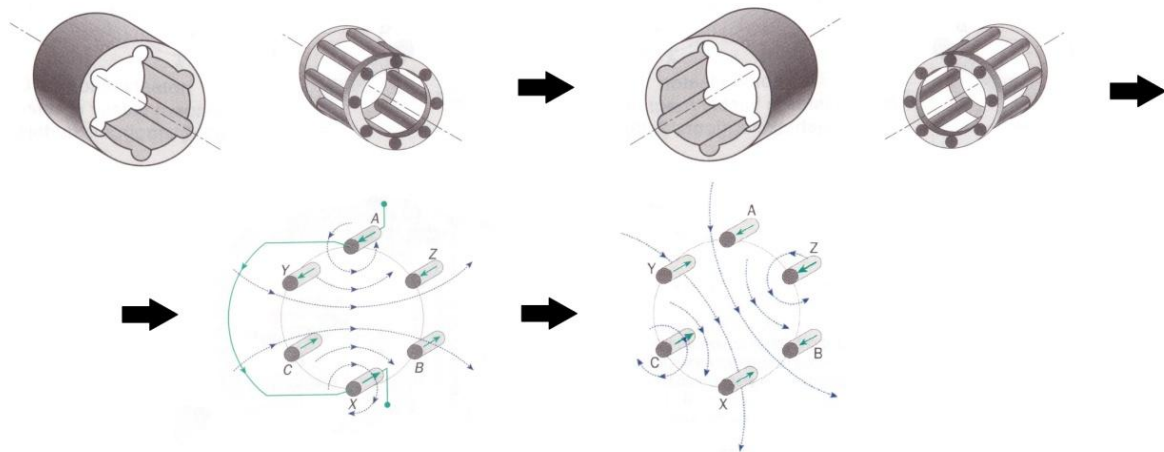




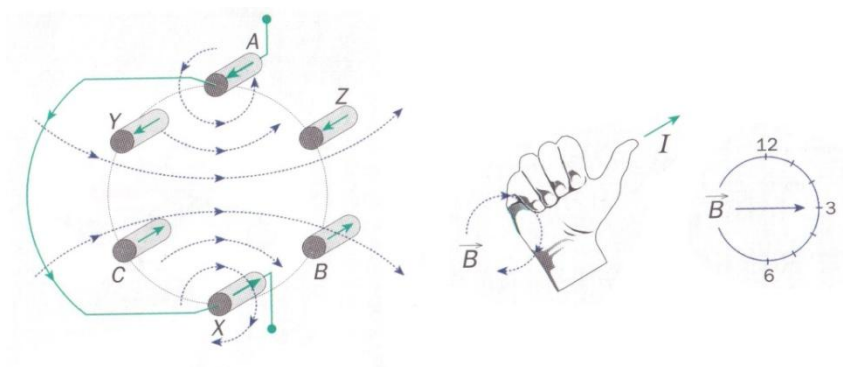
Kolmefaasilise asünkroonmootori staatoriks on õõnes malmsilinder. Rootor pöörleb ümber telje, mis ühtib ka staatori teljega. Mähised on paigutatud sellistesse „uurtesse“, mis on silindri teljega paralleelsed ja asuvad staatori seintes. Rootor koosneb vask- või alumiiniumvarrastest, mis on teljega paralleelsed ja neid ühendavad omavahel „otsarõngad“. Rootoriks võib olla ka alumiiniumsilinder, millesse on valatud südamik, mis koosneb teraspleki lehtedest. Südamikke kasutatakse magnetvälja tugevdamiseks. Asünkroonmootori staator (a) ja rootor (b), joonis:



Mähised tekitavad rootori asukohas pöörleva magnetvälja, kui need on ühendatud „kolmefaasilisse vooluvõrku“. Joonis:

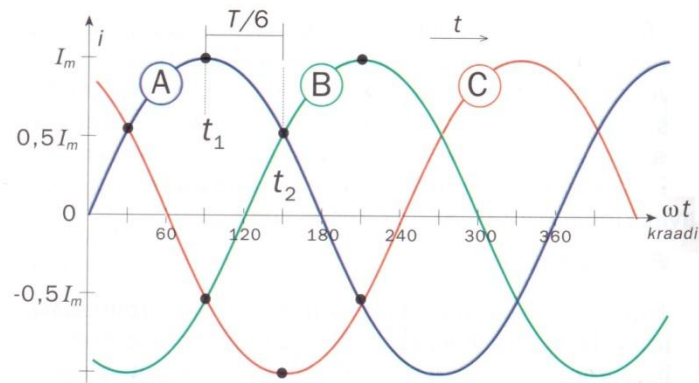


Mähised paiknevad staatori uures. Järgnevalt on esitatud staatori ristlõige koos kuue uurdega ehk mähisekanaliga. Joonise vaade on esitatud poolküljelt, voolud staatori mähistes ja vastav magnetväli ajahetkel  $t_1$ :



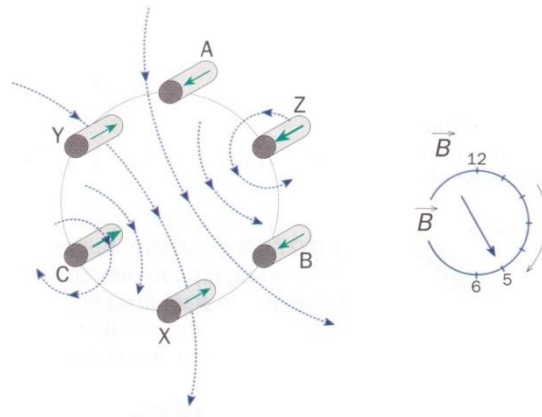
Kõik faasimähised paiknevad staatori kahes kanalis nii, et mööda rootori telge (s.t. risti lõike-tasandiga) kulgeb mähistes elektrivool. See tähendab, et vool kulgeb ühes kanalis meie poole, kuid rootori vastasküljel paiknevas kanalis meist eemale.

Ajahetkel  $t_1$  on A-faasi voolutugevus kõige suurem  $I_m$ . Staatori faasimähiste voolude ajalised sõltuvused on näidatud joonisel:



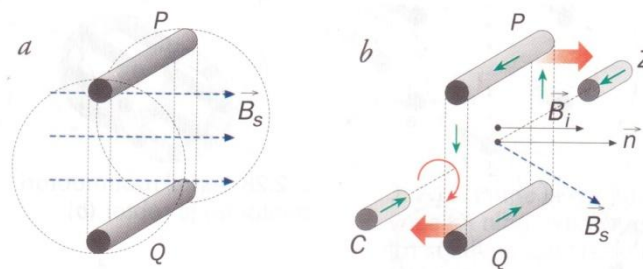
Kuna vool kulgeb lõigus A meie poole ja lõigus X meist eemale, siis seega on voolutugevus positiivne. Joonisel ei ole kujutatud teiste mähisekanalite omavahelisi ühendusjuhtmeid. Kuid faaside B ja C mähistes on voolutugevused samal ajahetkel  $t_1$  negatiivsed, mille väärtused on  $-0,5 I_m$ . See tähendab seda, et lõikudes Y ja Z kulgevad voolud meie poole, kuid lõikudes B ja C meist eemale. Elektrivoolud tekitavad ruumis magnetvälja, mille jõujoonte paiknevuse ruumis määrab ära kruvireegel või parema käe rusikareegel. Magnetväli on rootori asukohas ehk staatori keskel suunatud vasakult paremale. See tähendab asendiga „kell kolm“.

Faaside A ja B voolutugevused on  $0,5 I_m$  väärtusega parajasti siis, kui on jõudnud kätte ajahetk  $t_2$  ehk seega ajas  $T/6$  võrra või faasis 60 kraadi jagu hiljem. Faasi C mähises kulgeb kõige suurem vool  $-I_m$ . Kuna antud juhul kulgeb vool lõigus Z tagant ette ja lõigus C eest taha, siis on tegemist negatiivse vooluga. Kui aga analüüsida voolude summaarset magnetvälja, siis selle suund on pöördunud 60 kraadi võrra päripäeva. Seega paikneb magnetväli asendis „kell viis“. Voolud staatori mähistes ja vastav magnetväli ajahetkel  $t_2$ , joonis:



Kogu eelnev analüüs näitab, et staatori sees olev magnetväli pöörleb päripäeva, mille sagedus ühtib kasutatava vahelduvvoolu sagedusega.

Järgnevalt vaatame rootori kahte varrast P ja Q ajahetkel  $t_1$ . Rootori vardad ja neist moodustuv kontuur ajahetkel  $t_1$  (a) ning veidi hiljem (b), joonis:



Kontuuri moodustavad vardad ja varraste otsi ühendavad rootori osad, mis joonisel on kujutatud vertikaallõikudena. Staatori magnetvälja  $B_s$  jõujooned läbivad kontuuriga piiratud pinda. Magnetvälja magnetvoog on suurim, kuna välja jõujooned on läbiva pinnaga risti. Kontuuri normaali ja välja suuna vahel tekib staatori magnetvälja pöördumise tõttu nurk  $\beta$ . Pöördumise käigus väheneb nurga  $\beta$  koosinus ja läbi selle ka magnetvoog:

$$\Phi = B S \cos\beta$$

Kuid magnetvoo kahanemine on tegelikult takistatud, kuna Lenzi reegli tõttu tekib kontuuris induksioonivool, mis tekitab omakorda paremale suunatud magnetvälja  $B_i$ . Lõigus P on induksioonivool suunatud meie poole, kuid lõigus Q meist eemale.

Staatori C-faasi mähise lõigus Z kulgeb meie poole suunatud vool ja seda siis ajahetke  $t_2$  lähenemise korral. Kuna lõik Z asetseb rootori vardast P pisut paremal, siis samasuunaliste voolude tõmbumise tõttu mõjub vardale P lõigu Z poolt paremale suunatud tõmbejõud. Kuna staatori mähiselõigus C ja vardas Q kulgevad meist eemale suunatud voolud, siis seega mõjutab mähiselõik C tõmbejõuga varrast Q, mis on suunatud vasakule. Sellised jõud pööravad rootorit päripäeva ehk pöörleva magnetvälja suunas. Sellise tulemuse saaksime ka siis, kui me jätaksime voolude suunad määramata. See on võimalik magnetvälja „kontsentreerumisreegli“ tõttu, mis ütleb, et staatori magnetväli pöörab vaadeldava kontuuri magnetvälja oma suunale, mille tagajärjeks veetakse rootorit endaga kaasa.

Rootor ja staatori magnetväli võivad omavahel sünkroonis pöörelda ainult siis kui puudub pidurdav jõud. Sellisel juhul on rootor ja staatori magnetväli üksteise suhtes paigal, magnetvoog on muutumatu ja ei teki induksioonivoolu. Sellest järeldub, et jõud, mis pööraksid rootorit, puuduvad. Koormatud mootori korral ehk mootori kasuliku töö korral jääb rootor pöörlemisel magnetväljast natuke maha. Niimoodi säilivad veojõud. Rootori ja magnetvälja pöörlemised ei ole omavahel sünkroonis, vaid need on asünkroonis. Rootori ja staatori magnetvälja pöörlemiste sagedused on erinevad.

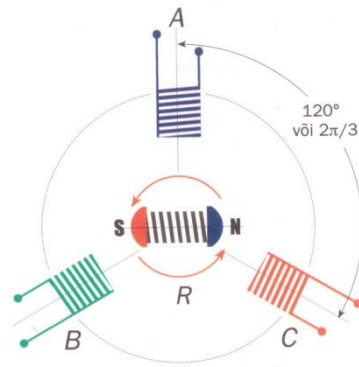
Pöörlevat magnetvälja ei saa tekitada ühefaasilise toite korral. Kui aga kasutatakse asünkroonmootorit ühefaasilises süsteemis, siis tekitatakse juurde vähemalt üks lisafaas olemasoleva faasi pööramise kaudu. Kuna kondensaator tingiks lisafaasi pinget põhifaasi omast ajas maha jätma, siis seega ühendatakse kondensaator lisafaasi vooluringi. Sellisel juhul nimetatakse asünkroonmootorit „kondensaatormootoriks“.

Pöörlevat magnetvälja ei saa tekitada ühefaasilise toite korral. Seetõttu kasutatakse asünkroonmootorit „kolmefaasilises süsteemis“, milles esineb „kolmefaasiline vool“.

Kolmefaasiline vool on selline vahelduvvool, mille korral sisaldab toitekaabel nelja juhet. Kolmefaasiline elektriliin koosneb kolmest faasijuhtmest ja ühest nulljuhtmest, mis omab Maa potentsiaali. Faasijuhtmetes olevaid pingeid mõõdetakse nulljuhtme suhtes. Need pinged on omavahel ajas nihutatud  $\frac{1}{3}$  võnkeperioodi võrra. Sellele vastab nurgamõõdus  $\frac{2\pi}{3}$  radiaani, mis on 120 kraadi.

Kolmefaasiline generaator tekitab selliseid elektromotoorjõude, mis on vajalikud kolmefaasilise voolu olemasoluks. Kolmefaasiliseks generaatoriks on dünamomasin, mille staatoris paiknevad kolm induksioonimähist ja seda omavahel 120-kraadise nurga all. Kolmefaasilise generaatori

põhimõtteskeem-joonis, milles A, B ja C on faasimähised ja R on rootor:



Indutseeritava elektromotoorjõu suurim väärtus ehk amplituudväärtus  $\varepsilon_m$  ilmneb parajasti siis, kui mingis mähises muutub magnetvoog kõige kiiremini. Magnetvoo tekitab dünamomasina rootor. Elektromotoorjõu hetkväärtus  $e_i$  on arvutatav järgmiselt:

$$e_i = \varepsilon_m \sin \omega t$$

Selles on  $\omega$  rootori nurkkiirus ja suuruse  $e_i$  võnkumise ringsagedus.

Mehaanilise generaatori mähise igas keerus tekib **elektromotoorjõud**, mis muutub „sinusoidaalselt“:

$$e_i = \varepsilon_m \sin \omega t$$

Selle amplituudväärtus avaldub kujul:

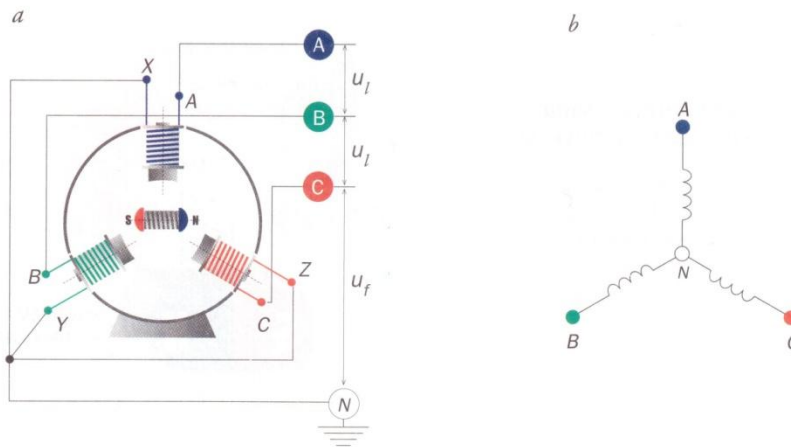
$$\varepsilon_m = BS\omega$$

B on magnetinduktsioon generaatoris, S on mähise keeru pindala ja  $\omega$  on rootori pöörlemise ringsagedus.

Rootor saavutab mähiste A, B ja C jaoks täpselt samasuguseid asendeid 120-kraadiste pöörete tulemusena. Indutseeritavate elektromotoorjõudude ja vastavate pingete vahel on mähistes seetõttu faasinihe 120 kraadi ehk  $\frac{2\pi}{3}$ . Nelja juhtme korral kasutatakse generaatorimähiste tähtühendust. Selle järgi ühendatakse kokku eri mähiste üheliigilised otsad, mis joonise peal on tähistatud X-, Y- ja Z-ga.

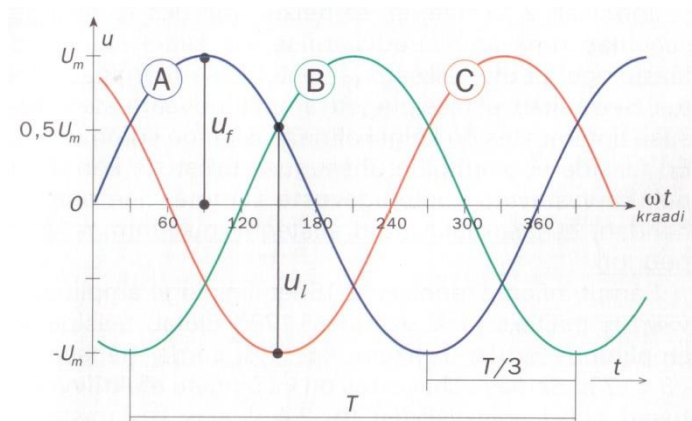
Generaatori mähiste tähtühendus (a) ja sellele vastav skeemitähis (b), milles A, B ja C on faasi juhtmed ning N on nulljuhe ehk neutraal:





Punkti N nimetatakse generaatori neutraaliks, mis ühendatakse omakorda maandatud ühise nulljuhtmega. Joonise pealt on näha, et kolm generaatorimähist A, B ja C moodustavad kolmeharulise tähe, mille keskel on neutraalpunkt. Faasipinge nimetatakse sellist pinget, mis esineb mähiste ühendamata otstel A, B ja C neutraalpunkti suhtes. Selle hetkväärtus on  $u_f$ . Kuid liinipinge nimetatakse kahe faasipunkti omavahelist pinget. Selle hetkväärtus on  $u_l$ .

Kolmefaasilise voolu korral sõltub pinge nurgast  $\omega t$  või ajast  $t$ , milles faasid on A, B ja C, faasipinge on  $u_f$  ja liinipinge on  $u_l$ , joonis:

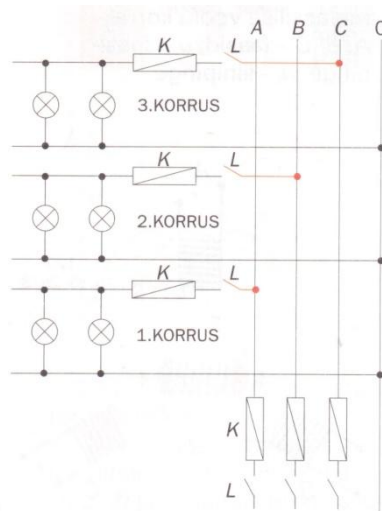


Kui üks faasipinge ulatub amplituudväärtuseni, siis teisel kahel faasipingel on samal ajal poole väiksem väärtus, mis on ka vastupidise märgiga. Kui aga kõigi faasipingete amplituudväärtused on omavahel võrdsed, siis sellisel juhul on kõigi kolme faasipinge summa null. Kui ühesugune takistus esineb eri faaside vooluringide korral, siis vastavate voolutugevuste summa on samuti null. See näitab voolu puudumist nulljuhtmes, mis esineb tasakaalustatud süsteemis.

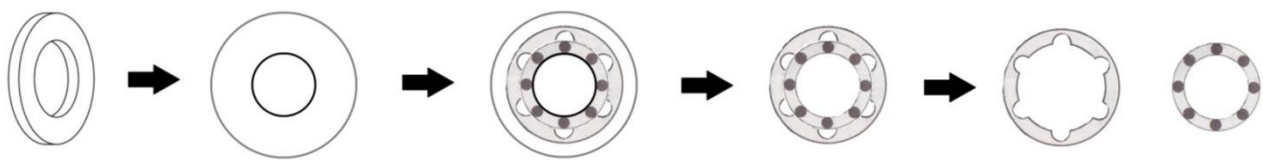
Liinipinge amplituudväärtus faasi väärtusel 120 kraadi on ligikaudu 1,73 korda suurem kui faasipinge amplituudväärtus. Sama on ka pingete efektiivväärtustega. See tähendab seda, et kahe faasijuhtme vahel olev pinge on suurem kui ühe faasijuhtme ja ühe nulljuhtme vahel olev pinge.

Kui on tegemist kolmefaasilise süsteemiga, siis lülitatakse tähtühenduses ühefaasilised tarvitid mingi faasijuhtme ja nulljuhtme vahele. Ühefaasilised tarvitid on väiksema võimsusega. Selleks, et nulljuhtmes ei tekiks suurt voolu, jagatakse koormus ühtlaselt kõigi faaside vahel ära. Nulljuhtme katkestumise korral võib toimuda selline faasipingete omavaheline ümberjaotumine, mis ei ole kindlasti ettenähtud. Seetõttu paiknevad lülited ja kaitsmed alati faasijuhtmetel. Kolmefaasilised tarvitid on suurema võimsusega (näiteks asünkroonmootor), mille mähised ühendatakse vooluvõrku kõigi kolme faasijuhtme abil.

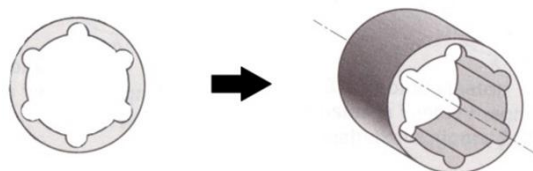
Näiteks kolmekorruselise hoone koridorivalgustuse skeem-joonis, milles K on kaitse, L on lüliti, faasijuhtmed on A, B, C ja nulljuhe on 0:



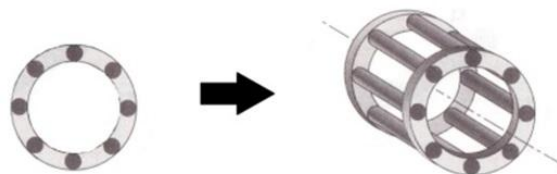
Asünkroonmootorit võib põhimõtteliselt kasutada ka nii, et puuduksid üldse hammasrattad. Sellisel juhul paneks masina pöörlema ainult asünkroonmootor ise, mis on selleks vastavalt disainitud. Joonis:



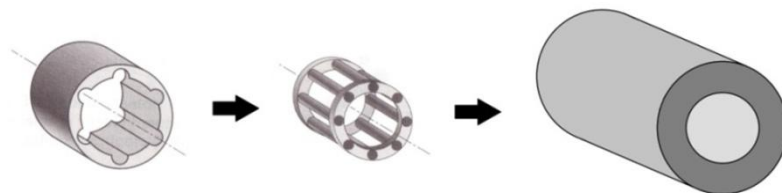
Selles tähistab masina staatori osa:



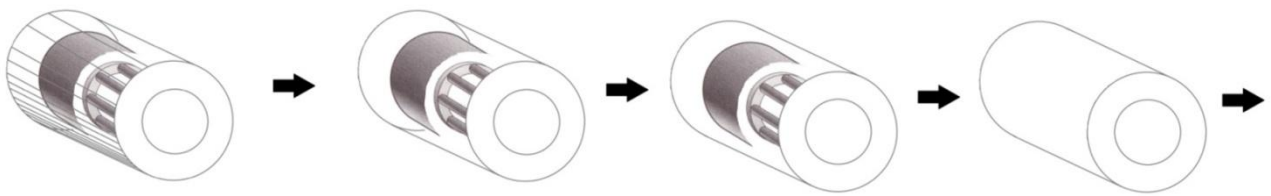
ja masina rootori osa:



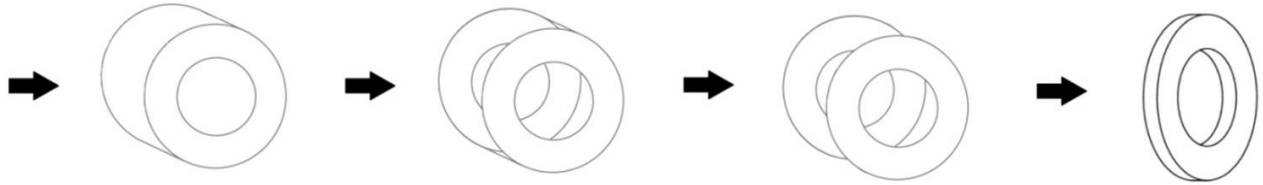
Asünkroonmootori staator ja rootor ning pöörlev silinder moodustaksid antud masina järgmiselt:



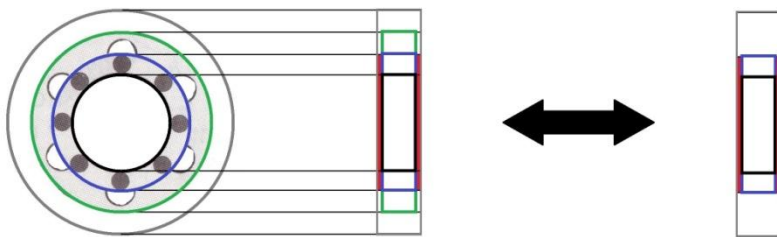
Seestpoolt paistaks see masin välja niimoodi:



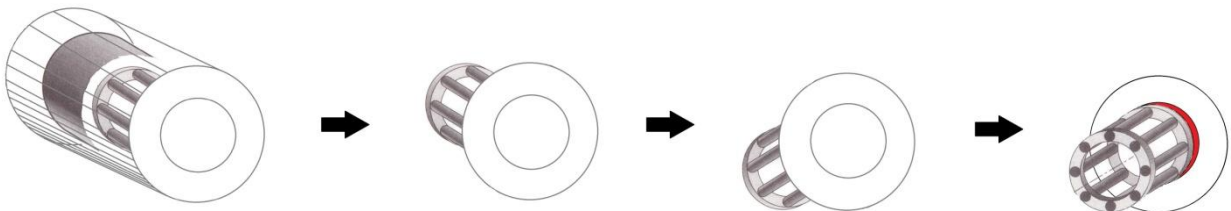
Antud masin peab olema tegelikult õhem, mitte olema pikk nagu silinder:



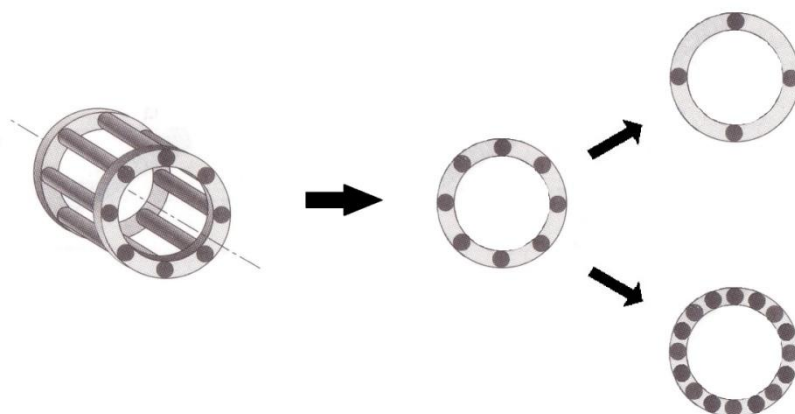
Pöörleva masina eest- ja külgvaade:



Silindri paneb pöörlema rootor, mis on „kokku ühendatud“ silindri endaga. Joonistel näidatud punasega värvitud piirkonnaga:

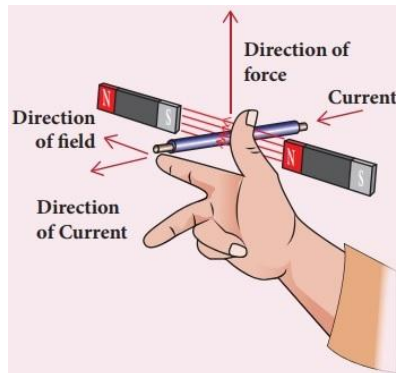


Arvestades masina üldist disaini, siis võib rootori vardaid olla põhimõtteliselt palju rohkem või isegi vähem kui kaheksa. Joonis:

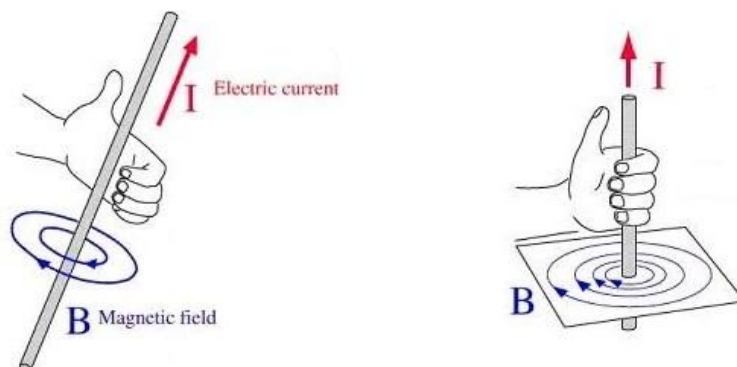


Eelnevalt on kasutatud selliseid elektri ja magnetismi mõisteid, mis tähendavad lühidalt järgmist:

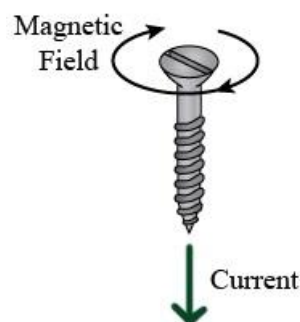
**Vasaku käe reegel** ütleb, et kui vasaku käe väljasirutatud sõrmed osutavad voolu suunda ja magnetväli on suunatud peopessa, siis väljasirutatud põial näitab juhtmelõigule mõjuva jõu suunda. Magnetjõud, mis mõjub vooluga juhtmele, on suunatud alati risti voolu ja magnetvälja suunaga. Joonis:



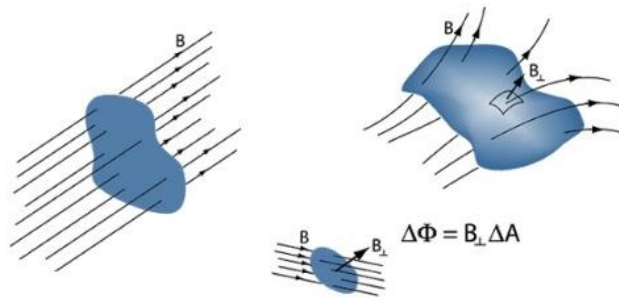
**Parema käe rusikareegel** ütleb meile seda, et kui voolu suunda näitab rusikasse tõmmatud parema käe väljasirutatud põial, siis selle sama voolu magnetvälja suunda näitavad neli kõverdatud sõrme. Joonis:



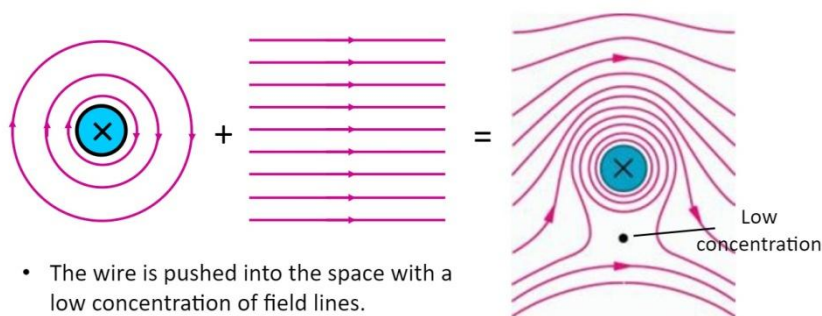
**Kruvireegli** korral ühtib vooluga juhtmelõiku ümbritseva magnetvälja suund paremkeermelise kruvi pööramise suunaga, kui voolu suund ühtib omakorda kruvi kulgeva liikumise suunaga. Joonis:



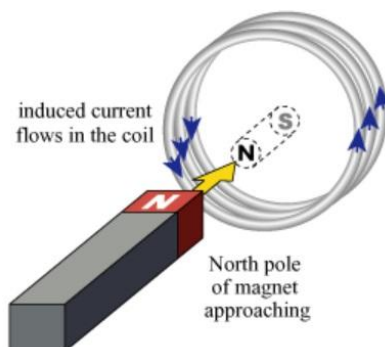
**Magnetvoog** näitab seda, et kuidas ja kui palju läbivad magnetvälja jõujooned vaadeldavat pinda, mis asub magnetväljas. Magnetvoogu mõjutab seega pinna suurus ja asend magnetväljas. Magnetvoog näitab pinda läbivate jõujoonte arvu. Joonis:



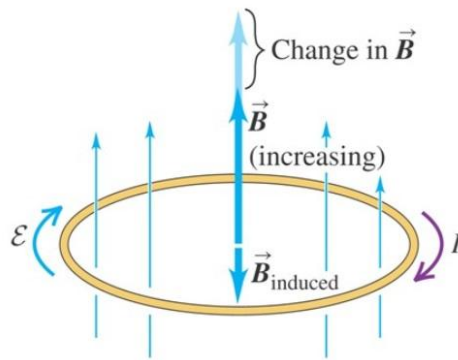
**Magnetvälja kontsentreerumise reegli** kohaselt on magnetväljal kalduvus „kontsentreeruda“. See tähendab seda, et magnetvälja tekitajad asetuvad üksteise suhtes nii, et need tugevdaksid vastastikku üksteise välja. Joonis:



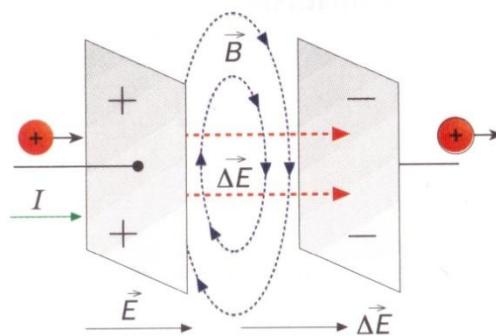
Juhtmes tekkivat voolu nimetatakse „**induktsioonivooluks**“ siis kui see vool on tekkinud juhtme liikumisest magnetväljas. Joonis:



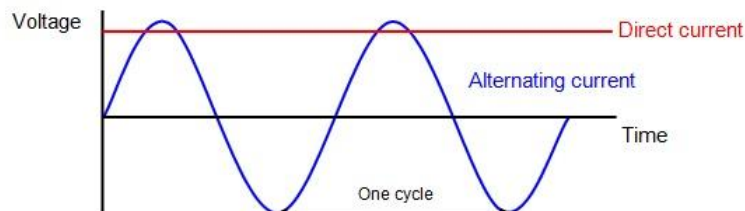
**Lenzi reeglit** sõnastatakse lühidalt nii, et „induktsioonivoolu suund on selline, et tema magnetväli takistaks muutust, mis voolu põhjustab“. Joonis:



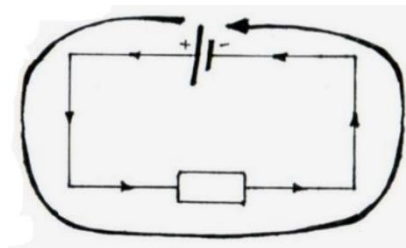
Mingi kindla mahtuvuse saamiseks loodud kehade süsteemi nimetatakse „**kondensaatoriks**“. **Mahtuvus** iseloomustab kehade laadumisvõimet. Kahe keha omavaheline mahtuvus näitab, et kui suure laengu viimisel ühelt kehalt teisele tekib kehade vahel ühikuline pinge. Joonis:



**Vahelduvvool** on elektrivool, mille korral muutub voolutugevus perioodiliselt. Kui ei muutu, siis on tegemist **alalisvooluga**. Joonis:

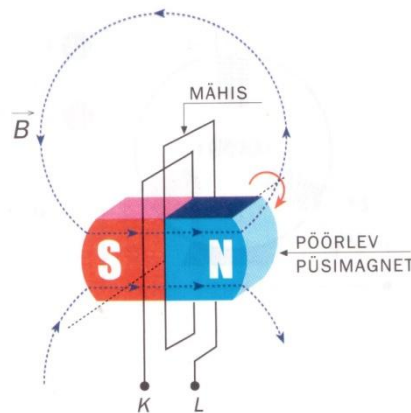


**Elektromotoorjõud** on võrdne tööga, mida teevad kõrvaljõud ühikulise suurusega laengu ühekordsel läbiviimisel vooluringist. Kuid **induktsiooni elektromotoorjõud** on pinge magnetväljas liikuva juhtmelõigu otstel, kui juhtmes puudub vool. Joonis:

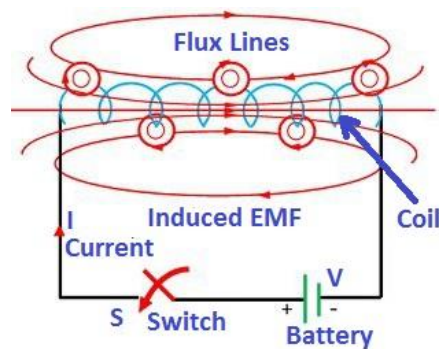


Rootori magnetvälja tugevdatakse nn. „ergutusmähise“ abil. Selliseid generaatoreid kasutatakse tehnikas kõige rohkem. Ergutusmähist toidetakse „liugkontaktide“ abil, mis ei asu generaatori väljundahelas. Väljundpinget indutseeriv generaatori töömähis on

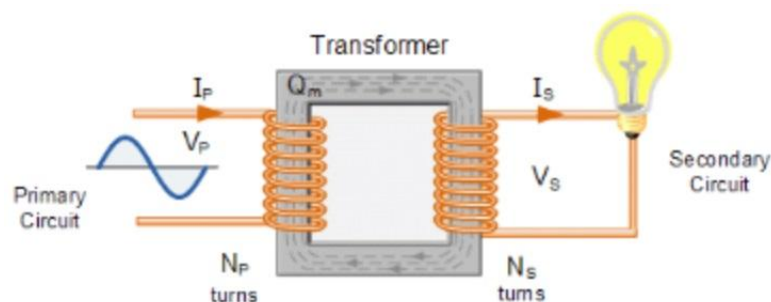
staatoris paigal, mis ei vaja liikuvaid kontakte. Generaatorit, mis kasutab ergutusmähist, nimetatakse **dünamoelektriliseks masinaks** ehk lühidalt **dünamomasinaks**. Näiteks elektrijaama generaator võib olla dünamomasin. Staatorimähisega generaatori põhimõtteskeem-joonis on esitatud järgmiselt:



**Endainduktsioon** on selline elektromagnetilise induktsiooni nähtus, mille korral põhjustab juhtmes elektromagnetilist induktsiooni voolu muutumine juhtmes endas. Joonis:

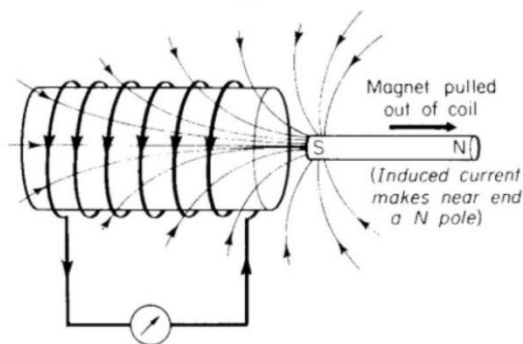


**Transformaator** ehk **trafo** on elektromagnetilisel induktsioonil põhinev seade, mis muudab vahelduvat pinget ja voolutugevust konstantsel sagedusel. Joonis:



**Elektromagnetilise induktsiooni nähtuseks** nimetatakse elektrivälja tekkimist magnetvälja muutumisel. Joonis:



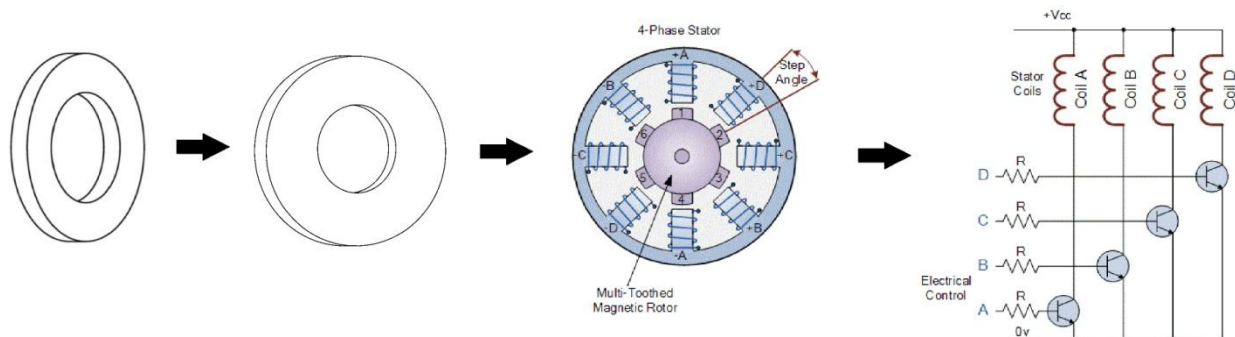


Allikad:

- 1) „Füüsika XI klassile, 1. osa, elekter ja magnetism“, Kalev Tarkpea ja „Koolibri“ 2003, Tallinn.
- 2) „Füüsika, XI klassile, 2. osa, elektromagnetism“, Kalev Tarkpea ja „Koolibri“ 2000.
- 3) „Teoreetiline mehaanika“, S. Beljavski, Kirjastus „Valgus“, Tallinn 1965.

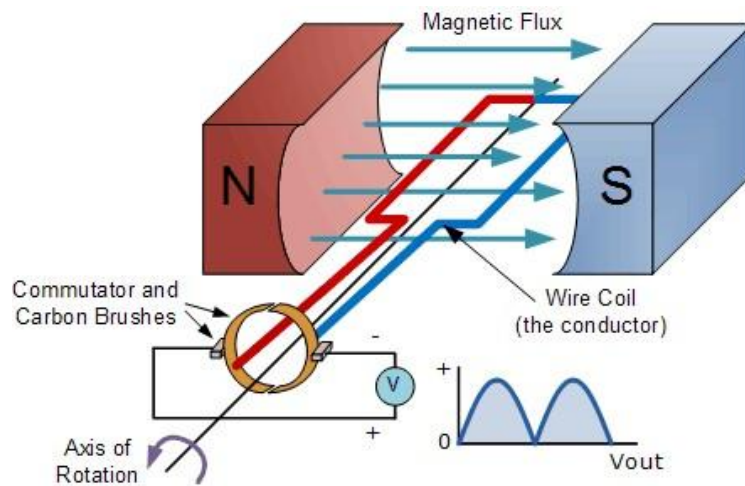
#### 2.2.9.4 Sünkroonmootor ( samm-mootor )

Teine võimalus, mis paneks rõnga pöörlema, on elektrimasin ehk „samm-mootor“ ( „permanent magnet motor“ või „variable reluctance motor“ ). Joonis:

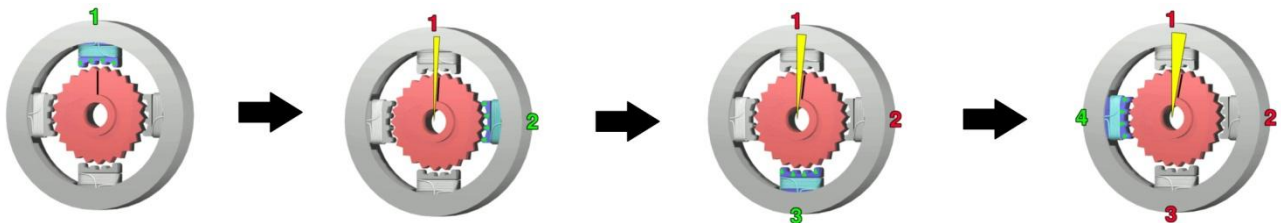


( Alalisvoolu ) elektrimootori ja magnetmootori ( elektrimasinate ) tööpõhimõte seisneb elektromagnetilises induksiooni nähtuses ja Lorentzi jõul. Elektromagnetiline induksioon on siis, kui magnetvälja muutus tekitab elektrivälja ja elektrivälja muutus tekitab magnetvälja. Näiteks kui juhe paikneb magnetväljas, siis paneb elektrivool juhtme liikuma. Kui me aga eemaldame vooluallika ja asume ise mootori võlli päripäeva pöörama, siis sellisel juhul tekitab juhtme liikumine magnetväljas juhtmes elektrivoolu. Liikuvale elektrilaengule mõjub magnetväljas jõud, mida nimetatakse Lorentzi jõuks. Joonis:





Samm-mootor on sünkroonmootor ( mitte enam asünkroonmootor ), mis on käitatav pingeimpulssidega. Mootori rootor pöörleb iga süguse pingeimpulsi mõjul kindla nurga ehk sammude võrra. Joonis:



Kuna ühe mähisega sünkroonmootoril ei ole võimalik määrata toitevoolu kaudu pöörlemise suunda, siis seega peab samm-mootoril olema vähemalt kaks „ergutusmähist“.

Ergutusmähist kui magnetsüsteemi mähist läbiv (ergutus)vool tekitab magnetvälja, mis on vajalik energiamuunduseks elektrimasinas.

Samm-mootoritel on enamasti rohkem kui kaks poolust, mis võimaldab korraga pöörata väiksema nurga. Samm-mootori diskreetse ehk inkrementaalse liikumise tõttu on see juhitav digitaalseadmetega. Rohked spetsiaalsed integraallülitused võimaldavad muuta samm-mootorite juhtimist palju lihtsamaks.

Integraallülitust kui elektroonikalülitust valmistatakse ühtses pooljuhttehnoloogia protsessis väikesel räniplaadil lülituse elementide integreerimise kaudu lahutamatuks tervikuks. Isoleeritud paisuga väljatransistor (MOSFET) on integraallülituse põhiliseks elemendiks. Ühes ainsas lülituses võib selle arv olla miljardeid.

Samm-mootoritel on üsna väike võimsus, mistõttu suudavad need mootorid liigutada suhteliselt väikseid koormiseid. Kuna saadud impulsside arv ja suund määravad ära samm-mootori rootori asendi, siis seega ei vaja mootor keerulist rootori asendi andurit. Käivitamise korral nullpunkti fikseerimiseks on vaja andurit. Mõnikord lisatakse mootorile eraldi asendi andurid ja seda täiendavaks kontrolliks.

Lineaarliikumiste ehk kulg-samm-mootorite sammude pikkused esinevad mõnest mikromeetrist mõne sentimeetrini.

Alalispinge impulsid muudetakse mootori võlli mehaaniliseks energiaks. Samm-mootoritel on neli, kuus või kaheksa ühendusklemmi, kuid see sõltub sellest, et kas tegemist on bipolaarse või unipolaarse mootoriga. Kõik samm-mootorid on sünkroonmootorid. Vastavalt staatorimähisesse antud taktimpulssidele pöörleb selle rootor, mille läbitud sammude arv määrab ära pöördenurga

suuruse.

Sünkroonmootori ehk sünkroonmasina rootor ja staatoril paikneva ankru pöördväli ehk pöörlev magnetväli pöörlevad omavahel sünkroonselt. Masina rootori pöörlemissagedus ei sõltu mootori koormusest, vaid rootori pöörlemissageduse määrab ära ankru toitepinge sagedus ja pooluspaaride arv.

Samm-mootor on numbriliselt juhitud diskreetsete juhtimissüsteemidega (näiteks mikroprotsessoriga):

$$y = n * \alpha$$

milles teatud pöördenurk  $\alpha$  on vastavuses igale impulsile ja pöördenurk  $y$  vastab  $n$ -impulsile. Seetõttu saab samm-mootorit kasutada „tagasisideteta süsteemides“. Näiteks ajami positsioneerimisel puudub vajadus tagasisideanduri järele ja mida suurem on mootorite pooluste arv, seda suurem on ka positsioneerimistäpsus. Samm-mootori liikumine võib madalatel pööretel olla katkendlik, kuna samm-mootorit juhitakse järjestikuste impulssidega.

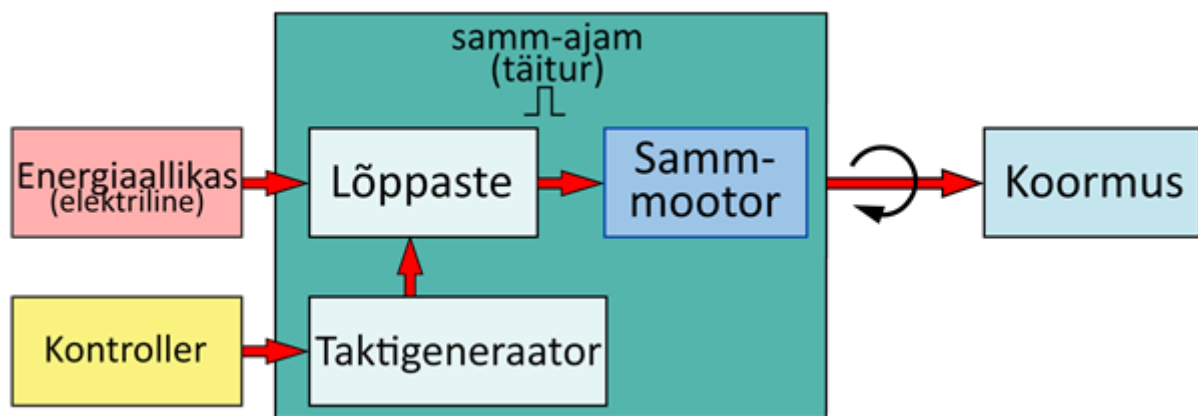
Kui samm-mootorite võimsus on kuni 1 kW, siis on need masinad kasuteguriga. Samm-mootoreid valmistatakse ka lineaarmootorite kujul.

Samm-mootori sammunurk  $\alpha$  ehk ühe takti samm on avaldatav valemiga:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{N_{ph}mZ}$$

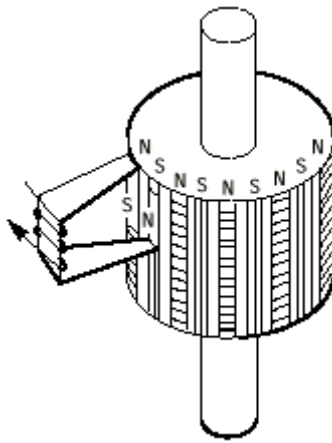
milles  $N_{ph}$  on pooluste arv faasi kohta,  $m$  on faaside arv ja  $Z$  on hammaste arv.

Samm-ajam koosneb samm-mootorist, taktgeneraatorist ja transistorlülititest koosnevast lõppastmest. Kiiruse, asendi ja kiirenduse järgi moodustatakse taktsignaalid, millega tüüritakse lõppastet. Transistorlülitid kommuteerivad samm-mootori mähiseid nii, mis tagavad soovitud liikumistrajektoori. Joonis:

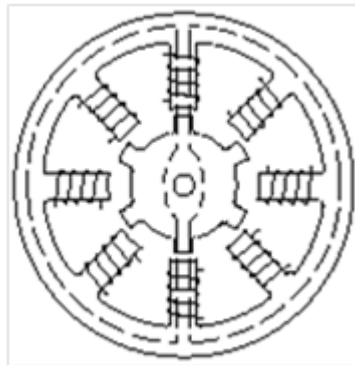


Samm-mootorid on reaktiivrootoriga või aktiivrootoriga. Võimalik on ka nendest kombineeritud konstruktsioon. Monoliidne hammastega elektrotehnilisest terasest südamik on rootoriks reaktiivrootoriga samm-mootorile. Kui staatorivool välja lülitada, siis kaob ka „jääkmagnetism“. See tähendab ka seda, et magnetvoog saab liikuda läbi südamiku ka pärast mootori pingestamist. Reaktiivrootoriga samm-mootori rootor hakkab liikuma selles suunas, mille magnetiline takistus on väiksem. Väikseim magnetiline takistus esineb väikseimas õhupilus hamba ja mähise vahel.

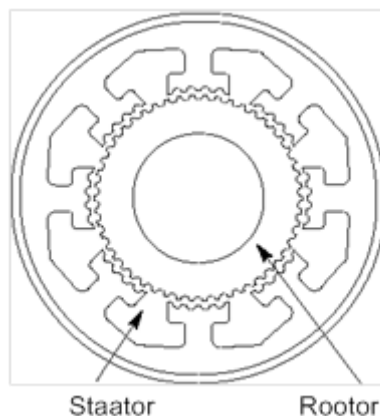
Elektrotehniline teras on aktiivrootoriga samm-mootori staatoriks ja selle rootoriks on vahelduvate poolustega püsिमagnetid. Staatoris tekkiv magnetväli paneb rootori pöörlema. Joonis:



Reaktiivrootoriga samm-mootoril puudub vooluvabas olekus takistusmoment, kuna neil ei ole püsिमagnetid. Aktiivrootoriga samm-mootorite pooluseid ei saa olla väga palju ehk nende arv on piiratud, samuti on piiratud ka positsioneerimistäpsus. Joonis:



Selliseid samm-mootoreid, mille rootoril on nii püsिमagnetid kui ka hammasvöö, nimetatakse hübriid-samm-mootoriteks. Joonis:

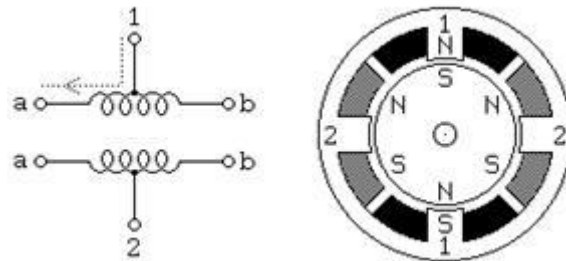


Kui rootoril on väga tugevad haruldastest muldmetallidest püsिमagnetid, mis tekitavad tavalisest suuremaid väljatihedusi, siis sellise rootoriga samm-mootorit nimetatakse suuremomendiliseks mootoriks.

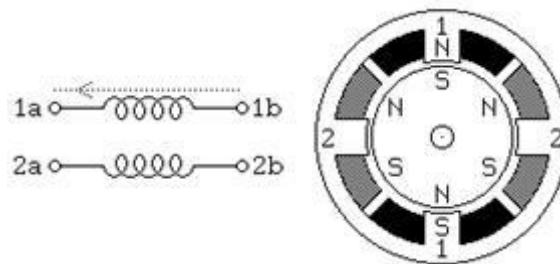
Samm-mootor on sünkroonmootor, mis on käitav pingepulssidega:

Allpool välja toodud joonise järgi ühendatakse viie või kuue ühendusjuhtmega ja keskväljavõttega unipolaarsed samm-mootorid. Toite positiivse klemmiga ühendatakse keskväljavõte, kuid toite negatiivse klemmiga kommuteeritakse vaheldumisi mõlema

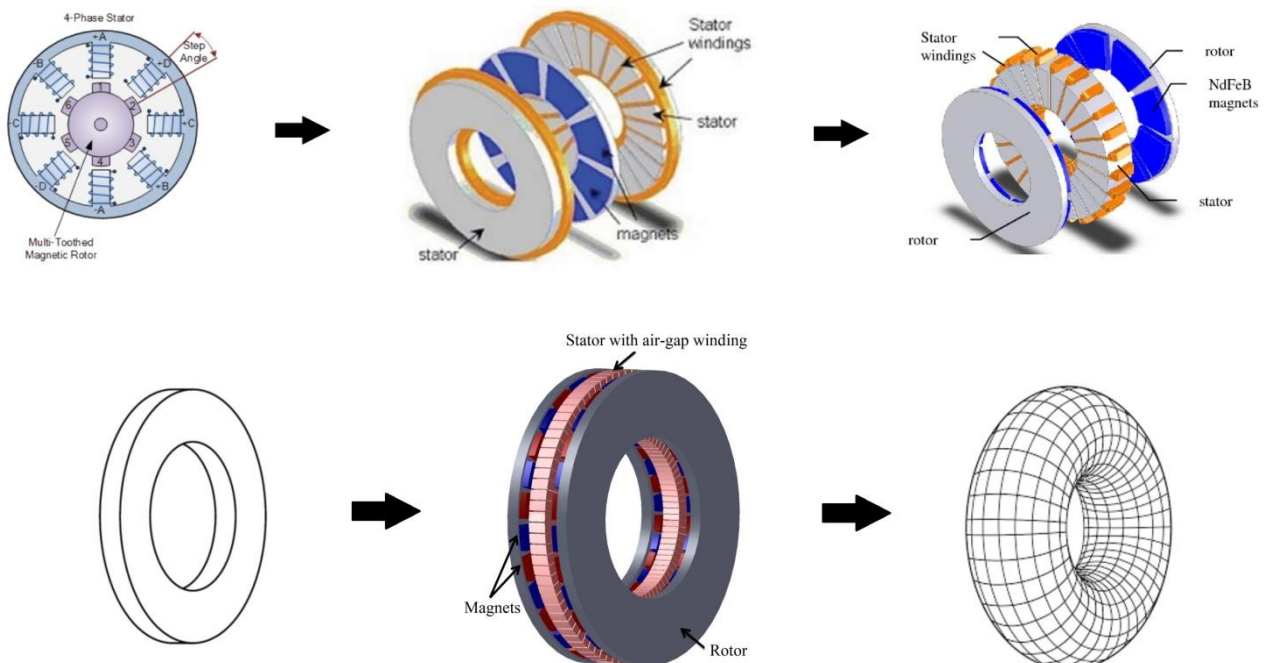
mähise otsi, et tekitada teatud pöörlemissuund. Allpool oleval mootoril on sammunurk  $30^\circ$ , mähis 1 on jaotatud üla- ja alapooluse vahel, kuid mähis 2 vasaku ja parema pooluse vahel. Aktiivmootoril on kokku kuus vahelduvat poolust, mis on jaotatud ümbermõõdule. Rootor liigub  $30^\circ$  ehk ühe sammu võrra, kui mähiselt 1 kommuteerub toide ümber mähisele 2. Mähiste 1 ja 2 järjestikused ümberlülitused põhjustavad rootori pideva liikumise. Joonis:



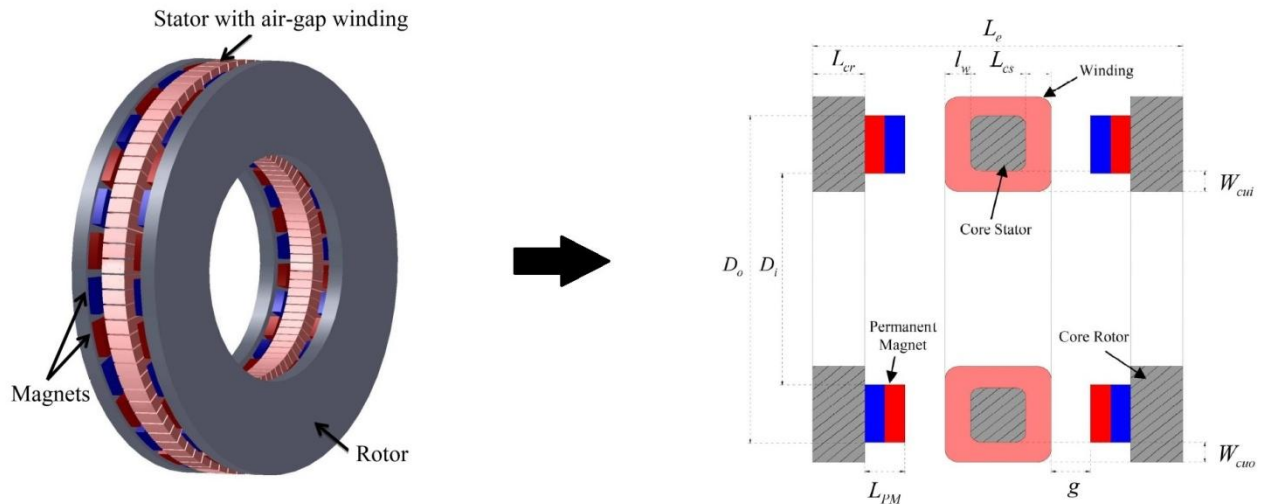
Bipolaarsetes mootorites puuduvad keskväljavõtted, ülejäänud on kõik sarnane unipolaarsete mootorite omaga. Vahelduva polaarsuse tõttu on mootori „lõppastme topoloogia“ keerulisem, kuid mootor ise on lihtsama konstruktsiooniga kui unipolaarne mootor. Pingestatud aktiiv- või hübriidrootoriga samm-mootor säilitab „hoidemomendi“ ka siis, kui mähiseid ümber ei lülitata. See takistab rootori liikumist väliste jõudude toimel. Joonis:



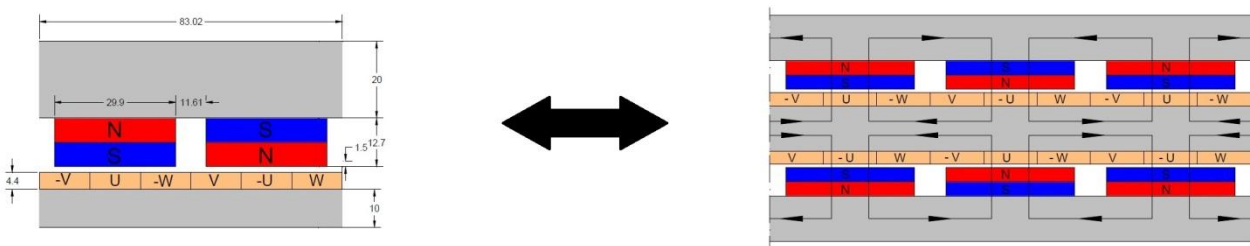
Rõnga paneb pöörlema samm-mootor. Kuna pöörlema peab just masina väline osa, siis seega peab rootor „katma“ samm-mootori staatori osa. Masina ainus liikuv osa ongi ju tegelikult rootor. Joonis:



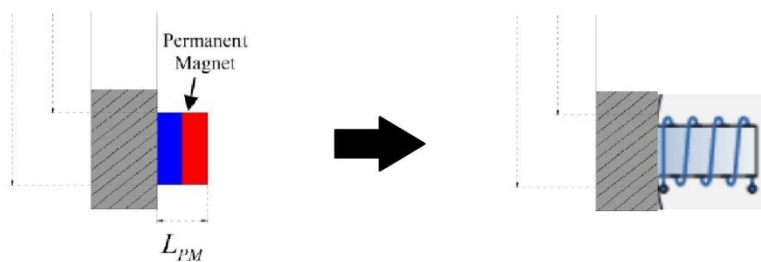
Siinkohal peab mainima seda, et viimasel joonisel on püsिमagnetid paigutatud otse rootori külge, mis omakorda „katab“ masina staatori osa. Joonis:



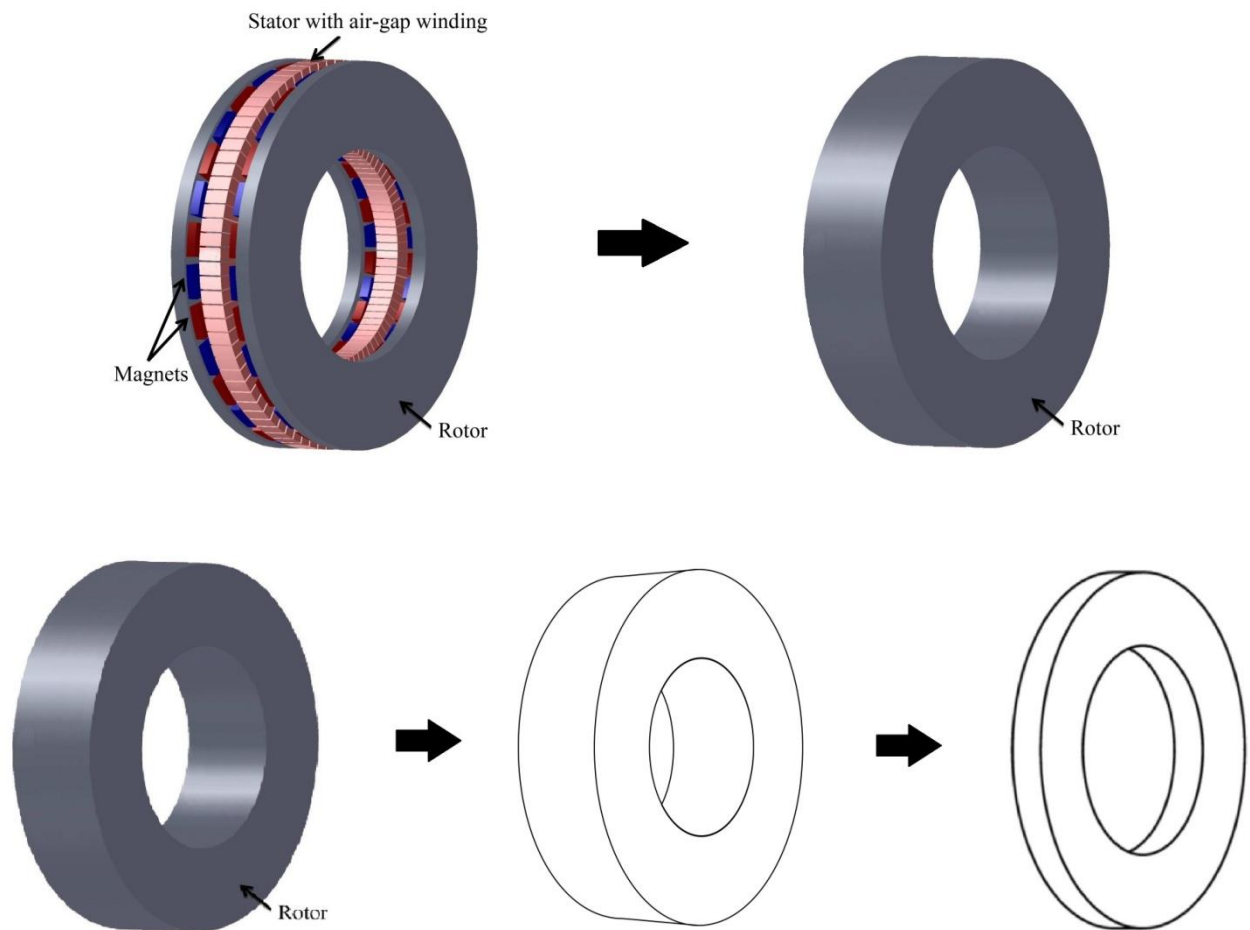
Püsिमagnetid tekitavad sellise magnetvälja, mis esineb rootori ja staatori vahelises ruumis. Joonis:



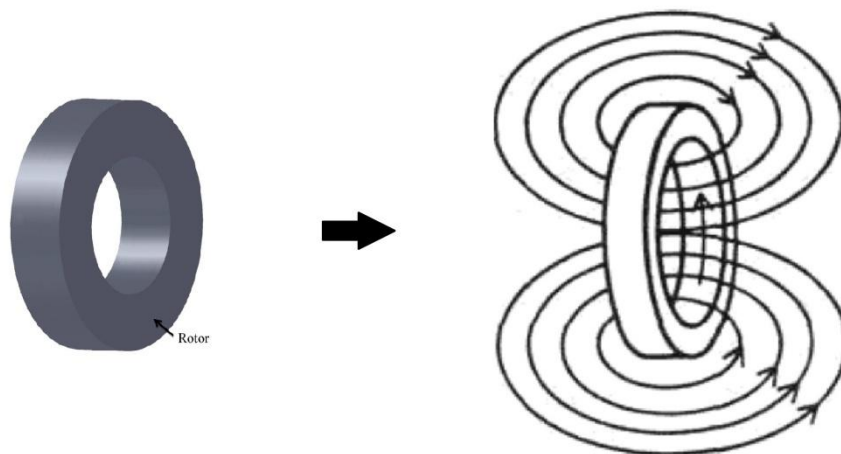
Kusjuures magnetvälja tekitamiseks ei pea kasutama ilmtingimata just püsिमagnetiteid, vaid selle asemel võib kasutada ka „pooli“, mis on elektrotehnikas laialt kasutatavad. Joonis:



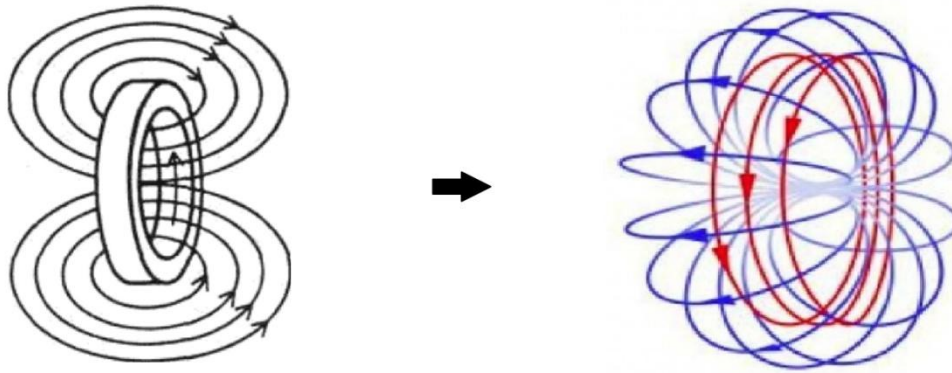
See tuleneb sellest, et püsिमagnetite magnetväli ja elektrivoolust tingitud magnetväli on oma füüsikaliselt olemuselt üks ja sama. Masina rootor peab „katma“ kogu masinat, et pöörleks masina kogu väline osa. Joonis:



Kogu metallist rootorit „katab“ omakorda õhuke „isoleerkiht“, mille peal on omakorda õhuke „metallkiht“. Kui see metallkiht oleks elektriliselt laetud positiivselt või negatiivselt, siis seega tekiks rõnga pöörlema hakkamise korral ümber kogu masina magnetväli. Joonis:







Sellisel juhul on meil tegemist „metallist rõngaga“, mis on elektriliselt laetud ( positiivselt või negatiivselt ). Kui rõngas ei liigu ega pöörle ruumis ning sellel puudub ka elektrivool, siis sellisel juhul ümbritseb metallrõngast ainult elektriväli.

Kui aga metallrõngas hakkab pöörlema ümber oma kujuteldava telje, siis laengukandjate liikumise tulemusena ehk elektrivoolu tekkimise korral tekib ümber metallrõnga ka magnetväli. Elektrivälja muutumine tekitab magnetvälja.

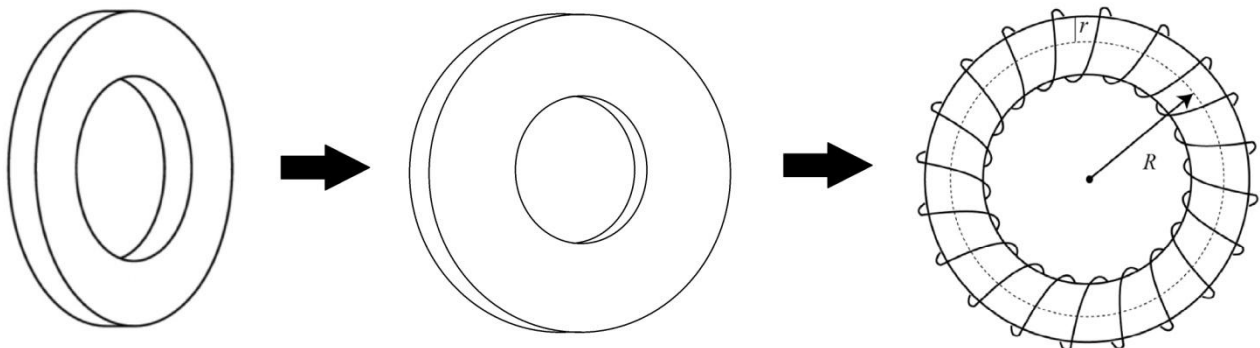
Kuna metallrõnga pöörlemisel ümber oma kujuteldava telje liiguvad kõik rõnga punktid ühekorraga, siis sellisel juhul tekib magnetväli ümber metallrõnga kõikjal ühekorraga. See on väga väga oluline tingimus.

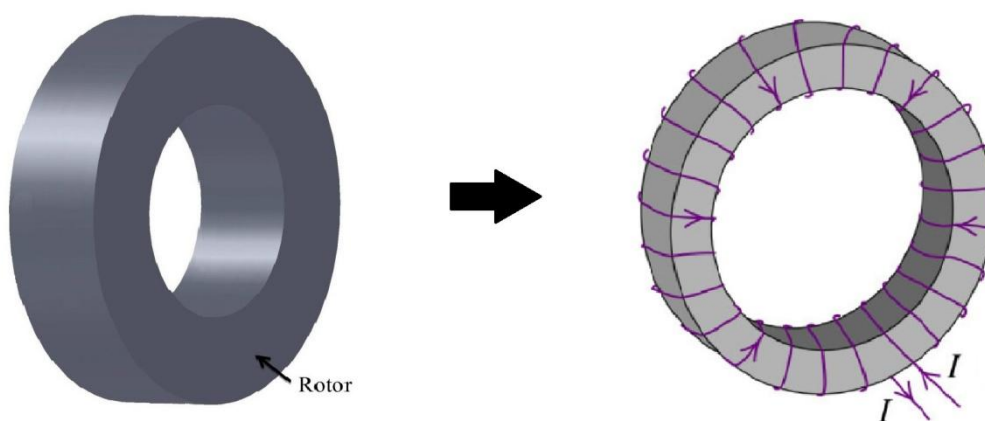
Magnetväli peab tekkima ümber metallrõnga kõikjal korraga, mitte nii, et magnetväli tekib ühes rõnga otsas enne ja teises rõnga otsas veidi hiljem. Seetõttu peabki rõngas pöörlema. See on väga väga oluline tingimus.

Samm-mootorit energiaga toitev süsteem peaks olema „seotud“ ka rõngasmasina kõige välimise kihiga ehk masina rootorit katva metallkihiga, kuna see peab olema elektriliselt laetud. See tähendab seda, et rõngasmasinat ümbritsev metallkiht saaks oma elektrilaengud samm-mootori toitesüsteemist. Samm-mootori toitesüsteemist kirjeldame edaspidi pikemalt.

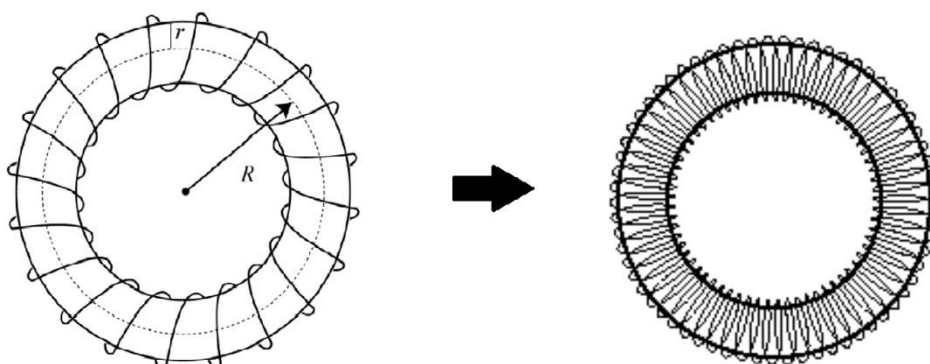
Rõngasmasina väli tekib seega kolmes etapis: alguses väljad üldse puuduvad, siis tekib elektriväli ja lõpuks tekib magnetväli.

Teine võimalus oleks ka see, et metallkihist, mis katab kogu rõngasmasinat, lastakse läbi „sinusoidaalne“ elektrivool. Sellisel juhul on rõngasmasin nagu üks hiigelsuur „toroid“. Joonis:

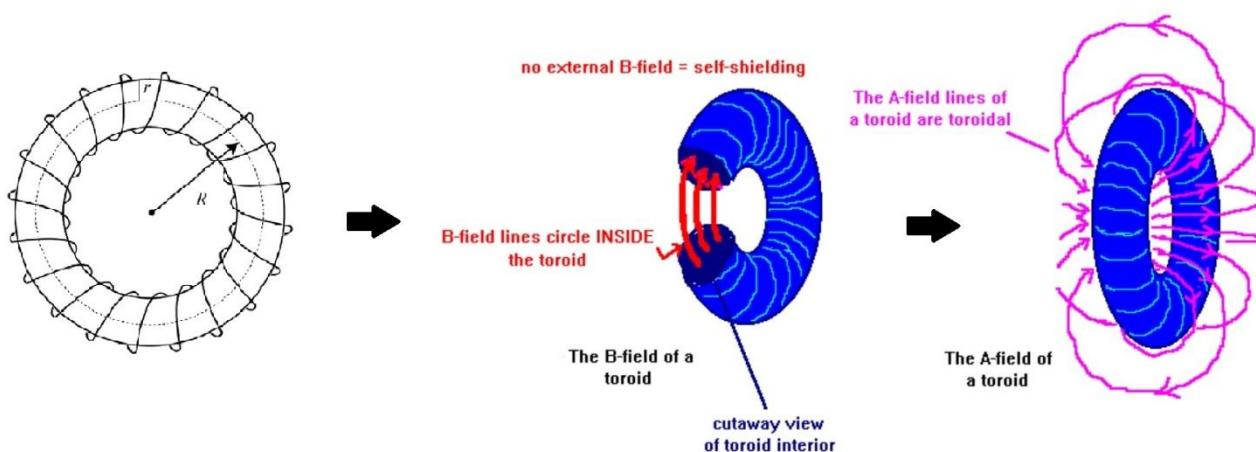




Kuna kõikide keerdude magnetväljad peavad liituma ühtseks „resultant(magnet)väljaks“, siis seega peavad toroidi keerud asetsema üksteise suhtes võimalikult tihedalt. Joonis:

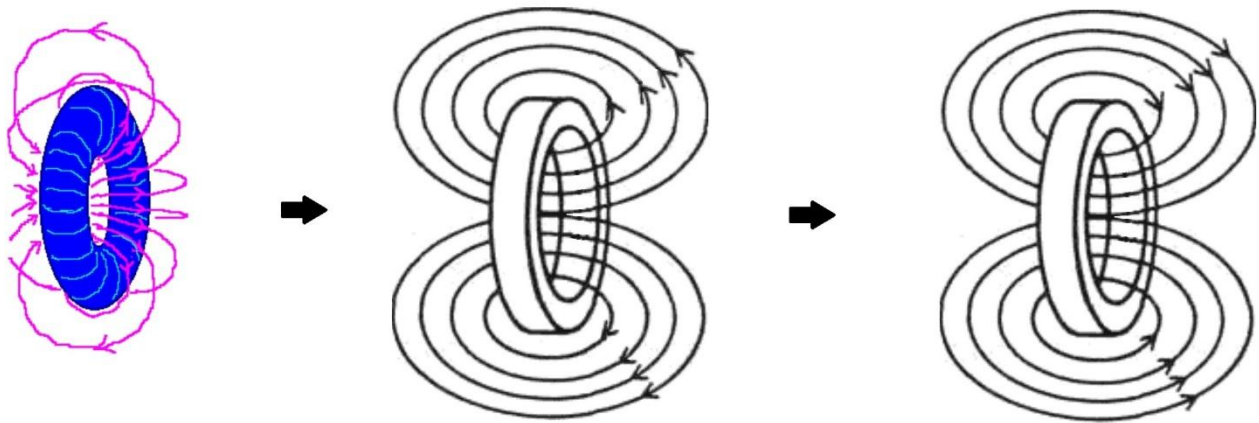


Toroidi omapärase kuju tõttu on toroidil olemas kaks magnetvälja: sisemine ja välimine magnetväli. Joonis:

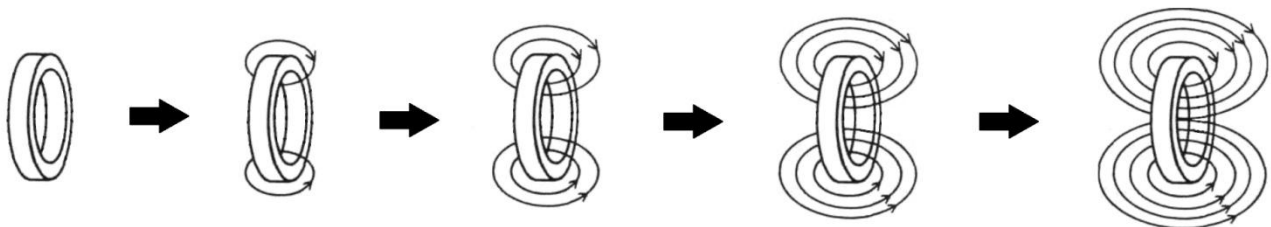


Antud juhul ei ole tegelikult üldse oluline rõngasmasina magnetvälja suund ruumis. Joonis:

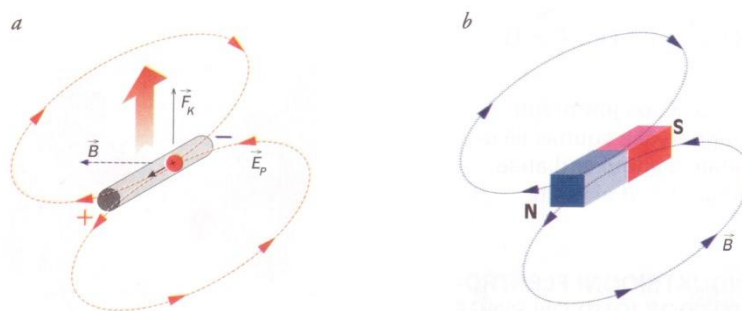




Kui „elektrivoolu ajal“ hakkab rõngasmasin ruumis pöörlema ehk liikuma, siis selle tulemusena tekiks ümber masina „muutuv magnetväli“. Sellisel juhul tekib alguses elektrivoolust tingitud magnetväli ja pärast seda masina pöörlemisest tingitud muutuv magnetväli. Magnetvälja muutus tekitab (pööriselektrivälja ja muutumise kiirus on täpselt võrdne valguse kiirusega  $c$  vaakumis. Joonis:

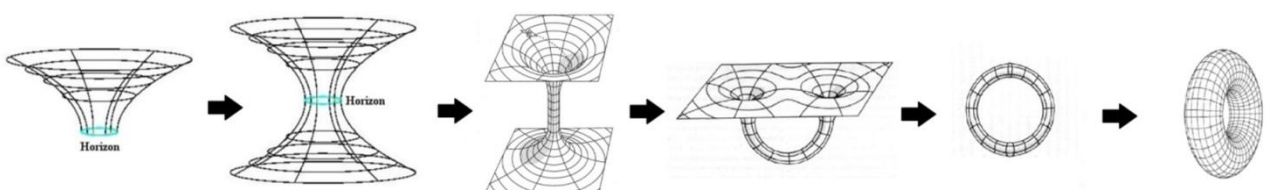


Näiteks järgmisel joonisel on esitatud liikuva juhtme pööriselektriväli (a) ja püsिमagneti magnetväli (b):

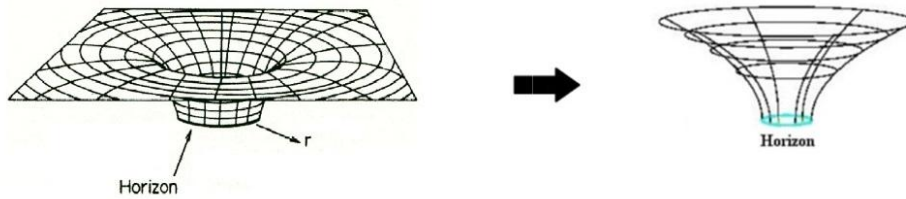


Näiteks kui püsिमagnet vaateleja suhtes liiguks, siis muutub magnetväli vaateleja asukohas ning vaateleja registreerib elektrivälja olemasolu. Magnetvälja muutumine tekitab elektrivälja.

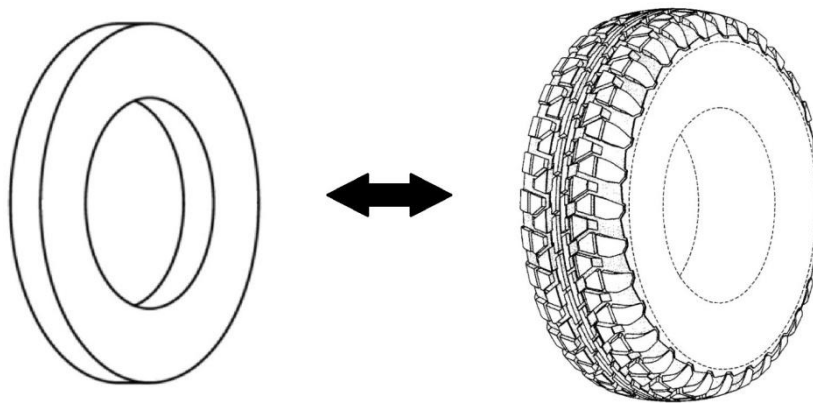
Välise magnetvälja muutumise kiiruse tõttu, mis võrdub täpselt valguse kiirusega  $c$ , tekib ümber metallrõnga ajas rändamist võimaldav rõngakujuline aegruumi tunnel. Joonis:



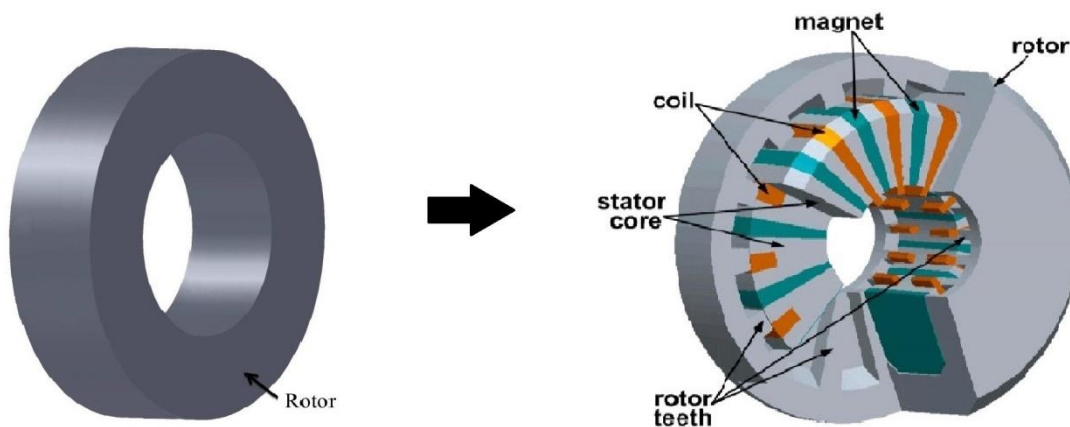
Eelneva aegruumi tunneli „visuaalne tuletamine“ sai alguse musta augu sündmuste horisondi kujutamisest:



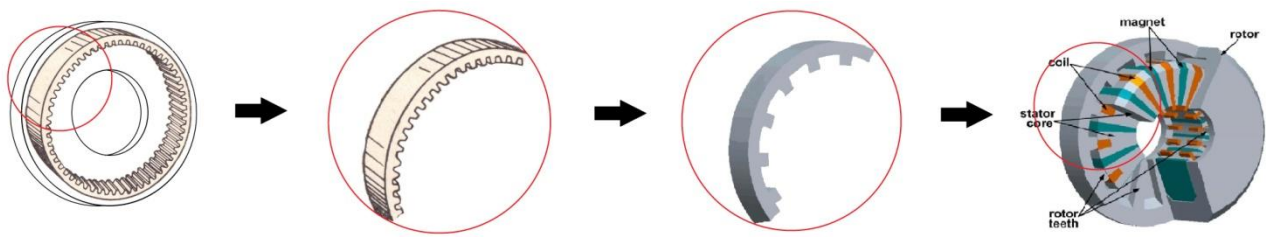
Kui masin hakkab pöörlema, siis järelikult hakkab see mööda maad edasi liikuma nagu üks hiigelsuur ratas. Joonis:



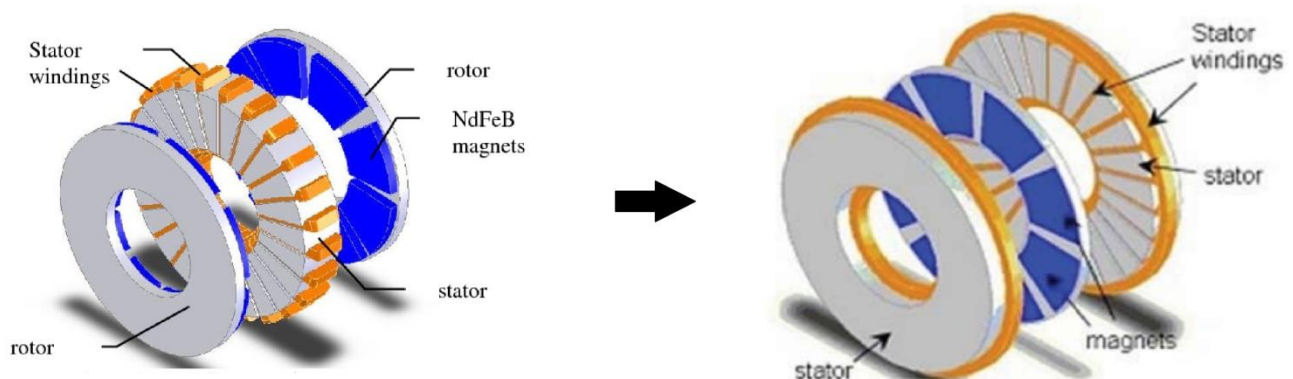
Kuna pöörleb masina kogu väline osa, siis seega kaasneb rootori pöörlemisega ka staatori pöörlemine ehk kogu masina terviklik pöörlemine. Rootor ja staator moodustavad masina „karkassi“ ehk „raami“, mille najal seisab masin maapinnal püsti. See tähendab, et masina rootor ja staator oleksid omavahel nagu „kokku sulatatud“. Joonis:



Viimases joonises on näha „rootori hambaid“ („rotor teeth“), mis näitab „mehaanilise ülekande süsteemi“ ja samm-mootori üksteise sulandumist/integreerumist. Joonis:



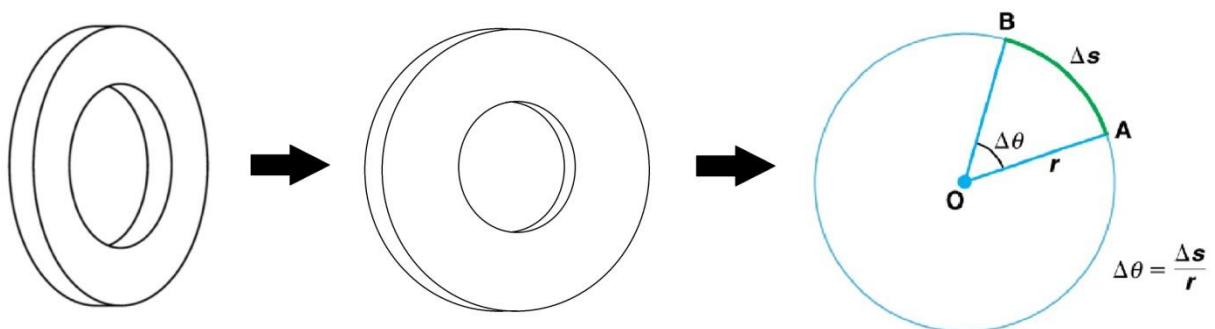
Teise võimalusena võib pöörelda ainult rõngasmasina „sisemine osa“, mille korral jääb masina kogu väline osa üldse liikumatuks. See tähendab seda, et kogu masina välisosa moodustaks staator, kuid sisemise osa moodustaks rootor. Rotoor on masina ainus liikuv osa. Sellisel juhul ei liigu rõngasmasin enam mööda maad edasi nagu ratas, vaid jääb ühele kohale paigale. Joonis:



Kui rõngasmasina väline osa ehk staator on elektriliselt laetud positiivselt või negatiivselt, siis masina rootori pöörlema hakkamise korral tekib ümber rõngasmasina magnetväli. See tuleneb sellest, et rootor liigub staatori suhtes, millest omakorda tuleneb staatori liikumine rootori suhtes. Magnetvälja tekkimisega peab arvestama relatiivsusega ehk suhtelisusega. Näiteks kui vaatleja registreerib paigalseisva laengu elektrivälja, siis liikuv laeng tekitab vaatleja jaoks ka magnetvälja, kusjuures vaatleja ise ei pea olema elektriliselt laetud.

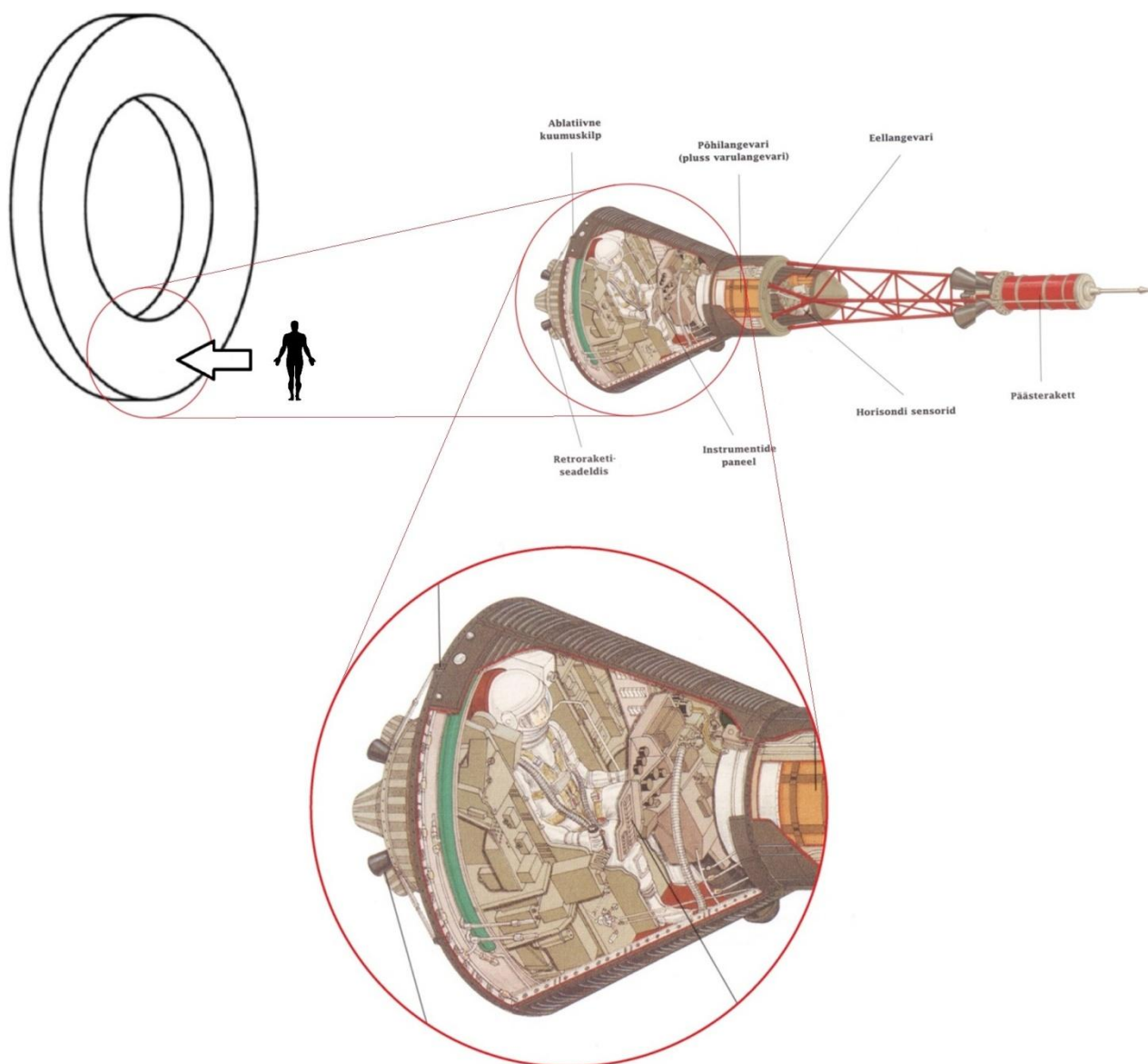
Samasugune loogika kehtiks ka siis, kui rõngasmasina välist osa ehk staatorit läbiks elektrivool. Masina rootori pöörlema hakkamise korral elektrivoolu ajal tekiks ümber rõngasmasina muutuv magnetväli.

Magnetvälja tekkimiseks ümber masina piisab tegelikult ka väga väikesest masina pöördenurgast  $\Delta\theta$ . See tähendab, et rõngasmasin ei peagi magnetvälja tekitamiseks tegema „täispöördeid“. Joonis:



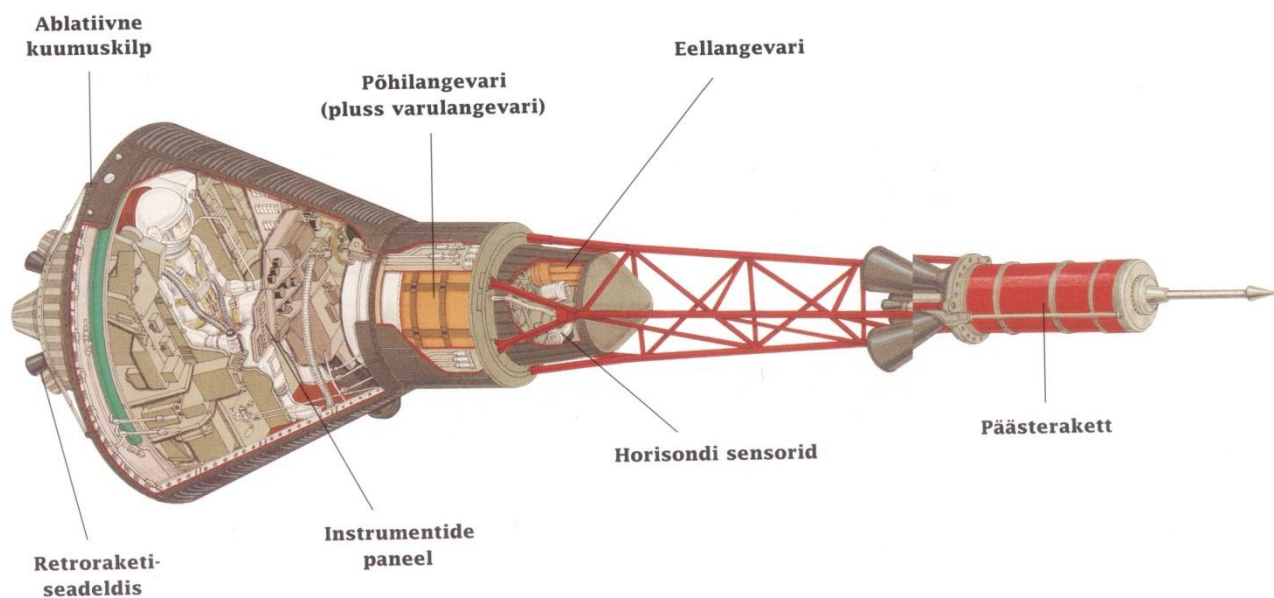
Masin peab olema nii suur, et inimene ( s.t. ajarändur ) mahuks masina sisse ära. Seetõttu sarnaneks

masina sees olev inimese „salong“ näiteks Mercury kapsli sees oleva inimese salongiga. Joonis:

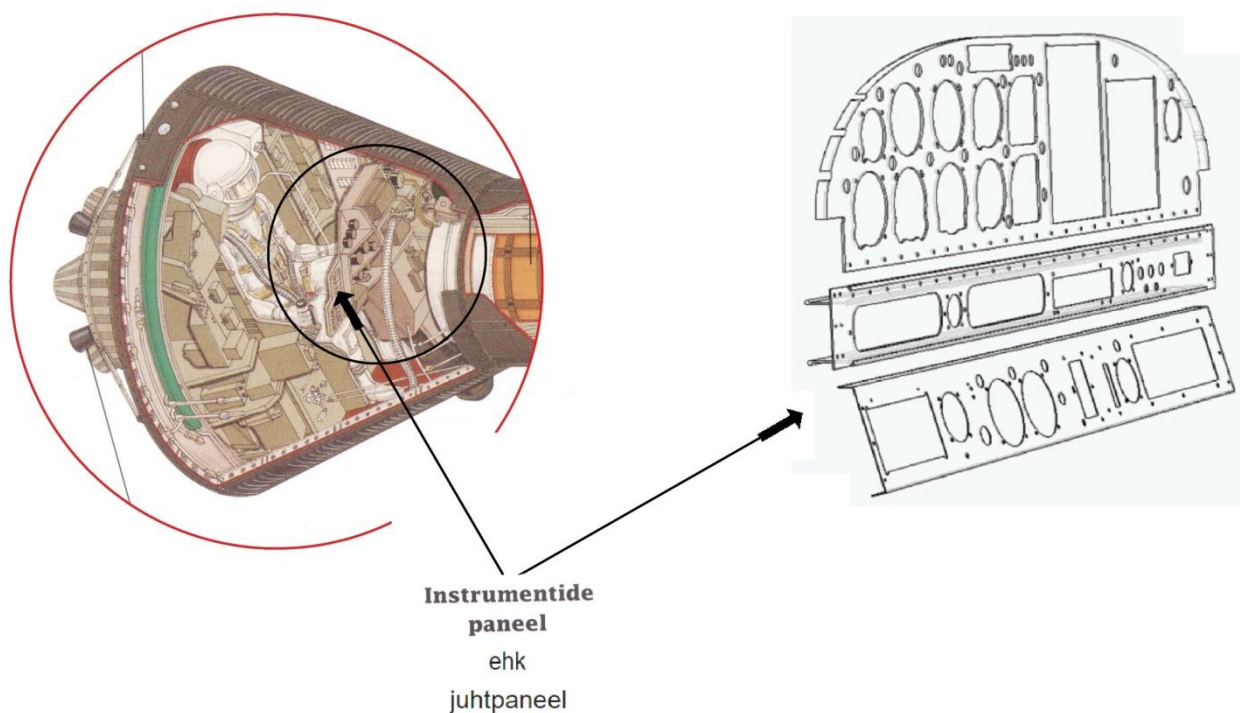


Mercury kapslit nimega Freedom 7 kandis rakett Redstone, mis lennutas USA astronauti Alan Shepardi kosmosesse 5. mail 1961. aastal. See toimus vahetult pärast NSVL astronauti Juri Gagarini kosmosesõitu. Joonis:

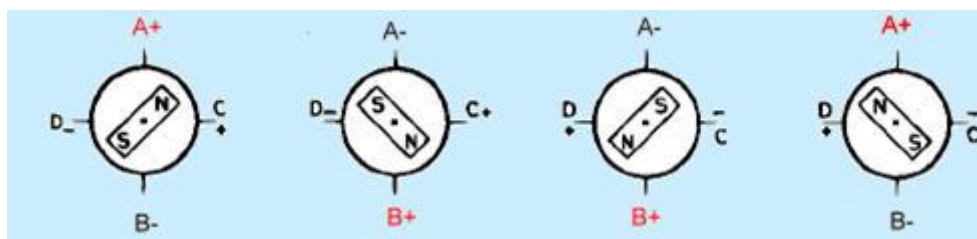




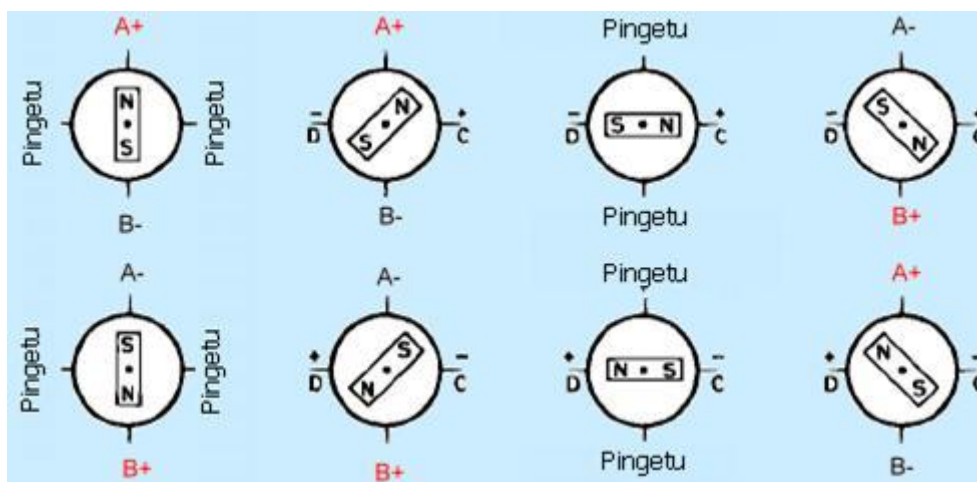
Inimese salongis asub instrumentide paneel ehk juhtpaneel, mille kaudu juhitakse masina tööd. Joonis:



Ühefaasilise talitluse korral pingestatakse ainult ühte mähist korraga. Niimoodi on samm-mootorit kõige lihtsam juhtida, kuid momendi väiksust ei saa saavutada. Näiteks kahefaasilise kahe hambaga mootori korral on rootori võimalikud asendid  $0^{\circ}$ ,  $90^{\circ}$ ,  $180^{\circ}$  ja  $270^{\circ}$ . Kahefaasilises täissammtalitluses hakkab mootor tööle siis, kui pingestatakse samaaegselt mõlemad mähised. Pöördemoment tuleb sellisel juhul suurem. Joonis:



Asendid tulevad vastavalt  $45^0$ ,  $135^0$ ,  $225^0$  ja  $315^0$ , mis tähendab seda, et need osutuvad täpselt ühefaasilise talitluse positsiooninurkade vahele. Poolsammतालitluse korral pingestatakse vaheldumisi ühte või mõlemat mähist, mille korral on võimalik saavutada juba kaheksa asendit. Joonis:



Pöördmagnetvälja ja sellest tuleneva pöördliikumine saavutatakse siis, kui samm-mootori mõlemat mähist toidetakse vastavalt siinus-koosinus-signaaliga. Mida rohkem on ühe pöörde kohta sammude arv, seda suurem on mootori efektiivsus. Sellisel juhul muutub energiatarve ühtlasemaks, sammukao oht muutub väiksemaks ja mootori töö on palju sujuvam.

Mikrosammतालitluse korral toidetakse samm-mootori mähiseid diskreetsete impulssidega, mis järgivad siinus-koosinus seaduspärasust. Sellisel juhul on mootori liikumine palju sujuvam, kuid väiksema täpsuse tõttu on vaja kasutada tagasisideahelaid.

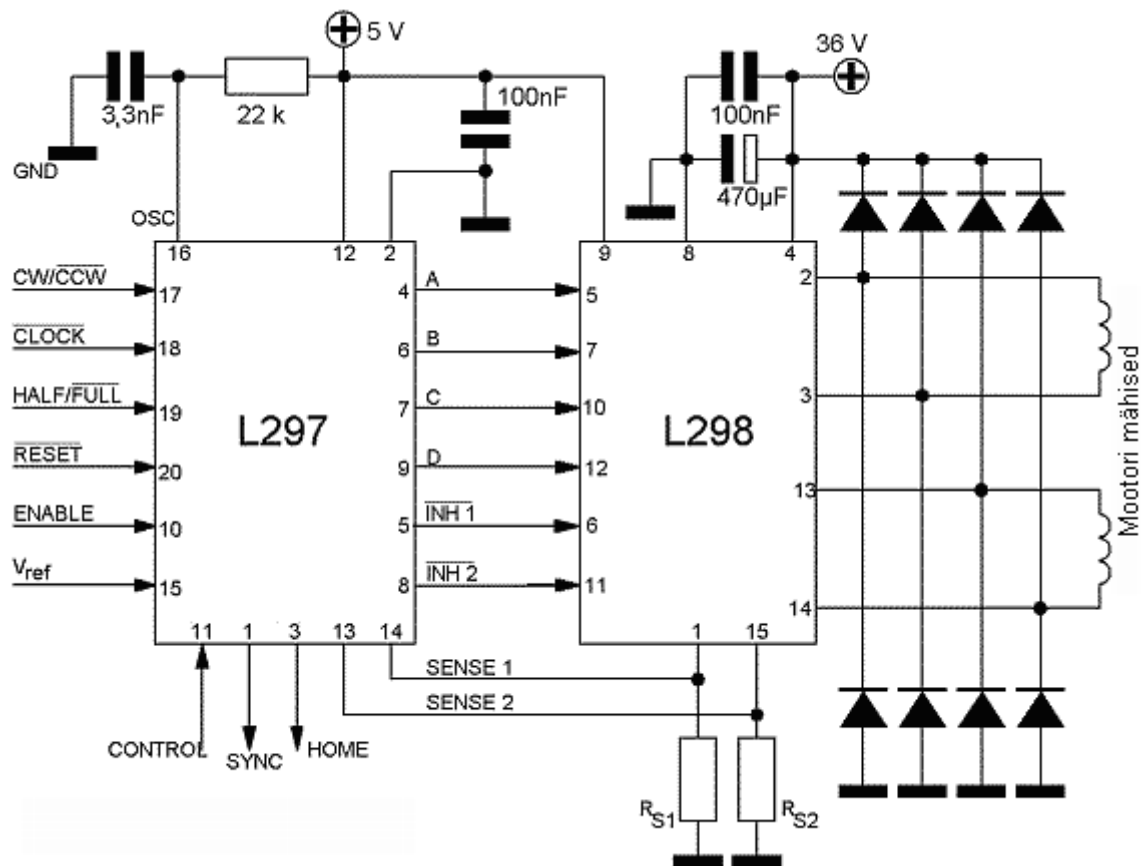
Elektriimpulss on elektripinge või elektrivool, mis on läviväärtusest lühiajaliselt kõrvale kaldunud. Impulssid võivad olla näiteks ristküliku-, trapetsi-, saesamba- või kellukakujulised ning ühe- ja kahepolaarsed.

Impulsside arvu lugemise järgi saab samm-ajam pidada arvestust läbitud nurga kohta. Selle käigus saadakse asendi juurdekasv ehk inkrementi. Kui määratleda absoluutasendit, siis selleks nullitakse loendur omakorda algpositsiooni määratlusega. Selleks kasutatakse piirlüliteid.

Lõpplüliti on piirlüliti ehk teekonnalüliti, milleks on binaarväljundiga asendiandur. Kui teatud liikuv objekt, milleks võib olla näiteks töödeldav ese või masinaosa, saavutab sellise positsiooni, mis on kindlaks määratud, siis väljastab asendiandur elektrilise, hüdrautilise või pneumaatilise signaali. Piirlülid on mõeldud tuvastama masina mehaanilise liikumise erinevaid etappe, milleks võivad olla teatud vahemaade läbimine, teatud punktis olev asend või ühesuunalise liikumise lõppemine. Piirlülid võivad olla lineaarse liikumisega või pöördliikumise ja nendeks võivad olla lihtsad elektromehaanilised lülid või kontaktivabad andurid.

Mikrokontrolleril põhinev taktgeneraator ja lõppaste moodustavad samm-ajami juhtimisosa. Kui

pingestada neli mähiseotsa, siis selleks väljastab mikrokontroller 4-kohalise bitijada. Masina rootor pöördub ühe sammu võrra iga bitijada korral. Seetõttu saab pidevat pöörlemist teostada tarkvaraliselt programmitsükliga, mille korral on sammude arv fikseeritud. Samm-mootori asendi saab määrata suhteliselt suure täpsusega. Näiteks ratta ümbermõõdu järgi saab leida selle, et kui palju on vaja samme 1cm läbimiseks. Sellise töö teeb ära alamprogramm, milles kasutatakse sisendsuurusena teepikkust, millest omakorda saab välja arvutada sammude hulga. Lõpuks edastab alamprogramm sammude hulga portide kaudu tsükлина lõppastmele. Skeem-joonis:

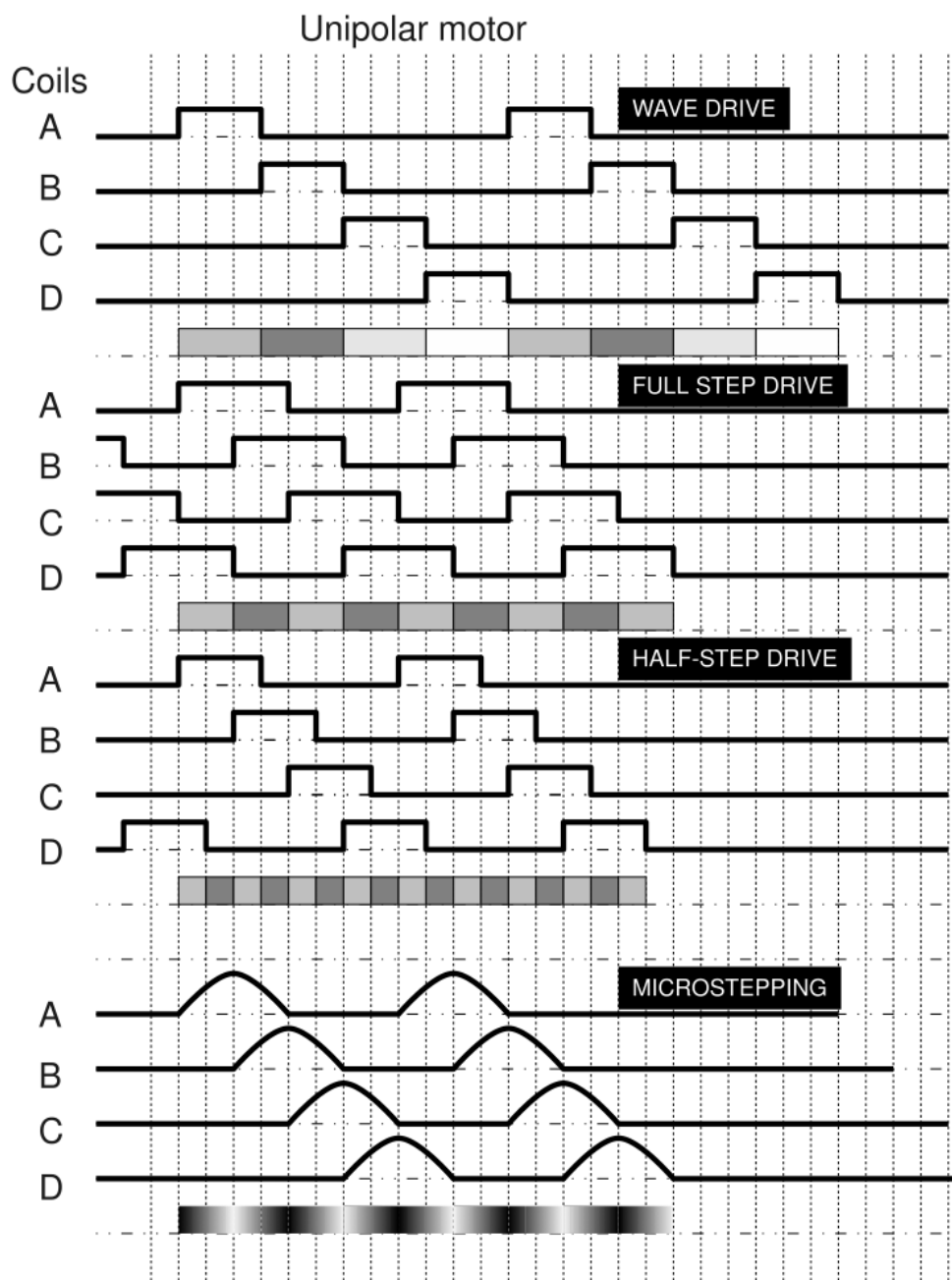


Mikrokontrolleri väljundporti või arvuti paralleelpordi võib ühendada lõppastme sisendklemmid. Tegelikult on vaja ainult kolme pordi klemmi, et käitada samm-mootorit soovitud suunas ja soovitud kiirusega. Skeem-joonis:

Tähis	Selgitus
CW/CCW	Annab ette mootori pöörlemissuuna (CW = ClockWise = kellaosuti liikumise suund, CCW = CounterClockWise = kellaosuti liikumisele vastu).
Clock	Lühikese impulsi andmisel liigub mootor ühe sammu võrra. Juhtimistsüklis pingestatakse ainult seda klemmi.
Half/Full	Vaikimisi on see klemm maandatud. Andes talle pinge +5V, hakkab mootor tööle poolsammtalitluses, st pöörde kohta tuleb kaks korda rohkem samme.
Enable	Selle klemmi maandamisel lülitub mootori toitepinge välja.
V <sub>ref</sub>	Pingega V <sub>ref</sub> (0...3 V) määratakse mootori suurim vool. $V_{ref} = I_m \cdot R_s$ Nt kui mootori suurim vool I <sub>m</sub> = 0,5A ja valitud R <sub>s</sub> = 1Ω, tuleb klemmile V <sub>ref</sub> anda pinge 0,5V. Lihtsaimalt on see teostatav potentsiomeetri abil.
RESET	Lähtestab samm-mootori. Mootori töötamiseks peab tal pidevalt olema +5 V pinge.
Control	Lõiketalitluse viisi muutmiseks. Aktiivse sisendi puhul kahaneb vool aeglaselt (faasilõige), kiireks vähendamiseks eemaldatakse tüürpinge.
Sync, Home	Need klemmid jäävad tavaliselt ühendamata.

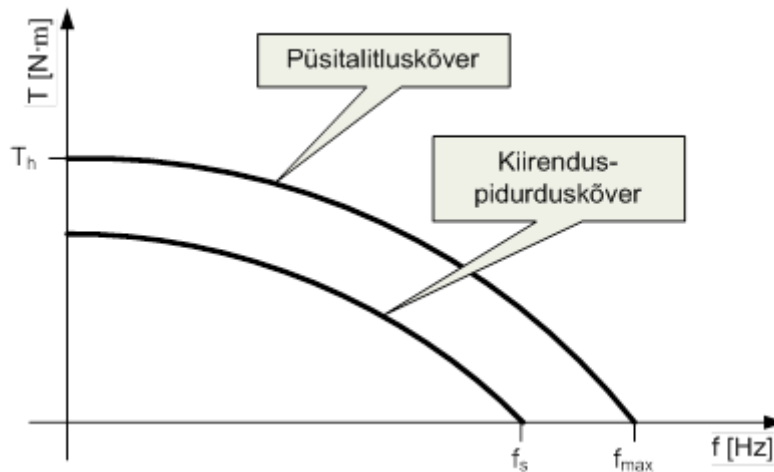
Pooli läbiv elektrivool neljafaasilise unipolaarse samm-mootori korral, joonis:





Moment, mida arendab samm-mootor, on sõltuvuses lülitussagedusest, mis tähendab omakorda ka seda, et moment sõltub ka mootori pöörlemiskiirusest. Nimimomenti, mis on näidatud tüübisildil, arendavad mootorid ainult väga väikestel kiirustel. Mida suurem on pöörlemiskiirus, seda väiksem on moment. Sellisel juhul võib ajamil teatud kiiruse korral tekkida „vääratustalitlus“, mille iseloomu tunnuseks on sünkronismist väljalangemine ehk sammukadu. Mähiste induktiivsus on enamasti sellise „momendikarakteristiku“ põhjuseks. Nimivoolu ja nimimomenti ei saa tekitada väga suurte pöörlemiskiiruste korral, kuna induktiivsused tekitavad vastuelektromotoorjõu mootori mähiste pideva ümberlülitamise tõttu. Kuid samm-mootorid saavad oma toite enamasti siiski reguleeritavatest vooluallikatest, mis võimaldavad mootori suurema pöörlemiskiiruse korral püsivat elektrivoolu ja momenti. Näiteks 12 V nimipingega samm-mootori klemmipinge võib tõusta voolu hoidmise korral konstantsena 30 – 40 V juurde.

Samm-mootori koormamisel kehtivad teatud piirangud, mida tuleb järgida. Joonis:



Esiteks, seisvat ehk staatiliselt pingestatud mootorit saab koormata hoidemomendini  $T_h$ , see tähendab, et mootori rootor veel ei pöörduks.

Teiseks, kõige suurem sammusagedus on „käivitus-peatumissagedus“  $f_s$ , mille korral käivitub samm-mootor, mis ei ole koormatud, ilma sammukaota.

Kolmandaks, mootori kiirust piirab maksimaalne tühijooksusagedus  $f_{\max}$ .

Neljandaks, vastav kõver piirab mootori „kiirendus- ja pidurduspiirkonda“ ning „püsitalitluspiirkonda“, milles ei esine sammukao ohtu.

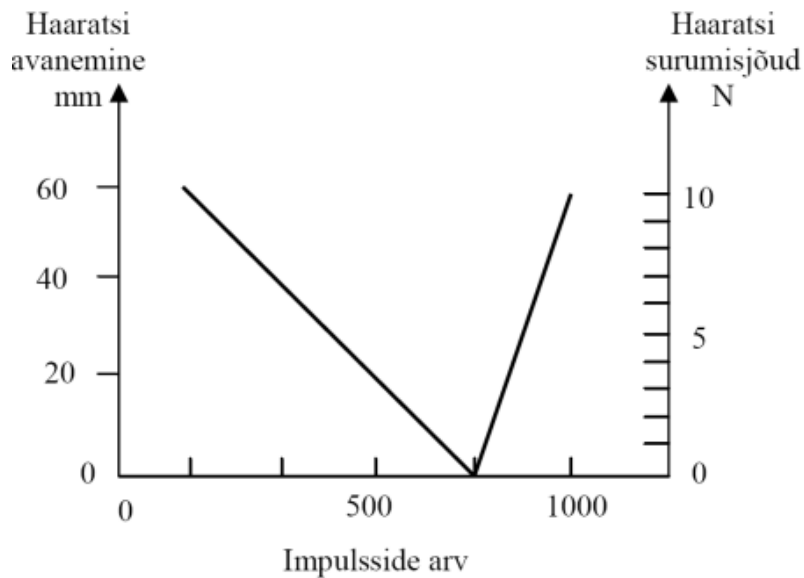
Kui hübriidrootoriga samm-mootori staator koosneks kahest poolusest ja rootor sajust hambast, siis sellise samm-mootori sammunurk  $\alpha$  oleks täissammtalitluses järgmine:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{N_{ph} * m * Z} = \frac{360^\circ}{2 * 2 * 100} = 0,9^\circ$$

Kui mootor pöörleks kiirusega  $n = 500 \text{ min}^{-1}$ , siis selleks vajalik taktsagedus  $f$  oleks väärtusega:

$$f = \frac{n * 360^\circ}{\alpha * 60} = \frac{500 * 360^\circ}{0,9 * 60} = 3,33 \text{ kHz}$$

Üheks heaks näiteks samm-mootori kasutamisest on tööstusrobot, mille haaratsit juhitaksegi samm-mootoriga ja mille kogu süsteemi tunnusjoon on esitatud järgmisel joonisel:



Avatud haaratsi maksimaalne laius on 60 mm ja haaratava objekti laius on 35 mm. Leiame mootorile antava impulsside arvu, mis võimaldab selle objekti sulgemist haaratsi vahel jõuga 6 N, kui haaratsite algpositsioon on 53 mm. Joonise järgi lõikub graafik x-telge impulsside arvu 750 juures ja tuhande impulsi korral saavutab haarats maksimaalse jõu ehk 10 N. Laiusega 60 mm avatud haarats haarab 35 mm laiusega objekti, kui mootorile antakse 225 impulssi:

$$n_{kinni} = (53 - 35) * \frac{750}{60} = 225 \text{ impulssi}$$

6 N haaramisjõu korral on vaja 150 impulssi:

$$n_{jõud} = 6 * \frac{1000 - 750}{10} = 150 \text{ impulssi}$$

Seetõttu tuleb impulsside koguarvuks 375:

$$n_{\Sigma} = n_{kinni} + n_{jõud} = 225 + 150 = 375$$

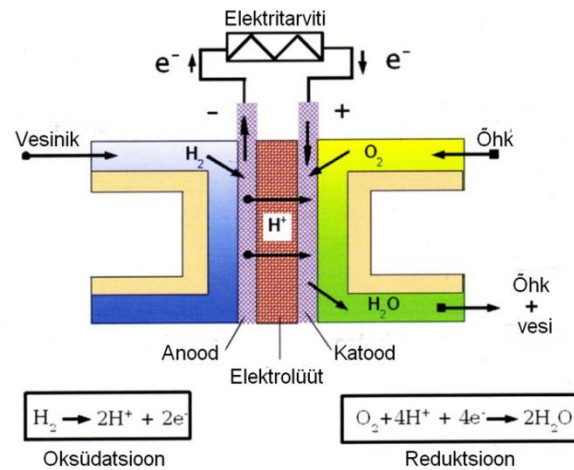
Samm-mootori kui magnetmootori toitesüsteem sarnaneb elektrimootori toitesüsteemiga elektriautodes. Elektrienergia ülekande elektriautos, joonis:

Elektriauto skeemid Peugeot iOni näitel. Sama põhimõtet kasutavad ka Citroën C1 Ev'ie ja Eestisse ostetavad Mitsubishi iMIEVid.

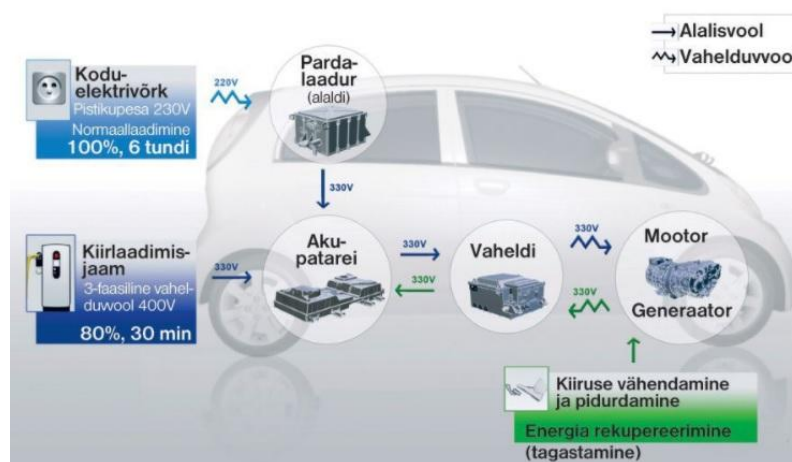
1. mootor + ülekande
2. akupatarei
3. vaheldi
4. alaldi



Elektriautodes kasutatakse energiamuundurit või energiasalvestit. Näiteks elektrienergiat toodab vesinikust Honda FCX ja seda autos kohapeal. Vesiniku, mis saadakse surupaagist, ja õhust võetud hapniku oksüdatsiooni keemilist energiat muudab kütuseelement otse elektrienergiaks ja soojuseks. Selle käigus tekib heide veeauru näol. Näiteks polümeerelektrolüüdiga kütuseelemendi ehituse ja talitluse skeem-joonis on järgmine:



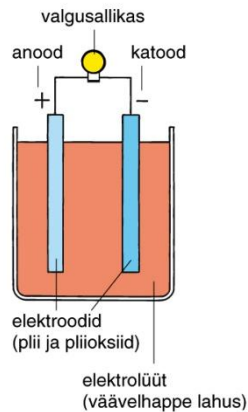
Keemilise energia muutmise kogukasutegur elektrienergiaks ja soojuseks on 80 – 90 %. Elekter moodustab kaks kolmandikku saadud energiast. Kogu eespool kirjeldatud protsess toimub „mehaanilise vahelülita“ ja vesinikurikast gaasi või vedelikku on vesiniku kõrval samuti võimalik kasutada. Elektrienergia ülekannet elektriautos on kujutatud joonisel:



Elektriautol on patareid, mis koosnevad kütuseelementidest. Elektriauto elektrimootorit toidavad väga paljud elemendid. Vajaliku pinge saamiseks lülitatakse hulk elemente omavahel jadamisi, kuid suurema volutugevuse saamiseks aga rööbiti.

Elektrolüüsi ja kütuseelemendi töö on omavahel vastandlikud. Näiteks vesinikku toodetakse paiksete seadmetega elektrolüüsi teel veest ja elektrist. Kütuseelemendi üks kallimaid koostisosasid on platinast katalüsaator, kuid kaasaegsematel kütuseelementidel on selle metalli vajadus kümneid kordi väiksem kui vanematel kütuseelementidel.

Kütuseelementide asemel kasutatakse ka akusid ehk akumulaatoreid, milleks võivad olla ühe massiühiku kohta suhteliselt väikese energiamahutuvusega „pliiakud“. Samasuguse massi juures mahutavad energiat palju rohkem liitiumioon akupatareid, kuid need on pliiakudest kallimad. Näiteks Tesla Roadsteri auto akupatareis on üle 6000 elemendi. Elektriauto kõige kallimaks ja kõige lühiajalisemaks sõlmeks peetaksegi just akut. Näiteks elektriakumulaatori ( pliiakumulaatori ) töö põhimõte on kujutatud joonisel:



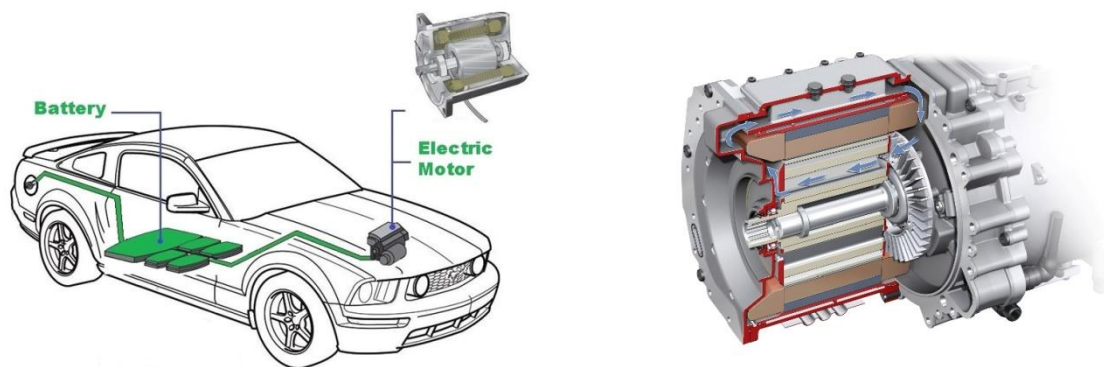
Liitiumiioonakudest kolm korda kergemad on näiteks tsink-õhk-akud ja seda samasuguse mahtuvuse juures.

Akusid võib laadida ka kodu elektrivõrgust, mille korral paikneb alaldi autol. Selline laadimine võtab kaua aega, kuna koduvõrk ja pardalaadija on väikese võimsusega. Kuid kiirlaadimised võimaldavad umbes poole tunniga laadida 80 % aku mahtuvusest. Pliiakudele see aga ei sobi.

Sagedusmuundur on üheks teiseks oluliseks sõlmeks elektriauto juures. Kolmefaasiliseks vahelduvvooluks muudetakse alalisvool, mis tuleb akumulaatorist või kütuseelemendist. Sagedusmuundurid muudavad alalisvoolu soovitud sagedusega vahelduvvooluks. Voolu muundamine tekitabki mootoris pöörlevat liikumist ja suurt pöördemomenti, kusjuures mootori kiirus sõltub muundatud voolu sagedusest. Näiteks nullsagedus võrdub paigal olekuga, mida suurendatakse järk-järgult.

Muundurites kasutatakse võimsustransistore. Elektroonikaseadmete abil juhitakse muunduri ja läbi selle ka elektrimootori tööd.

Elektriauto elektrimootoriks on tavaliselt kolmefaasiline püsivmagnetitega sünkroonmootor või asünkroonmootor, mille liikuv osa on ainult rootor. Rootori võll toetub kahele kuullaagrile ja kasutegur on umbes 80 – 90 %. Joonis:



Kui aga elektriauto pidurdub, siis mootor muutub generaatoriks ja auto kineetiline energia muundub elektrienergiaks, mis sobib akude laadimiseks. See tähendab seda, et auto liikumisenergia ei muutu pidurdumise korral pidurites soojuseks, mis seejärel õhku haihtuks. Kõik läheb hoopis akude elektrienergiaks.

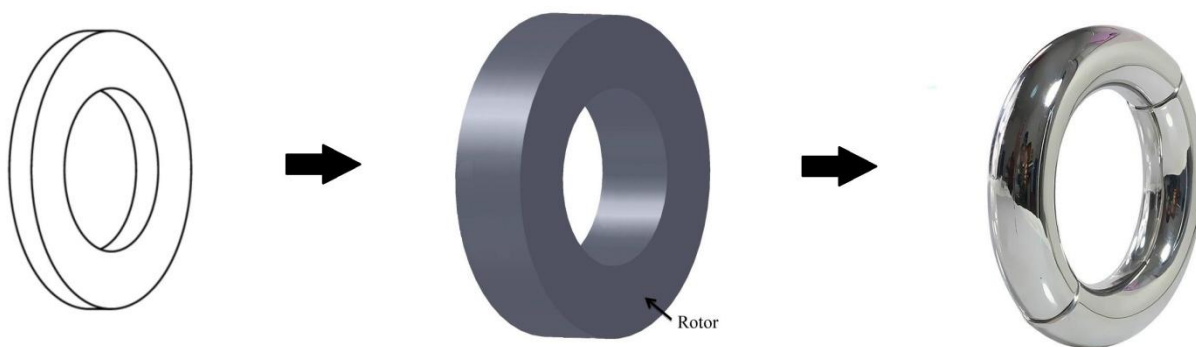
Elektrigeneraatori korral muundab elektrimasin kui energiamuundur mehaanilist energiat elektrienergiaks. Elektrimootori korral muudetakse elektrienergiat mehaaniliseks energiaks ja elektrimasinmuunduri korral muudetakse elektrienergiat mehaanilise energia kaudu tagasi elektrienergiaks, millel on teistsugused parameetrid. Kõik elektrimasinad töötavad sellistel põhimõtetel, mida me tunneme elektromagnetilise

induktsiooni nähtusena ja Lorentzi jõuna.

Kuna vaheldi, mis töötab transistoritel, saab muuta alaldiks, siis seega saab alaldada sünkroongeneraatori vahelduvvoolu alalisvooluks, mis sobiks akude laadimiseks. Akude laadimisel või töötamisel eralduvat soojust saab omakorda kasutada näiteks salongi kütteks. Kuid auto, mis kasutab kütuseelementi, salvestab pidurdusenergiat eraldi elektrienergiasalvestisse, milleks võib olla näiteks superkondensaator.

Transistoreid kasutatakse elektriahelate lülitamiseks ja elektrisignaaside võimendamiseks. Need on kolme väljaviiguga pooljuhtseadised ehk trioodid. Transistori abil on võimalik juhtida ehk tüürida ühe elektrisignaali ( sisendsignaali ) kaudu teist elektrisignaali ( väljundsignaali ). Elektroonikas, info- ja sidetehnikas ja jõuelektroonikas ongi transistor kõige olulisemaks elektroonikalülituste koostisosaks. Transistorid kui seadised võivad olla integraallülituste ehk mikrokiipide sees, kuid ka nendest eraldi olevatena. Pooljuht räni on transistorite väga levinumaks alusmaterjaliks, kuid teisi pooljuhtmaterjale ( näiteks galliumarseniidi ) kasutatakse kõrgsagedusseadiste jaoks. Jõutransistorites kasutatakse samuti räni, kuid ka selliseid pooljuhtmaterjale, millel on suuremad sulamistemperatuurid.

Pöörleva rõngasmasina lõplik kuju ( s.t. lõplik disain ) võiks olla ümar. Joonis:



Kuna samm-mootorid ei saa liigutada väga suuri koormiseid, siis seega peab rõngasmasina kaal olema parajasti nii suur, et samm-mootor saaks seda liigutada.

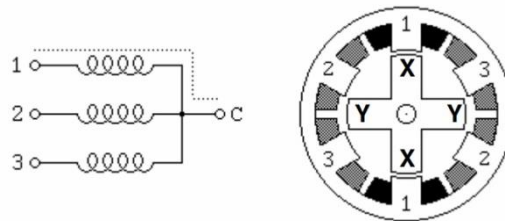
#### **2.2.9.5 LISA: Samm-mootorid**

Samm-mootoriga töötav masin muudab elektrilised impulsid mehaanilisteks liikumisteks. Mootor pöörleb kindla sammu pikkuse võrra iga elektrilise impulssi tõttu, mis mootoris jõuab. See võimaldab väga suurt täpsust. Mootor pöörleb samm haaval ja selle peatumist põhjustab voolu katkemine. Seetõttu ei ole mootori peatamiseks vaja kasutada pidureid. Samm-mootorite

tööpõhimõtte, jooniste ja juhtimise kirjeldused on antud juhul võetud Iowa Ülikooli professori Douglas W. Jonesi materjalidest.

Samm-mootoreid on üldiselt kahte liiki: muutuva magnetvälja tugevusega mootorid ( variable reluctance motor ) ja püsिमagnetiga mootorid ( permanent magnet motor ).

Muutuva magnetvälja tugevusega mootori rootor on hammastega ja ei sisalda magneteid. Üks mähis on keeratud mootori staatori iga vastaspooluse ümber. Pooluste ümber tekivad magnetväljad mähise pingestumise korral alalisvooluga. Mootori mähised on ühendatud järgmiselt, joonis:



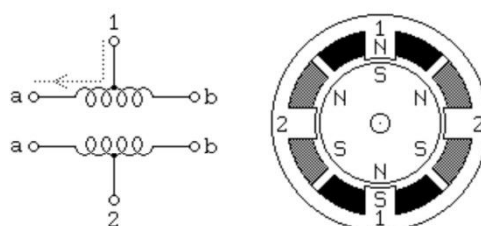
Vooluringi positiivse poolega ühendatakse ühine juhe ning mootor hakkab tööle kolme mähise pingestumise korral teatud sagedusega. Viimasel mootori ristlõike joonisel on rootoril neli hammast ja staatoril kuus poolust, mistõttu teeb mootor ühe sammuga 30-kraadise pöörde. Staatori poolustel asuva mähise number 1-he pingestumise korral tekib poolustes magnetväli, mis tõmbab enda poole rootori hambaid X. Teise ( 2. ) mähise pingestumise ja samaaegselt esimese ( 1. ) mähise voolu katkemise korral pöörab rootor 30 kraadi kellaosuti liikumise suunas, kuna poolused 2 ja rootori hambad Y tõmbuvad üksteise suunas. Mootori pideva ehk katkematu töötamise korral ühendatakse erinevad mähised sobivas järjekorras vooluringi sisse ja välja. Mootorit saab juhtida sellele voolu andes („1“) ja ära võttes („0“), joonis:

```
Mähis 1 1001001001001001001001001
Mähis 2 0100100100100100100100100
Mähis 3 0010010010010010010010010
aeg --->
```

Antud juhul pöörab mootor 30 kraadi, kuid rootori hammaste ja staatori pooluste arvu suurenemise korral muutub ka mootori sammud palju väiksemaks.

Püsिमagnetiga mootori rootor on püsिमagnetist. Sellise liigiga samm-mootoril on suhteliselt väike kiirus ja pöördemoment, kuid sammud on suured (  $45^{\circ}$  või  $90^{\circ}$  ). Sellist mootorit kasutatakse enamasti väikest võimsust vajavates seadmetes, kuna see koosneb suhteliselt lihtsast konstruktsioonist ja on ka üsna madala hinnaga. Püsिमagnetiga mootorid jagunevad ühepooluseliseks ja kahepooluseliseks mootoriks.

Ühepooluselise mootori mähiste ühendusskeemi korral luuakse juurde eraldi ühendused mähistele, mis asuvad staatori pooluste ümber. Neid ühendatakse vaheldumisi vooluringi positiivsele poolele. Kuid vooluringi negatiivsele poolele ühendatakse mähiste otsad a ja b. Selle abil muudetakse mootori suunda. Joonis:



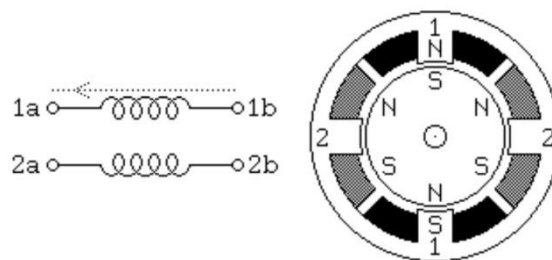


Staatori poolused on laetud voolu läbimise korral läbi punktide 1 ja a. Mootor pööraks 30 kraadi kellaosuti suunas, kui mähise otste pingestumise korral tekiks vooluring läbi punktide 2 ja a. Järgmine bitijada on kasutamisel mootori pidevaks töötamiseks ( bitijadal on „kasutusel positiivne loogika“ ), joonis:

```
Mähis 1a 1000100010001000100010001
Mähis 1b 0010001000100010001000100
Mähis 2a 0100010001000100010001000
Mähis 2b 0001000100010001000100010
aeg --->
```

Ühe mähise otsi a ja b ei ühendata vooluringi korraga mitte kunagi.

Kahepooluselise mootori korral ei ole mähistel „lisaühendusi“ ja see teeb sellise mootori konstruktsiooni palju lihtsamaks. Kuid staatori magnetiliste pooluste muutmise vajadus teeb mootori juhtimise keerulisemaks. Seetõttu ühendatakse iga mähis H-sillaga, mis „kontrollib mähise otstele antavaid polaarsusi üksteisest sõltumatult“. Joonis:



Kahepooluselise mootori juhtimisjada on täpselt samasugune ühepooluselise mootori juhtimisjadaga, kuid nullide ja ühtede asemel kasutab mootor terminali otstele antava voolu polaarsusi plussi ja miinust:

```
Terminal 1a +---+---+---+---
Terminal 1b --+---+---+---+
Terminal 2a -+---+---+---+
Terminal 2b ---+---+---+---+
```

H-silla üks sisend juhib mootorile antavat pinget ja määrab ära ka voolu suuna. Kui ühte H-silda kasutatakse kahe mähise korral, siis samm-mootori juhtimise bitijada oleks järgmise kujuga:

```
Enable 1 1010101010101010
Direction 1 1x0x1x0x1x0x1x0x
Enable 2 0101010101010101
Direction 2 x1x0x1x0x1x0x1x0
```

Sellisel juhul on kasutusel positiivne loogika ja x tähistab suvalist olekut.

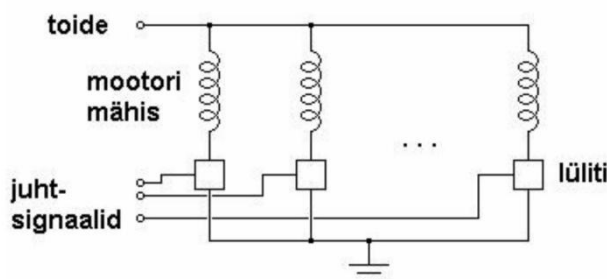


Avatud juhtimisest hoolimata tagab samm-mootor täpse liikumise ja ka selle stabiilsuse. Seetõttu on samm-mootoriga lahendatavad rakendused madala hinnaga ja mootori juhtsignaalid võivad olla ka digitaalsed. Kuid mootori rakendusjõudude suure varieerumise korral on samm-mootorit küllaltki raske kasutada. Impulsside vahelejäämise korral ei suudetaks fikseerida mootori täpset asendit ja see muudab mootori juhtimise keeruliseks. Samm-mootori mootori liigutamiseks soovitud suunas on neli võimalikkust, kuid sellest realiseerub ainult üks juhtkombinatsioon. Samm-mootor on ka küllaltki suure vibratsiooniga.

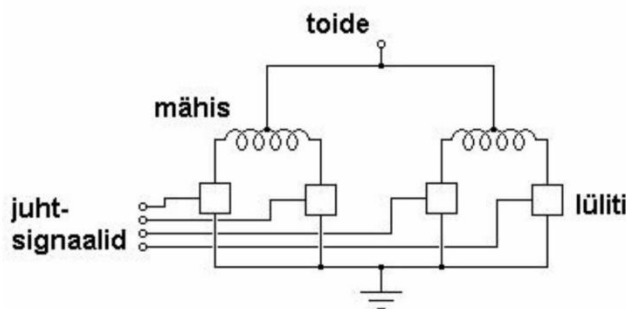
Samm-mootorid on väga suure täpsusega ja seetõttu kasutatakse neid täpset juhtimist vajavates rakendustes, milles pole vaja suurt jõudu. Näiteks arvuti flopiketta juhtmootor on oma olemuselt samm-mootor.

Samm-mootori tüübist sõltub tema juhtimine. Oluline on siinkohal märkida, et Iowa Ülikooli professori Douglas W. Jonesi materjalid ja joonised kirjeldavad üsna hästi samm-mootori juhtimise liideseid.

Lüliteid, mida kasutatakse mähises vooluringi tekitamiseks või katkestamiseks sõltuvalt juhtsignaalidest, esinevad selliste samm-mootorite korral, mille magnetvälja tugevus muutub. Lüliti täpsem ehitus jäetakse enamasti kirjeldamata, kuna selle järele puudub vajadus. Üldiselt genereerib juhtsignaale arvuti või programmeeritav kontrolleri. Muutuva magnetvälja tugevusega samm-mootori juhtimise liides, joonis:

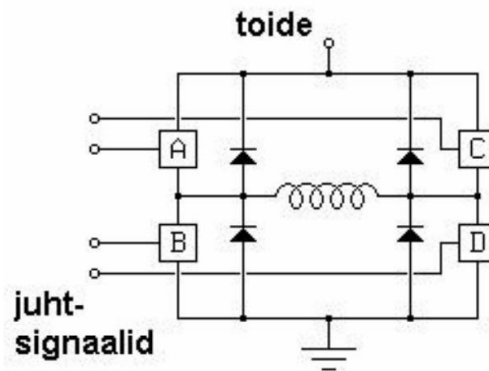


Ühepooluselise ja püsिमagnetilise samm-mootori juhtimise liides väga palju ei erine muutuva magnetvälja tugevusega samm-mootori juhtimise liidesest. Lihtsalt mähiste paigutus mootoritel on mõnevõrra teine. Joonis:

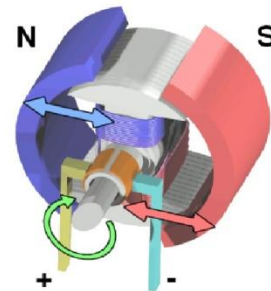
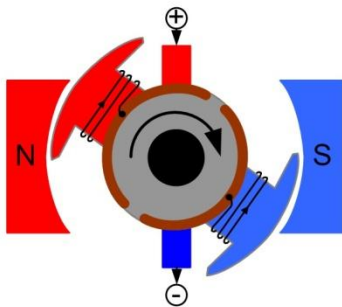


Viimati esitatud skeemidel on induktiivseid elemente, mille korral mähise otste pigestamise lõppemise korral ei kao elektrivool koheselt. Kuna see ohustab lüliteid, siis seega mähiste sildamiseks kasutatakse kondensaatoreid või dioode.

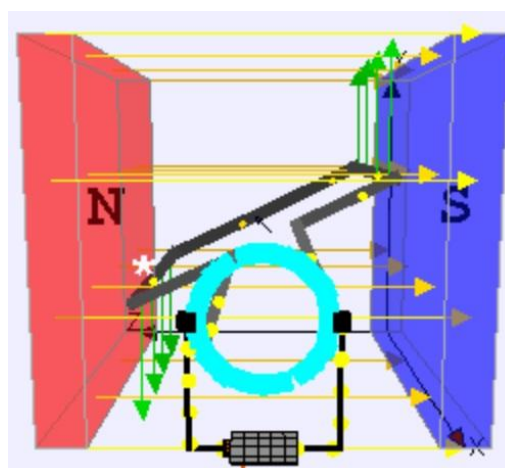
Kahepooluselise samm-mootori korral on mähise otsi vaja erinevalt pingestada ja seetõttu on sellise samm-mootori juhtimine palju keerulisem. Selleks kasutatakse iga mähise jaoks H-silda, mille korral kaitsevad diodid lüliteid väikeste pingekõikumiste eest. Lülitite A ja D või C ja B sulgemiste korral toimib vooluring erinevalt. Sellest tulenevalt pingestuvad mähise otsad erinevalt. Joonis:



Samm-mootorid ja kolmefaasilised sünkroonsed vahelduvvoolumootorid on omavahel tihedalt seotud, kuna sisest püsिमagnetitega rootorit kontrollitakse välise elektrooniliselt lülitavate magnetitega. Samm-mootorit on liigitatud ka alalisvoolumootori ja pöördliikuva solenoidi hübriidina. Näiteks püsिमagnetitega alalisvoolumootori ristlõike joonis ja kahe poolusega ning püsिमagnetiga staatoriga harjadega alalisvoolumootori siseehitus on:

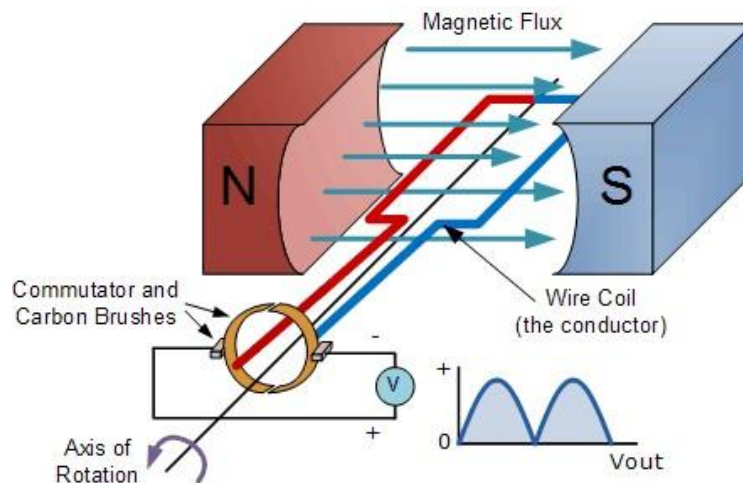


Alalisvoolumootor ehk alalisvoolumasin on elektrimootor, mis töötab alalisvooluga. Näiteks harjadega alalisvoolumootori näidis-joonis on:



( Alalisvoolu ) elektrimootori ja magnetmootori ( elektrimasinate ) tööpõhimõte seisneb elektromagnetilises induksiooni nähtuses ja Lorentzi jõul. Elektromagnetiline induksioon on siis, kui magnetvälja muutus tekitab elektrivälja ja elektrivälja muutus tekitab magnetvälja. Näiteks kui juhe paikneb magnetväljas, siis paneb elektrivool juhtme liikuma. Kui me aga eemaldame vooluallika ja asume ise mootori võlli päripäeva pöörama, siis sellisel juhul tekitab juhtme

liikumine magnetväljas juhtmes elektrivoolu. Liikuvale elektrilaengule mõjub magnetväljas jõud, mida nimetatakse Lorentzi jõuks. Joonis:



Alalisvoolumootorite matemaatiliseks aluseks on ankruahela pingeid kirjeldav diferentsiaalvõrrand:

$$L_A \frac{di_A(t)}{dt} = -R_A i_A(t) - U_{ind} + U_A$$

mis vastab Ohmi seadustele. Elektrivoolu mitte muutumise korral:

$$\frac{di_A(t)}{dt} = 0$$

tuleb diferentsiaalvõrrandi kuju järgmine:

$$0 = -R_A * i_A - U_{ind} + U_A$$

ehk

$$U_A = R_A * i_A + U_{ind}$$

Magnetilise induksiooni tõttu same viimase võrrandi kirja panna ka järgmiselt:

$$U_A = R_A * i_A + k_2 * \Phi * 2\pi n$$

Konstantse pöörlemomendi korral on pöörlemiskiirus  $n$  ja ankrupinge omavahel võrdelised, kui indutseeritav pinge ( vastuelektromotoorjõud )  $U_{ind}$  on konstantsest pingest  $U_A$  väiksem. Tegemist on meil konstantse pingega  $U_A$  ja ankruahela väikese takistusega  $R_A$ . Pöörlemiskiirust  $n$  saab juhtida ankrupingega vahemikus:

$$-U_{nimi} < U_A < U_{nimi}$$

Kuid tegelikuses ei ole vool konstantne, kuna see sõltub “mehaanilisest koormusest”. Voolu piiratakse “välise reguleerimisahelatega”, kuna mootori ja toiteallika võimsus on piiratud. Mootor on oma “nimitööpunktis” parajasti siis kui:

$$U_A = U_{nimi}$$

ja

$$n = n_{nimi}$$

Konstantse ankrupinge  $U_A$  korral suurendatakse kiirust ainult magnetvoo  $\Phi$  nõrgendamise kaudu. Suurema kiiruse suunas tähendab tööpunkti ülespoole jõudmist ja konstantne ankrupinge  $U_A$  on suurimal võimalikul väärtusel piiratud. Suurim võimalik pöörlemomend on nõrgema magnetvälja

korral väiksem. Näiteks Lorentzi jõu järgi:

$$M = k_1 * \phi * I_A$$

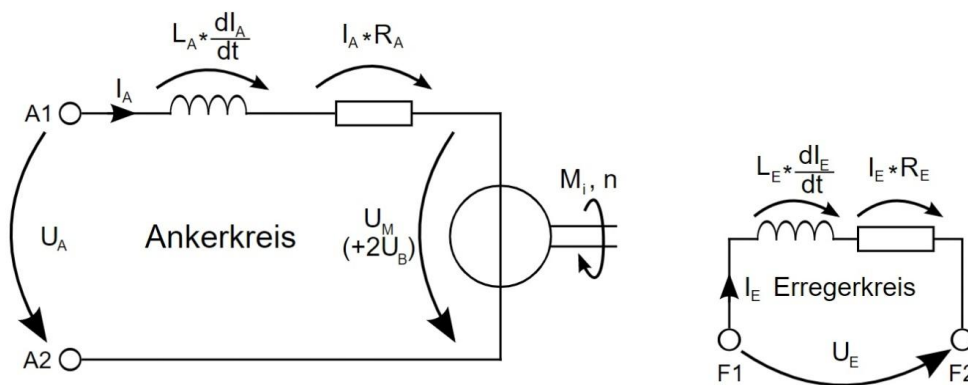
on pöördemoment väiksem, kuna see on võrdeline  $\phi$ -ga. Alalisvoolumootori ankrumähise ja ergutusmähise ( väljamähise ) skeemi kirjeldavad võrrandid on aga järgmised:

$$L_E = \frac{di_E}{dt} = -R_E i_E + u_E$$

$$u_{ind} = c_A * \psi_E * \omega$$

$$\psi_E = \frac{1}{N_E} L_E i_E$$

Esitatud võrrandites on  $i_A$  ankruvool,  $u_A$  ankrupinge,  $R_A$  ankrumähise takistus,  $L_A$  ankrumähise induktiivsus,  $u_E$  ergutuspinge,  $i_E$  ergutusvool,  $R_E$  ergutusmähise takistus,  $L_E$  ergutusmähise induktiivsus,  $N_E$  ergutusmähiste arv,  $\omega$  roototi nurkkiirus,  $u_{ind}$  indutseeritav pinge ( vastuelektromotoorjõud ),  $\psi_E$  ergutusvoog,  $\phi$  magnetvoog õhupilus,  $n$  pöörlemiskiirus,  $M$  pöördemoment ja  $k_1$  ning  $k_2$  masinakonstandid. Skeem-joonis:



Kui aga ergutusahelat ei arvestata, siis mehaanikaosa diferentsiaalvõrrandid on järgmised:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = c_A \psi_E i_A - \tau_L$$

Nendes on  $J$  ankru inertsimoment ( mis sõltub ankru massijaotusest ),  $\alpha$  ankru pöördenurk,  $\omega$  ankru nurkkiirus,  $\tau_L$  mootori koormusmomentide summa ( kaasaarvatud võlliga ühendatud koormus ) ja  $c_A$  masinakonstant. Kuid võrrandeid võib lihtsustatult esitada ka järgmiselt:

$$U_A = I_A * R_A + L_A * \frac{dI_A}{dt} + U_q$$

$$U_q = c * n * \Phi(I_E)$$

$$U_E = I_E * R_E + L_E * \frac{dI_E}{dt}$$

Nendes on  $U_A$  ankrupinge,  $U_E$  ergutuspinge,  $U_q$  indutseeritud pinge ehk vastuelektromotoorjõud,  $c$  masinakonstant ja  $\Phi$  põhivälja magnetvoog. Kõik eeltoodud alalisvoolumootorit kirjeldavad võrrandid ei võta arvesse magneetimiskõveraaid ega kirjelda kommutaatori tööd. Seetõttu jääb alalisvoolumootori matemaatiline kirjeldus üsna lihtsaks ja üldiseks.

Allikad: 1) [https://www.robotiklubi.ee/media/kursused/robot\\_igayhele/2007/mootorid.pdf](https://www.robotiklubi.ee/media/kursused/robot_igayhele/2007/mootorid.pdf)

2) <https://et.wikipedia.org/wiki/Alalisvoolumootor>

### 2.2.9.6 Samm-mootori kirjanduse ja erinevate jooniste allikad

Eelnevates peatükkides on kasutatud ja monteeritud erinevaid fotosid ja jooniseid, mis on kõik võetud järgmistelt ( interneti ) aadressidelt:

- 1) „Füüsika XI klassile 2. osa Elektromagnetism“, Kalev Tarkpea ja „koolibri“, 2000.
- 2) [https://et.wikipedia.org/wiki/Elektrimootor#/media/Fail:Electric\\_motor\\_cycle\\_2.png](https://et.wikipedia.org/wiki/Elektrimootor#/media/Fail:Electric_motor_cycle_2.png)
- 3) [https://manbw.ru/analitycs/gas\\_turbines\\_-\\_reliable\\_power\\_units\\_contemporary\\_power\\_stations.html](https://manbw.ru/analitycs/gas_turbines_-_reliable_power_units_contemporary_power_stations.html)
- 4) [https://et.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetism#/media/Fail:Em\\_monopoles.svg](https://et.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetism#/media/Fail:Em_monopoles.svg)
- 5) [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Van\\_de\\_graaf\\_generator.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Van_de_graaf_generator.svg)
- 6) [https://www.3bscientific.com/product-manual/1002967\\_EN.pdf](https://www.3bscientific.com/product-manual/1002967_EN.pdf)
- 7) <https://et.wikipedia.org/wiki/Alalisvoolumootor>
- 8) [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-13-2352-2\\_5](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-13-2352-2_5)
- 9) [https://www.researchgate.net/figure/8-pole-24-slot-axial-flux-PM-reference-motor\\_fig2\\_224393995](https://www.researchgate.net/figure/8-pole-24-slot-axial-flux-PM-reference-motor_fig2_224393995)
- 10) <https://fsxtimes.wordpress.com/2014/01/04/229-piper-pa28-instrument-panel/>
- 11) [https://www.caricos.com/cars/a/audi/2013\\_audi\\_r8\\_e-tron/images/58.html](https://www.caricos.com/cars/a/audi/2013_audi_r8_e-tron/images/58.html)
- 12) <https://www.slideshare.net/hprabowo/ac-motors-70238143>

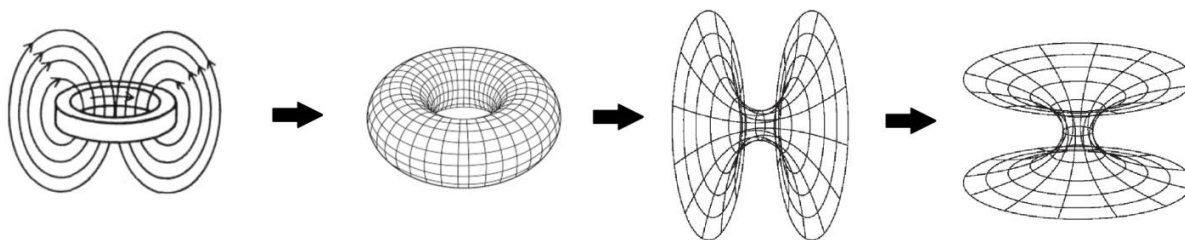
- 13) <http://entsyklopeedia.ee/artikkel/akumulaator3>
- 14) <https://circuitdigest.com/article/different-types-of-motors-used-in-electric-vehicles-ev>
- 15) [https://serc.carleton.edu/integrate/teaching\\_materials/energy\\_sustain/student\\_materials/electricity\\_wor.html](https://serc.carleton.edu/integrate/teaching_materials/energy_sustain/student_materials/electricity_wor.html)
- 16) [https://www.tthk.ee/MEH/Taiturid\\_3.html](https://www.tthk.ee/MEH/Taiturid_3.html)
- 17) <https://www.semanticscholar.org/paper/Hyperspace-%3A-a-scientific-odyssey-through-parallel-%E5%8A%A0%E6%9D%A5-O%27Keefe/4ca7df22328c7b9bffc6cc767dcfca747dd6363f/figure/1>
- 18) <https://www.newkidscar.com/fuel-system/>
- 19) <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.310.173&rep=rep1&type=pdf>
- 20) <https://pdfs.semanticscholar.org/249f/30cb0893f67a53d20248e96c7309624a53ae.pdf>
- 21) [https://www.robotiklubi.ee/\\_media/kursused/robot\\_igayhele/2007/mootorid.pdf](https://www.robotiklubi.ee/_media/kursused/robot_igayhele/2007/mootorid.pdf)
- 22) <http://jimroal.blogspot.com/2017/11/testing-cars-charging-system-with-only.html>
- 23) <https://et.wikipedia.org/wiki/K%C3%BCtuseelement>
- 24) <https://majandus24.postimees.ee/401540/matti-liiske-tere-tulemast-elektriauto>
- 25) <http://nithyananda-cult.blogspot.com/2009/12/nithyananda-starts-new-parallel.html>
- 26) [https://www.researchgate.net/figure/Schematic-of-3D-field-flux-switching-machine\\_fig1\\_273564106](https://www.researchgate.net/figure/Schematic-of-3D-field-flux-switching-machine_fig1_273564106)
- 27) <https://www.pinterest.com/pin/620089442430492378/>
- 28) [https://www.dhgate.com/product/stem-ring-magnet-opening-and-closing-sex/446537376.html#redirect\\_detail=WAP2PC](https://www.dhgate.com/product/stem-ring-magnet-opening-and-closing-sex/446537376.html#redirect_detail=WAP2PC)
- 29) <https://www.wallpaperflare.com/>
- 30) <https://www.newkidscar.com/electrics/vehicle-electrical-system-construction/>
- 31) <https://www.cheetah3d.com/forum/index.php?threads/7459/#lg=post-61360&slide=0>
- 32) <https://www.rahvaraamat.ee/p/kosmosetehnika/14268/et?ean=9789985702055>
- 33) [https://www.miniphysics.com/uy1-applications-of-amperes-law.html#google\\_vignette](https://www.miniphysics.com/uy1-applications-of-amperes-law.html#google_vignette)
- 34) <https://www.physicsforums.com/threads/magnetic-field-of-a-toroid.746406/>
- 35) [http://www.zamandayolculuk.com/html-3/aether\\_control.htm](http://www.zamandayolculuk.com/html-3/aether_control.htm)

- 36) <https://www.toppr.com/ask/en-in/question/a-toroid-is-wound-over-a-circular-core-with-total-no-of-turns-equal-to/>
- 37) <http://www.tlu.ee/~tony/oppetoo/kosmoloogia/kosmo5.html>
- 38) [https://schools.wikia.org/wiki/Left\\_hand\\_rules?file=Firstlhr.JPG](https://schools.wikia.org/wiki/Left_hand_rules?file=Firstlhr.JPG)
- 39) <https://www.electricaleasy.com/2014/03/right-hand-grip-cork-screw-rule.html>
- 40) <https://www.electrical4u.com/magnetic-flux/>
- 41) <https://slideplayer.com/slide/8744771/>
- 42) [http://www.hk-phy.org/energy/domestic/cook\\_phy03\\_e.html](http://www.hk-phy.org/energy/domestic/cook_phy03_e.html)
- 43) <https://slideplayer.com/slide/7351156/>
- 44) [https://www.schoolphysics.co.uk/age14-16/Electricity%20and%20magnetism/Current%20electricity/text/Direct\\_and\\_alternating\\_current/index.html](https://www.schoolphysics.co.uk/age14-16/Electricity%20and%20magnetism/Current%20electricity/text/Direct_and_alternating_current/index.html)
- 45) <https://www.pinterest.com/pin/93801604727235230/>
- 46) <https://sdvelectrical.blogspot.com/2019/12/what-is-self-inductance-definition-and-explanation.html>
- 47) <https://engineeringsolutionguide.wordpress.com/2020/03/12/transformer-basic/>
- 48) <https://automationforum.co/introduction-to-electromagnetic-induction/>
- 49) <https://mathematica.stackexchange.com/questions/14202/how-do-i-plot-the-unit-normal-field-for-a-surface>
- 50) [http://www.brainkart.com/article/Fleming---s-right-hand-rule\\_38493/](http://www.brainkart.com/article/Fleming---s-right-hand-rule_38493/)

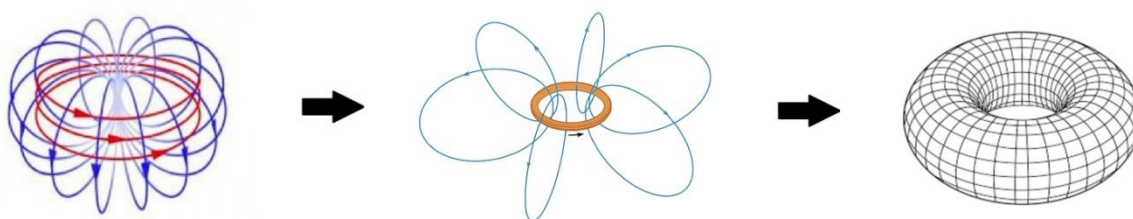
## **2.3 Aegruumi lõkspinna kvantmehaanilised omadused ja sellest tulenevad arvutused**

### **2.3.1 Sissejuhatus**

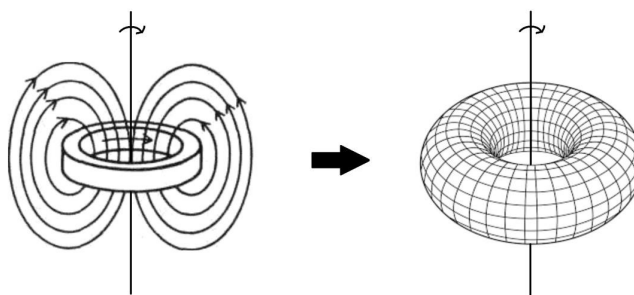
Metallrõngast ümbritsev magnetväli on geomeetriselt sarnane aegruumi lõkspinna kujuga, mis meenutab sõõrikut. See tähendab seda, et magnetvälja kinnised jõujooned moodustavad ümber metallrõnga sõõriku kujulise energiavälja, mis tingib ka aegruumi lõkspinna geomeetrilise kuju. Joonis:



Magnetvälja kinnised jõujooned tingivad aegruumi lõkspinna geomeetrilise kuju:

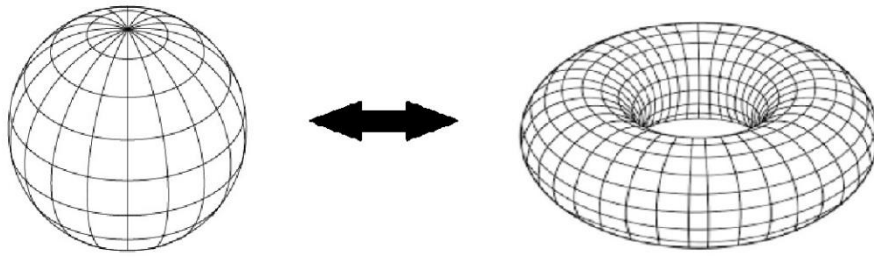


Kuna antud juhul kaasneb magnetvälja tekkimisega ehk ruumis liikuva elektrivälja tekkimisega ka aegruumi lõkspinna tekkimine, siis seega peaks ka tekkiv aegruumi lõkspind ( s.t. aegruumi tunnel ) ruumis liikuma ehk antud juhul „pöörlema“ metallrõngaga samas suunas. Joonis:



Võiks ju eeldada, et sõõriku kujulise aegruumi tunneli pikkusest sõltub see, et kui kaugale ajas rännatakse. Samuti võiks ju eeldada, et aegruumi tunneli pöörlemisest või selle asendist ruumis sõltuks see, et millises suunas toimuks ajarännak. Tegelikult see aga nii ei ole, kuna antud juhul tingib aegruumi tunneli „sõõriku kujulisuse“ lihtsalt keha geomeetiline vorm, mis panebki arvama, et sellest „silmuse-kujulise“ tunneli pikkusest midagi sõltuks. Sõõriku kuju asemel peaks arvestama hoopis kerakujulise aegruumi tunneliga ja selle lõkspinna kvantmehaaniliste omadustega ( joonis allpool ). Järgnevalt põhjendame ja analüüsime seda palju pikemalt.





### 2.3.2 Aegruumi tunneli pikkus

Gravitatsioonivälja kui aegruumi kõverust kirjeldab tsentraalsümmeetriliselt Schwarzschildi meetrika:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

ja seni on arvatud seda, et see sama meetrika kirjeldab matemaatiliselt ka aegruumi tunneli pikkust. See tegelikult nii ei ole. Schwarzschildi meetrika kirjeldab gravitatsioonivälja ehk aegruumi kõverust, mille tsentris eksisteerib nõ. Schwarzschildi pind:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Schwarzschildi pinnal on aeg ja ruum kõverdunud ehk teisenenud lõpmatuseni. Just seda pinda on võimalik füüsiliselt tõlgendada ka aegruumi tunneli sisse- ja väljakäiguna. Eirelatiivsusteooria järgi on mass ja energia omavahel ekvivalentsed suurused:

$$E = mc^2$$

ehk massi saame avaldada energia kaudu:

$$m = \frac{E}{c^2}$$

Sellest tulenevalt saame Schwarzschildi pinna raadiuse valemiks:

$$R = \frac{2GE}{c^4}$$

ja kui tegemist oleks elektrivälja energiaga  $E$ , siis saamegi Reissner-Nordströmi pinna raadiuse valemi:

$$R = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi \epsilon_0 c^4}}$$

Eespool me tõestasime seda, et seisueenergia ja kvandienenergia valemid on „koos-tuletatavad“ ja

seetõttu on need ka omavahel võrdsed:

$$E = mc^2 = hf$$

Sellest tulenevalt peab aegruumi lõkspinnal ehk Schwarzschildi pinnal olema ka kvantmehaanikalised omadused:

$$E = \frac{Rc^4}{2G} = mc^2 = hf$$

mille järgi oleks võimalik välja arvutada aegruumi tunneli pikkuse ja seeläbi ka selle, et kui kaugelt ajas või ruumis teleporteerutakse.

Mistahes energიაvälja muutumise korral ilmneb lühiajaliselt ka „aegruumi lõkspind“, millel on aeg ja ruum erirelatiivsusteooria järgi teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni. Näiteks kui tühjas ruumis tekib magnetväli valguse kiirusega  $c$ , siis tühja ruumi ja energიაvälja vahelist ajutist „piiri“ on võimalik mõtteliselt tõlgendada kahemõõtmelise „pinnana“, millel on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni, kuna see „liigub“ („levib“) ruumis valguse kiirusega  $c$ .

Musta augu tsentris oleval Schwarzschildi pinnal ehk musta augu „horisondil“ on aeg ja ruum samuti teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni. Musta augu Schwarzschildi raadius  $r$  määrab ära Schwarzschildi pinna  $S$  suuruse.

Muutuva elektrivälja levik toimub magnetvälja vahendusel. Näiteks elektrivälja muutumine ühes punktis põhjustab kõigepealt muutuva magnetvälja ja selle magnetvälja muutus kutsub (elektromagnetilise induktsiooni teel) esile elektrivälja muutumise naaberpunktis. See tähendab seda, et igasugune elektri- või magnetvälja muutus levib ruumis lainena. See tekitab laine ongi elektromagnetlainet ehk seega elektromagnetväli. Sellest järeldub omakorda see, et näiteks elektrilaengu muutumisega tekib „lühiajaliselt“ elektrilaengut ümbritsev elektromagnetlainet ehk elektromagnetväli, mis eemaldub laetud kehast ehk nagu „paisuks“ kehast eemale ja mida võib tõlgendada eespool oleva analüüsi põhjal ka footoni tõenäosuslainena ehk tõenäosusväljana, mille „pinnal“ on aeg ja ruum valguse kiiruse tõttu teisenenud lõpmatuseni.

Elektromagnetlainet on elektrivälja ja magnetvälja üksteise muutumise levimine ruumis. Elektrivälja muutus tekitab magnetvälja ja magnetvälja muutus tekitab omakorda elektrivälja. Selline elektri- ja magnetvälja üksteiseks muutumine toimub valguse kiirusega  $c$  ning elektromagnetlainet liikumiskiirus vaakumis on samuti valguse kiirus  $c$ . Elektromagnetlainet võib vaadelda ka kvantosakese footoni liikumisena vaakumis, mille seisumass  $m$  on null ja energia  $E$  on avaldatav tuntud Max Plancki kvantenergia  $E$  valemiga.

Elektromagnetlainet kiirus ja pikkus ning footoni tõenäosuslainet (rühma)kiirus ja pikkus on omavahel võrdsed:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Kuna elektrivälja muutub magnetväljaks ja magnetväli muutub elektriväljaks just valguse kiirusega  $c$ , siis seega selle käigus tekkiva aegruumi lõkspinna „eksisteerimise ajaperiood“ oleks äärmiselt lühike. See viitab omakorda sellisele asjaolule, et tekkival aegruumi lõkspinnal peab olema „kvantmehaanilised omadused“.

Aegruumi lõkspinna kvantmehaanilisi omadusi tõestame järgneva matemaatilise analüüsi kaudu. Näiteks eelnevalt tuletatud raadiuse  $R$  võrrandis:

$$R = \frac{2GE}{c^4}$$

on tegemist välja energiaga  $E$ , milleks on antud juhul elektrivälja energia  $E$ :

$$E = \frac{q^2}{2C}$$

Eelnevalt tõestasime seda, et kehtib Plancki konstandi  $h$  võrdus:

$$\frac{1}{c^4} \approx \frac{h}{2\pi} = h$$

ja sellest tulenevalt saame raadiuse  $R$  võrrandi kujuks:

$$R = 2GEh$$

Lahti kirjutades tuleb see järgnevalt:

$$R = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

ehk viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu võttes:

$$R^2 = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4} = \frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^4}$$

milles me näemegi seda, et aegruumi lõkspind  $S$  on seotud Plancki konstandiga  $h$ :

$$4\pi R^2 = S = \frac{q^2 G}{\epsilon_0} h$$

Raadius  $R$  näitab aegruumi lõkspinna suurust aegruumis:

$$R = x = 2GEh$$

Viimast võrrandit saame matemaatiliselt teisendada järgmiselt:

$$\frac{x}{2GE} = \frac{1}{2GE} x = h$$

Kuna kvantmehaanikast on teada määramatuse seos energiakvandi asukoha  $x$  ja impulssi  $p$  vahel:

$$px = h$$

siis seega peab  $x$  võrrandi liige võrduma impulssiga  $p$ :

$$\frac{1}{2GE} = p$$

Tulemuseks saame tuntud määramatuse relatsiooni:

$$px = h$$

milles aegruumi lõkspinna impulss  $p$  võrdub:

$$\frac{E}{c} = mc = p$$

Antud kontekstis tähendab see seda, et energiaväli tekitab aegruumi lõkspinna ja sellest tulenevalt on aegruumi lõkspinnal mass ning impulss. Energiavälja poolt tekitatud aegruumi lõkspinna asukoht  $x$  meie kolmemõõtmelises ruumis kattub energiakvandi määramatuse relatsiooniga asukoha ja impulssi vahel

$$x = \frac{h}{p}$$

ning seega on aegruumi lõkspinnal tõepoolest kvantmehaanilised omadused.

MÄRKUS. Plancki konstandi  $h$  ligikaudse väärtuse kehtivust on võimalik tõestada impulssi  $p$  seose

$$\frac{1}{2GE} = p = mc$$

kaudu. Näiteks selleks teostatakse järgmine matemaatiline teisendusakt:

$$\frac{1}{2Gm} = Ec$$

ja korrutatakse viimase võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga:

$$\frac{c^2}{2Gm} = \frac{1}{R} = Ec^3$$

Viimasest võrrandist saame:

$$\frac{1}{c^3} = ER$$

ja kui me jagame saadud võrrandi mõlemad pooled valguse kiiruse  $c$ -ga:

$$\frac{1}{c^4} = E \frac{R}{c} = Et$$

milles me arvestasime kiiruse  $v$  definitsiooni klassikalisest mehaanikast:

$$v = c = \frac{s}{t}$$

siis saame määramatuse relatsiooni energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$h = Et$$

mis kattubki Plancki konstandi  $h$  dimensiooniga: „energia korda aeg“.

Aegruumi lõkspinna kvantmehaanilised omadused seisnevad järgmises. Näiteks Max Plancki kvandienergia valemis

$$E = hf$$

on sagedus  $f$  seotud ajaperioodiga  $t$  järgnevalt:

$$f = \frac{1}{t}$$

Sellest tulenevalt saamegi võrrandi:

$$Et = h$$

mis kvantmehaanikas nimetatakse Heisenbergi määramatuse relatsiooniks osakese energia ja aja vahel:

$$\Delta E \Delta t = h$$

Kuid aegruumi lõkspinna korral tähendab see valem seda, et elektrivälja energia  $E$ , mis on aegruumi lõkspinna tekitajaks, määrab ära ka aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperioodi.

Kvantväljateoorias on määratud väljaosakeste ehk virtuaalsete osakeste eksisteerimise ajaperioodid määramatuse relatsiooniga osakese energia ja aja vahel:

$$\Delta E \Delta t = h$$

Sarnane põhimõte kehtib ka antud juhul aegruumi lõkspinna ( aegruumi tunnelite ) eksisteerimise korral.

See sama valem on seotud ka impulsiga. Näiteks elektrivälja energia  $E$  on võrdne seisuenergia valemiga:

$$mc^2 t = h$$

Viimast võrrandit on võimalik matemaatiliselt esitada ka järgmiselt:

$$mcct = h$$

milles impulss  $p$

$$mc = mv = p$$

ja koordinaat  $x$

$$ct = x$$

moodustavad võrrandi

$$px = h$$

mis kvantmehaanikas nimetatakse Heisenbergi määramatuse relatsiooniks osakese impulsi ja tema koordinaadi vahel:

$$\Delta p \Delta x = h$$

Kuid aegruumi lõkspinna korral tähendab see seda, et aegruumi lõkspind ehk Schwarzschildi pind omab impulssi  $p$ , kuna see eksisteerib tavaruumis teatud ajavahemiku ehk „liigub“ hyperruumi suhtes kiirusega  $c$  teepikkuse  $x$ :

$$ct = x$$

Antud juhul võime viimase valemi välja kirjutada ka nõnda:

$$c\tau = x$$

ja kui me viimase võrrandi mõlemad pooled tõstame ruutu, siis me näeme seda, et see valem võrdub

kosmoloogia osas tuletatud võrrandiga:

$$ds^2 = c^2 \tau^2 = c^2 \frac{dt^2}{y^2} - y^2 dl^2$$

mis kirjeldab Universumi aegruumi paisumist ehk tavaruumi liikumist hyperruumi suhtes. Tavaruum liigub hyperruumi suhtes valguse kiirusega  $c$ . Viimane võrrand on esitatav ka sfäärilistes koordinaatides:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

ja kordaja  $y^2$  on seotud valguse kiiruse  $c$  ja Hubble'i konstandiga  $H$  järgmiselt:

$$y^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{c^2}{H^2}$$

Kosmoloogia osas tõestasime, et Universum paisub tegelikult valguse kiirusega  $c$ :

$$v = H = c$$

Kuna aegruumi lõkspind kui aegruumi auk eksisteerib ajas ehk see „liigub“ hyperruumi suhtes teatud teepikkuse  $x$ , siis see loobki tunneli, mille pikkust on võimalik välja arvutada eelneva matemaatilise analüüsi põhjal.

Aegruumi lõkspinna poolt moodustatud kerajas aegruumi auk ( näiteks must auk ) võib liikuda ka meie igapäevaselt kogetavas ruumis ehk tavaruumis. Kuid ajas eksisteerimise korral liigub aegruumi auk hyperruumi suhtes mingisuguse teepikkuse  $x$ , mida ongi võimalik tõlgendada „aegruumi tunnelina“. Just selle tunneli „pikkusest“ sõltubki see, et kui kaugemale ajas liigutakse.

Kõiki eelnevalt esitatud tuletuskäike analüüsisime kohe järgnevalt palju põhjalikumalt.

Tekkiva aegruumi lõkspinna eksisteerimise aeg on äärmiselt väike, kuid selle pindala  $S$  on seevastu väga suur – see võib olla isegi inimese suurune. Sellest tulenevalt võib sellisel aegruumi lõkspinnal olla kvantmehaanilised omadused nagu seda on näiteks mikroosakestel.

Siinkohal peab ära märkima selle, et kvantmehaanilised omadused esinevad sellisel aegruumi lõkspinnal, mis tekib just elektromagnetlainega ( muutuva väljaga ) ehk tõenäosuslainega, pikkusega:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

See tuleneb valguse kiirusest  $c$ . Aegruumi lõkspinna tekitab ka keha mass  $M$  ja elektrilaeng  $q$ :

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

kuid selliseid juhte me siin antud juhul ei käsitle. Elektromagnetlaine esineb „kahes erinevas füüsikalises keskkonnas“:

Esiteks, muutuva elektrivälja levik toimub magnetvälja vahendusel. Näiteks „laengu elektrivälja muutumine“ ühes punktis põhjustab kõigepealt muutuva magnetvälja ja selle magnetvälja muutus kutsub ( elektromagnetilise induktsiooni teel ) esile elektrivälja

muutumise naaberpunktis. See tähendab seda, et igasugune elektri- või magnetvälja muutus ( kaasaarvatud ka laengu välja muutus ) levib ruumis lainena. See tekkiv laine ongi elektromagnetlaine ja seega elektromagnetväli.

Teiseks, elektromagnetlaine ehk elektrivälja ja magnetvälja üksteise muutmise levimine võib esineda ka vaakumis ja aines ilma elektrilaengu olemasoluta. Elektrivälja muutus tekitab magnetvälja ja magnetvälja muutus tekitab omakorda elektrivälja. Selline elektrivälja ja magnetvälja üksteiseks muutamine toimub valguse kiirusega  $c$  ning elektromagnetlaine liikumiskiirus vaakumis on samuti valguse kiirus  $c$ . Elektromagnetlainet võib vaadelda ka kvantosakese footoni liikumisena vaakumis, mille seisumass  $m$  on null ja energia  $E$  on avaldatav tuntud Max Plancki kvandenergia  $E$  valemiga:

$$E = hf$$

Elektromagnetlaine pikkus ning footoni tõenäosuslaine pikkus on omavahel võrdsed:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Kuigi me käsitleme siin antud juhul ainult elektromagnetlainetega kaasnevaid aegruumi lõkspindu, saab matemaatiliselt neid kirjeldada ka selliste valemitega, mis kirjeldavad ka massi/elektrilaengu poolt tekitatud aegruumi lõkspindasid:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \infty$$

Näiteks aegruumi lõkspinna valem, mis kirjeldab elektrilaengu poolt tekitatud aegruumi lõkspinna tekkimist, on matemaatiliselt tuletatud tuntud Schwarzschildi raadiuse  $R$  võrrandist:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

mis kirjeldab keha massi  $M$  poolt tekkivat aegruumi lõkspinna suurust  $R$ . Viimases valemis võetakse massi  $M$

$$\frac{c^2 R}{2G} = M$$

asemele energia  $E$  vastavalt massi ja energia ekvivalentsuseprintsibile:

$$E = mc^2$$

ehk

$$\frac{E}{c^2} = m$$

Nii saadaksegi võrrand

$$\frac{c^2 R}{2G} = \frac{E}{c^2}$$

mille järgi tekib aegruumi lõkspind  $R$  ainult energia  $E$  tõttu:

$$\frac{c^4 R}{2G} = E$$

Kuna elektriväli „omab“ energiat  $E$  ( s.t. see on oma olemuselt kui „energiaväli“ ):

$$E = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$$

siis elektriväli võib mõjutada aegruumi meetrikat ja seega luua aegruumi lõkspinna  $R$ :

$$\frac{c^4 R}{2G} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$$

Aegruumi lõkspinna tekitajaks on elektrivälja energia  $E$ , mis tuletati tuntud massi ja energia ekvivalentsuseprintsiibist:

$$E = mc^2$$

Ajas rändamise teooriast tulenevalt on seisenergia  $E$  seotud alati kvandienergiaga järgmiselt:

$$E = mc^2 = hf$$

See tuleneb puhtalt sellest, et need valemid on ajas rändamise teoorias „koostuletatavad“.

1900. aastal esitas kuulus füüsik Max Planck kvandienergia võrrandi:

$$E = hf$$

milles ta sidus osakese energia  $E$  lainesagedusega  $f$ . Sagedus on seotud ajaperioodiga  $t$ :

$$E = h \frac{1}{t}$$

ja see annab meile sellise võrrandi, millest saab omakorda „tuletada“ määramatuse relatsiooni osakese energia ja aja vahel:

$$Et = h$$

Kuna mistahes energiat  $E$  saab esitada seisenergia võrrandina:

$$mc^2 t = h$$

siis saadud seosest saab tuletada ka de Broglie' lainepikkuse  $\lambda$  võrrandi:

$$mc \cdot ct = h$$

ehk

$$x = \lambda = \frac{h}{p}$$

Selline matemaatilise tuletuse võimalus ja rangus tegelikult kinnitabki mistahes keha seisenergia seost kvandienergiaga ehk nende kahe „koostulenemist“ ehk üksteise lahutamatus.

See tähendab seda, et kui aegruumi lõkspinna valem oli tuletatud massi ja energia



ekvivalentsuseprintsipi kasutades, siis järelikult on see aegruumi lõkspind seotud ka kvandienergiaga  $E$ :

$$E = hf$$

ehk tekkival aegruumi lõkspinnal peab olema kvantmehaanilised omadused. Viimases energia valemis on lainesagedus  $f$  seotud ajaperioodiga  $t$  järgmiselt:

$$f = \frac{1}{t}$$

Sellest tulenevalt saame võrrandi kujuks

$$E = h \frac{1}{t}$$

ehk saame „energia korda aja“ dimensiooni:

$$Et = h$$

Viimane saadud seos on oma olemuselt kvantmehaanikas tuntud määramatuse relatsioon energia  $E$  ja ajaperioodi  $t$  vahel:

$$\Delta E \Delta t \geq h$$

ehk

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

Kuid antud juhul võib viimast seost tõlgendada nii, et elektrivälja energia  $E$ , mis on aegruumi lõkspinna tekitajaks, määrab ära ka aegruumi lõkspinna ( s.t. aegruumi tunneli ) eksisteerimise ajaperioodi  $\Delta t$ .

Näiteks eespool korduvalt esitatud ja kasutatud raadiuse  $R$  võrranditest:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2GE}{c^4}$$

saadakse Plancki konstanti  $h$  sisaldav avaldis:

$$R = 2GEh$$

ehk

$$\frac{1}{2GE} R = h$$

milles esineb ka impulsi  $p$  seos:

$$\frac{1}{2GE} = p$$

Seetõttu on Swarzschildi raadius  $R$  seotud elektromagnetlaine ehk tõenäosuslaine pikkusega  $\lambda$ :

$$pR = h$$

ehk

$$R = \frac{h}{p} = \lambda$$

Swarzschildi raadius  $R$  moodustab kerakujulise aegruumi lõkspinna pindalaga  $S$

$$S = 4\pi R^2$$

ja elektromagnetlaine pikkus  $\lambda$  on antud juhul seotud valguse teepikkusega  $ct$ :

$$\lambda = ct = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

Saadud võrrandis ongi aeg  $t$  kerakujulise aegruumi lõkspinna  $S$  eksisteerimise ajaperiood:

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

mille ruudust sõltub aja rännu kaugus:

$$t^2 = \frac{1}{c^2} \frac{S}{4\pi}$$

Siinkohal võiks muidugi küsida seda, et miks me eelnevalt ei kasutanud kera ruumala  $V$  valemist:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

millest saaks samuti tuletada ajaperioodi  $t$  valemist:

$$t = \frac{1}{c} \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

ehk

$$t^3 = \frac{1}{c^3} \frac{3V}{4\pi}$$

Ruumala valemist ei ole siiski otstarbekas kasutada, kuna näiteks Nordströmi raadiuse  $R$  valemis:

$$R = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi \epsilon_0 c^4}}$$

„nähtub“ ainult pindala  $S$  avaldis:

$$4\pi R^2 = S = \frac{q^2 G}{\epsilon_0 c^4}$$

Kui me viimase pindala  $S$  avaldise paneme eespool tuletatud ajaperioodi  $t$  võrrandisse:

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

siis me saame sellise võrrandi:

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{q^2 G}{\epsilon_0 c^4}}$$

mis võrdubki Nordströmi raadiuse  $R$  valemiga:

$$ct = R = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}$$

Selline analüüs kera ruumala  $V$  valemiga välja ei tuleks ehk Nordströmi valemis puudub kera ruumala valemi tuletuse võimalus. Kera ruumala valemit ei saa Nordströmi valemis tuletada „seestpoolt“ ehk süsteemi seest see välja ei tule.

Järgnevalt arvutame välja selle, et milline peab olema aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperiood  $t$  ja pindala  $S$  selleks, et teleportreeruda ajas minevikku või tulevikku 100 aastat.

Eirerelatiivsusteoorias seisnes aja dilatatsiooni nähtus selles, et mida lähemale keha liikumiskiirus  $v$  jõuab valguse kiirusele  $c$  vaakumis, seda aeglasemalt kulgeb aeg välisvaatleja suhtes:

$$t' = ty = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Selle heaks näiteks on kaksikute paradoksi juhtum.

Näiteks kui üks kaksikvendadest läheb kosmosereisile ja naaseb hiljem Maale tagasi, siis ei ole vennad enam ühevanused. Kosmoserändur on jäänud vennast nooremaks.

Teoreetiliselt võib vanusevahe suurendada piiramatult. Näiteks kui isa reisib Maast eemale 2 aastat ja tagasi teine 2 aastat ( isa poolt mõõdetud ajavahemikud ), siis on ta oma tütre 20 aastat noorem. Enne reisi algust oli isa oma tütre 20 aastat vanem. Seega saame konstantse kiirusparameetri  $\beta$  Maa suhtes järgmiselt:

$$41 = 4y$$

milles

$$y = 10 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

milles

$$\beta = 0,995.$$

Kui aga mingi vaatleja siirduks oma tähelaevaga kosmosesse kiirusega, mis läheneb valguse kiirusele vaakumis ja tuleks 22 aastat hiljem maa peale tagasi, siis maa peal on möödunud selle aja jooksul peaaegu 1000 aastat. Seega vaatleja rändas ajas tulevikku.

Kuid ajas rändamise teooria kosmoloogia osas tõestatakse seda, et Universumi paisumiskiirus  $H$  on valguse kiirusest  $c$  palju kordi väiksem just sellepärast, et aeg on kogu Universumi ulatuses teisenenud ehk aeglenenud. Valguse kiiruse  $c$  ja Universumi paisumiskiiruse  $H$  jagatis näitabki kordaja  $y$  suurust:

$$y = \frac{c}{v} = \frac{c}{H}$$

milles  $v = H$  on Universumi paisumiskiirus praegusel ajahetkel ja seda väljendatuna SI süsteemis. Sellest tulenevalt on aeg Universumis teisenenud

$$\frac{t'}{t} = y \approx 1,25 * 10^{26}$$

korda.

Tavaruum K liigub hyperruumi K' suhtes valguse kiirusega c ehk 300 000 km/s. See tähendab seda, et kui meie aegruumis ( s.t. tavaruumis K ) on möödunud üks sekund, siis hyperruumis oleks läbitud selle aja jooksul ligikaudu 300 000 kilomeetrine vahemaa. See tähendab ka seda, et kui me rändaksime ajas minevikku või tulevikku ühe sekundi, siis me peaksime liikuma hyperruumis ligikaudu 300 000 kilomeetrise vahemaa. See kehtib juhul, kui Universumi paisumiskiirus on võrdne valguse kiirusega vaakumis. Kuid Universumi tegelik paisumiskiirus on praegusel ajal 74 km/s \* (Mpc). Selline kiirus on SI süsteemis ( s.t. ühikutes ) aga järgmine:

$$\frac{x}{y} = \frac{74\,000 \left(\frac{m}{s}\right)}{3,086 * 10^{22}(m)} = 2,3(979) * 10^{-18} \frac{m}{s} \text{ ühe meetri kohta,}$$

milles galaktikate eemaldumiskiirus on  $x = 74 \text{ km/s} = 74\,000 \text{ m/s}$ , vahemaa ruumis on  $y = 1 \text{ Mpc} = 3,086 * 10^{16} \text{ m} * \text{miljon} = 3,086 * 10^{22} \text{ m}$  ja valguse kiiruse arvvärtus vaakumi korral on  $c = 300\,000 \text{ km/s} = 3 * 10^8 \text{ m/s}$ . Kuna Universumi paisumiskiirus on palju kordi väiksem valguse kiirusest ehk aeg Universumis kulgeb tegelikult palju palju kiiremini kui see meile paistab

$$t' = yt,$$

siis seega peame leidma y ( s.t. gamma ) väärtuse:

$$y = \frac{t'}{t}$$

mis näitab meile seda, et mitu korda on Universumi paisumise kiirus aeglasem tegelikust paisumiskiirusest ehk mitu korda on aja kulg Universumis aeglenenud või kiirenenud ( y on kordaja, millel ei ole ühikut ):

$$y = \frac{t'}{t} = \frac{3 * 10^8 \left(\frac{m}{s}\right)}{2,3979 * 10^{-18} \left(\frac{m}{s}\right)} = 1,25109 * 10^{26} \approx 1,25 * 10^{26}$$

Siinkohal on oluline märkida seda, et me kasutasime sellist Universumi paisumiskiirust, mille väärtus on 74 km/s ühe megaparseki kohta. Tegelikult on Hubble'i konstandi H ehk Universumi paisumiskiiruse väärtus teada vahemikus 72,6 – 75,4 km/s Mpc kohta. Sellise tulemuse annavad meile USA nobelisti ja Johns Hopkinsi Ülikooli professori Adam Riess'i tööd ja Sherry Suyu tööd Saksamaa Max Plancki astrofüüsikainstituudist. Kuid ESA kosmoseteleskoobilt Planck saadud tulemused annavad Hubble'i konstandi H väärtuseks hoopis 67,4 km/s ( +/- 0,5 km/s ) Mpc kohta, mis on eespool olevast H väärtusest palju väiksem. Selline väärtus annab Universumi elueaks umbes 13,8 miljardit aastat, kuid eespool olevates arvutustes arvestasime 13,7 miljardi aasta vanuse Universumiga. Väga suurt erinevust neil kahel erineval Universumi elueal siiski ei ole.

Kosmilise mikrolaine-taustkiirguse vaatluste järgi, milleks kasutati Tšiilis Atacama kõrbes asuvat kosmoloogiateleskoopi, on Universumi paisumiskiiruseks 67,9 kilomeetrit sekundis megaparseki kohta. Kuid supernoovade eemaldumiskiiruste uurimuste järgi on Universumi paisumiskiiruseks hoopis 74 kilomeetrit sekundis megaparseki kohta. Kusjuures üks parsek võrdub 3,26 valgusaastat ehk:

$$1pc \approx 3 * 10^{16} m$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et kui meie „igapäevaselt tajutavas aegruumis“ ehk tavaruumis K on möödunud näiteks üks sekund:

$$t^{\wedge} = 1 \text{ sek}$$

siis tegelikult ( s.t. Universumist väljaspool olevale hüpoteetilisele vaatlejale ehk hyperruumi K` suhtes vaadatuna ) on möödunud „kõigest“

$$t = \frac{t^{\wedge}}{y} = 8 * 10^{-27} \text{ sek}$$

Viimases võrduses on  $t^{\wedge}$  nö. näiline aeg ( s.t. Universumi sees olevale reaalsele vaatlejale kulgev aeg ) ja  $t$  on tegelik aeg ( s.t. Universumist väljaspool olevale hüpoteetilisele vaatlejale kulgev aeg ). Sellest jäeldub, et kui aeg on Universumis tegelikult möödunud üks sekund, siis näiliselt on möödunud:

$$t^{\wedge} = ty = y \approx 1,25 * 10^{26} \text{ sek} \approx 3,963 * 10^{18} a \approx 4 \text{ miljardit miljardit aastat}$$

milles  $t = 1$  sek. Eelnevalt on arvestatud, et ühes aastas on 31 536 000 sekundit, kui ei ole tegemist liigaastaga. Nendest lihtsatest seostest on võimalik otseselt välja arvutada seda, et kui kaugele on võimalik ajas teleporteeruda. Selle välja arvutamine sõltub puhtalt sellest, et kui pikk on aegruumi lõkspinna ( ehk aegruumi tunneli ) eksisteerimise aeg Universumis. Mida kaugemale ajas rännata, seda pikem peab olema aegruumi tunnel. Ajas on võimalik rännata ainult hyperruumis ehk väljaspool aegruumi ja see tähendab seda, et mida suurema teepikkuse liigume hyperruumis, seda kaugemale me ajas liigume. Sellest jäeldub, et aegruumi tunneli pikkus sõltub aegruumis oleva aegruumi augu eksisteerimise ajaperioodist. See on sellepärast nii, et mida pikema perioodi eksisteerib aegruumi auk ajas ( ehk mida pikem on aegruumi augu tekkimise ja kadumise ajavahemik ), seda pikem tee on läbitud hyperruumis.

Tegelikult läbib füüsikaline keha aegruumi tunneli ainult ühe hetkega ehk keha eksisteerib hyperruumis null sekundit. Aegruumi tunneli pikkuse ehk liikumise teepikkuse hyperruumis määrab ära aegruumi augu eksisteerimise aeg aegruumis ehk aegruumi augu tekkimise ja kadumise ajavahemik aegruumis. See tähendab seda, et aegruumi augu eksisteerimise aeg aegruumis näitaks ka ajas rändava keha eksisteerimise aega hyperruumis, mille põhjal oleks võimalik välja arvutada läbitud või läbitava teepikkuse hyperruumis. Mida pikem on keha „liikumise“ teekond hyperruumis, seda kaugemale ajas rännatakse. Näiteks kui aegruumi lõkspind eksisteerib meie ajas

$$\frac{t^{\wedge}}{y} = t = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$$

siis saame ajas minevikku või tulevikku teleporteeruda  $t^{\wedge} = 3\,153\,600\,000$  sekundit ehk 100 aastat ( liigaastaid pole sealjuures arvestatud ). Kuna kinnise aegruumi lõkspinna „sees“ eksisteerib keha juba hyperruumis ehk Universumi aegruumist väljaspool, siis antud juhul näitab ajaperiood  $t$

$$t = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$$

ka kinnise aegruumi lõkspinna eksisteerimise aega  $t^{\wedge}$  Universumi aegruumis. Sellest tulenevalt on võimalik välja arvutada seda, et kui kaugele sooritatakse ajarännak ehk välja arvutada  $t^{\wedge}$  väärtuse. Kõik arvutused tehakse SI süsteemis.

Kui eespool tuletatud aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperioodi  $t$  võrrandis:

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

oleks pindala  $S$  väärtus järgmine:

$$S = 28,26 \text{ m}^2$$

siis saaksime aegruumi lõkspinna  $S$  eksisteerimise ajaperioodiks:

$$t = 5 * 10^{-9} \text{ sek}$$

mis kattub väga hästi kokku elektromagnetlainelise perioodiga, kui lainepikkus oleks 1,5 m. Selle ajaperioodi ruut:

$$t^2 = 2,5 * 10^{-17} \text{ sek}^2$$

kattub omakorda hiljuti saadud aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperioodi väärtusega:

$$\frac{t'}{y} = t = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$$

mille korral saame ajas minevikku või tulevikku teleporteeruda  $t' = 3\,153\,600\,000$  sekundit ehk 100 aastat ( liigaastaid pole sealjuures arvestatud ).

Võrdluseks võib siinkohal välja tuua selle, et näiteks kvantväljateoorias võib virtuaalne elektron-positronipaar eksisteerida vaakumis maksimaalselt:

$$t' = 1 * 10^{-22} \text{ sek}$$

Siinkohal tasub märkida seda, et antud juhul me ei arvesta matemaatilistes arvutustes lihtsalt ajaperioodiga  $t$ :

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

vaid arvestame selle ruuduga:

$$t^2 = \frac{1}{c^2} \frac{S}{4\pi}$$

ehk seega:

$$\frac{t'}{y} = t = t^2 = \frac{1}{c^2} \frac{S}{4\pi}$$

See tuleneb sellest, et pindala  $S$  on seotud raadiuse ruuduga  $R^2$ :

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi c^2 t^2$$

mis võib omakorda kirjeldada valguse teepikkust  $l$ , milles esinebki ajaperioodi ruut  $t^2$ :

$$c^2 = \frac{R^2}{t^2} = \frac{l^2}{t^2}$$

Eespool olevad arvutused näitavad, et saadud võrdus:

$$\frac{t'}{y} = t = t^2 = \frac{1}{c^2} \frac{S}{4\pi}$$

viitab sellele, et ka Universumi y-faktor

$$\frac{t'}{t} = y$$

peab olema oma olemuselt ruudus olev avaldis. Kuidas on see võimalik? Lahendus seisneb selles, et Universumi y-faktori muutumisseadus peab väljenduma ilma ruutjuureta:

$$\frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y$$

mitte ruutjuurega:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = y$$

Samasugune põhimõte kehtib ka sellise avaldise korral:

$$\frac{1}{1 - \frac{t'}{t}} = y$$

Näiteks üldrelatiivsusteoorias avaldub sarnane võrrand ilma ruutjuureta:

$$\frac{t'^2}{t^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r}} = y^2$$

milles ongi näha:  $t^2$ . Universumi y-faktori muutumisseadust käsitlesime eespool olevas kosmoloogia osas palju põhjalikumalt.

Võrrandis esineb  $4\pi$ , kuna tegemist on kera pindala valemiga. Kõiki arvutusi saab teha kera pindalaga. Näiteks inimese keha kogu pindala on võimalik “ümber teisendada” kera pindalaks ja vastavalt sellele teha vajalikud arvutused.

Inimese keha kogu pindala  $S$  valem on avaldatav järgmiselt:

$$S = 0,2 * M^{0,425} + H^{0,725} \quad (m^2),$$

milles  $M$  on inimese keha mass (kg) ja  $H$  on inimese keha pikkus (m). Kuid viimast valemit kirjutatakse välja vahel ka nõnda:

$$S = (1000 * M)^{\frac{35,75 - \log M}{53,2}} \frac{H^{0,3}}{3118,2},$$

milles  $M$  on inimese keha mass (kg) ja  $H$  on inimese keha pikkus (m). Inimese ideaalne kaal (kg) on avaldatav järgmiselt:

$$M_m = (3 * H - 450 + t) 0,25 + 45,$$

milles  $M_m$  on mehe kaal,  $H$  on pikkus ja  $t$  on vanus ning

$$M_n = (3 * H - 450 + t) 0,225 + 40,5,$$

milles  $M_n$  on naise kaal,  $H$  on pikkus ja  $t$  on vanus. Aeegruumi lõkspinna pindala  $S$  kuju võib olla inimese keha kujuga ja seetõttu saab seda välja arvutada ka inimese keha pindala valemit kasutades:

$$S = 0,2 * M^{0,425} + H^{0,725} \quad (m^2)$$

või teise valemiga

$$S = (1000 * M)^{\frac{35,75 - \log M}{53,2}} \frac{H^{0,3}}{3118,2} \quad (m^2).$$

Viimased kaks võrrandit on tegelikult omavahel ligikaudselt võrdsed, sest mõlemad võrrandid kirjeldavad inimese keha pindala suurust:

$$S = 0,2 * M^{0,425} + H^{0,725} \approx (1000 * M)^{\frac{35,75 - \log M}{53,2}} \frac{H^{0,3}}{3118,2} \quad (m^2).$$

Inimese keha pindala  $S$  on keskmiselt  $1,8 \, m^2$  ehk ligikaudu  $2 \, m^2$ .

Kuna ajas rändamise füüsikateooria järgi liigub tavaruum  $K$  hyperruumi  $K'$  suhtes valguse kiirusega  $c$  ehk Universum paisub ajas valguse kiirusega  $c$ :

$$Hy = c = \frac{l}{t} = \frac{3 * 10^8(m)}{1(s)} = 3 * 10^8 \frac{m}{s}$$

siis sellest võiks järeldada seda, et ühe sekundi jooksul tavaruumis möödub hyperruumis 300 tuhande kilomeetrine vahemaa:

$$t = l$$

ehk

$$\frac{t'}{y} = l'y$$

ehk

$$1(s) = 3 * 10^8(m)$$

Kuid aeg on kogu Universumis teisenenud  $y$  korda ja aeegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperioodi ruut on:

$$\frac{t'}{y} = t = 2,522 * 10^{-17} \, sek$$

siis seega peab aja teisenemisest tulenevalt olema ka ruum teisenenud üle kogu Universumi:

$$l = l'y = 3 * 10^8 * 1,25 * 10^{26} = 3,75 * 10^{34}(m)$$

Sellest tulenevalt saame:

$$t * l = 9,4575 * 10^{17}(m) \approx 9,5 * 10^{17}(m) \approx 100(va)$$

mis tähendab seda, et näiteks saja aasta tagusesse minevikku rännates liigume hyperruumis ligikaudu saja valgusaasta pikkuse vahemaa. Täpselt samasugune põhimõte on ka teleporteeru-



misega ruumis, mille korral ei rännata ajas minevikku ega tulevikku, vaid ainult ajas „olevikus“, mille tulemusena teleportreerutakse ainult ruumis. Aastate asemele tulevad lihtsalt valgusaastad. Näiteks kui aegruumi lõkspind eksisteerib ajas

$$\frac{t'}{y} = t = t^2 = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$$

siis saame ajas olevikus ehk ruumis teleportreeruda ligikaudu 100 valgusaastat.

Siinkohal tasub märkida seda, et näiteks kui hyperruumis möödub 1 sekund, siis sellele vastaks tavaruumis järgmine ajavahemik:

$$t' = ty = y \approx 1,25 * 10^{26} \text{ sek} \approx 3,963 * 10^{18} \text{ a} \approx 4 \text{ miljardit miljardit aastat}$$

Kui aga võrrelda omavahel ajavahemikku ja ruumipikkust ( mitte enam ajavahemikke ), siis tulemuseks saame sellise väärtuse:

$$1 \text{ sek} = 3 * 10^8 \text{ m}$$

mis viitab valguse kiirusele c. Tavaruum K liigub hyperruumi K' suhtes valguse kiirusega c ehk 300 000 km/s. See tähendab seda, et kui meie aegruumis ( s.t. tavaruumis K ) on möödunud üks sekund, siis hyperruumis oleks läbitud selle aja jooksul ligikaudu 300 000 kilomeetrine vahemaa. See tähendab ka seda, et kui me rändaksime ajas minevikku või tulevikku ühe sekundi, siis me peaksime liikuma hyperruumis ligikaudu 300 000 kilomeetrise vahemaa. See kehtiks juhul, kui valguse kiirusega oleks võrdne Universumi reaalne paisumiskiirus, mitte Universumi näiline paisumiskiirus.

Kuna kerakujulise aegruumi lõkspinna „reaalne“ eksisteerimise ajaperiood on:

$$t = 5 * 10^{-9} \text{ sek}$$

ja selle raadius r on 1,5 m, siis seega saame vastavalt elektrivälja tugevuse  $E_T$  valemi järgi:

$$E_T = k \frac{q}{r^2}$$

välja arvutada elektrilaengu q suuruse:

$$\frac{E_T r^2}{k} = q = 7,5 * 10^{-4} \text{ C}$$

Saadud tulemus on suurim võimalik elektrilaeng 1,5 meetrise raadiuse kera jaoks, kuna õhu kui vaakumi „elektriline läbilöök“ on väljatugevusel:

$$E_T = 3 * 10^6 \frac{V}{m}$$

Kui elektrivälja tugevus on väärtusega:

$$E_T = 3 * 10^6 \frac{V}{m}$$

siis õhk minetab normaaltingimustel isolaatori omadused ja tekib sädelahendus. Õhu

dielektriline läbitavus ( normaalingimustel 0,9 MHz jaoks ) on:

$$\varepsilon = 1,00058986 \pm 0,00000050$$

ja Maa atmosfääri keskmine rõhk merepinnal ( normaalingimustel ) on

$$P = 101\,325\text{ Pa} = 101,325\text{ kPa} = 1\,013,25\text{ hPa ehk } 1\text{ baar ehk } 760\text{ mm Hg.}$$

Elektrilaengu  $q$  suurus võib olla ka kümme korda väiksem ehk:

$$q = 7,5 * 10^{-5}\text{ C}$$

Elektrilaengu  $q$  suuruse järgi saame välja arvutada elektriliselt laetud kera välja energia  $E$ :

$$E = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{5,625 * 10^{-7}\text{ C}}{3,3 * 10^{-10}\text{ F}} = 1704,545\text{ J}$$

milles elektrimahtuvus on:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r$$

ja elektrilaeng  $q$  avaldub:

$$q = CU$$

Kuid elektromagnetlaine energia  $E$  saame välja arvutada otse kvandienergia võrrandist:

$$E = mc^2 = \frac{h}{t} = 1,324 * 10^{-25}\text{ J}$$

milles elektromagnetlaine ja sellega kaasneva ka aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperiood on:

$$t = 5 * 10^{-9}\text{ sek}$$

Kuna üks elektronvolt võrdub:

$$1\text{ eV} = 1,60 * 10^{-19}\text{ J}$$

siis seega saadud üliväike energia avaldub elektronvoltides järgmiselt:

$$E = \frac{1,324 * 10^{-25}\text{ (J)}}{1,60 * 10^{-19}\text{ (J)}} = 8,275 * 10^{-7}\text{ eV}$$

Kui selline energia  $E$  väärtus oleks elektriliselt laetud kera välja energial  $E$ , siis oleks kera elektrilaeng  $q$  järgmise suurusega:

$$\sqrt{E2C} = q = 6,609 * 10^{-18}\text{ C}$$

mis oleks „natuke“ suurem elementaarlaengust  $e$ :

$$e = 1,6 * 10^{-19}\text{ C}$$

See tähendab seda, et saadud laengu suurus võrduks ligikaudu 41-e elementaarlaenguga:

$$\frac{6,609 * 10^{-18}\text{ (C)}}{1,6 * 10^{-19}\text{ (C)}} = 41,30$$

Siinkohal on huvitav märkida seda, et kui näiteks kvantmehaanikas sõltus osakese lainepikkus osakese massist ( ja läbi selle ka tema energiast ), siis ajas rändamise füüsikas ei sõltu aja rännu kaugus ajaränduri enda keha massist. See sõltub ainult välja energiast, täpselt nii nagu seda eespool kirjeldasime.

### 2.3.3 Ajarännu suuna määramine

Kerakujulise aegruumi lõkspinna  $S$  eksisteerimise ajaperiood  $t$ :

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

on samaaegselt seotud ka impulsiga  $p$ :

$$ct = \lambda = R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} = \frac{h}{\vec{p}} = \frac{h}{mc}$$

millest nähtub ka energia  $E$  ja aja  $t$  vaheline seos:

$$t = \frac{h}{E} = \frac{h}{mc^2}$$

Võiks ju esialgu arvata, et saadud impulss (  $mc$  ) võib olla tekkiva elektromagnetlainet ja seega ka aegruumi lõkspinna impulss  $p$ . Näiteks kui tühjas ruumis ehk vaakumis tekib magnetväli valguse kiirusega  $c$ , siis tühja ruumi ja energiavälja vahelist ajutist „piiri“ on võimalik mõtteliselt tõlgendada kahemõõtmelise „(lõks)pinnana“, millel on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseeni, kuna see „liigub“ ( „levib“ ) ruumis valguse kiirusega  $c$ . Kuid elektromagnetlainet ja seega ka aegruumi lõkspind hyperruumi suhtes tegelikult ei liigu ehk antud juhul tervikuna ei paisu ( s.t. pindala  $S$  ei suurene ). Järelikult kirjeldab impulss hyperruumi suhtes midagi muud.

Antud juhul ei käsitle me siin keha ( aegruumi augu ) impulssi ega selle suunda, mis on tingitud tavaruumis liikumisest.

Liikumatus hyperruumi suhtes tuleneb otseselt hyperruumi ja tavaruumi üldisest mehaanilisest süsteemist. Näiteks kui keha massiga  $m$  liigub tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$  ( see võib olla näiteks valguse liikumine vaakumis ), siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal ehk  $v' = 0$ . Eespool tuletatud kiiruste valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on sellisel juhul  $v = c$ :

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}$$

ja saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks

$$v' = 0.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et kui keha liigub vaakumis kiirusega  $c$  mistahes vaatleja suhtes, siis hyperruumi  $K'$  suhtes on see keha paigal (s.t. „absoluutselt paigal“). Kuna keha  $m$  liigub sellisel juhul tavaruumi  $K$  suhtes kiirusega  $c$  ehk  $v = c$ , siis aeg on tavaruumi  $K$  suhtes teisenenud lõpmatuseni ehk  $\Delta t = \infty$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{0} = \infty$$

ja seetõttu saame hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = \frac{ct}{\infty} = 0.$$

Kui keha massiga  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes aga hoopis paigal ehk  $v = 0$ , siis hyperruumi  $K'$  suhtes liigub see kiirusega  $v' = c$ . Näiteks kui me kiiruse teisenemise valemis

$$v = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

on kiirus  $v$  võrdne nulliga ehk

$$v' = c \sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}$$

siis saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes kiiruseks  $c$ :

$$v' = c.$$

Reaalses maailmas tähendab see seda, et absoluutselt kõik kehad Universumis, millel on seisumass  $m_0$  ja seega seisuenergia  $E_0 = m_0 c^2$ , liiguvad valguse kiirusega  $c$  hyperruumi  $K'$  suhtes, kuid samas võivad need meie tavaruumis  $K$  olla paigal. Ka valguse suhtes liiguvad kõik kehad kiirusega  $c$ . Kuna keha  $m$  on tavaruumi  $K$  suhtes paigal ehk  $v = 0$ , siis tavaruumi  $K$  suhtes ei ole aeg teisenenud ehk  $\Delta t = t$ :

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = \frac{t}{1} = t$$

ja seetõttu saamegi hyperruumi  $K'$  suhtes keha liikumiskiiruseks:

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

ehk

$$v' = \frac{ct}{\Delta t} = c.$$

Mistahes energia ( ka laengu elektrivälja energia ):

$$E = mc^2$$

peab omama samuti impulssi p:

$$\frac{E}{c} = mc = \vec{p}$$

millel on suunda omav suurus ehk tegemist on „vektoriga“. Näiteks laengu elektrivälja potentsiaalne energia avaldub:

$$E_p = k \frac{q^2}{r} = q \vec{E}_T r$$

ja elektrivälja energia:

$$E = \frac{q^2}{2C}$$

mille korral võimegi kasutada ka seisuenergia valemit  $E_p$  näitel:

$$E_p = q \vec{E}_T r = mc^2$$

Viimasest nähtub impulsi p avaldis:

$$\frac{q \vec{E}_T r}{c} = mc = \vec{p}$$

ehk

$$q \vec{E}_T t = \vec{p}$$

millest saab tuletada omakorda elektrijõu F definitsiooni:

$$q \vec{E}_T = \frac{\vec{p}}{t} = \frac{mc}{t} = \frac{m \vec{v}}{t} = m \vec{a} = \vec{F}$$

Jõud F esineb ka aegruumi lõkspinnal S, mille korral on näiteks aeg  $t'$  teisenenud lõpmatuse ni:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{r}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{R}{R}}} = \infty$$

ja selle tekitajaks on elektrilaeng q:

$$R = \sqrt{\frac{q^2 G}{4\pi \epsilon_0 c^4}}$$

ehk

$$R^2 = \frac{q^2 G}{4\pi \epsilon_0 c^4}$$

Viimasest saamegi elektrijõu F avaldise:

$$\frac{c^4}{G} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q^2}{\epsilon_0 S} = \vec{F}$$

millest nähtub ka elektrivälja tugevuse võrrand:

$$\frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}_T$$

ja elektrivälja potentsiaal:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \varphi$$

See viitab asjaolule, et aegruumi lõkspinna tekitajast sõltumata ( s.t. kiirusest või laengust põhjustatud aegruumi lõkspinna tekkimine ) peab olema selle impulss  $p$  kuidagi seotud ka elektrilaengu  $q$  endaga.

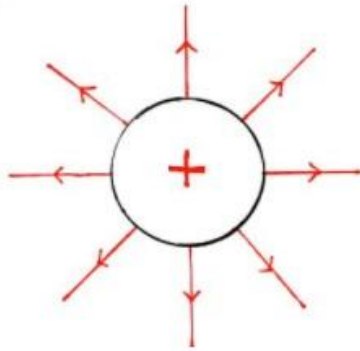
Kuna kerakujulise aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperiood on seotud ka impulssiga, mis on vektoriaalne suurus, siis seega peaks impulss olema seotud ka elektrilaengu endaga, kuna impulss, elektrivälja tugevus ja elektrijõud on kõik omavahel füüsikaliselt seotud ja matemaatiliselt tuletatavad. Antud juhul huvitab meid ainult nende suuruste suunad, mitte niivõrd nende arvulised väärtused.

KORDAN: Antud juhul huvitab meid ainult nende suuruste „suunad“, mitte niivõrd nende „arvulised väärtused“.

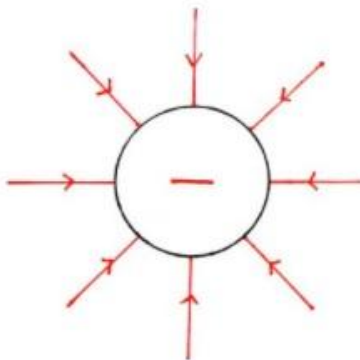
Impulss, elektrivälja tugevus ja elektrijõud on kõik suunda omavad suurused ehk need on vektorid. Kuna elektrivälja tugevus on vektoriaalne ehk suunda omav suurus, siis seega nimetatakse elektrivälja tugevust ka E-vektoriks. E-vektori suund määrab ära ka jõujoone suuna, mis on mõtteline joon, mille igas punktis on E-vektor suunatud piki selle joone puutujat. Positiivse laengu E-vektor on suunatud laengust eemale, kuid negatiivse laengu E-vektor on suunatud laengu poole. E-vektori suund ühtib laetud proovikehale mõjuva jõu suunaga, kuid magnetvälja korral ehk liikuva laengu korral on B-vektor aga proovijuhtmele mõjuva jõu suunaga risti. B-vektor on magnetinduktsioon, mis näitab ühikulise vooluga ja ühikulise pikkusega juhtmelõigule mõjuvat jõudu selle juhtmega ristivas magnetväljas.

Elektrilaeng  $q$  „asub“ kerakujulise kinnise aegruumi lõkspinna  $S$  „sees“ ja seega hyperruumis, mitte enam tavaruumis. Sellisel juhul ühtivad elektrilaengust lähtuvate E-vektorite ja B-vektorite suunad ajas liikumise suundadega ( liigutakse jõu mõjul ), kuna hyperruum kui „ajaruum“ on selline ruumidimensioon, milles on võimalik liikuda ( ehk teleportreeruda ) ajas:

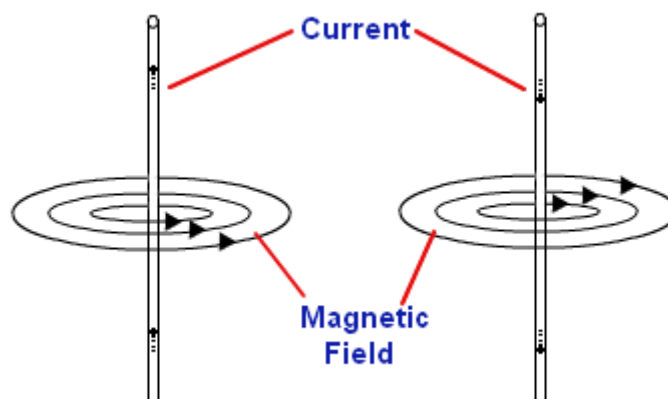
1. Näiteks kui positiivse laengu korral on E-vektor suunatud laengust eemale, siis hyperruumis ühtib see suunaga tulevikku, kuna tulevikus on paisumise tõttu Universumi ruumala suurem. Sellisel juhul on ajaränd suunatud tulevikku. Joonis:



2. Kui E-vektor on negatiivse laengu korral suunatud laengu poole, siis hyperruumis ühtib see suunaga minevikku, kuna minevikus oli pideva paisumise tõttu Universumi ruumala väiksem. Sellisel juhul toimuks ajaraud minevikku. Joonis:



3. Kui E-vektori asemel oleks hoopis B-vektor, siis hyperruumis ei ühtiks selle suund ei mineviku ega tulevikuga. Sellisel juhul on jõud suunatud „oleviku poole“ ja seetõttu toimuks teleportatsioon meie igapäevaselt kogetavas ruumis ehk tavaruumis. Joonis:



Vooluga juhtmele mõjuv magnetjõud on suunatud alati risti nii voolu kui ka magnetvälja suunaga, kuid antud juhul on meil oluline ainult magnetvälja jõujoon, mis lähtub laengust ja mis näitab magnetvälja suunda. See on mõtteline joon, mille igas punktis on B-vektor suunatud piki selle joone puutujat. Jõujoone suund ühtib B-vektori suunaga antud punktis. Voolu suund ja B-vektori suund on omavahel alati risti. B-vektor on magnetinduktsioon, mis näitab ühikulise vooluga ja ühikulise pikkusega juhtmelõigule mõjuvat jõudu selle juhtmega ristivas magnetväljas. Magnetinduktsiooni suunda kui vektoriaalse suuruse suunda näitab

magnetväljas orienteerunud magnetnõela põhjapoolus. Antud juhul ei ole oluline B-vektori suund ( päripäeva või vastupäeva ), vaid oluline on see, et E-vektori asemel oleks B-vektor.

Elektrivoolu suund tingib magnetvälja jõujoonte suuna päripäeva või vastupäeva. Kuid rõngasmasina korral on tegemist ringvooluga ja magnetvälja jõujoonte suuna ebaolulisuse tõttu ei ole oluline ka voolu suund.

Siinkohal peab kindlasti ära mainima ka seda, et teleportreerumise suund tavaruumis ( mitte hyperruumis ) sõltub keha impulsi suunast, mitte enam keha laengust lähtuva jõujoone suunast. See tähendab seda, et keha teleportreerub tavaruumis sellises suunas, mis suunas toimuks ka tema tavapärane liikumine. See tähendab, et antud juhul teleportreerutakse „liikumise hetkel“.

Kvantmehaanikast tuntud määramatuse relatsioon impulssi  $p$  ja koordinaadi  $x$  vahel avaldus:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

ehk

$$\Delta p \Delta x = h$$

Tekib küsimus, et mis on viimase saadud võrrandi füüsikaline sisu aegruumi lõkspinna korral. Näiteks aegruumi lõkspinna lainelist olemust on veidi keeruline ettekujutada ja aegruumil ning selle kõverusel ei ole energiat ega seega impulssi. Näiteks gravitatsiooniväljal ehk aegruumi kõverusel ei ole energiat – s.t. see ei ole oma olemuselt energiaväli nagu seda on näiteks elektriväli. Kuna viimane saadud võrrand

$$\Delta p \Delta x = h$$

on otseselt tuletatud võrrandist

$$\Delta E \Delta t = h$$

siis seega võrrandi  $\Delta p \Delta x = h$  füüsikaline mõte ja sisu aegruumi lõkspinna korral seisneb järgnevas võrdlevas analüüsis. Kuna eespool tuletatud võrrandis

$$Et = mc^2 t = h$$

tähistab energia  $E$  elektrivälja energiat, mis määras ära tekkiva aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperioodi  $t$  Universumi aegruumis, siis seega näitab võrrandis

$$Et = mc^2 t = mcct = px = h$$

ehk

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

olev impulss  $p$  seda, et energiat omav elektriväli ( ja sellest tulenevalt ka aegruumi lõkspind ) omab impulssi  $p$ , kuna see eksisteerib teatud ajaperioodi  $t$  Universumi aegruumis ehk „liigub“ hyperruumi suhtes kiirusega  $c$ . Sellest tulenevalt ongi elektriväljal ( ja seega ka aegruumi lõkspinnal ) impulss  $p$ :

$$\frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc = mv = p$$

ja Universumi aegruumis eksisteerimise tõttu ka teepikkus  $x$  hyperruumis:

$$ct = x$$



Seisueenergia  $E = mc^2$  tulenes samuti keha või välja eksisteerimisest Universumi aegruumis ehk liikumisest hyperruumi suhtes kiirusega  $c$ . Kui ajaperiood  $t$  on  $t = 2,522 * 10^{-17} \text{ sek}$  ja valguse kiirus  $c$  on  $c = 3 * 10^8 \text{ m/s}$ , siis saame teepikkuseks  $x$  järgmiselt:

$$x = (3 * 10^8) * (2,522 * 10^{-17}) = 7,56 * 10^{-9} \text{ m}$$

Elektrivälja energia  $E$  määrab ära impulssi  $p$  suuruse ehk selle arväärtuse võrrandis:

$$\frac{E}{c} = p$$

Kui elektrivälja energia  $E$  on  $E = 4,181 * 10^{-18} \text{ J}$  ja valguse kiirus  $c$  on  $c = 3 * 10^8 \text{ m/s}$ , siis saame impulsiks:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc = \frac{4,181 * 10^{-18}}{3 * 10^8} = 1,3936 * 10^{-26} \frac{\text{J}}{\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}$$

ja sellest tulenevalt saame selles oleva massi  $m$  välja arvutada järgmiselt:

$$m = \frac{p}{c} = \frac{mc}{c} = \frac{1,3936 * 10^{-26}}{3 * 10^8} = 4,6453 * 10^{-35} \text{ kg}$$

Võrdluseks võib siinkohal välja tuua näiteks rohelise valguse footoni massi, milleks on  $4,4 * 10^{-36} \text{ kg}$  ( rohelise valguse sagedus on näiteks  $f = 6 * 10^{14} \text{ Hz}$  ). Kuid antud juhul ei huvita meid see impulssi arväärtus, vaid selle vektoriaalne väärtus ehk selle suund kinnise aegruumi lõkspinna sees ( ehk seega hyperruumis ) eksisteeriva laetud keha suhtes. See tähendab seda, et kui elektrivälja energia  $E$  määras ära aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperioodi  $t$  pikkuse Universumi aegruumis:

$$t = \frac{h}{E}$$

siis impulssi  $p$  korral määrab selle suuruse samuti elektrivälja energia  $E$ :

$$\frac{E}{c} = p$$

ja sellest tulenevalt peab selle ( s.t. impulssi ) suuna ära määrama elektrivälja  $E$ -vektor, mis on elektrivälja tugevuse vektoriaalsust kirjeldav suurus. Elektrivälja tugevus näitab, et kui suur elektrijõud mõjub selles väljas ühikulise positiivse laenguga kehale. Kuna aeg  $t$  näitas aegruumi lõkspinna eksisteerimise ajaperioodi hyperruumis, siis sellest tulenevalt näitab  $x$

$$x = ct$$

aegruumi lõkspinna poolt läbitud teepikkust hyperruumis ( „piltlikult väljendades“ aegruumi tunneli pikkust ). See tähendab seda, et füüsikalise keha ajas liikumise suund hyperruumis sõltub sellest, et millises suunas on aegruumi lõkspinna impulss  $p$  suunatud selle sama aegruumi lõkspinna sees ( ehk seega hyperruumis ) eksisteeriva elektrivälja ( ja seega ka elektrivälja tekitava keha ) suhtes. Aegruumi lõkspinna impulsi  $p$  suund on omakorda määratud selle sees eksisteeriva elektrivälja  $E$ -vektori suunaga aegruumi lõkspinna suhtes. Füüsikaline põhjendus seisneb selles, et näiteks liikuva keha impulsi ja talle mõjuva jõu vektorid peavad olema ruumis ühesuunalised, sest keha liikumine toimub ju jõu mõjul. Näiteks kivi kukub raskusjõu mõjul alati Maa tsentri suunas ja seetõttu on kivi

liikumise ja Maa raskusjõu vektorid ühesuunalised. Ka valguslaine liikumise korral ühtib selle impulsi suund valguslaine levimissuunaga.

### 2.3.4 Inimese ajas rändamise reaalsed juhtumid

Tekib paratamatult küsimus, et kui ajas rändamiseks piisab näiteks elektrilaengu välja muutmise ümber inimese keha, siis miks pole maailmas teada juhtumeid, mille korral on avaldunud inimese aja rännak. Kuna maailmas saavad inimesed kuskil igapäev elektrostaatilise laengu, siis miks ei ole kuulda sellest, et keegi on ka ajas rännanud. Elektrostaatilise laengu tekkimine inimese keha pinnal on tegelikult üsna tavaline ja lausa igapäevane nähtus kõikjal maailmas. Selline küsimus on loogiline ja otseselt tulenev eelmistest teadmistest, mille korral inimene rändaks ajas, kui tema elektrilaengu väli muutuks kogu tema ümbritsevas ruumis.

Kuid tegelikult on maailmas teada palju juhtumeid, mille korral on inimesed ajas rännanud. See tähendab seda, et ajaloo jooksul on dokumenteeritud ja teadlaste poolt uuritud juhtumid, mille korral on avaldunud inimese ajas rändamine. Need juhtumid ei ole maailmas eriti tuntud ja need ei ole ka väga levinud. Sellegipoolest on nende esinemissagedus palju suurem kui inimese keha isesüttimise juhtumid. Vastavalt statistika järgi esinevad juhtumid tegelikult palju rohkem kui me sellest tegelikult teada saame. Üheks põhjuseks loetakse seda, et inimesed, kes on ajas rännanud, ei julge avalikult sellest rääkida, kartes hullu reputatsiooni alla sattumist. Kuid kõige erakordsem on asja juures see, et neid juhtumeid on võimalik seletada just eelnevalt mainitud teooriatega, mille korral inimene rändaks ajas, kui tema elektrilaengu väli muutuks kogu tema ümbritsevas ruumis. Neid ajas rändamise juhtumeid on võimalik seletada väga täpselt just antud ajas rändamise teooriast tulenevate järeldustega, mis on kirja pandud ja esitletud kogu eelneva üle 100 lehekülje materjalina. Seetõttu on ääretult oluline neid juhtumeid väga põhjalikult uurida ja analüüsida. Need juhtumid annavad üsna objektiivse tunnistuse antud ajas rändamise teooria paikapidavusest, vähemalt teoreetilise tõenduse/usutavuse. Neid juhtumeid on uuritud sajandeid ja need on ajaloo jooksul hästi dokumenteeritud. Üks tuntumaid uuriv-eksperte oli Jenny Randles, kes dokumenteeris sadu inimeste ajas rändamise juhtumeid.

Maailmas saavad elektrostaatilise elektrilaengu miljonid inimesed, kuid mitte igäüks nendest ei rända kohe ajas. Täpselt sama on tegelikult ka inimese kehast väljumisega. Näiteks mitte kõik kliinilises surmas olevad inimesed ei koge surmalähedasi kogemusi ehk ei välju oma kehadest. Inimese ajas rändamine ja kehast väljumine saavad toimuda ainult ühes kindlas elektrilaengute väljade muutuste ruumilises konfiguratsioonis, mis kord avaldub ja kord ei avaldu. See teebki need nähtused ikkagi üsna haruldasteks.

Ajas rändamise avaldumise korral tekib muutuv väli ümber inimese keha kõikjal ühekorraga. See tähendab seda, et energiaväli peab muutuma ümber inimese keha kõikjal korraga, mitte nii, et väli muutub ühes keha otsas enne ja teises keha otsas veidi hiljem. See on väga väga oluline tingimus. Selles mõttes toimubki inimese ajas rändamine ainult ühes kindlas elektrilaengute väljade muutuste ruumilises konfiguratsioonis, mis kord avaldub ja kord ei avaldu.

Järgnevalt on tsiteeritud neid reaalseid juhtumeid, mis on esitatud ja kirjeldatud väga heas

raamatus „Mõistatuslike nähtuste entsüklopeedia” ( „Encyclopedia of the unexplained” ), lk. 99-110. Antud teoses on esitatud ainult kõige tuntumad ja kõige uuritavamad juhtumid:

„On teada rohkesti juhtumeid, mil inimesed on näinud paiku sellisena, nagu need võisid endisaegadel olla. Ruth Manning Saunders kirjeldab üht seda laadi seika oma 1951. aastal ilmunud raamatus „*The River Dart*“. Kolm tüdrukut olid koos isaga Buckfastleigh' lähedal Hayfordis jahiretkel. Öhtupoolikul lonkisid tüdrukud omapäi eemale ning eksisid laskuvas pimeduses ära. Autor kirjutab: „Oma rõõmuks nägid nad eespool valgust ning jõudsid teeäärse elamuni. Kardinatega katmata akendest paistis punakat tulekuma, mis soojendas sõbralikult ööd. Kolm tüdrukut vaatasid aknast sisse ning nägid tule ääres küürakil istuvat taati ja eite. Ent äkki, ennäe, olid tuli, vanamees ja eit ning kogu maja kadunud, nende asemel laskus öö nagu mustendav kott.““

„*On teada rohkesti juhtumeid, mil inimesed on näinud paiku sellisena, nagu need võisid endisaegadel olla.*“ See tähendab seda, et ajas ümberpaiknemise juhtumeid esineb maailma mastaabis tegelikult päris sageli, ainult et avalikkuseni jõuab nendest väga väike osa. Teadaolevad juhtumid moodustavad ainult väga väikse osa kogu asetleidvatest juhtumitest maailmas. See on ilmselt sellepärast nii, et inimesed enamasti pelgavad rääkida oma läbielatud teistele kartes oma ühiskondliku reputatsiooni ja terve mõistuse pärast. Ajas rändamist peetakse üldiselt võimatuks ja oma läbielatud ei saa ka kuidagi teistele empiirilisel tõestada. Seetõttu jääb suur osa juhtumitest maailmas kajastamata mistahes vormis.

„*Kolm tüdrukut vaatasid aknast sisse ning nägid tule ääres küürakil istuvat taati ja eite. Ent äkki, ennäe, olid tuli, vanamees ja eit ning kogu maja kadunud, nende asemel laskus öö nagu mustendav kott.*“ Sellest järeldub, et ajas rändamine minevikku või tulevikku on oma olemuselt ajas teleportreerumine ja see on heas kooskõlas ajas rändamise füüsikateooriaga. Ajas teleportreerumine väljendub selles, et rännatakse ajas minevikku hetkega ( s.t. 0 sekundiga ) ja seetõttu muutub ajaränduri ümbritsev maailm ühe ainsa hetkega vastavalt selliseks, milline oli maailm sellisel ajahetkel, kuhu ajas „liigutakse“.

„Ilmselgelt on teisest ajast pärit hooneid näinud ka ühendriiklasest bioloog ja paranormaalsete nähtuste uurija Ivan T. Sanderson. Ta sõitis koos naise ja assistendiga kuskil Haiiti kolkas, kui nende auto jäi porri kinni. Nad jätsid sõiduki maha ning läksid jalgsi edasi, kuni väsimus nende üle võimust võttis. Oma raamatus „*More Things*“ kirjutas Sanderson: „Tolmuselt maapinnalt äkki pilku kergitades nägin säravas kuuvalguses kahel pool teed mitmesuguse suuruse ja kujuga kolmekorruselisi maju, millest langes just selliseid varje, nagu need pididki heitma.“ Stseen jätkus, maapind muutus mudasemaks, ja seda oli munakividega sillutatud. Naine sirutas käe ettepoole ja kirjeldas vapustatult sedasama, mida meeski nägi. Sanderson oli veendunud, et ta näeb enda ees Pariisi maju. Kui nad olid neid mõnda aega silmitsenud, valdas mõlemat tugev peapööritus. Sanderson hõikas assistenti, kes oli neist pisut maad ette jõudnud. Mees tuli tagasi ja bioloog palus talt sigaretti. Niipea kui assistendi tulemasina leek kustus, kadus ka viieteistkümnenda sajandi Prantsusmaa nägemus. Veelgi enam, assistent ei näinud seda ega pannud ka midagi muud tavatut tähele.“

„*Ilmselgelt on teisest ajast pärit hooneid näinud ka ühendriiklasest bioloog ja paranormaalsete nähtuste uurija Ivan T. Sanderson. Ta sõitis koos naise ja assistendiga kuskile Haiiti kolkas, kui nende auto jäi porri kinni.*“ Tähelepanuväärne on see, et ajas on rännatud autoga, jalgrattaga sõites, kõndides, on rännatud üksinda või lausa koos mingi grupiga, välitingimustes või hoonete sees, erinevate ilmaolude korral jne. See on tõepoolest tähelepanuväärne, et kui erinevate olukordade ja

erinevate keskkondade korral on avaldunud ajas ümberpaiknemine. Antud juhul on ajas rändanud korraga kolm inimest ja kõik need kolm inimest on saanud ühe ja sama kogemuse osaliseks. Väga palju on ka selliseid juhtumeid, kus inimene on üksinda olles ajas rändanud. Ilmaolude poolest on ajas ümberpaiknemise juhtumid esinenud enamasti siis, kui tulekul on mõni äikesetorm ja atmosfääris on seetõttu tavatust palju rohkem elektrienergiat.

*„Niipea kui assistendi tulemasina leek kustus, kadus ka viieteistkümnenda sajandi Prantsusmaa nägemus. Veelgi enam, assistent ei näinud seda ega pannud ka midagi muud tavatut tähele.“* Jälle taas üks asjaolu, mis viitab ajas teleportreerumise olemusele. Ajas „rännatakse“ hetkega ehk teleportreerutakse, mitte nii nagu me oleme harjunud ulmefilmides nägema. Ajaränduri ümbritsev maailm muutub hetkega, mitte üleminekuga ( ehk evolutsioneerudes ) ühest aastast teise. Kõikide ajas rändamise juhtumite korral on tegemist ajas teleportreerumisega ja see ühine iseloomujoon annab usutavust juurde, et need juhtumid on ka tegelikult aset leidnud. Ajas teleportreerumise iseloomujoon on täiesti kooskõlas ajas rändamise füüsikateooriaga.

*„Kui nad olid neid mõnda aega silmitsenud, valdas mõlemat tugev peapööritus.“* Ajanihke fenomenide juures on tõepoolest väga sageli inimesed tundnud psühholoogilisi aspekte – peapööritusi, masendust, reaalsustaju teisenemisi jne. Millest need täpsemalt tulevad, ei oska teadus kahjuks veel öelda. Kindlalt on teada ainult seda, et sarnased psühholoogilised ilmingud esinevad inimesel siis kui inimene on vahetult kokkupuutes elektromagnetväljadega. Sellised asjaolud tulevad välja eksperimentaalfüüsika uurimustest, näiteks Tarmo Koppeli uurimused. See tähendab seda, et psühholoogilised ilmingud ajanihete fenomenide korral ja elektromagnetväljade mõju inimese kehale ning ajule on äärmiselt sarnased, mis vihjab ühisele päritolule. *„Masendustunnet ning muid iseloomulikke tajuga seonduvaid seiku on kirjelduste põhjal teistegi ajanihke fenomenide puhul ilmnenud.“* „Ajanihet kogenud inimesed mainivad sageli tunnet, nagu eksisteeriks korraga kaks ajatsooni, millest üks kattub osaliselt teisega.“

„Raamatu „*The Mask of Time*“ autor Joan Forman koges teose jaoks materjali hankides samuti ajanihet. Ta külastas nädalase puhkuse ajal Derbyshire'is asuvat Haddon Halli. Seisatanud õues, nagi ta mingil trepil mängivat nelja last. Kõige vanem, umbes üheksaastane tüdruk, oli seljaga Joani poole. Missis Forman kirjeldas lapse valget hollandi kübarat, pitskraega pikka rohekashalli kleiti ja õlgadele langevaid blondjuukseid. Ta kuulis laste naeru, ehkki mõistis, et füüsiliselt ta lapsi oma silmaga ei näe. Äkki pööras tüdruk näo tema poole. Joan Forman oli ette kujutanud, et laps on väga ilus, kuid tegelikult osutus too üsna lihtlaseks. Vapustatud missis Forman astus sammu edasi, ja kõik lapsed kadusid äkki. Ta sisenes Haddon Halli ja hakkas kohatud tüdruku portreed otsima. Lõpuks märkaski ta seda. Maalil kujutatud laps oli küll noorem, kuid ta tundis tolle rohmaka lõuajoone ja tõntsi nina eksimatult ära. Joan Forman oli ilmselt leedi Grace Mannersit – palju aastaid pärast tolle surma – mängiva lapsena kohanud.“

*„Vapustatud missis Forman astus sammu edasi ja kõik lapsed kadusid äkki.“* Tegemist on taas ajas teleportreerumise ilminguga ja selles pole kahtlust. Vastavalt ajas rändamise füüsikateooriale saab ajas rännata hyperruumi dimensioonis ehk väljaspool aegruumi. Seda võimaldab aegruumi tunnel ehk ussiauk, mis võib tekkida elektromagnetilisest vastastikmõjust. Põhimõte on selles, et kui inimene on teleportreerunud ajas, siis ajas rändamise füüsikateooria järgi ongi inimene läbinud ussiurke ehk aegruumi tunneli. Aegruumi tunnelit pole võimalik visuaalselt

vaadelda, sest selle eksisteerimise aeg on äärmiselt väike. Aegruumi tunnel ( s.t. hyperruumi dimensioon ) läbitakse hetkega ja seda mõistame füüsiliselt teleportatsioonina.

*„Keegi meenutas Joan Formanit, kes oli paigast liikudes sedamaid neli mängivat last silmist kaotanud. Kas ta „pidi“ peatuma täpselt selles punktis, et teatud tingimustel võiks minevikuetendus taas silmade ees hargnema hakata?“ „Kui Joan Forman külastas Haddon Halli maja Derbyshire'is, sai ta heita põgusa pilgu möödunud aegadesse. Teatud punktis nägi ta leedi Grace Mannersit lapsena mängivat – aastaid pärast tema surma.“* Aegruumi tunnel võimaldab liikuda ( s.t. teleporteeruda ) ajas. Aegruumi tunnel tekib elektromagnetilise vastastikmõju tulemusena, täpsemalt öeldes elektrilaengute väljade muutuste korral. See tähendab seda, et kui inimese kehat ümbritseb muutuv väli, siis võib tekkida aegruumi lõkspind elektriliselt laetud pinna lähedusse. See lõkspind on sellisel juhul inimese keha kujuga ja aegruumi lõkspinda võib tõlgendada aegruumi tunneli sisse- ja väljakäiguna. Läbides aegruumi tunnelit ( mis võimaldab liikuda hyperruumis ehk väljaspool aegruumi ) teleporteerutaksegi ajas. Muutuva välja tekkimine inimese keha pinna läheduses sõltub inimese ja keskkonna mõjude vahekorra. *„Ajanihe ilmnemine näib vajavat mingit päästikut. Selle rolli näib sobivat äkiline valgusesähvatus või tavatu hulk elektrienergiat atmosfääris, sest need võivad õigete tingimuste puhul inimajuga vastastikku toimida.“*

Mistahes energiavälja muutumise korral ilmneb lühiajaliselt ka „aegruumi lõkspind“, millel on aeg ja ruum erirelatiivsusteooria järgi teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni. Näiteks kui tühjas ruumis tekib magnetväli valguse kiirusega  $c$ , siis tühja ruumi ja energiavälja vahelist ajutist „piiri“ on võimalik mõtteliselt tõlgendada kahemõõtmelise „pinnana“, millel on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseni, kuna see „liigub“ ( „levib“ ) ruumis valguse kiirusega  $c$ . Musta augu tsentris oleval Schwarzschildi pinnal ehk musta augu „horisondil“ on aeg ja ruum samuti teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseni. Musta augu Schwarzschildi raadius  $r$  määrab ära Schwarzschildi pinna  $S$  suuruse.

„Pensionär missis Charlotte Warburton, kes elas koos abikaasaga Kenti krahvkonnas Tunbridge'i lähedal, sattus teispäeval, 18. juunil 1968 korra ajas tagasi. Abielupaar oli sõitnud linna sisseoste tegema ning pärast läks kumbki oma asju ajama, leppinud kokku, et hiljem kohtutakse samas kohvikus, kus alati. Tavalised ostud tehtud, käis missis Warburton veel mõnes kaupluses, otsides purgikeeksi. Nii sattus ta ka tundmatusse väikesesse selvepoodi. Keeksi seal polnud, kuid poes ringivaatav pensionär pani tähele vasakus seinas olevat käiku, ning uudishimu sundis teda lähemalt uurima. Käigust pääses suurde mahagonpaneelidega ristikülikukujulisse ruumi, mille kujundus erines järsult kaupluse modernsest kroom- ja plastilustustest. Missis Warburton kirjeldas seda: „Ma ei pannud ühtki akent tähele, kuid ruumi valgustas terve hulk väikesi jääklaasist kuplitega elektripirne. Nägin kaht paari, kes kandsid sajandi keskpaigast pärinevaid rõivaid, ning ühe naise riietus jäi mulle selgesti meelde. Tal oli poolviltu pähe seatud beež viltkübar, mille vasaku serva külge oli kinnitatud tutike tumedat karusnahka. Ka naise mantel oli beež, ning paarkümmend aastat tagasi võidi seda väga moodsaks pidada.“ Missis Warburton pani tähele ka mitut sakoülikonda kandvat meest ning kõrval asuvat klaaskabiini, kus istus kassiir. Kõik jõid kohvi ja lobisesid omavahel, milles ei paistnud midagi iseäralikku olevat, arvestades, et käes oli keskhommikutund. Ent pensionärile tundus veider, et ta polnud sellest kohvikust varem midagi kuulnud, ja hiljem meenus talle, et ta ei olnud üldse kohviaroomi haistnud. Kohtunud abikaasaga, rääkis missis Warburton talle oma leiust, ning nad otsustasid

järgmisel teispäeval selles uues kohvikus ära käia. Nädal hiljem tehti sisseoste nagu tavaliselt; pärast seda läksid nad tollesse väikekauplusesse ning astusid sennapoole, kus kohvikuks oli olnud. Ent nüüd seisis samal kohal seina ääres toidu külmlett. Mister Warburton oli kaljukindel, et ta naine ei olnud eksinud, ja käis koos temaga veel kahes samasuguses kaupluses, kuid otsitavat ei leitud sealtki. Missis Warburtonil oli kogetu nii selgelt silme ees, et ta hakkas arvama, nagu oleks tema taju viivuks tagasi libisenud aega, mil mahagonpaneelidega kohvik alles eksisteeris. Charlotte Warburton otsustas ise juhtunust selgusele jõuda. Ta astus ühendusse kellegi sealse naisega, kes tundis psüühikanähtustest vastu huvi, ning päris, kas too mäletab mingit seesugust kohvikuruumi. Talle vastati, et mõni aasta tagasi oli kaupluse kõrval asunud kino, sellest vasakul aga Tunbridge Wells Constitutional Club. Naine mäletas, et siis, kui ta Teise maailmasõja aegu klubis käis, nägi ta seal väikesi suupistete laudu ja mahagonpaneelidega seinu. Missis Warburton ei jäänud ikka veel rahule, otsis nimetatud klubi selle uuest asupaigast üles ning leidis ka klubi majandusülesannet, kes oli töötanud sellel kohal 1919. aastast alates. Too teatas, et vanadesse klubiruumidesse pääses kaupluse kõrvalt tänavapoolsest uksest, ja edasi tuli trepist üles minna. Ülakorrusel oli olnud ka einetuba, mille sisustus sobis täpselt missis Warburtoni kirjeldusega.“

*„Missis Warburton pani tähele ka mitut sakoülikonda kandvat meest ning kõrval asuvat klaaskabiini, kus istus kassir. Kõik jõid kohvi ja lobisesid omavahel, milles ei paistnud midagi iseäralikku olevat, arvestades, et käes oli keskhommikutund.“*

*„Missis Warburtonil oli kogetu nii selgelt silme ees, et ta hakkas arvama, nagu oleks tema taju viivuks tagasi libisenud aega, mil mahagonpaneelidega kohvik alles eksisteeris.“ „Ajanihked ei ole kujuteldavad nähtused. Sageli selgub, et nende kaudu saadud informatsioon vastab täielikult tegelikkusele.“*

„Kõige tuntum ajas ümberpaiknemise juhtum leidis aset kahe inglise turistiga, kes külastasid Versailles' paleed, Prantsusmaa kuningliku perekonna elupaika seitsmeteistkümnendal ja kaheksateistkümnendal sajandil. Asjaosalised – nagu ka pool sajandit hiljem Dieppe'i juhtumil puhul – olid kaks naist: miss Anne Moberley ja miss Eleanor Jourdain. Neid keskealisi daame võis pidada haritud inimesteks. Miss Moberley oli Oxfordi St. Hugh' kolledži juhataja ja miss Jourdain Watfordi tütarlastekooli direktress. Mõlemad tundsid ajaloo vastu huvi ega kaldunud fantaseerima. 1901. aasta 10. augusti soojal pärastlõunal väljusid need vallalised daamid Galleries des Glaces'ist ning otsustasid Petit Trianoni juurde jalutada. Nad polnud tees päris kindlad ning pöördusid vaiksele tänavale, kus miss Moberley nägi naist, kes aknast mingit riidetükki välja kloppis. Hiljem sai ta teada, et sõbratar polnud seda näinud, ja hoonetki polnud olemas. Nad läksid üle teeraja, kus märkasid kaht meest, kes kandsid pikki hallikasrohelist röövaid ja kolmnurkset kübarat. Nood paistsid seal töötavat, sest käeulatuses olid käru ja labidas. Mehed juhatasid neile õige suuna kätte ning daamid jätkasid jalutuskäiku. Siis märkas miss Jourdain majalävel seisvat naist ja teismelist tüdrukut, mõlemal vanaaegsed kleidid seljas. Sellest hetkest alates tundus maastik luupainajalikult teisenevat; see muutus lamedaks, peaaegu kahemõõtmeliseks, ning mõlemad naised tajusid neist üleuhkavat depressioonilainet. Nad lähenesid sel hetkel ümmargusele aiamajakesele, kus istus keegi mees. Temas tundus peituvat midagi kurjakuulutavat ja eemaletõukavat, ning nad ei saanud temast mööduda. Äkki kostis selja tagant samme, kuid ringi vaadates ei näinud naised kedagi. Miss Moberley märkas nüüd veel üht nende lähedal seisvat inimest, mantli ja kübaraga meest, kes neile soojalt naeratas. Ta juhatas nad maja juurde. Teel märkas miss Moberley muruplatsil joonistavat naist. Too kandis sügava väljalõikega kleiti ning valget laia servaga kübarat. Naine pööras ringi ja vaatas mööduvatele võõrastele järele. Miss Moberley sai alles hiljem teada, et tema sõbranna polnudki näinud isikut, kes sarnanes hämmastavalt kaheksateistkümnenda sajandi Prantsusmaa kuninganna Marie-Antoinette'iga. Edasi minnes panid naised tähele majast

väljuvat „lakei moodi väljanägemisega“ noormeest. Too lajatas ukse tagantkätt kinni ning juhatas nad Petit Trianoni sissepääsu poole. Hoones hakkas naisi vallanud masendus ja ebatõelisuse õhkkond hajuma.“

*„Kas nad olid ajas tagasi libisenud ning näinud Prantsuse revolutsiooni eelsetest aegadest pärit hooneid ja inimesi või leidis kõigel palju proosalisem seletust? Nende raamat „An Adventure“ avaldati kümme aastat hiljem. Sellest ajast alates on kirjeldatud juhtumit väga põhjalikult uuritud. Kriitikud leidsid naiste kirjeldustes vasturääkivusi. Hiljem tuli ilmsiks, et kaheksateistkümnendasse sajandisse kiindunud comte Robert de Montesquiou-Fezensaci nimeline aristokraat tavatses selle ajastu kostüümidesse rõivastuda ning koos mõne sõbraga Versailles´ aedades ringi käia. Keegi teadis lisada, et lapsepõlves olevat ta tundnud naist, kes suveti kostümeeris ennast Marie-Antoinette´iks ning tavatses Petit Trianoni aias istuda. Kas kaks inglannat olid kohanud lihtsalt vanaaegseid rõivaid kandvaid näitlejaid? Seda selgitust õigeks pidades tuleb aga nähtust muud iseäralikud seigad kõrvale tõrjuda. Kui tõepoolest oli tegemist näitlejatega, kuidas siis võis juhtuda, et mitmel juhul nägi neid ainult üks tunnistaja? Daamid kirjeldasid hooneid ja radu, mida kahekümnendal sajandil polnud enam olemas. Tõepoolest, kui nad oleksid mööda osutatud teed läinud, siis pidanuks nad läbi mitme tellismüüri kõndima. Masendustunnet ning muid iseloomulikke tajuga seonduvaid seiku on kirjelduste põhjal teistegi ajanihkefenomenide puhul ilmnenu.“*

*„Sellest hetkest alates tundus maastik luupainajalikult teisenevat; see muutus lamedaks, peaaegu kahemõõtmeliseks, ning mõlemad naised tajusid neist üلهuהkavat depressioonilainet.“ „Hoones hakkas naisi vallanud masendus ja ebatõelisuse õhkkond hajuma.“ „Masendustunnet ning muid iseloomulikke tajuga seonduvaid seiku on kirjelduste põhjal teistegi ajanihke fenomenide puhul ilmnenu.“*

„Marie Antoinette´i väikese Versailles´ palee Petit Trianoni lähedal satuvad meie kaasaegsed vahel 200 aasta tagusele peole, kus XVIII ( 18. ) sajandi õukondlaserõivastuses inimesed jalutavad grupiti ja vestlevad ning tuul kannab kaugusest menuetiviise. Noor naine maalib midagi molbertile paigaldatud lõuendile. Tema poole vaatavad kaks daami, kellest noorem on heledapäine hõbejat kleit ja õlgkübarat kandev kaunitar, kes hoiab süles väikest koera. Tulevikust pärinevatele külalistele ei osuta need inimesed vähimatki tähelepanu. Esimesena sattusid sellele peole kaks inglannat, miss Moberly ja miss Jordan 1901. aasta 10. augustil. Tükk aega ei rääkinud daamid asjast kellelegi ning alles 1911. aastal otsustasid nad juhtunu avalikustada. Toda minevikuvisiiti olid saatnud iselaadi irrealsusetunne ja raske väsimus, ent neid, kes olid psüühiliselt täiesti normaalsed, kinnitasid, et tegemist polnud miraaži ega nägemusega. Nad olid tõepoolest käinud Versailles´ pargis, küsinud kahel korral teed Petit Trianoni juurde ja saanud viisaka vastuse kavaleridelt, kes paistsid olevat ajaloolise teatrietenduse osatäitjad. Korrapäratute vaheaegadega, kord üsna sageli, kord paljude aastate tagant on see stseen ilmutanud end üksikutele pealtnägijatele. Nende jutustused on alati olnud ühesugused. Kõik leiab aset paari minuti jooksul, seejärel muusikahelid hääbuvad, hääled vaibuvad ja allee võtab taas nüüdisaegse ilme. Versailles´ pidu on näinud eri rahvustest, ühiskondlikust positsioonist ja vanusest inimesed, keda ühendab ainult üks asi: nad läksid Versailles´s esmakordselt ja polnud selle „minevikuetenduse“ kohta varem midagi kuulnud.“ ( Paradoks 10 – 1999, TV 1999 ).

„Veel üks ilmekas ajanihkefenomen – ja taas olid mängus Prantsusmaale saabunud inglise turistid – leidis aset 1979. aasta oktoobris. Len ja Cynthia Gisby ning nende sõbrad Geoff ja Pauline Simpson kavatsesid kodust Kenti krahvkonnast Hispaaniasse reisida. Ületanud La Manche´i, sõitsid nad autoga Montélimari. Pimeduse saabudes peatusid nad „Ibise“-nimelise

hotelli ees, kuid vastuvõturuumis teatas ploomikarva vormirõivastega mees neile, et vabu tube ei ole, kuid mööda kõrvalteed edasi sõites jõuavad nad väikese võõrastemaja juurde, kus kindlasti peavarju leitakse. Nad märkasidki teeotsa ning sõitsid hotelli otsima, ehkki tee oli väga lagunenud. Naised panid tee ääres üllatavalt vanamoodsa kujundusega tsirkuse reklaamplakateid tähele. Lõpuks jõuti võõrastemajani, kus tuli peatuda teepervel, sest parklat polnud. Kõrval seisis teine hoone, mis sarnanes politseijaoskonnaga. Ehkki võõrastemajaomanik ei osanud inglise keelt, ja nemad rääkisid prantsuse keelt väga vaevaliselt, suutsid nad ennast mõistetavaks teha ning saidki vabad toad. Kell oli kümme õhtul. Kahekorruseline rantšo stiilis hoone oli seestpoolt väga vanamoelise kujundusega. Magamistoa akendel polnud klaase, ainult luugid, voodilinal olid paksust kalingurist ning patjade asemel lebasid voodis peatoed. Vannitoasisustus sobinuks pigem kuninganna Victoria aega. Seep oli varda otsa torgatud. Pärast kohvrite tühjendamist läksid nad alla, sõid tugeva õhtusöögi – roogi kuumutati metallplaatidel – ja loputasid selle õllega alla. Baaris istus mitu rohmakalt rõivastatud meest. Pärast mõnusalet magatud ööd mindi neljakesi alla hommikueinele. Parajasti siis, kui nad sõid, jalutas sisse daam, koerake kaenla all. Daamil olid nõõpsaapad jalas ja pikk ballikleit seljas. Siis sisenesid kaks sandarmit, kõrge nokaga vormimüts peas, tumesinine keep üll ja kedrid jalas. Selleks ajaks olid Gisbyd ja Simpsonid juba veendunud, et nad ööbisid turistide meelelahutuseks rajatud, tegutsevas muuseumis. Nad võtsid nõuks seda pildistada. Kumbki mees fotografeeris magamistoa aknast väljakummarduvat naist. Oli vaja teekonda jätkata. Kõigepealt Len ja siis ka Geoff püüdsid sandarmitelt teada saada, mis suunas sõites suurele maanteele pääseb, kuid kõikidest nende ponnistustest hoolimata näis, nagu poleks nood jutust sõnakestki mõistnud. Kui lõpuks juhtuti Hispaaniat mainima, siis juhatati nad vanale Avignoni teele. Arvet makstes tabas neid taas üllatus. Kokku tuli vähem kui kahele naelsterlingile vastav summa. Leni arusaamatus põhjustas ainult peremehe ja sandarmite muigeid. Lõpuks nad lahkusid. Avignoni teele pööramise asemel uurisid nad kaarti ning jõudsid kergesti suurele maanteele. Nad sõitsid Hispaaniasse, kuhu jääd kaheks nädalaks. Täiesti loomulik, et tagasi minnes sooviti jälle tolles Montélimari lähedal asuvas vanamoeliselt omapärasel ja odavas võõrastemajas ööbida. Nad leidsid teeotsa ja nägid isegi tsirkusekuulutusi, kuid võõrastemaja polnud. Ümbruskonnas ringivaatamine osutus täiesti asjatuks. Nad sõitsid jahmunult „Ibise“ juurde ning soovisid ploomikarva vormiriietust kandva mehega rääkida. Neile vastati, et „Ibises“ ei tööta ühtki sellise väljanägemisega isikut. Järelepärimistele, kus otsitav võõrastemaja võiks asuda, ei osanud keegi hotellipersonalist vastata. Inglismaal laskisid nad oma puhkuseriisi filmid ilmutada. Sõpru üllatas, et saadud fotode hulgas polnud võõrastemajas tehtud ülesvõtteid. Üllatus muutus umbusuks, kui nummerdatud negatiivide uurimisel selgus, et otsitavaid kaadreid polnud üldsegi olemas. Üks kaamera oli jättnud mehaanilise jälje, nagu oleks püütud filmi nurjunult edasi kerida, kuid see oli kõik. Kummaski aparaadis olnud filmil polnud mainitud ülesvõtetest jälgegi. 1983. aastal sõitsid mõlemad abielupaarid Prantsusmaale tagasi, et Prantsuse Turismiameti abil juhtunus põhjalikult selgusele jõuda. Turismiorganisatsioonide esindaja Philippe Despeysses oli leidnud paiga, mis mõneti sarnanes mõistatusliku võõrastemaja asukohaga. Gisbyd ja Simpsonid viidi sinna. Ehkki nad pidid tunnistama, et kõik on kangesti varem nähtu moodi, veenas vestlus omanikega, et tegemist polnud sama paigaga, kus nad olid 1979. aastal peatunud. Jenny Randles püüdis mõlemalt abielupaarilt teada saada, mida nood olid kogenud. Ta leidis peale kadunud filmikaadrite muidki küsitavusi. „Kui tõepoolest leidis aset ajanihe minevikku, siis miks ei pannud keegi võõrastemajas teie autot või riideid imeks?“ küsis ta. „Miks võttis peremees tasu vastu müntides, millel endisaegadel ei saanud mingit väärtust olla?“ Simpsonid vastasid siiralt ja veendunult: „Teil endal tuleb sellele vastus leida. Teame ainult seda, mis meiega juhtus.““

Viimase juhtumi puhul on täiesti erakordne see, et sellest juhtumist on kunagi tehtud dokumentaalfilm ja seetõttu leidub seda vanadest dokumentaalfilmi sarjadest (



näiteks „Strange But True?“ ), mis oli vändatud 20. sajandi üheksakümnenditel:

<https://www.youtube.com/watch?v=BTf4NARnwD8>

<https://www.youtube.com/watch?v=9IxQOX0sPJQ>

„Kirjeldatud juhtumeid võib ajanihke teooriast lähtudes mitmeti tõlgendada. Kas seda kogenud inimesed libisesid läbi aja tagasi ja nägid sündmusi, mis alles pidid toimuma, või tajusid nad visuaalsalvestist, mis nende silme ees juhuslikult sisse lülitus? Parapsühholoogid löid kivilsalvestiste teooria, selgitamaks teatud liiki viirastuslikke nägemusi – juhtumeid, mil inimeste pilgu ette kerkib minevikust pärit figuure, ehitisi ja maastikke, ning nad kuulevad nende aegade helisid. Näiteks Joan Forman, kes oli paigast liikudes sedamaid neli mängivat last silmist kaotanud. Kas ta pidi peatuma täpselt selles punktis, et teatud tingimustel võiks minevikuetendus taas silmade ees hargnema hakata? Kivilsalvestiste teooria lähtub oletusest, et teatud sündmused, eriti need, mis genereerivad määratul hulgal emotsionaalset energiat, salvestuvad mingil viisil keskkonnas, näiteks, hoonete kivimüürides, pinnases või atmosfääris. See võib kehtida juhtudel, mil viirastusi nähakse aastaid hiljem samas paigas. Vaid teatud tingimuste puhul, nagu seda võib olla, näiteks elektromagnetenergia kontsentreerumine atmosfääris või mõne erilise psüühikajõuga inimese saabumine, näib miski nupule vajutavat, ja salvestatu muutub taas tajutavaks. See näib eitavat mõtet, et ülitundliku tajumisvõimega isik võis ajas tagasi rännata, kuid seda teooriat saab rakendada vist üksnes puhkudel, kus viirastused näivad vaatelejaid mitte märkavat. Ja mida kogetakse siis, kui vaateleja ja vaadeldav omavahel kontakti astuvad? Sel juhul pole meil tegemist minevikujuhtumite salvestise, vaid võib-olla mineviku endaga.“

„Meie psüühiline mina opereerib ainult kolmemõõtmelises ruumis, kuid teadvus liigub ajas edasi ja tagasi. Ajanihet kogenud inimesed mainivad sageli tunnet, nagu eksisteeriks korraga kaks ajatsooni, millest üks kattub osaliselt teisega. Ajanihkega kaasnevate loomulike helide, nagu seda on linnulaul või liiklusrumina, puudumist on täheldanud muidki fenomene – näiteks, UFO-ga lähikohtumist – kogenud inimesed. Ajanihke ilmumine näib vajavat mingit päästikut. Selle rolli näib sobivat äkiline valgusesälvatus või tavatu hulk elektrienergiat atmosfääris, sest need võivad õigete tingimuste puhul inimajuga vastastikku toimida. Ajanihked ei ole kujuteldavad nähtused. Sageli selgub, et nende kaudu saadud informatsioon vastab täielikult tegelikkusele. Kvantmehaanikana tuntud füüsikaharu võib aidata meil aja olemust õigesti mõista. J. B. Priestly jagas oma raamatus „Man and Time“ aja kolmeks komponendiks: esimene on käesolev aeg, teine – võimaliku tuleviku aeg ja kolmas – kujutlusvõime aeg.“

Kirjeldatud juhtumeid võib ajanihke teooriast lähtudes tõlgendada vaid nii, et seda kogenud inimesed libisesid läbi aja tagasi ja nägid sündmusi, mis alles pidid toimuma. Näiteks Joan Forman oli paigast liikudes sedamaid neli mängivat last silmist kaotanud. Kas ta pidi peatuma täpselt selles punktis, et teatud tingimustel võiks minevikuetendus taas silmade ees hargnema hakata? Vaid teatud tingimuste puhul, nagu seda võib olla näiteks elektromagnetenergia kontsentreerumine atmosfääris või mõne erilise psüühikajõuga inimese saabumine, näib miski nupule vajutavat, ja minevik muutub taas tajutavaks. See viitab selgelt asjaolule, et inimene võis ajas siiski tagasi rännata. Kuna vaateleja ja vaadeldav astuvad omavahel ka kontakti, siis sellisel juhul pole meil tegemist hallutsinatsioonidega, vaid hoopis mineviku endaga.

Ainult aegruumi tunnel võimaldaks liikuda ( s.t. teleporteeruda ) ajas. Aegruumi tunnel tekib elektromagnetilise vastastikmõju tulemusena, täpsemalt öeldes elektrilaengute väljade muutuste korral. Sellisest teooriast järeldub omakorda see, et kui näiteks elektriliselt laetud inimese kehat ümbritseks muutuv väli, siis võib tekkida aegruumi lõkspind elektriliselt laetud pinna lähedusse. See lõkspind on sellisel juhul inimese keha kujuga ja aegruumi lõkspinda võib tõlgendada aegruumi

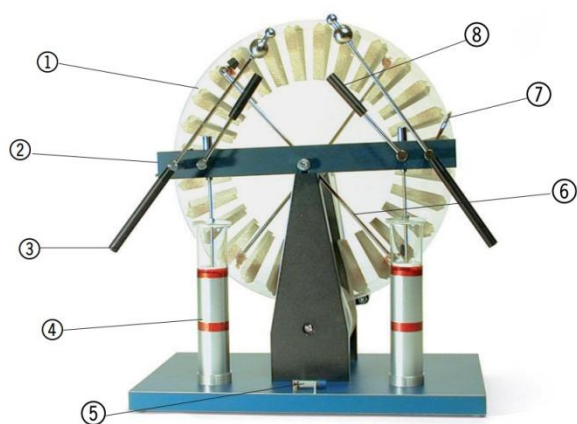
tunneli sisse- ja väljakäiguna. Läbides aegruumi tunnelit ( mis võimaldab liikuda hyperruumis ehk väljaspool aegruumi ) teleportreerutaksegi ajas. Muutuva välja tekkimine elektriliselt laetud inimese keha pinna läheduses sõltub inimese ja keskkonna mõjude vahekorra.

Energiavälja muutumise korral ilmneb lühiajaliselt ka „aegruumi lõkspind“, millel on aeg ja ruum erirelatiivsusteooria järgi teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseeni. Näiteks kui tühjas ruumis tekib magnetväli valguse kiirusega  $c$ , siis tühja ruumi ja energivälja vahelist ajutist „piiri“ on võimalik mõtteliselt tõlgendada kahemõõtmelise „pinnana“, millel on aeg ja ruum teisenenud lõpmatuseeni, kuna see „liigub“ ( „levib“ ) ruumis valguse kiirusega  $c$ . Musta augu tsentris oleval Schwarzschildi pinnal ehk musta augu „horisondil“ on aeg ja ruum samuti teisenenud ehk kõverdunud lõpmatuseeni. Musta augu Schwarzschildi raadius  $R$  määrab ära Schwarzschildi pinna  $S$  suuruse.

Füüsikaline keha saab elektrilaengu kahel erineval viisil. See tähendab, et elektrilaengud liiguvad ruumis kahel erineval põhjusel. Näiteks elektrostaatiline laeng tekib kehal hõõrdumise teel ehk elektrilaengud liiguvad ruumis hõõrdejõu mõjul. Teine võimalus on see, et elektrilaengud liiguvad ainult elektrivälja mõjul. Selle näiteks on elektrivool juhtmes või kondensaatori ( akumulaatori ) laadimine, mille korral liiguvad elektrilaengud elektrivälja tõmbe- ja tõukejõudude mõjul, mitte enam hõõrdejõu tõttu. See tähendab, et elektrilaengute liikumine ruumis ( ja sellest tulenevalt ka kehade elektrilised laadumised ) on põhjustatud hõõrdejõudude avaldumistest või elektrijõudude ( s.t. elektrivälja tõmbe- ja tõukejõudude ) mõjul. Muid võimalusi ei ole.

Elektrostaatilise laengu korral liiguvad laengud hõõrdejõu mõjul, kuid „elektrodünaamilise laengu“ korral liiguvad laengud tõmbe- ja tõukejõudude ehk elektrivälja mõjul. See tähendab seda, et füüsikaline keha saab elektrilaengu hõõrdumise teel või elektrivälja mõjul ehk tõmbe- ja tõukejõudude kaudu. Näiteks elektrotehnikas kasutatav akumulaator ehk lihtsalt aku saab laetud elektrivoolu abil, mille korral liiguvad laengud tõmbe- ja tõukejõudude mõjul. Elektrostaatiline laeng tekib kehal hõõrdumise teel.

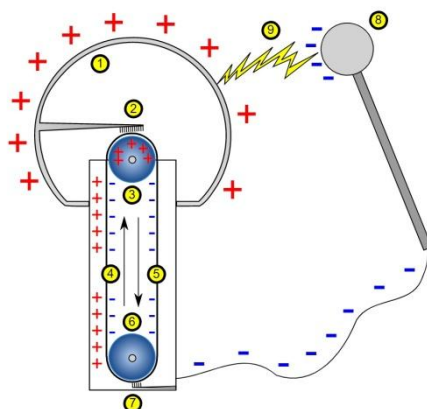
Kindlasti peab ära märkima ka seda, et ka mehaaniline hõõrdejõud on tegelikult oma olemuselt elektriline. See tähendab, et hõõrdejõud on oma sügavalt olemuselt samuti elektrijõud. Kuid sellegipoolest antud juhul me liigitame lihtsuse mõttes elektrilaengute liikumise põhjusi ikkagi suures plaanis kaheks nagu me eelnevalt seda tegime. Näiteks elektrofoormasinas liiguvad elektrilaengud hõõrdejõu tõttu, mille põhjustab elektrofoormasina ketaste pöörlev liikumine. Kuid samas elektrivool juhtmes on põhjustatud juba elektrivälja tõmbe- ja tõukejõudude ehk elektrijõudude mõju tõttu. Elektrofoormasina joonis:



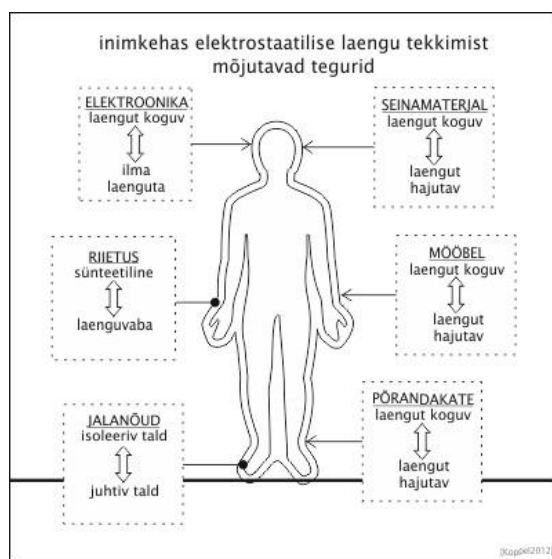
- ① Transparent acrylic discs with tin-foil segments
- ② Insulating bar
- ③ Electrode rods
- ④ Leyden jars
- ⑤ Isolating switch
- ⑥ Diagonal rod with metal brushes
- ⑦ Rod with combs
- ⑧ Switch levers to connect the Leyden jars and the combs

Elektrostaatika uurib üksteise suhtes paigal olevaid elektrilaenguid. Elektrokinemaatika uurib elektrilaengute liikumiste erinevaid seaduspärasusi ajas ja ruumis. Kuid elektrodünaamika püüab selgusele jõuda, mis põhjustab laengute liikumisi ruumis.

Inimene võib saada elektrostaatilise laengu loomulikul teel või peab selleks kasutama erinevaid tehnoloogiaid ( nagu näiteks Van der Graafi generaatorit või elektrofoormasinaid ). Antud juhul uurime loomulikul ( looduslikul ) teel saadud elektrostaatilise laengu tekkimist inimese kehal ja selle mõju inimese tervisele. Van der Graafi generaatori joonis:

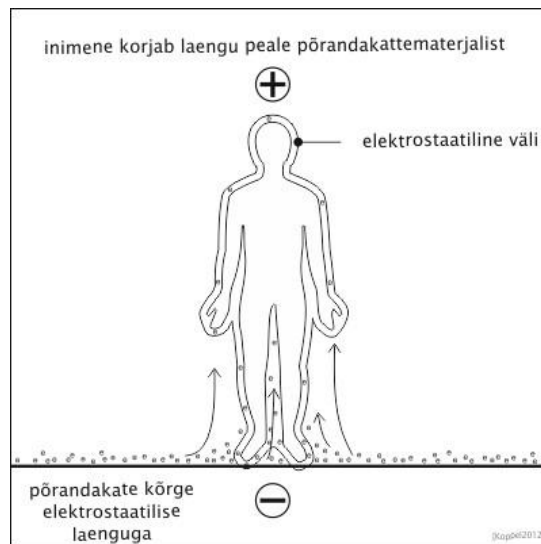


Inimese kehal tekkivad elektrilaengud sõltuvad mitmetest teguritest. Näiteks on olemas materjale, mis soodustavad elektrostaatilise laengu tekkimist, kuid ka selle kadumist ( s.t. juhib või hajutab laengut ära ). Elektriseadmed võivad otseselt muuta elektrienergia elektrostaatiliseks laenguks. See aga võib üle kanduda inimese kehale. Enamasti on inimesed ühenduses maaga ( s.t. maandatud ).

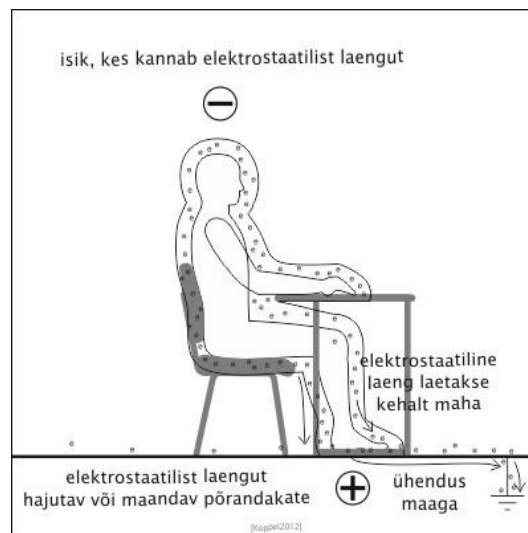


Joonis 43 Inimese kehal võivad tekkida laengud.

Põrandakate võib omada elektrostaatilist laengut, mis võib inimesele üle kanduda. Kuid põrandakatele võib elektrostaatiline väli tekkida ka siis, kui inimene selle peal kõnnib ( see tähendab hõõrdumist ). Ka sellisel juhul läheb see elektrostaatiline laeng üle inimese kehale. Sellest annavad tunnistust elektrisärtsud, mis ilmnevad näiteks siis, kui inimesed üksteisega kokku juhtuvad puutuma või siis metalpindadega. Näiteks sünteetilised põrandakatted võivad omada elektrostaatilist välja ( ja seega ka laengut ), kuid mitte kõik sünteetilised vaibad. Näiteks kui inimene käib lakitud põranda peal, siis võib samuti tekkida elektrostaatiline väli. Ja seda enam, kui jalgu lohistatakse.



Joonis 44 Inimese keha elektriseerumine.



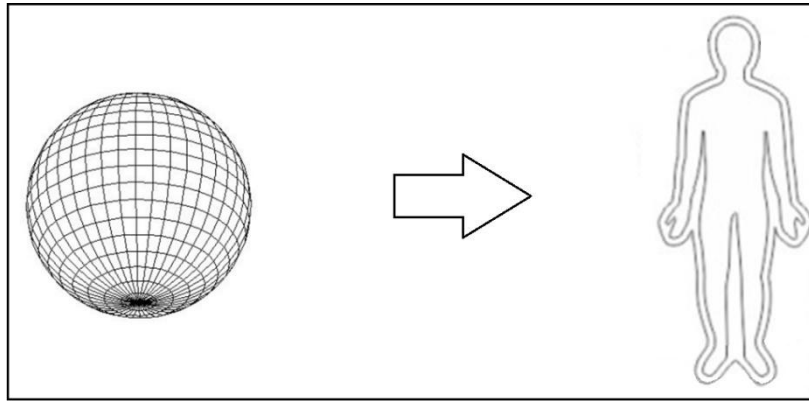
Joonis 45 Toimub laengu kogumine või selle maandamine.

On olemas ka sellised põrandakatted, mida nimetatakse antistaatisteks põrandakateteks. Sellisel juhul juhib see elektrostaatilise laengu, mis on kogunenud inimese kehale, maasse või hajutab selle põrandakattes. Kuid ainult hajutav põrandakate kogub endasse laengut. Kuid piisavalt suure kogutud laengu korral hakkab põrandakate kogutud laengut tagasi inimestele saatma. Kõik elektrostaatilised tooted ei lae inimese laengut maha.

( Allikas: <http://tarmo.koppel.ee/?p=531> )

Ajas rändamise reaalseid juhtumeid on võimalik seletada just eelnevalt mainitud teooriaga, mille korral inimene rändaks ajas, kui tema elektrilaengu väli muutuks kogu tema ümbristavas ruumis. Neid ajas rändamise juhtumeid on võimalik seletada väga täpselt just antud ajas rändamise füüsikateooriast tulenevate järeldustega, mis on kirja pandud ja esitletud kogu eelneva üle 100 lehekülje materjalina. Ajas rändamise füüsikateooriast saamegi järgnevalt välja arvutada selle, et kui kaugelt ajas saab rännata ja kui suurt elektrilaengut läheb selleks vaja, kui aegruumi lõkspind oleks inimese keha kuju ja suurusega. Need arvutused annavad üsna objektiivse tunnistuse antud ajas rändamise teooria paikapidavusest, vähemalt teoreetilise tõenduse/usutavuse.

Inimese kuju ja suurusega aegruumi lõkspinna arvutused kehtiksid ligikaudu ka siis, kui samasuguseid suuruseid arvestaksime ka puhtalt kerakujulise aegruumi lõkspinna korral. Seepärast jääb võrranditesse  $4\pi$  sisse. Joonis:



Näiteks kui eespool tuletatud aegruumi lõkspinna  $S$  eksisteerimise ajaperioodi  $t$  võrrandis:

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

oleks pindala  $S$  väärtus võrdne inimese keha pindalaga:

$$S = 1,9 \text{ m}^2$$

siis saaksime aegruumi lõkspinna  $S$  eksisteerimise ajaperioodiks:

$$t = 1,29 * 10^{-9} \text{ sek}$$

mis kattub väga hästi kokku elektromagnetlainete perioodiga, kui lainepikkus oleks 0,38893 m. Kuna erinevates juhtumites kirjeldatud inimeste füüsilisi andmeid ei ole teada, siis seega kasutame antud arvutustes lihtsuse mõttes meessoost inimese keha pindala  $S$  (  $1,9 \text{ m}^2$  ), mille korral on inimene 20- ne aastane, 180 cm-i pikkune ja kaalub 70 kg. Analüüsime arvutuste tulemuste suurusjärke. Allikas: <http://rlpa.ttu.ee/scratch/h2/ideaal.pdf>. Kuid saadud ajaperioodi ruudu korral:

$$t^2 = 1,6641 * 10^{-18} \text{ sek}^2$$

ehk

$$\frac{t^2}{y} = t = t^2 = 1,6641 * 10^{-18} \text{ sek}$$

saame ajas minevikku teleportreeruda  $t^2 = 208\,012\,500$  sekundit ehk 6,596 aastat ( liigaastaid pole sealjuures arvestatud ). Tulemuseks saime 6,5 aastat, mis on aga palju väiksem aastate arv võrreldes eespool kirjeldatud ajarännu juhtumitega, mille korral on ajas minevikku rännatud näiteks 26, 50, 150 ja isegi kuni 300 – 500 aastat. Toome siinkohal mõned olulisemad näited:

“...Niipea kui assistendi tulemasina leek kustus, kadus ka viieteistkümnenda sajandi Prantsusmaa nägemus. ...”

“...Joan Forman oli ilmselt leedi Grace Mannersit – palju aastaid pärast tolle surma – mängiva lapsena kohanud. ...”

“...Pensionär missis Charlotte Warburton, kes elas koos abikaasaga Kenti krahvkonnas Tunbridge’i lähedal, sattus teisipäeval, 18. juunil 1968 korra tagasi. ...Nägin kaht paari, kes kandsid sajandi keskpaigast pärinevaid rõivaid, ning ühe naise riietus jäi mulle

selgesti meelde. Tal oli poolviltu pähe seatud beež viltkübar, mille vasaku serva külge oli kinnitatud tutike tumedat karusnahka. Ka naise mantel oli beež, ning paarkümmend aastat tagasi võidi seda väga moodsaks pidada. ...Talle vastati, et mõni aasta tagasi oli kaupluse kõrval asunud kino, sellest vasakul aga Tunbridge Wells Constitutional Club. Naine mäletas, et siis, kui ta Teise maailmasõja aegu klubis käis, nägi ta seal väikesi suupistete laudu ja mahagonpaneelidega seinu. Missis Warburton ei jäänud ikka veel rahule, otsis nimetatud klubi selle uuest asupaigast üles ning leidis ka klubi majandusülema, kes oli töötanud sellel kohal 1919. aastast alates. Too teatas, et vanadesse klubiruumidesse pääses kaupluse kõrvalt tänavapoolsest uksest, ja edasi tuli trepist üles minna. Ülakorrusel oli olnud ka einetuba, mille sisustus sobis täpselt missis Warburtoni kirjeldusega. ...”

“...Kõige tuntum ajas ümberpaiknemise juhtum leidis aset kahe inglise turistiga, kes külastasid Versailles´ paleed, Prantsusmaa kuningliku perekonna elupaika seitsmeteistkümnendal ja kaheksateistkümnendal sajandil. ...1901. aasta 10. augusti soojal pärastlõunal väljusid need vallalised daamid Galeries des Glaces´ist ning otsustasid Petit Trianoni juurde jalutada. ...Miss Moberley sai alles hiljem teada, et tema sõbranna polnudki näinud isikut, kes sarnanes hämmastavalt kaheksateistkümnenda sajandi Prantsusmaa kuninganna Marie-Antoinette´iga. ...”

“...Marie Antoinette´i väikese Versailles´ palee Petit Trianoni lähedal satuvad meie kaasaegsed vahel 200 aasta tagusele peole, kus XVIII ( 18. ) sajandi õukondlaserõivastuses inimesed jalutavad grupiti ja vestlevad ning tuul kannab kaugusest menuetiviise. Noor naine maalib midagi molbertile paigaldatud lõuendile. ...Esimesena sattusid sellele peole kaks inglannat, miss Moberly ja miss Jordan 1901. aasta 10. augustil. Tükk aega ei rääkinud daamid asjast kellelegi ning alles 1911. aastal otsustasid nad juhtunu avalikustada. ...Korrapäratute vaheaegadega, kord üsna sageli, kord paljude aastate tagant on see stseen ilmutanud end üksikutele pealtnägijatele. Nende jutustused on alati olnud ühesugused. Kõik leiab aset paari minuti jooksul, seejärel muusikahelid hääbuivad, hääled vaibuivad ja allee võtab taas nüüdisaegse ilme. Versailles´ pidu on näinud eri rahvustest, ühiskondlikust positsioonist ja vanusest inimesed, keda ühendab ainult üks asi: nad läksid Versailles´s esmakordselt ja polnud selle „minevikuetenduse“ kohta varem midagi kuulnud. ...”

“...Veel üks ilmekas ajanihkefenomen – ja taas olid mängus Prantsusmaale saabunud inglise turistid – leidis aset 1979. aasta oktoobris. Len ja Cynthia Gisby ning nende sõbrad Geoff ja Pauline Simpson kavatsesid kodust Kenti krahvkonnast Hispaaniasse reisida. ...Vannitoasisustus sobinuks pigem kuninganna Victoria aega. ...”

Ilmselt on asi lihtsalt selles, et me arvutasime  $1,9\text{ m}^2$  väärtuse pindalaga, mis on põhimõtteliselt “minimaalne” pindala väärtus täisealise normaalse inimese keha korral. Kuna inimene kannab ka erinevaid riideid ja sellest tulenevalt muutub inimese keha pind palju “voldilisemaks”, siis seega võib inimese pindala  $S$  ulatuda tegelikult kuni  $30\text{ m}^2$ -ni. Kui sellest tulenevalt ongi aegruumi lõkspinna pindala näiteks  $28,26\text{ m}^2$ , siis inimene saabki rännata ajas tagasi umbes 100 aastat, mis jääb juba ilmselgelt eespool kirjeldatud ajarännu juhtumite suurusjärgu piiridesse.

Näiteks kui aegruumi lõkspinna pindala  $S$  väärtus oleks  $28,26\text{ m}^2$ , siis selle eksisteerimise ajaperiood oleks  $5 \cdot 10^{-9}$  sekundit. Kui aga selle pindala väärtus oleks  $1,9\text{ m}^2$ , siis selle eksisteerimise ajaperiood oleks  $1,29 \cdot 10^{-9}$  sekundit. Saadud kaks eksisteerimise ajaperioodi väärtust suurusjärgu mõttes üksteisest väga suuresti ei erinegi.

Kuna inimese peensool on 7 m pikk ja 2,5 cm lai, siis seega võiks eeldada, et selle

pindala  $S$  oleks umbes  $0,6 \text{ m}^2$ . Kuid tegelikult see nii ei ole. Kuna peensoole pind on samuti üsna „voldiline”, siis sellest tulenevalt ulatub selle pindala  $S$  lausa  $250 \text{ m}^2$ -ni.

Kuna aegruumi lõkspinna „reaalne“ eksisteerimise ajaperiood on:

$$t = 1,29 * 10^{-9} \text{ sek}$$

ja selle raadius  $r$  oleks kerakujulise aegruumi lõkspinna korral  $0,38893 \text{ m}$ , siis seega saame vastavalt elektrivälja tugevuse  $E_T$  valemi järgi:

$$E_T = k \frac{q}{r^2}$$

välja arvutada umbkaudse elektrilaengu  $q$  suuruse ka inimese keha jaoks:

$$\frac{E_T r^2}{k} = q = 5,042 * 10^{-5} \text{ C}$$

Saadud tulemus on suurim võimalik elektrilaeng  $0,38893$  meetrise raadiuse kera jaoks, kuna õhu kui vaakumi „elektriline läbilöötk“ on väljatugevusel:

$$E_T = 3 * 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Sellised elektrilaengud, mille korral toimuksid õhus elektrilised läbilöögid, oleksid inimesel juba kindlalt tunda (näiteks inimese juuksed läheksid kõik püsti). Kuid sellest umbes  $10 - 100$  korda väiksemaid laenguid inimene enamasti juba ei taju ja ajarändude juhtumite korral polegi inimesed ise tundnud elektrilaenguid oma kehal. Seega võib elektrilaengu  $q$  suurus olla tegelikult ka kümme korda väiksem ehk:

$$q = 5,042 * 10^{-6} \text{ C}$$

Ühe ja sama pindala korral võivad aga laengu tihedused üsna suuresti varieeruda.

Kuna eespool kirjeldatud juhtumite järgi olid ajarännud toimunud enamasti minevikku, siis seega pidid inimesed saama negatiivse elektrilaengu. Välja  $E$ -vektor on negatiivse laengu korral suunatud laengu poole ja seetõttu ühtib see hyperruumis suunaga minevikku, kuna minevikus oli Universumi ruumala pideva paisumise tõttu väiksem. Seepärast toimusid ajarännud enamasti minevikku.

Tähelepanuväärne on siinkohal märkida ka veel seda, et enamasti on ajarännud esinenud minevikku, kuid tulevikku palju kordi harvem ja ruumis teleportatsiooni pole peaaegu üldse esinenudki.

### 3 Ajas rändamise teooria edasiarendused

#### 3.1 Sissejuhatus

Plancki aja  $t$

$$t = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 5,39121 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

ja Plancki pikkuse  $l$

$$l = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 1,616\,229(38) \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

olemasolu ehk selle tulenemine aegruumi füüsikast näitab, et hyperruumi dimensioon „eksisteerib“ väljaspool aegruumi, mida on võimalik mõista Plancki aja ja Plancki pikkuse „järgse“ dimensioonina. See tähendab seda, et hyperruum „algab“ sealt, kust lõpeb meie tajutav aegruum. Meie tajutavat aegruumi „piirabki“ Plancki aeg ja Plancki pikkus. Plancki aja ja Plancki pikkuse matemaatilisel tuletamisel kasutasime seisuenergia  $E$  seost:

$$M = \frac{E}{c^2}$$

ja määramatuse relatsiooni kvandi energia  $E$  ja aja  $t$  vahel:

$$E = \frac{h}{2t}$$

Mõlemaid seoseid on võimalik matemaatiliselt tuletada ja analüüsida ajas rändamise üldvõrrandist, mis omakorda kinnitab seda, et hyperruumi dimensioon on meie igapäevaselt tajutavast aegruumist ehk tavaruumist väljaspool alates Plancki ajast ja Plancki pikkusest. Tavaruum ise on meile tajutav kuni Plancki ajani ja Plancki pikkuseni. Seisuenergia ja määramatuse relatsioon kvandi energia ja aja vahel on põhjalikumalt analüüsitud ja tuletatud käesoleva teose relatiivsusteooria ja kvantfüüsika erinevates osades.

Kui ajas on võimalik rännata ainult ajast väljas olles, kuid samas väljaspool aega ei eksisteeri enam aega ennast, siis kuidas saab väljaspool aega rännata ajas kui väljaspool aega ei eksisteeri enam aega ennast? Selline vastuolu on ainult näiline. Millises mõttes ei eksisteeri enam aega?

Kui me rändame ajas ( näiteks minevikku ), siis peame liikuma ka ruumis, sest aeg ja ruum on relatiivsusteooria järgi üksteisest lahutamatult seotud. Selline ruumidimensioon, mis võimaldab rännata ajas, eksisteerib väljaspool meie igapäevaselt kogetavat ruumi. Kuid ka siin esineb pealtnäha näiline vastuolu. Väljaspool meie kogetavat ruumi ei eksisteeri enam ruumidimensioone, siis kuidas saab liikuda ajas, kui ruumi enam ei eksisteeri, mis võimaldaks ajas rändamist?

Nendele küsimustele annavad vastused sellised füüsikateooriad, mis on oma sisult ajas rändamise füüsikateooria järeldused Universumi füüsikalise olemuse kohta. Kogu järgnevat materjali võib põhimõtteliselt mõista kui ajas rändamise füüsikateooria edasiarendusena. Siiani kirjeldasid erinevad füüsikateooriad ja füüsikaharud ainult teatud osa Universumi üldisest



funktsioneerimisest. Universumit üldiselt või selle reaalsel olemust kirjeldada ei ole siiani suutnud mitte ükski teaduslik teooria.

### 3.2 Mis on Universumi füüsikaline olemus?

Psühholoogid ja neuroteadlased püüavad mõista inimese aju funktsioneerimist. Tänapäeva teaduse üks suurimaid müsteeriume seisneb selles, et mis on teadvus ja kuidas teadvus erinevates ajusüsteemides välja kujuneb. Selge on see, et teadvus on ajus, kuid selle olemust püüavad paljud neuroteadlased ikka veel mõista.

Analoogiliselt ajus eksisteeriva teadvuse olemuse probleemiga on tegelikult täpselt sama ka Universumiga. Paljud füüsikud mõistavad looduses esinevaid seaduspärasusi. Füüsikaliste seaduspärasuste järgi funktsioneerib kogu meie teadaolev Universum. Loodusseadusi ( eelkõige füüsika seadusi ) võime ju mõista, kuid probleem seisneb selles, et mis on Universum oma olemuselt? Universumi enda olemust füüsikud tänapäeval veel ei mõista nii nagu ka teadvuse olemust ajuteadlased ei mõista hoolimata teadmistest, kuidas aju põhimõtteliselt neuronaalselt töötab. Täpselt sama on ka füüsikateadusega. See tähendab seda, et me võime teada paljusid loodusseadusi, kuid Universumi üldise, sügava ja tervikliku füüsikalise olemuseni ei ole veel põhimõtteliselt jõutud.

Näiteks Universumi materia põhivormideks on aine ja väli ning materia eksisteerimise põhivormideks on aeg ja ruum. Materia väljadeks on näiteks elektri-, magnet- ja gravitatsiooniväli. Gravitatsiooniväli on põhjustatud sellest, et mass kõverdab aegruumi, mis tähendab seda, et gravitatsioon on kui aegruumi kõverdus ehk aegruumi geomeetria. See ei ole energiaväli, kuid näiteks elektri- ja magnetväljad on energiaväljad. Elektrilaengud suudavad mõjutada aegruumi suhteid nagu seda teeb kehade mass, kuid nad ise ei ole põhjustatud aegruumi kõverdumisest.

Universumi aine ja välja olemus selgub kõige paremini siis, kui uurida meie mikromaailma. Maailm koosneb molekulidest, need koosnevad aga aatomitest, need aatomituumadest ja need omakorda elementaarosakestest. Universumis on olemas väga erinevaid keemilisi elemente ( näiteks  $H_2O$  ja  $O_2$  ), kuid nende süsteemide vahel eksisteerivad ainult neli vastastikmõju. Väljana käsitletaksegi seoseid aineosakeste ( näiteks leptonid, hadronid jne ) vahel, mida ei ole võimalik samasuguste osakestega kirjeldada. Väljad eksisteerivad kehade vahetus ümbruses. Kuid on olemas ka väljaosakesed nagu näiteks footonid, gluonid, vahebosonid jne, mis vahendavad osakestevahelist vastastikmõju. Väljaosakeste omadused erinevad väga palju aineosakeste omadest ( elektronidest, prootonitest, neutronitest ).

Aine ja väli on Universumi materia kaks erinevat vormi, mis ei saa olla üksteisest lahus. Näiteks elektrivälja jõujooned algavad ja lõpevad elektrilaengutel. Aine ja väli on võimelised üksteiseks muunduma, mis tähendab seda, et energia muundub ühest liigist teise. Bosonid ( mis vahendavad fundamentaalseid vastastikmõjusid ) ning aineosakesed nagu näiteks 6 kvarki ja 6 leptonit peetakse „tõelisteks“ elementaarseteks osakesteks. Elementaarosakesed liigitatakse kahte rühma vastavalt

sellele, missugune on nende osakeste spinn. Näiteks üks rühm hõlmab aineosakesi, mille spinn on  $\frac{1}{2}$ , kuid täisarvulise spinniga osakesed kuuluvad teise rühma. Need osakesed vahendavad aineosakestevahelist jõudu.

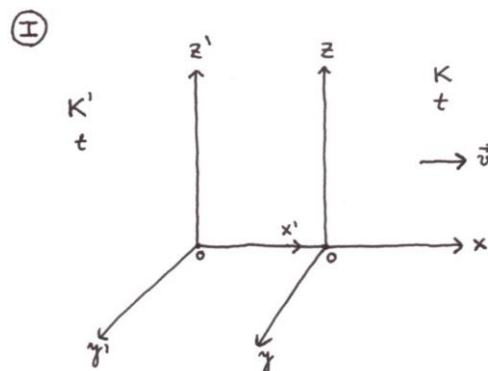
Kvantmehaanikast tuntud Pauli keeluprintsiibi järgi ei saa kaks osakest viibida täpselt samades kvantolekutes (näiteks kiirus ja koordinaat). Sellele keelule alluvad  $\frac{1}{2}$  spinniga aineosakesed. Seepärast ei saa aineosakesed koonduda olekusse, mille tihedus on ülisuur. Fermionid on osakesed, mille spinnid ehk omaimpulsimomendid on poolearvulised – näiteks elektronid, prootonid, neutronid, neutriinod jt. Kuid bosonid on täisarvulise või nullise spinniga osakesed – näiteks fotonid, mesonid jt. Osakesed, mis on samaliigilised, on üksteisest eristamatud. Pauli keeluprintsiip kehtib fermionide jaoks, kuid bosonitele see printsiip ei kehti.

Universumi reaalne füüsikaline olemus ehk identiteet tuleb välja siis kui vaadata Universumit ainult läbi ajas rändamise füüsika, mis sunnib Universumit vaatama teistes dimensioonides, mitte aga „tavaruumis“. Tavaruumis eksisteerib kogu meie maailm nii nagu me seda igapäevaselt tajume ehk see eksisteerib illusionaarselt.

Ajas rändamise füüsika (s.t. teiste dimensioonide suhtes Universumi vaatlemine) viitab sellele, et Universumit pole tegelikult olemas. See ongi Universumi füüsikaline põhiolemus, millele peaks lõpuks taanduma kõik teadaolevad füüsikaseadused. Selles seisnebki universaalmehaanika mõiste põhisisu: kõik looduseadused taanduvad lõpuks põhiarusaamale, et Universumit polegi tegelikult olemas. Selles seisnebki mehaanika universaalsus: mitte-eksisteeriv Universum on kõigele rakenduv. Universaalmehaanika on ajas rändamise füüsikateooriast kõrgem aste või ajas rändamise füüsikateooria on üks osa universaalmehaanikast või on selle sissejuhatuseks.

Järgnevalt esitatavad füüsikateooriad on oma sisult ajas rändamise füüsikateooria järeldused Universumi füüsikalise olemuse kohta. Järgnevat materjali võib põhimõtteliselt mõista kui ajas rändamise füüsikateooria edasiarendusena. Siiani kirjeldasid erinevad füüsikateooriad ja füüsikaharud ainult teatud osa Universumi üldisest funktsioneerimisest. Universumit üldiselt või selle reaalselt olemust kirjeldada ei ole siiani suutnud mitte ükski teaduslik teooria.

### 3.3 Universumi aegruum



Joonis 1 K liikumine K' suhtes.

Joonis 1 on Universumi hyperruumi ja tavaruumi omavahelise süsteemi „piltlikustamine“. Tegelikuses midagi seesugust ei eksisteeri. Selline on füüsikaline mudel, et Universumi aja ja ruumi omavahelist seost paremini mõista ja meelde jätta. Hiljem on näha seda, et reaalsuses avaldub see Universumi paisumisena. Antud juhul on tavaruum  $K$  meie Universumi 3-mõõtmeline ruum ja hyperruum  $K'$  on ruumi neljas mõõde, mis on seotud ajakoordinaadiga.

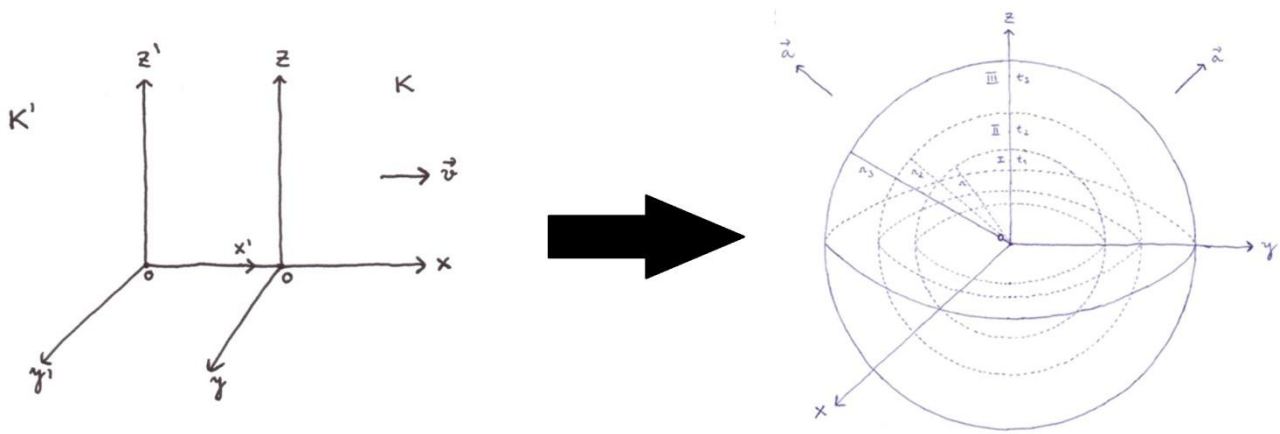
Juba Ungari päritoluga filosoof ja matemaatik Menyhért Palagyi ( 1859-1924 ) arendas omal ajal aja ja ruumi ühtsuse ideed ja käsitles aega neliruumi ( „jooksva ruumi“ ) imaginaarse koordinaadina, mis tegelikult väga sarnaneb antud juhul  $K$  ja  $K'$ -i füüsikalise süsteemiga.

Neljamõõtmelise koordinaatsüsteemi ( s.t. Einsteini kõvera aegruumi ) korral kasutatakse kolme ruumitelge ja ühte ajatelge. Ajamomenti korrutatakse valguse kiirusega  $c$ , et tegemist oleks neljanda ruumimõõtmega. Tulemuseks on neli (ruumi)koordinaati:  $x, y, z$  ja  $ct$ .

Antud joonisel 1 on hyperruum  $K'$  esitatud 3-mõõtmelisena, et mudel oleks lihtsalt meile käepärasem. Joonisel 1 on näha, et tavaruum  $K$  liigub hyperruumi  $K'$  suhtes. Oluline on märkida, et tavaruum ja hyperruum ei ole taustsüsteemid.

Ajas rändamise teooria üheks põhialuseks on väide, et erinevad ajahetked on samas ka erinevad ruumipunktid. Selline seaduspärasus avaldub looduses Universumi paisumisena. Näiteks kui Universum paisub ( s.t. Universumi ruumala suureneb ajas ), siis erinevatel (kosmoloogilistel) ajahetkedel on Universumi ruumala erinev ja seega on erinevad ka Universumi ruumipunktide koordinaadid. Universumi paisumist kujutatakse sageli ette just kera või õhupalli paisumisena. Siis on väga selgesti näha seda, et kera sfäärilised koordinaadid ( ehk ruumipunktide koordinaadid ) ja kera raadius on erinevatel ajahetkedel erinevad.

Olgu meil Universumi paisumise mudeliks kera paisumine, mis ei pöörle. Sellisel juhul on kolmemõõtmelise kera kahemõõtmeline pind meie kolmemõõtmelise Universumi kolmemõõtmeline versioon. Kera paisub ja mööda kera pinda ehk kera pinnal liigub keha  $m$ . Keha liigub alati risti kera raadiusega. Lihtsuse mõttes liigub keha mööda kera ringjoont, mille pikkus on  $2\pi R$ . Kera paisumine illustreerib Universumi paisumist, kuid keha  $m$  liikumine kera pinnal aga sündmuste ja protsesside kulgemist Universumis. Mitte miski ei saa liikuda valgusest kiiremini. Valguse liikumiskiirus vaakumis ja kera paisumiskiirus on mõlemad võrdsed  $c$ -ga. Mida lähemale jõuab keha liikumiskiirus valguse kiirusele  $c$  ehk kera paisumiskiirusele, seda aeglasemini liigub keha  $m$  paisuva kera pinna suhtes. See illustreerib sündmuste ja protsesside aeglenemist Universumis. Kui kera paisumise kiirus ja keha liikumiskiirus kera pinnal omavahel ühtivad, siis keha  $m$  ei liigu enam üldse ja seega aeg on peatunud. Tuleb veelkord märkida seda, et kera paisub, mitte ei pöörle.



Joonis 2 Tavaruumi  $K$  ja hyperruumi  $K'$  füüsikaline süsteem avaldub looduses Universumi kosmoloogilise paisumisena.

Kuna keha  $m$  liigub alati risti kera raadiusega ja samas ka alati kera paisumisega kaasa, siis keha liikumist paisuva kera pinnal saab kirjeldada Pythagorase teoreemiga järgmiselt:

$$d^2 = l^2 + (vt')^2$$

ehk

$$d = \sqrt{(ct + vt')^2 + (vt')^2}$$

milles  $c$  on kera paisumise kiirus ( mis ühtib valguse kiirusega vaakumis ),  $d$  on keha  $m$  liikumisest ja kera paisumisest tingitud (resultant)teepikkus,  $vt'$  on ainult keha liikumisest tingitud teepikkus,  $ct$  on kera paisumisest tingitud teepikkus,  $l = ct + vt'$  on keha  $m$  teepikkus paisuva kera pinnal arvestades samas ka kera paisumisest tingitud teepikkuse juurdekasvu ehk  $ct$ ,  $t$  ja  $t'$  on erinevad ajahetked ehk vastavalt kera mittepaisuva ja paisuva oleku ajahetked. Mitte miski ei saa liikuda valgusest kiiremini ehk kera paisumisest kiiremini ja seega  $d = ct'$ , mis tähendab seda, et teepikkuse  $d$  pidi keha  $m$  läbima kiirusega  $c$  ( mitte sellest suurema kiirusega ). Järgnevalt teeme terve rida matemaatilisi teisendusi, et saada lõplik võrrand, mis kirjeldab antud süsteemi matemaatiliselt. Kuna  $d = ct'$ , siis avaldame Pythagorase teoreemi kera paisumise kiiruse  $c$  järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{l^2 + (vt')^2}}{t'} = c,$$

$l$  on keha  $m$  teepikkus paisuva kera pinnal arvestades samas ka kera paisumisest tingitud teepikkuse juurdekasvu ehk  $ct$ :

$$l = ct + vt'$$

ja seega saame viimase võrrandi lahti kirjutada järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{(ct + vt')^2 + (vt')^2}}{t'} = c,$$

Viime  $t'$  võrrandi teisele poole, tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu ja kirjutame lahti ruutvõrrandi avaldise:

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 + (vt')^2 = (ct')^2$$

Viime ühe liikme  $(vt')^2$  teisele poole ja saame

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 = (ct')^2 - (vt')^2 = (c^2 - v^2)t'^2,$$

jagame viimase saadud võrrandi mõlemad pooled  $c^2$ -ga:

$$\frac{(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2}{c^2} = \frac{(c^2 - v^2)t'^2}{c^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} t'^2 = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] t'^2.$$

Kuna kehtib ruutvõrrandi matemaatiline seos

$$(ct)^2 + 2(ct)(vt') + (vt')^2 = (ct + vt')^2,$$

siis saame viimase võrrandi kujuks järgmise avaldise:

$$(ct + vt')^2 = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] t'^2 c^2$$

ehk võrrandi mõlemad pooled ruutjuure alla viies:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c.$$

Viimane avaldis ongi meie otsitav lõplik võrrand, mis kirjeldab antud füüsikalist süsteemi. Tegemist on tegelikult üldvõrrandiga, millest on võimalik tuletada terve rida väga tähtsaid fundamentaal-füüsikalisi- ja matemaatilisi seoseid ja järeldusi. Võib ka nii öelda, et tegemist on ühe põhivõrrandiga, mille järeldused on heas kooskõlas ajas rändamise füüsikateooria aluspõhimõtetega. Neid järeldusi on relatiivsusteooria ja kvantmehaanika osas põhjalikumalt uuritud ja analüüsitud. Kuid eelnevalt matemaatiliselt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandis

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

võib järgmine liige võrduda nulliga:

$$vt' = 0$$

ja seetõttu saame võrrandi kujuks:

$$ct = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' c$$

Pikkust või kahe ruumipunkti vahelist kaugust 1 kolmemõõtmelises ruumis kirjeldab meile järgmine tuntud võrrand:

$$l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

milles olevad kolmemõõtmelise ruumi koordinaadid on avaldatavad:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

Aja koordinaat võrdub aga järgmiselt:

$$t' = \Delta t = t_2 - t_1$$

Eelnevaid seoseid arvestades saame kiiruse  $v$  definitsiooni

$$v = \frac{l}{\Delta t}$$

Tõstame viimase kiiruse  $v$  võrrandi ruutu

$$v^2 = \frac{l^2}{\Delta t^2} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}$$

ja niisamuti ka eelnevalt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandi:

$$(ct)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (t'c)^2$$

Viimasest võrrandist kirjutame lahti kiiruse  $v$  definitsiooni eelnevalt tuletatud seoste kaudu:

$$(ct)^2 = \left(1 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2 c^2}\right) (\Delta t c)^2 = \Delta t^2 c^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

Saadud võrrandit

$$c^2 t^2 = \Delta t^2 c^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

nimetatakse „aegruumi intervalliks“, mis näitab kahe sündmuse või kahe ruumipunkti vahelist kaugust aegruumis ehk ajas ja ruumis. Selles tuletatud võrrandis on näha seda, et aeg  $t$

$$t = \tau$$

on otseselt seotud valguse kiirusega  $c$

$$c\tau = s$$

ehk

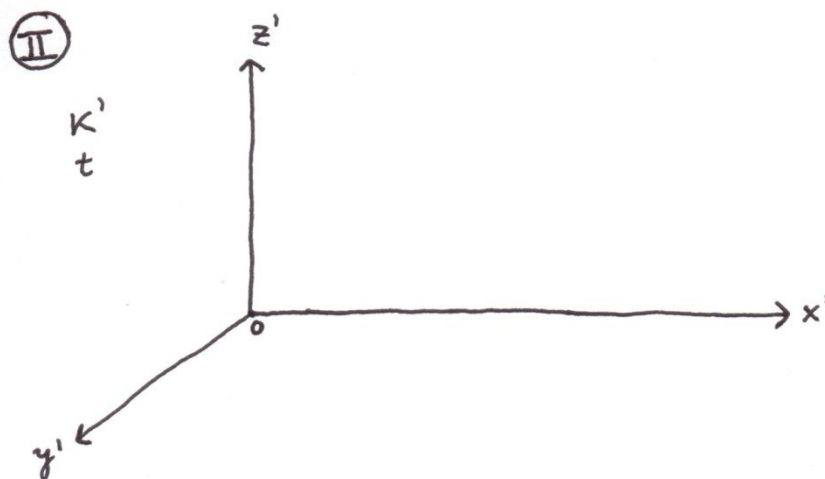
$$c = \frac{s}{\tau}$$

mis tegelikult näitabki seda, et tavaruum  $K$  „liigub“ hyperruumi  $K'$ -i suhtes kiirusega  $c$ . Seda on võimalik niimoodi tõlgendada, kuna intervalli võrrand

$$s^2 = \Delta t^2 c^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

oli otseselt tuletatud ajas rändamise üldvõrrandist:

$$ct + vt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'c$$



Joonis 3 K liikumist tegelikult ei ole.

Füüsikateaduse arusaamade järgi on kõikidel nähtustel oma kindel tekkepõhjus. See tähendab seda, et igasugusel liikumisel peab olema põhjus, mis liikumist põhjustaks. Antud juhul vaatleme hyperruumi  $K'$  ja tavaruumi  $K$  omavahelist seotud süsteemi. Teame seda, et  $K$  liigub  $K'$  suhtes. Kuid tekib küsimus, et mis põhjustab sellist liikumist? Kas seda põhjustab mingisugune senitundmatu jõud? Tegelikult ei põhjusta  $K$  liikumist  $K'$  suhtes siiski jõud, vaid see tuleneb lihtsalt hyperruumi  $K'$  iseäralikust omadusest. See tähendab seda, et hyperruumi  $K'$  erinevad ruumipunktid asuvad (joonis 1 järgi mööda  $x$ -telge) lihtsalt erinevatel ajahetkedel. See tähendab seda, et iga hyperruumi ruumipunkt (joonis 1 järgi mööda  $x$ -telge) tähistab ka mingit konkreetset ajahetke. Kuid erinevad ruumipunktid erinevatel ajahetkedel põhjustabki liikumise illusiooni. Tavaruumi  $K$  liikumist hyperruumi  $K'$  suhtes ehk „liikuvat ruumi“ ei ole seega tegelikult olemas, kuna see on illusioon, mis tuleneb hyperruumi  $K'$  füüsikalisest omadusest.

Selle paremaks mõistmiseks leiame sellele analoogia „kinematograafiast“. Näiteks filmi mõistame me kui liikuva pildina. Kuid liikuva pildi saavutamiseks on vaja teha rida erinevaid pilte, mis oleksid ülesvõetud erinevatel ajahetkedel. Kõik need erinevad pildid kuvatakse tehniliselt ühe suure ekraani peale üksteise järel nii, et iga pilt peatuks ekraanil umbes  $1/24$  sekundit. Niimoodi saadaksegi film ehk „liikuv pilt“.

Lõppjärgeldusena võib väita, et tavaruumi  $K$  liikumist hyperruumi  $K'$  suhtes tegelikult ei ole olemas. Liikumise illusioon tuleneb otseselt sellest, et hyperruumis on lihtsalt erinevad ruumipunktid (joonis 1 järgi mööda  $x$ -telge) samas ka erinevad ajahetked. Kuna kera pinna ruumipunktid on kera tsentrist võrdsetel kaugustel, siis on need ka kõik ühes ja samas ajahetkes. Kuid kera raadiuse muutudes on need kõik korraga juba siis erinevates ajahetkedes. Kuna Universumi paisumisel ei ole tsentrit ega eelistatud suunda, siis kõike eelnevat on reaalses Universumi paisumises raske ettekujutada. Antud juhul on siin tegemist illustatsiooniga ehk füüsikalise mudeliga.

Ajas rändamist võimaldav hyperruumis liikumine viib järgelduseni, et ajahetkede vaheline kaugus on võrdeline ruumipunktide vahelise kaugusega hyperruumis. Näiteks mida kaugemal mingisugune sündmus ajas esineb, seda kaugemal see (hyper)ruumis ka „asetseb“. Nii on see hyperruumi suhtes vaadatuna. Näiteks mida kaugemal on hyperruumis üksteisest kaks punkti, seda kaugemal ajas need üksteisest ka on.

Ajas rändamise füüsikateooria järgi väljendub tavaruumi  $K$  liikumine hyperruumi  $K'$  suhtes Universumi kosmoloogilise paisumisena. Järelikult see, mis kehtib tavaruumi ja hyperruumi

füüsikalise süsteemi korral, peab kehtima ka Universumi paisumise korral.

Kosmoloogiliselt seisneb aja ja ruumi omavaheline lahutamatus selles, et igal ajahetkel on Universumi ruumala erinev. Kuna Universum sai „alguse“ aegruumi algsingullaarsusest ( mille korral Universumi aega ja ruumi ei eksisteerinud ), siis seega on Universumil praegusel ajahetkel lõplik eluiga. See tähendab eelkõige seda, et Universumil on ajalises dimensioonis sünni- ja surmamoment, kuid mitte-ajalises dimensioonis ei ole Universumil sünni- ega surmamomenti. Antud mudelis illustreerib kera paisumine Universumi kosmoloogilist paisumist. Sellest tulenevalt on igal erineval ajahetkel erinev ka kera raadius ( s.t. kera ruumala ).

### 3.4 Aeg, ruum ja liikumine Universumis

Tavaruumi  $K$  „liikumine“ hyperruumi  $K'$  suhtes tulenes sellest, et hyperruumi  $K'$  erinevad ruumipunktid ( joonis 1 järgi mööda  $x$ -telge ) on samas ka erinevad ajahetked. See tähendab seda, et igale ajahetkele vastab mingisugune „asukoht“ hyperruumis. Sellest tuleneski tavaruumi  $K$  „illusionaarne ehk näiline liikumine“ hyperruumi  $K'$  suhtes, mida reaalselt tegelikult ei eksisteeri.

Selle paremaks mõistmiseks toome välja analoogia „kinematograafiast“. Näiteks suurel kinoekraanil näevad inimesed „liikuvaid pilte“. Kuid tegelikult liikumist ekraanil ei eksisteeri, kuna see on kõigest illusioon. Kinos projekteeritavad liikuvad pildid on jäädvustatud kinofilmile. Kinokaamera võtab igas sekundis 24 eraldi pilti pikale filmilindile. Seda filmi töödeldakse, et saada läbipaistvaid positiivseid kujutisi. Kinos läheb film läbi projektori, peatudes igal kujutisel  $1/24$  sekundit. Võimas valgus paistab läbi filmi ja läätsed fokuseerivad suure kujutise kinoekraanile. Tüüpilise mängufilmi filmilindi pikkus on ligikaudu 2,5 km. Iga kaader jääb kinoekraanile ainult  $1/24$  sekundit. Inimsilm sulatab need kaadrid sujuvalt liikuvaks kujutiseks.

Ajas rändamise füüsikateoorias järeldatakse, et keha liikumine ise tekitabki ajas ja ruumis eksisteerimise illusiooni. Sellest võib omakorda teha järgmise järelduse: keha enda liikumine tekitab ajas ja ruumis eksisteerimise illusiooni, kuid samas aja ja ruumi näiline olemasolu loob omakorda aegruumis liikumise illusiooni.

Selle paremaks mõistmiseks toome välja järgmise väga hea näite. Näiteks aja aeglenemine mistahes põhjusel avaldub alati kehade liikumise aeglenemises. Kui aga aeg kiireneb, siis see avaldub kehade liikumise kiirenemisel. Kui aeg hoopis peatuks ( sellisel juhul aega enam ei eksisteeriks ), siis kehad ei liiguks üldse. Klassikalise mehaanika järgi kulub keha liikumiskiiruse suurenemise korral „vähem aega“ sihtkohta jõudmiseks. Selgelt on näha seda, et esineb mingisugune seos liikumise ja aegruumi vahel.

Aja aeglenemisest järeldubki selline tõsiasi, et keha enda liikumine jätabki sellise illusiooni, et see toimub ruumis ja et see võtab aega. Aeg ja ruum on tegelikult illusioonid, mis on „tingitud“ liikumise enda olemasolust. Aega ega ruumi ei ole seega tegelikult reaalselt olemas.

See tähendab seda, et aja ja ruumi näiline olemasolu Universumis tekitab aegruumis liikumise illusiooni ( sarnaselt nii nagu erinevad staatilised pildid kinolinal järgnevad ajas kiiresti üksteisele ) ja liikumise illusioon omakorda loob ajas ja ruumis eksisteerimise illusiooni ( sarnaselt nii nagu vaataja näeb kinolinal liikuvaid „stseene“ ehk vaatab filmi, mis toimuks nagu aegruumis ). Selle



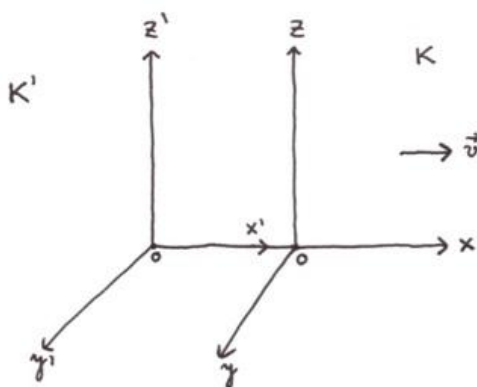
järgi ei ole Universumis tegelikult olemas aega, ruumi ega liikumist. Sellist fundamentaalset füüsikalist fenomeni nimetame me siin edaspidi „*Universumi aegruumi ja liikumise vastastikuseks seaduseks*“.

Selline seadus on analoogiline näiteks elektromagnetvälja induksiooniseadusega, mille korral tekitab muutuv elektriväli magnetvälja ja muutuv magnetväli tekitab omakorda elektrivälja jne. Niimoodi on elektri- ja magnetväli omavahel lahutamatult seotud ühtseks elektromagnetväljaks. Analoogiline põhimõte seisneb ka aegruumi ja liikumise vahel.

Kui Universumis lakkaks absoluutselt kõige liikumine, siis ei eksisteeriks ka aega ega ruumi. See viitab sellele, et peab kehtima ka vastupidine seos. Näiteks kui aega ja ruumi ei eksisteeriks, ei saa olemas olla ka liikumist. Niimoodi saamegi aegruumi ja liikumise VASTASTIKUSE SEADUSE: liikumine tekitab Universumis aja ja ruumi olemasolu illusiooni ning aja ja ruumi näiline olemasolu tekitab omakorda liikumise eksisteerimise illusiooni Universumis.

### 3.5 Jäävuseseadused

Kosmoloogia osas tekkis põletav küsimus, et miks kaasnes Universumi aja ja ruumi tekkimisega ka energiavälja kui mateeria tekkimine? Universumi aja ja ruumi tekkimisega oleks võinud lihtsalt kaasneda „tühi ruum“ ehk vaakum. Vastuse leidmine sellele fundamentaalsele küsimusele algab sellest, et kui Albert Einsteini relatiivsusteooria ühendas omavahel „aja“ ja „ruumi“ ühtseks „aegruumiks“ ehk aeg ja ruum on üksteisest lahutamatult seotud, siis ajas rändamise füüsikateooria näitas, et ka „liikumine“ on tegelikult lahutamatult seotud aegruumiga. Aegruumi ja liikumise omavaheline „lahutamatus“ väljendub Universumis kosmoloogilise paisumisena ehk hyperruumi  $K'$  ja tavaruumi  $K$  füüsikalise süsteemina:



Kuid antud juhul näitame seda, et „mateeria“ ( ehk aine ja väli ) on samuti aegruumist lahutamatu. Selleks vaatame korra uuesti tuntud Friedmanni võrrandit, mis on tänapäeva kosmoloogia õpetuse põhialuseks:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = -\frac{kc^2}{2}$$

Selles me näeme liiget:

$$\frac{4\pi G}{3}\rho a^2$$

ehk

$$\frac{GM}{R^3}a^2$$

mis sisaldab endas Universumi massitiheduse  $\rho$  avaldist:

$$M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

Sellisel juhul kirjeldatakse Universumi ruumala kera ruumalaga  $V$ :

$$\frac{4\pi R^3}{3} = V$$

Massitiheduse klassikalisest valemist:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

saame massi definitsiooniks:

$$M = V\rho$$

Igasugune aine esineb massi/energia vormina:

$$E = mc^2$$

ja see annab meile energia definitsiooniks:

$$E = V\rho c^2$$

Viimasest ongi selgesti näha seda, et kui ruumala võrduks nulliga ehk aegruumi ei eksisteeriks:

$$V = 0$$

siis seega ei eksisteeriks ka energiat kui ainet:

$$E = 0$$

ehk

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{0}{0} = 0$$

Kui aga aeg ja ruum eksisteeriksid:

$$V \neq 0$$

siis eksisteeriks ka aine:

$$E \neq 0$$

Analüüsime seda pisut lähemalt. Näiteks kui Universumis eksisteeriksid aeg ja ruum:

$$V \neq 0$$

siis põhimõtteliselt võib energiatihedus samal ajal võrduda ka nulliga:

$$\rho = 0$$

See annab meile aine mitte-eksisteerimise:

$$E = 0$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et Universumis saab eksisteerida ka „tühi ruum“ ehk vaakum, kuid kvantmehaanika järgi ei ole tühja ruumi tegelikult olemas, vaid selles tekivad ja kaovad osakeste paarid kõikjal ja pidevalt. Selles mõttes võtab vaakumis osakeste paaride tekkimine ja kadumine ju samuti aega ja ruumi. Osakeste paaride tekkimine ja kadumine vaakumis nimetatakse kosmoloogias enamasti „kvantfluktuatsioonideks“. Kui aga energiatihedus ei võrdu nulliga:

$$\rho \neq 0$$

siis seega eksisteerib ka materia:

$$E \neq 0$$

Füüsikaliselt tähendab see seda, et Universumis eksisteerib vaakumi asemel materia, antud juhul energiaväli. Selline energiaväli ei ole tsentraalsümmeetriline ehk sellel puudub ruumis allikas. Sellisel juhul täidab energiaväli ühtlaselt kogu Universumi (aeg)ruumi, mille korral ei eksisteeri vaakumit ehk „tühja ruumi“. Materia ( energiavälja ) eksisteerimiseks on vaja samuti aega ja ruumi täpselt nii nagu vaakumi eksisteerimiseks on vaja aega ja ruumi. Aja ja ruumi tekkimine põhjustas ürgse energiavälja eksisteerimise ehk aja ja ruumi tekkimisega kaasnes energiavälja kui materia eksisteerimine, kuna aine ja väli „võtab“ alati ruumi ja nende eksisteerimiseks „kulub“ alati mingisugune ajaperiood.

Hyperruumi  $K^*$  ja tavaruumi  $K$  füüsikalise süsteemi järgi eksisteerib tavaruumis  $K$  aeg ja ruum. Kuna aeg ja ruum on „näiliselt“ olemas ehk need eksisteerivad illusionaarselt, siis peaksid kehtima selles ka tuntud jäävuseadused. Erinevad jäävuseadused tulenevad just aja ja ruumi erinevatest omadustest, mis omakorda aga eeldavad aja ja ruumi ( vähemalt „näilist“ ) olemasolu. Väljaspool aegruumi ehk hyperruumis ei eksisteeri enam aega ega ruumi. Järgnevalt vaatamegi põhjalikumalt seda, et kuidas erinevad jäävuseadused on tuletatavad aja ja ruumi erinevatest omadustest.

Oletame seda, et meil on mingisugune füüsikaline süsteem, mis koosneb  $n$ -arvust kehast. Kehade füüsikalised suurused ajahetkel  $t$  on kohavektorid

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$$

seisumassid

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

kiirused

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$$

impulsid

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$$

ja impulsimomendid

$$\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots, \vec{L}_n$$

Järgnevalt vaatleme süsteemi mõnel teisel ajahetkel, mõnest teisest ruumpunktist ja mõnest teisest suunast, kuid kõik muu jätame samasuguseks. Kõiki neid „asju“ käsitleme siin edaspidi skalaarsel kujul.

Kui aga antud süsteemiga midagi siiski juhtuks, siis kehade füüsikalised olekud ( s.t. suurused ) muutuvad. Kuid selleks tehti tööd ja see töö summeerub iga süsteemi kuuluva keha tööga  $A$ . Kui süsteemiga peaks midagi juhtuma, siis avaldubki see matemaatiliselt järgmiselt:

$$dA = dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n = F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + \dots + F_n ds_n$$

Kui aga süsteemiga ei juhtu mitte midagi, siis seda näitab järgmine avaldis:

$$dA = F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + \dots + F_n ds_n = 0$$

Nüüd järgnevalt vaatleme samasugust süsteemi mõnel teisel ajahetkel:

$$t' = t + dt.$$

kuid kõik muu jätame samasuguseks. Kuna kõik ajahetked on samaväärsed, siis antud süsteemiga ei juhtu mitte midagi. Arvestades võrdust  $dA = 0$ , jõu definitsiooni füüsikast ja liitfunktsiooni tuletuste reegleid matemaatikast, siis saame matemaatiliselt järgmiselt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_{10}}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv_1}{dt} ds_1 + \frac{m_{20}}{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv_2}{dt} ds_2 + \dots + \frac{m_{n0}}{\left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv_n}{dt} ds_n = \\ &= \frac{m_{10}}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds_1}{dt} dv_1 + \frac{m_{20}}{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds_2}{dt} dv_2 + \dots + \frac{m_{n0}}{\left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{ds_n}{dt} dv_n = \\ &= \frac{m_{10} v_1 dv_1}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m_{20} v_2 dv_2}{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{m_{n0} v_n dv_n}{\left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= d \left[ \frac{m_{10} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right] + d \left[ \frac{m_{20} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \right] + \dots + d \left[ \frac{m_{n0} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_n^2}{c^2}}} \right] = \\ &= dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n = d(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = dA \end{aligned}$$

Eelnevast on näha seda, et  $dA = 0$  ehk  $dE = 0$ , mis aga tähendab energia jäävuse seadust:

$$\int dE = E = \text{const.}$$

See tähendab seda, et energia jäävuse seadus tuleneb ajahetkede samaväärsusest.

Kuid järgnevalt vaatleme füüsikalist süsteemi mõnest teisest ruumipunktist, kuid kõik muu jääb samaks. Tähistame  $ds$ -iga kaugust esialgse vaatluspunkti ja selle teise ruumipunkti vahel. Süsteemi kuuluvad kehad peaksid nihkuma just selle  $ds$ -i võrra:

$$ds_1 = ds_2 = \dots = ds_n = ds.$$

Kuna süsteemi vaatlemisel erinevatest vaatluspunktidest ei juhtu süsteemi endaga mitte midagi, siis seega saame:

$$\begin{aligned} 0 &= F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + \dots + F_n ds_n = F_1 ds + F_2 ds + \dots + F_n ds = \\ &= ds(F_1 + F_2 + \dots + F_n) = 0, \end{aligned}$$

millest omakorda järeldub

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = 0$$

ehk

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} + \dots + \frac{dp_n}{dt} = 0$$

Viimases viime dt murru ühisele nimetajale

$$\frac{dp_1 + dp_2 + \dots + dp_n}{dt} = 0$$

ja saame lõpuks järgmise avaldise

$$dp_1 + dp_2 + \dots + dp_n = d(p_1 + p_2 + \dots + p_n) = dp = 0.$$

Saadud seos näitab juba impulsi jäävuse seadust, kuna see rahuldab ainult sellist seost:

$$\int dp = p = \text{const.}$$

See tähendab seda, et impulsi jäävuse seadus tuleneb ruumipunktide samaväärsusest.

Kuid nüüd vaatleme füüsikalist süsteemi mõnest teisest suunast, mille korral jääb kõik muu jälle samasuguseks. Teeme nii, et  $d\alpha$  näitab kaugust esialgse ja uue vaatenurga vahel. Ringjoone kaare pikkuse ja kesknurga vahel kehtib järgmine seos

$$ds_i = r_i d\alpha.$$

Kuid süsteemiga ei juhtu mitte midagi, kui me näeme seda erinevatest vaatenurkadest. Seega  $dA = 0$  põhjal saame matemaatiliselt järgmiselt

$$\begin{aligned} 0 &= F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + \dots + F_n ds_n = F_1 r_1 d\alpha + F_2 r_2 d\alpha + \dots + F_n r_n d\alpha = \\ &= \frac{dp_1}{dt} r_1 d\alpha + \frac{dp_2}{dt} r_2 d\alpha + \dots + \frac{dp_n}{dt} r_n d\alpha = \\ &= dp_1 r_1 \frac{d\alpha}{dt} + dp_2 r_2 \frac{d\alpha}{dt} + \dots + dp_n r_n \frac{d\alpha}{dt} = \\ &= dp_1 r_1 d\omega + dp_2 r_2 d\omega + \dots + dp_n r_n d\omega = dL_1 d\omega + dL_2 d\omega + \dots + dL_n d\omega = \\ &= (dL_1 + dL_2 + \dots + dL_n) d\omega, \end{aligned}$$

Selles olevad impulsimomendid liituvad

$$dL_1 + dL_2 + \dots + dL_n = 0$$

ehk

$$d(L_1 + L_2 + \dots + L_n) = dL = 0.$$

Saadud seos näitab meile juba impulsimomendi jäävuse seadust

$$\int dL = L = \text{const.}$$

mis tähendab seda, et impulsimomendi jäävuse seadus tuleneb ruumisuundade samaväärsusest.

Kuid elektrilaengute jäävuse seadus tuleneb mitmesugustest sümmeetriaomadustest.

( Lorents 1998, 257-263 )

### 3.6 Ajatu Universum

Inimese jaoks eksisteerib aeg mineviku, oleviku ja tuleviku vormis. Kui aga liikuda reaalselt ajas minevikku ja tulevikku, siis ajavormid nagu minevik ja tulevik „kaovad“ ning esile tuleb ainult oleviku ajavorm. Näiteks minevikus asetleidnud sündmused ei toimu ajaränduri jaoks enam minevikus, kuna ta on ise liikunud ajas minevikku. Seetõttu kehtib temale sellisel juhul ainult oleviku ajavorm ja selles mõttes on Universum ise tegelikult „ajatu“. See tähendab seda, et aega Universumis tegelikult ei eksisteeri.

Igasugune liikumine Universumis on seotud ajaga, täpsemalt öeldes ajavormidega nagu näiteks minevik, olevik ja tulevik. Näiteks keha liikumise kiiruse kirjeldamiseks kasutatakse füüsikas alghetke, hetkkiiruse ja lõppkiiruse definitsioone. Kui aga Universum on oma olemuselt tegelikult ajatu, mis tähendab seda, et eksisteerib tegelikult ainult oleviku ajavorm, siis kõikvõimalikke erinevaid liikumisnähtuseid ei saa Universumis tegelikult reaalselt olemas olla. Universumis nähtav liikumine peab olema illusioon, kuna ajas rändamise füüsika järgi eksisteerib Universum ainult oleviku ajavormina ehk aega tegelikult pole olemas ja seetõttu minevikku ega tulevikku tegelikult ei eksisteeri. Universumis nähtavad igapäevased sündmused ja protsessid ei saa olla tegelikult liikumises. Kogu meie teadaolev Universum on hyperruumi füüsika „vaatenurgast“ tegelikult „paigal olekus“. Nähtav liikumine Universumis on ainult näiline ehk illusioon, kuna aja ( ja koos sellega ka ruumi ) näiline olemasolu Universumis loovadki kõige liikumise illusiooni.

Igapäevaselt elav inimene liigub pidevalt ruumis ühest ruumipunktist teise. Kuid ajarändur liigub ajas ühest ajahetkest teise, mis füüsikaliselt on samaväärne ruumis liikumisega ühest ruumipunktist teise, kuna ajas rändamist võimaldab „hyperruumis“ liikumine. Sellest tulenevalt eksisteerivad minevikku rännanud ajaränduri suhtes minevikus hävinud hooned, kuid olevikus elava inimese suhtes eksisteerivad need ammu hävinud hooned minevikus. Selles mõttes ongi Universum oma füüsikaliselt olemuselt tegelikult „ajatu“, mis tähendab seda, et aega ei ole olemas.

Näiteks 16 aastat tagasi surnud inimene tegelikult ikka veel „füüsiliselt“ eksisteerib ehk ta on Universumis reaalselt olemas, kuid ta eksisteerib „oleviku maailma suhtes“ minevikus, mitte olevikus ega tulevikus. See tähendab seda, et surnud inimene eksisteerib oleviku maailma suhtes möödunud ajahetkedes ( ehk möödunud hyperruumi punktides ). Olevikus teda enam ei eksisteeri ja pole teda olemas ka tulevikus, kuid sellegipoolest on ta ajas rändamise füüsika vaatenurgast siiski Universumis olemas.

Ruumis liikumisel võib inimene olla erinevates ruumipunktides, kuid ta ei saa olla seda üheaegselt. Näiteks võib inimene viibida oma majas ühel hetkel köögis, kuid pärast seda toimetada elutoas. Ajadimensiooniga on tegelikult täpselt samamoodi, kuna ajas rändamisel muutub ruumis liikumine ajas liikumiseks ja ajas liikumist võimaldab omakorda hyperruumis liikumine.

„Ajast rändamisel muutub ruumis liikumine ajas liikumiseks ja ajas liikumist võimaldab omakorda hyperruumis liikumine.“

Selle järgi eksisteerib minevikus surnud inimene oleviku maailma suhtes sarnaselt nii nagu inimene viibiks maja ühes ruumipiirkonnas, kuid teistes maja ruumides teda ei eksisteeri. Selles seisnebki ajatu Universumi füüsikaline põhiolamus. Seda näitab vaieldamatult inimese reaalne ajas rändamine

minevikku või tulevikku. Ajas rändamise füüsika järgi sarnaneb aja eksisteerimine ruumi eksisteerimisega, mistõttu eksisteerib Universum hyperruumi füüsika vaatenurgast erinevates ruumipunktides, kuid samas ka erinevates ajahetkedes.

Hyperruumi füüsika järgi on aja rännak minevikku füüsikaliselt samaväärne, mis inimese liikumine ühest ruumipunktist teise. Seetõttu pole aega tegelikult reaalselt olemas. Ruumis on võimalik liikuda ühest asukohast teise ja täpselt sama kehtib tegelikult ka ajadimensiooni kohta. Sellise arusaama järgi on minevikus asetleidnud sündmused hyperruumi füüsika vaatenurgast ikka veel reaalselt olemas. Selle mõistmiseks on vaja ainult aega ja ruumi omavahel siduda.

Minevikus surnud inimene on tegelikult Universumis reaalselt olemas, kuid ta eksisteerib oleviku maailma suhtes lihtsalt teises ajahetkes – täpselt nii nagu inimest pole enam linnas, kui ta on maale puhkama sõitnud. Selles mõttes eksisteerivad ajal ja ruumil samaväärsed seaduspärasused – näiteks ruumis saab inimene olla erinevates ruumipunktides, kuid samas ka ajas on võimalik (näiteks ajaränduril) olla erinevates ajahetkedes. See tähendab ka seda, et kõik mineviku ja ka tuleviku sündmused eksisteerivad Universumis hyperruumi füüsika vaatenurgast koos olevikuga ühekorraga. Selles mõttes on kogu minevik ja ka tulevik Universumis reaalselt olemas. Absoluutselt kõik, mis kunagi minevikus on aset leidnud ja tulevikus ka aset leiavad, eksisteerivad ajatu Universumi dimensioonis kõrvuti ühekorraga. Selles mõttes ei hävi mitte miski mitte kunagi. Kõik eksisteerib ajatu Universumi dimensioonis ehk hyperruumis igavesti. Mineviku sündmused on ajas möödunud sündmused, mida pole oleviku maailma suhtes enam olemas. Kuid ajatu dimensiooni suhtes vaadatuna eksisteerivad mineviku sündmused tegelikult ikka veel, kuid lihtsalt teistes ruumikoordinaatides. Täpselt sama on ka tulevikus asetleidvate sündmustega.

Hyperruumi füüsika suhtes vaadatuna eksisteerib kogu meie Universum ajalises mõttes „ühekorraga“, mis tähendab seda, et kogu minevik ja ka kogu tulevik eksisteerivad nagu üheskoos kõrvuti. Minevikku ega tulevikku (nii nagu meie neid igapäevaselt mõistame) tegelikult ei eksisteeri, sest eksisteerib ainult oleviku ajavorm. Selles mõttes aega ei ole. Aega Universumis ei eksisteeri, sest selles on võimalik liikuda nii edasi kui ka tagasi.

Tulevikus asetleidvad sündmused on tegelikult sama „kindlalt paigas“ nii nagu seda on sündmused, mis on leidnud aset minevikus. Mineviku ja tuleviku sündmuste vahe seisneb ainult selles, et mineviku sündmuste kohta me võime teada, kuid tulevikus asetleidvate sündmuste kohta me ei tea mitte midagi. See on tegelikult väga oluline ja ka ainus erinevus. Näiteks astroloogid on veendunud, et tulevik on kogu aeg liikuv ehk muutlik. Kuid tegelikult ei ole see sugugi nii, kuna tulevikus aset leidvad sündmused on samakindlalt paigas nagu mineviku sündmused. See on väga oluline järeldus, mis tuleb välja inimese reaalsest ajas rändamisest. Mineviku sündmusi me võime teada, kuid tulevikus asetleidvaid sündmusi me lihtsalt ei tea, mistõttu me võime tulevikku ainult ette prognoosida.

Kuna tulevikus toimuvad sündmused on sama kindlalt paigas nagu minevikus toimunud sündmused (s.t. tulevik ei ole pidevalt muutuv nagu „selgeltnägijad“ seda meile mõista tahavad anda), siis esmapilgul tundub, et see on vastuolus kvantmehaanika ühe põhiprintsiibiga, mis ütleb, et osakeste lainelist käitumist saab ainult ette ennustada, mitte täpselt ette teada. Osakese ajas ja ruumis levivat tõenäosuslainet (või lihtsalt osakese füüsikalist olekut) kirjeldab matemaatiliselt lainefunktsioon:

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

ja selle lainefunktsiooni mooduli ruut

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

annabki tõenäosustiheduse osakese asukoha leidmiseks ajahetkel  $t$  ( $\psi^*$  on  $\psi$  kaaskompleks). Sellest tulenevalt saame leida osakese asukoha tõenäosuse ruumielemendis  $dV$ :

$$dW = |\psi|^2 dV.$$

See tähendab seda, et lainefunktsiooni absoluutväärtuse ruut on võrdeline tõenäosusega leida osakest vastavas ruumipunktis ja vastaval ajahetkel. Osakese lainefunktsioon peab olema ühene,

lõplik ja pidev funktsioon. Ka selle tuleks peab olema pidev. Lainefunktsioon peab olema normeeritud

$$\int |\psi|^2 dV = 1,$$

mis tähendab seda, et osakest on võimalik kusagil ruumis leida. Tõenäosuste summa on alati 1 ( diskreetsel kujul ):

$$\psi^*(z_1) * \psi(z_1) + \psi^*(z_2) * \psi(z_2) + \dots + \psi^*(z_n) * \psi(z_n) = 1$$

ehk

$$\sum_n \psi_n^* \psi_n = 1$$

kuid pidevuse kujul:

$$\int \psi^*(z) \psi(z) dz = 1$$

ehk

$$\int \psi^* \psi d\vec{x} = 1$$

kus  $d\vec{x} = x_1, x_2, x_3$ . Olekufunktsiooni võime alati korrutada mistahes arvuga. Lainefunktsioon otseselt mõõdetav füüsikaline suurus ei ole, mõõta saab ainult tõenäosust:

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

kus A on normeerimiskordaja, lainefunktsiooni ruumiline osa

$$\psi \sim e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

ja ajaline osa

$$\psi \sim e^{2\pi i f t}$$

milles A on nendes mõlemates 1. Kuid vabaoleku osakese funktsioon on

$$\psi \sim e^{2\pi i k x}.$$

Kuna aga lainefunktsioon annab tõenäosuse, nimetatakse seda tihti ka tõenäosusamplituudiks. Lainefunktsiooni mooduli ruut annab tõenäosustiheduse. Lainefunktsiooniga on määratud vaadeldava osakese olek ja tema edaspidine käitumine. Statsionaarsete olekute lainefunktsioon on aga

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-i(\frac{E}{\hbar})t} \psi(x, y, z).$$

Sellisel juhul ei sõltu lainefunktsiooni tõenäosustihedus ajast:

$$\Psi \Psi^* = e^{-i(\frac{E}{\hbar})t} \psi e^{i(\frac{E}{\hbar})t} \psi^* = \Psi \Psi^*$$

Kompleksed suurused on lainefunktsioon ja selle ruut, kuid reaalarvuna võib väljenduda ainult tõenäosus.

Vastuolu tulevikus toimuvate sündmuste kindluses ja osakeste täpse käitumise ebakindluses tegelikult ei ole, kuna kvantmehaanika matemaatiliseks aluseks on operaatorid matemaatikast, kuid füüsikaliseks aluseks on teleportmehaanika. Kvantmehaanika peab järgima ka energia jäävuse



seadust. See tähendab seda, et energia jäävuse seadus ja põhjuse-tagajärje printsiip kehtivad isegi kvantmehaanikas sama kindlalt nagu klassikalises mehaanikas, hoolimata sellest, et nähtuste põhjustest ei saa me alati midagi kindlalt teada. „Põhjuste teadmatuse ei põhjusta veel tagajärgede olematust“ ja ajas rändamise kasutamine eksperimentides võimaldaks ilmselt juba täpseid ennustusi kvantmehaanikas ( kuid seda ilmselt teatud piirides ).

### 3.7 Universumi kinematograafiline efekt

Ajas rändamise füüsika vaatenurgast on ajalises mõttes kogu Universum korraga olemas, mis tähendab seda, et olemas on korraga kõik ajahetked, mille korral minevikku ega tulevikku enam ei eksisteeri. Selle järgi eksisteerib ainult oleviku ajavorm ehk aega enam ei ole. Sellisele huvitavale seaduspärasusele leiame üsna täpse vaste „kinematograafiast“.

Näiteks film on kui liikuv pilt, kuid liikuva pildi saavutamiseks on vaja teha rida erinevaid pilte, mis oleksid ülesvõetud erinevatel ajahetkedel. Kõik need erinevad pildid kuvatakse tehniliselt ühele suurele kinoekraanile üksteise järel nii et üks pilt eksisteerib ekraanil umbes 1/24 sekundit. Niimoodi luuaksegi film ehk liikuv pilt. Filmirulli „ruumalas“, mis koosneb nendest rida erinevatest piltidest, ongi „ajalises mõttes“ kogu film ühekorraga olemas. Minevik ja tulevik eksisteerivad seal nagu „kõrvuti koos“. Selles seisnebki Universumi kinematograafilise efekti füüsikaline olemus ja põhisisu. Kogu Universum on ajalises mõttes ehk ajatu dimensioonis ühekorraga olemas täpselt nii nagu film filmirullis.

Universumi kinematograafilist efekti tõestaks inimese reaalne ajas rändamine. Ajas minevikku või tulevikku on võimalik liikuda täpselt nii nagu liikumine toimuks kõrvaltänavasse või nagu filmi kerimine edasi või tagasi. Teisuguses ajas eksisteerivad ammu hävinud hooned või sündimata lapsed. Niisamuti ka filmi kerimine lõpust algusesse võimaldab näha seal vahepeal ära surnuid tegelasi. See viitab väga tugevalt asjaolule, et mitte kunagi mitte miski Universumis tegelikult ei kao ega hävi. Näiteks 16 aastat tagasi õnnetusse surnud inimese võiks praegusesse aega elama tuua just ajas rändamise teel.

Inimese jaoks eksisteerib aeg mineviku, oleviku ja tuleviku vormis. Kui aga liikuda reaalselt ajas minevikku ja tulevikku, siis ajavormid nagu minevik ja tulevik „kaovad“ ning esile tuleb ainult oleviku ajavorm. Näiteks minevikus asetleidnud sündmused ei toimu ajaränduri jaoks enam minevikus, kuna ta on ise liikunud ajas minevikku. Seetõttu kehtib temale sellisel juhul ainult oleviku ajavorm ja selles mõttes on Universum ise tegelikult „ajatu“. See tähendab seda, et aega Universumis tegelikult ei eksisteeri.

Igasugune liikumine Universumis on seotud ajaga, täpsemalt öeldes ajavormidega nagu näiteks minevik, olevik ja tulevik. Näiteks keha liikumise kiiruse kirjeldamiseks kasutatakse füüsikas alghetke, hetkkiiruse ja lõppkiiruse definitsioone. Kui aga Universum on oma olemuselt tegelikult ajatu, mis tähendab seda, et eksisteerib tegelikult ainult oleviku ajavorm, siis kõikvõimalikke erinevaid liikumisnähtuseid ei saa Universumis tegelikult reaalselt olemas olla. Universumis nähtav liikumine peab olema illusioon, kuna ajas rändamise füüsika järgi eksisteerib Universum ainult oleviku ajavormina ehk aega tegelikult pole olemas ja seetõttu minevikku ega tulevikku tegelikult ei

eksisteeri. Universumis nähtavad igapäevased sündmused ja protsessid ei saa olla tegelikult liikumises. Kogu meie teadaolev Universum on hyperruumi füüsika „vaatenurgast“ tegelikult „paigal olekus“. Nähtav liikumine Universumis on ainult näiline ehk illusioon, kuna aja ( ja koos sellega ka ruumi ) näiline olemasolu Universumis loovadki kõige liikumise illusiooni.

Liikumise illusioon tekib filmis siis kui iga pilt filmirullist ekraniseerub teatud ajaperioodi. See tähendab, et iga pilt eksisteerib eksraanil lühikest aega ( tavaliselt 1/24 sekundit ) ja niimoodi järgemööda kõik pildid filmirullist algusest kuni lõpuni. Nii tekibki liikumise illusioon suurel kinoekraanil. Liikumist ise tegelikult ei ole olemas. See on illusioon, mis on tingitud sellest, et pildid ekraanil on ajas veidi erinevad.

Universumiga on tegelikult täpselt samasugused seaduspärasused. Kogu Universumi eksisteerimist tuleb vaadata hyperruumi füüsika suhtes, mitte meie igapäevaselt kogetava ruumi suhtes, milles eksisteeribki kogu meie „illusionaarne maailm“. Hyperruumi erinevad ruumipunktid ( joonis 1 järgi mööda x-telge ) on erinevates ajahetkedes, mis loobki kõige liikumise illusiooni Universumis. Selline seaduspärasus viitab sellele, et Universumis nähtavat liikumist tegelikult ei eksisteeri. Liikumise illusiooni põhjustab lihtsalt „aja mõõtmise ( ja koos sellega seotult ka ruumi ) olemasolu“. Selle kõige mõistmiseks on olemas täpne vaste filmis tekkiva liikumise illusiooniga, mille korral kuvatakse filmirullist kinoekraanile erinevates ajahetkedes erinevad pildid. Niimoodi tekib liikumise illusioon kinoekraanil.

### 3.8 Universumi füüsikaline olemus

Aine ja väli on Universumi materia põhivormideks, kuid aeg ja ruum on materia eksisteerimise põhivormideks. Sellest tulenevalt ei ole aja mõõtmise ( ja koos sellega seotult ka ruumi ) mitte-olemasolu korral olemas ka materiat. Sellisel juhul ei saa olemas olla ka kogu Universumit, kuna selle põhilisteks eksisteerimise vormideks ongi aeg, ruum ja materia. See tähendab seda, et meie nähtava Universumi olemasolu peab olema erakordselt veenev illusioon. Sellest arusaamine seisneb selles, et kui Universumis eksisteeriv nähtav liikumine on illusioon ( mida näitab Universumi kinematograafiline efekt ), siis seda peab olema ka aegruumiga ja sellest lähtuvalt ka kogu Universumi materia. Universumi reaalsus ehk selle tõeline füüsikaline olemus seisnebki selles, et Universumit ei ole tegelikult olemas ehk kõige eksisteerimine on erakordselt veenev illusioon.

Näiliselt sama absurdne väide oleks ka see, et maailm ei ole tegelikult värviline. Kuid sellist väidet on tavainimesel palju lihtsam aktsepteerida, kuna erinevaid värvusi tajub inimese aju erinevate lainepikkustena. Valgus on ju elektromagnetlaineline ja samas ka osakeste ehk footonite voog. Kuid Universumi tõeline füüsikaline olemus tuleneb otseselt sellest, et ajas rändamise füüsika näitab kogu meie Universumit hoopis uuest vaatenurgast.

Näiteks mustkunstniku trikid loovad samuti erinevaid illusioone. Kui vaadata mustkunstniku sooritusi ühest kindlast vaatenurgast, siis tunduvad need palju maagilisemad mõnest teisest vaatenurgast. Teadmatus loobki mustkunstniku triki maagiliseks, kuna maagilise triki toimemehhanismidest teada saamine kaotab trikk oma maagilisuse sära. Seepärast ongi mustkunstniku trikid „illusionaarsed“.

Universumi eksisteerimine on samuti illusioon, kuna see on tegelikult teistsugune, kui see meile paistab. Reaalsus seisneb selles, et Universumit ei ole tegelikult olemas ja see ongi Universumi sügavaim olemus. Seda lihtsalt ei ole olemas ehk „olematus“ ongi tegelikult kogu meie tuntav maailm. Seepärast ongi Universum tegelikult tekkimatu ja ka hävimatu, kuna „olematus“ ei saa ju kaduda ega tekkida täpselt nii nagu energiagi. Sellest tulenevalt ei muutu Universum ka mitte kunagi, mis tähendab seda, et see on oma põhiolemuselt kogu aeg tegelikult ühesugune.

### 3.9 Ajaparadoksid

Kõige tuntum ajaparadoks on seotud „vanaema/vanaisa paradoksiga“, mis seisneb lühidalt järgnevas. Inimene leiutab ajamasina ja rändab ajas minevikku. Mis juhtub ajaränduri endaga, kui ta näiteks tapab ära oma enda vanaema? Kuna põhjus eelneb alati tagajärjele, siis ei saaks sellisel juhul ajarändurit enam olemas olla ja ka ajamasinat ei saaks olla leiutatud. Selles seisnebki maailma kuulsaima ajaparadoksi mõistatus, mida peetakse ühtlasi ka klassikaliseks ajaparadoksiks.

Kuid on olemas veel üks ajaparadoksi liik, mis on palju vähem tuntud kui viimane kuulus vanaema paradoks. See seisneb lühidalt järgnevas. Üks suvaline poiss saab ühel heal päeval telefonikõne tundmatult, milles antakse talle teada seda, et kuidas luua ajamasinat. Pärast seda telefonikõnet leiutabki poiss ajamasina. Selgub, et telefonis andis informatsiooni tegelikult sama isik ehk tema ise, kuid tulevikust. Sellise ajaparadoksi korral me teame seda, et kuidas poiss sai teada ajamasina loomisest. Kuid sellegipoolest tekib küsimus, et kuidas sai ajamasina loomisest teada see, kes poisile parajasti helistas? Osutub, et mõlemal juhul saab poiss teada ajamasinast telefonikõne kaudu. Kuidas on selline asi võimalik? Kus on selles loos ots ja algus? Selles seisnebki taolise ajaparadoksi mõistatus. Paraku peab mainima, et sellist kirjeldatud ajaparadoksi liiki tegelikkuses ei eksisteeri. See on lihtsalt inimese mõistuse filosoofiline väljamõeldis, mis on laialt kirjeldatud ajarännuga seonduvas kirjanduses, kuid tegelikkuses ei saa selline ajaparadoks kunagi realiseeruda.

Järgnevalt tutvume klassikalise ajaparadoksi võimalike lahendustega, mida on aja jooksul erinevate teadlaste poolt välja pakutud ja mis tunduvad olevat reaalsed ja kooskõlalised olemasolevate aja ja ruumi füüsikateooriatega:

1. Oletame seda, et inimene rändab ajas minevikku ja tapab ära näiteks oma enda vanaema. Mis juhtub siis ajaränduri enda eluga? Kui inimene rändab ajas tagasi, siis tema ümbritsev maailm muutub täpselt selliseks, milline oli see minevikus. Kuid ajas rändamisel minevikku inimene ise nooremaks ei muutu, millest on võimalik järeldada, et ajarännak ei mõjuta ajarändurit ennast. Sellisel juhul ei mõjuta ajarändurit ka vanaema tapmine minevikus.
2. Põhjuse ja tagajärje seosed kehtivad ainult siis kui eksisteerivad aeg ja ruum. See on füüsikateaduslik fakt. Kuid ajas rändamise „hetkel“ eksisteerib ajarändur ise „väljaspool aegruumi“. Hyperruumis ehk väljaspool aegruumi ei eksisteeri enam aega ega ruumi. Eksisteerides väljaspool aegruumi ei mõjuta aegruumis olevad mõjutused enam ajarändurit.

Näiteks kui auto kihutaks suure kiirusega vastu betoonseina, siis auto sees olev inimene saaks silmapilkselt surma. Kuid kui auto sees inimest parajasti ei oleks, mille korral jälgiks ta eemalt auto rammimist vastu betoonseina, siis sellisel juhul ei saa inimene ise surma. Sellisel juhul eksisteerib inimene väljaspool liikuvat autot. Analoogiliselt võib olla nii ka ajaränduriga. Näiteks kui inimene tapab minevikus oma vanaema, siis ajaränduri endaga ei juhtu tegelikult mitte midagi, kuna ajarändur eksisteeris vahepeal ( ajas rändamise „hetkel“ ) väljaspool aegruumi. Selle tagajärjel muutub lihtsalt tema ümbritsev maailm. Näiteks sellisel juhul ei tunneks tulevikku naastes ajarändurit enam mitte keegi ära ja riigi infosüsteemides ei oleks tema kohta mittemingisuguseid isikuandmeid ( isegi mitte sünnitunnistust ).

3. Kui inimene rändab ajas minevikku ja tapab ära oma enda vanaema, siis on võimalik ka selline versioon, et ei juhtugi midagi: ajarändur ja ka tema enda vanaema jäävad mõlemad ellu. Seletus sellele seisneb Universumi kinematograafilisel efektil, mille korral sarnaneb kogu Universumi füüsikaline eksisteerimine filmiga. Näiteks kinoekraanil näeme staatilisi pilte, mis ajas kiiresti järgnevad üksteisele. Film võib vaatajale jutustada mistahes lugu. Kui inimene tapabki minevikus oma enda vanaema, siis on võimalik, et pärast seda ei juhtu tegelikult mitte midagi. See võib otseselt tuleneda Universumi kinematograafilise efekti seaduspärasusest. Näiteks kui me filmist ühe kaadri välja lõikame ehk ühe pildi filmiribalt ära lõikame, siis teised kaadrid ehk pildid filmiribal jäävad ju sellegipoolest alles. Täpselt sama võib tegelikult olla ka vanaema paradoksi lahendusega, mille korral vanaema ja ka ajarändur ise tegelikult ära ei suregi, kui minevikus oma enda vanaema ära tappa.
4. Kui oma enda vanaema minevikus ära tappa ja mingisugusel tundmatul põhjusel siiski peaks ka ajarändur ära surema ( näiteks silmapilkselt haihtuma ), siis tekib selline küsimus, et kas energia jäävuse seadus sellisel korral ei kehtigi? Ajarändur ise on füüsikalises mõttes suur kogus energiat ja massi, mis enda vanaema ära tappes lihtsalt „õhku haihtub“. Energia ei saa ju kaduda ega tekkida vastavalt tuntud energia jäävuse seadusele. Sellisel juhul peab see energia muutuma lihtsalt millekski teiseks energiaks.

Siinkohal võiks märkida ka veel seda, et kui me saame ajas tagasi minna, siis mineviku muutmine ei pruugi muuta tulevikku. Näiteks kui rändad minevikku, siis sellest saab ajaränduri jaoks tulevik. See tähendab seda, et ajaränduri endisest olevikust saab minevik, mida ei saa uue tulevikuga muuta.

### 3.10 Kokkuvõtteks

Universaalmehaanika on ajas rändamise füüsikateooria järeldus Universumi füüsikalise eksisteerimise kohta. Seda võib mõista ka kui ajas rändamise füüsikateooria edasiarendusena. Senimaani kirjeldasid erinevad füüsikateooriad ja füüsikateaduse harud ainult teatud osa Universumi üldisest funktsioneerimisest, kuid Universumi üldist olemust kirjeldada ei ole suutnud siiani mitte ükski teaduslik füüsikateooria.

Järgnevalt näitamegi kindlas ideelises järjekorras seda, et kuidas Universumi füüsikaline reaalsus ehk põhiolemus ajas rändamise füüsikateadusest rangelt ja täpselt välja tuleb:

3. Kui kehade liikumiskiirused on väga väikesed võrreldes valguse kiirusega vaakumis ja nende massid on samuti väga väikesed võrreldes näiteks planeetide massidega, siis füüsikalised nähtused toimuvad meie igapäevaselt kogetavas aegruumis, mida ajas rändamise füüsikateoorias nimetatakse tavaruumiks  $K$ . Aeg ja ruum on sellisel juhul olemas ja nende füüsikalisi teisenemisi ei toimu. Kehtib klassikaline ehk Newtoni mehaanika.
4. Kui aga kehade liikumiskiirused lähenevad valguse kiirusele vaakumis või nende massid on juba väga suured, mis on võrreldavad juba planeetide massidega, siis toimuvad aja ja ruumi füüsikalised teisenemised. Aegruumi teisenemine tähendab selle eksisteerimise lakkamist. Sellisel juhul toimuvad füüsikaliste kehade „siirdumised“ aegruumist väljapoole, mis füüsikalistes mudelites väljendub kehade liikumisena tavaruumist  $K$  hyperruumi  $K'$ . Seda tõestab meile ajas rändamise füüsikateooria, millel baseerub omakorda 20. sajandil loodud kaks füüsika alusteooriat: relatiivsusteooria ja kvantmehaanika.
5. Ajas rändamise füüsikateooria järgi on väljaspool aegruumi ehk hyperruumis  $K'$  võimalik teleportreeruda ajas ja ruumis. Näiteks tõestatakse, et mikromaailma osakesed teleportreeruvad ajas ja ruumis ja seetõttu esinevadki osakestel lainelised omadused, mis on aluseks kogu tänapäeva kvantfüüsika õpetusele.
6. Füüsikaliste kehade reaalne ajas rändamise võimalus näitab selgelt seda, et aega ( ja seega ilmselt ka ruumi ) ei saa Universumis tegelikult eksisteerida. Näiteks Universumis ei ole aega tegelikult olemas, kuna selles saab liikuda minevikku ja tulevikku.
7. Eelmisest punktist järeldub omakorda, et Universumis ei saa eksisteerida ka „liikumist“, kuna aega tegelikult ei eksisteeri. See tähendab seda, et aja dimensiooni illusionaarne eksisteerimine loobki liikumise illusiooni Universumis, mis ühtib täpselt filmi tekkimise olemusega kinematograafias. Seda nimetatakse „Universumi kinematograafiliseks efektiks“. Üks illusioon loob teise illusiooni.

Universumil on aja-dimensioonis algus ja lõpp ehk sünni- ja surmamoment, kuid ajatu-dimensioonis ei ole Universumil sünni- ega surmamomenti.

8. Universumi kinematograafilise efekti järgi ei ole aega ( ilmselt ka ruumi ) ja liikumist reaalselt olemas. Nende eksisteerimine on ainult „näiline“ ehk illusioon. Veelgi üldisemalt võib väljendada, et kogu Universumit pole tegelikult reaalselt olemas. See tähendab seda, et kõige nähtava eksisteerimine Universumis on erakordselt veenev illusioon. Universum on kui „virtuaalne“: reaalselt pole Universumit olemas, kuid illusionaarselt on Universum olemas.
9. Kuna Universumit ei ole „reaalselt“ olemas, siis see on oma põhiolemuselt tekkimatu, muutumatu ja ka hävimatu. Seda, mida pole olemas, ei saa ju tekkida ega kaduda.

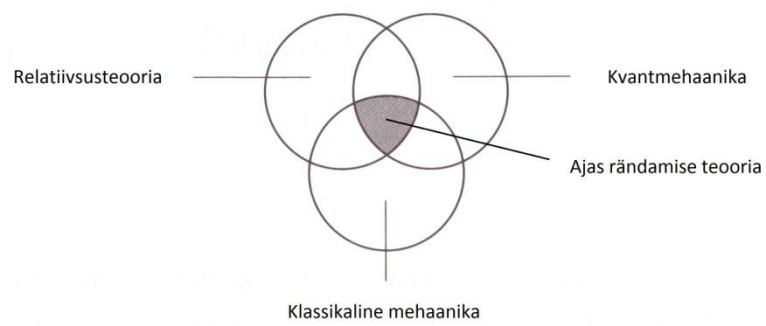
Põhimõtteliselt võib väita, et aeg “loobki” kogu meie teadaoleva maailma. Näiteks kui 3D-printer prindib välja kolmemõõtmelise kuju, siis aja-dimensioon loob ( “trükitab välja” ) kogu meie teadaoleva Universumi ( minevikust tulevikku kulgemisega ). Ajatu Universumis ilmneb Universumi eksisteerimise lakkamine, kuid ajalises Universumis ilmneb Universumi näiline eksisteerimine. Seni oli arvatud, et Suur Pauk “lõi” kogu meie Universumi või et kogu Universum “sai alguse” just Suurest Paugust, kuid tegelikult näitab ajatu Universumi füüsika meile seda, et Universum ei saanud alguse Suurest Paugust ehk ühest ainsast kosmoloogilisest ajahetkest, vaid Universumi “loomine” toimub tegelikult kogu aeg. See tähendab, et maailma „loomine“ toimub

pidevalt, mis väljendubki minevikust tulevikku kulgemisega.

Termodünaamika teine seadus ütleb meile, et kõik looduslikud protsessid kulgevad nende olekute tõenäosuse kasvamise suunas. Seega seisneb entroopia mõiste suurima tõenäosusega oleku saavutamises, mille määrab ära aja kulgemine minevikust tulevikku ehk “ajanool”. See tähendab, et aeg on “asümmeetriline”. Kuna ajalise sümmeetria rikkumine toimub mõningates mikroosakeste vahel toimuvates nõrga jõu protsessides, siis seega järeldatakse sellest, et entroopia kasvu seadus võib olla tingitud “aja suunatusest”. Entroopia kasvamise seadus on kosmoloogilise päritoluga ja see määrab ära protsesside kulgemise suuna kogu Universumis.

## Tulemused

Antud töö üldine tulemus on jahmatav. Seni on kõik arvanud, et ajamasinat on väga raskesti teostatav või seda on koguni võimatu luua. Kuid tegelikult on kõik absoluutselt vastupidi. Nüüdis-aegne füüsika defineerib aega kui kestvust. Relatiivsusteoorias kulgeb aeg aeglasemalt kehade liikumiskiiruste kasvamisel või suurte masside vahetus läheduses. Ajas ongi võimalik liikuda AINULT siis kui aega ( s.t. kestvust ) ei ole ehk väljaspool aega. See tundub näiliselt võimatusena, kuid Universumis on olemas selliseid aegruumi piirkondi, kus aeg kulgeb lõpmata kaua ehk aeg on jäänud seisma ehk aega enam ei eksisteeri. Sellised aegruumi piirkonnad eksisteerivad kõikide mustade aukude tsentrites ja see on füüsikaline fakt. Just seal osutubki võimalikuks ajas rändamine oma täielikus reaalsuses. Seda näitavad antud töös tuletatud teooriad ja need on täielikult kooskõlas ka üldtunnustatud füüsikateooriatega ning on omakorda nende täienditeks. Rohkem täiendusi esineb just kvantmehaanikas. Antud töös kirjeldatud ajas rändamise teooria on võimaline ühendama omavahel kvantmehaanikat ja relatiivsusteooriat. See on võimalik kahel põhjusel. Üldrelatiivsusteooria ise kirjeldab ajas rännakut oma kõverate aegruumide geomeetriaga, kuid ajas liikumine on samas ka teleportatsiooniline nähtus. Seda sellepärast, et ajas liikumine ise aega ei võta. Kõik protsessid, mis eksisteerivad väljaspool aega, ei võta enam aega ja seepärast on näiteks kehad võimelised teleportreeruma ajas või ruumis. Seda on selgesti näha ka kvantmehaanikas. Näiteks osakeste kvantpõimumine on võimalik ainult siis, kui aega enam ei eksisteeri. Osakesed teleportreeruvad meie tajutavas aegruumis ja sellest tulenevad ka nende määramatuse relatsioonid. Seetõttu osutub kvantmehaanika tegelikult „teleportmehaanika“ üheks osaks. Matemaatiliselt on võimalik teleportatsiooni kirjeldada üldrelatiivsusteoorias kasutatava meetrikaga: näiteks kahe punkti vaheline kaugus väheneb ruumis lõpmata väikeseks ( näiteks mustade aukude tsentrites ) ja see tähendab samas ka kaugete asukohtade lähemale toomist, kuhu on siis võimalik vaid mõne hetkega kohale jõuda. Sellest on võimalik välja arvutada teleportatsiooni füüsikalisi parameetreid.



*Joonis 46 Aja ja ruumi füüsikateooriad.*

## KASUTATUD KIRJANDUS

- 1) **Ainsaar, Ain.** 2001. Füüsika XII klassile. Tallinn: kirjastus „Koolibri“.
- 2) **Keskinen R. ja Oja H.** 1983. Musta auku otsimas. Kirjastus „Valgus“.
- 3) **Koppel, Aare.** 1975. Üldrelatiivsusteooria alused. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- 4) **Loide, Rein-Karl.** 2007. Sissejuhatus kvantmehaanikasse. AS BIT: kirjastus „Avita“.
- 5) **Lorents, Peeter.** 1998. Sissejuhatus füüsikasse. Tallinn: Sisekaitseakadeemia.
- 6) **Mankin, Romi; Laas, Tõnu; Räim, Liis.** Kosmoloogia I lühikonspekt.  
<http://www.tlu.ee/~tony/oppetoo/kosmoloogia/> ( 01. 01. 2012 ).
- 7) Matemaatiline ussiauk. <http://www.youtube.com/watch?v=l3ZUW0LYUD0> ( 05.05.2012 ).
- 8) **Saveljev, I.** 1978. Füüsika üldkursus I. Tallinn: kirjastus „Valgus“.
- 9) **Silde, O.** 1974. Relatiivsusteooria põhiküsimusi geomeetria valguses. Tallinn: kirjastus „Valgus“.
- 10) **Uder, Ülo.** 1997. Füüsika I Loengukonspekt. 2. tr. Tallinn.
- 11) **Ugaste, Ülo.** 2001. Füüsika gümnaasiumile I. 2. tr. AS BIT: kirjastus „Avita“.
- 12) **Õiglane, Harry.** 1995. Füüsika X klassile. Tallinn: kirjastus „Koolibri“.
- 13) **Järv, Laur.** 1996. Kvantteooria unitaarsuse probleem akronaalsete piirkondadega aegruumis. Tartu.
- 14) „Mõistatuslike nähtuste entsüklopeedia” ( „Encyclopedia of the unexplained” ), Peter Hough ja Jenny Randlers, kirjastus: Sinisukk, Tallinn 1998, ISBN: 9985730380.
- 15) „Ajabarjääri ületamine, võidujooks esimese ajamasina ehitamiseks“, Jenny Randles, Olion, Tallinn 2006, tõlkinud Jaan Kabin.
- 16) „Elementaarosakeste füüsika standardmudel“, Ain Ainsaar, Tallinna Pedagoogikaülikool, Teoreetilise füüsika õppetool, TPÜ Kirjastus, Tallinn 1998.



